arXiv:2304.11231v1 [math.DS] 21 Apr 2023

沿内部射线从双曲参数到抛物参数

Yi-Chiuan Chen 和 Tomoki Kawahira

2023年4月25日

摘要

对于二次族 $f_c(z) = z^2 + c$，其中 c 位于曼德布洛特集的一个双曲分支内，已知朱利亚集中的每个点都会全纯地移动。本文给出这种运动的统一导数估计，其中参数 c 径向地趋近于抛物参数 $\hat{c}$；换言之，它始终与落在 $\hat{c}$ 上的内部射线保持有界的庞加莱距离。我们还证明，朱利亚集上每个点的运动在 $\hat{c}$ 处均一致地满足单侧 Hölder 连续性，其指数仅取决于花瓣数。

本文是作者论文《沿外射线从康托尔集到半双曲参数》（美国数学会汇刊 **372** （2019），第7959–7992页）的抛物对应版本。

目录

1 引言与主要结果 2 2 径向可达条件与 S-循环 7 3 在假设三个引理成立的情况下证明主定理 14 4 后临界集与双曲度量 16 5 在假设引理 G 和 H 成立的情况下证明引理 A 18 6 引理 B 的证明 22 7 命题 2.2 和命题 2.3 的证明 22 8 引理 G 的证明 24 9 命题 2.4 的证明 27 10引理 H 的证明 30 11引理 D 的证明 39 12引理 C 的证明 41 13 定理 1.2 和定理 1.3 的证明 42

2010年数学学科分类。主分类37F45；次分类37F99。

1 引言与主要结果

双曲分支。令 $\mathbb{M}$ 为曼德布洛特集，即二次族的连通性轨迹

$$\{f_c : z \mapsto z^2 + c\}_{c \in \mathbb{C}}.$$

也就是说，朱利亚集 $J(f_c)$ 连通，当且仅当 $c \in \mathbb{M}$。参数 $c \in \mathbb{M}$称为双曲的，如果 f_c 有一个（超）吸引周期点。等价地，存在正数 γ_c 和 ε_c，使得对于任意 $n \geq 0$ 和$z \in J(f_c)$，$|Df_c^n(z)| \geq \gamma_c(1+\varepsilon_c)^n$。$\mathbb{M}$ 中的双曲参数集合是一个开集，其连通分支称为曼德布洛特集的双曲分支。（$\mathbb{M}$ 的补集也称为一个双曲分支，但本文只考虑包含在曼德布洛特集中的那些分支。）

设 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘，$\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{M}$的一个双曲分支。Sullivan 和 Douady-Hubbard（见 [DH，第′章 XIV 和 XIX]，以及 [Mi，定理 6.5]）给出了 $\mathbb{X}$ 的单值化，即一个典范同胚 $\Phi = \Phi_{\mathbb{X}} : \mathbb{D} \to \mathbb{X}$，使得$\Phi|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to \mathbb{X}$是一个共形同构；并且对于任意满足 $\mu \in \mathbb{D} - \{1\}$ 的 $c = \Phi(\mu)$，映射 f_c 都有一个乘子为 μ、周期相同的周期点。$\mathbb{X}$ 中的参数$\Phi(0)$和 $\Phi(1)$分别称为 $\mathbb{X}$ 的中心和根。注意，$\mathbb{X}$ 中的庞加莱′距离，是通过同构 Φ将 $\mathbb{D}$ 上的庞加莱′（双曲）度量$|dz|/(1-|z|^2)$拉回而定义的。

内部射线和厚内部射线。对于给定的双曲分支 $\mathbb{X}$ 和给定的实数 θ，我们将角度为 θ 的内部射线 $I(\theta)$定义为

$$I(\theta) = I_{\mathbb{X}}(\theta) := \{\Phi(re^{2\pi i\theta}) \in \mathbb{X} : 0 \leq r < 1\}.$$

点

$$\hat{c} := \Phi(e^{2\pi i\theta}) \in \partial\mathbb{X}$$

称为 $I(\theta)$ 的着陆点。对于给定的 $\delta \geq 0$，我们将角度为 θ 的 δ-厚内部射线 $\mathcal{I}(\theta, \delta)$定义为在 $\mathbb{X}$ 中相对于 Poincar′e 距离的、以 $I(\theta)$ 为中心的闭 δ-邻域。如果存在一个 $\delta \geq 0$，使得参数 c 在趋于 $\hat{c}$ 的过程中始终处于 δ-厚内部射线 $\mathcal{I}(\theta, \delta)$内，我们就称该参数沿厚内部射线趋于$\hat{c}$。通常也会说，这样的 c 径向地收敛到 $\hat{c}$（参见 McMullen [Mc2]），或者非切向地收敛。事实上，对于任意角度 $A_0 \in [0, \pi/2)$，如果 c 始终处于 $\delta(A_0)$-厚内部射线内，且

$$\delta(A_0) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\tan(A_0/2)}{1-\tan(A_0/2)} \in [0, \infty), \tag{1.1}$$

然后令 $\mu_c := \Phi^{-1}(c)$ 和 $\hat{\mu} := \Phi^{-1}(\hat{c})$，我们得到

$$\left|\arg\left(1 - \frac{\mu_c}{\hat{\mu}}\right)\right| \leq A_0$$

当 c 充分接近 $\hat{c}$ 时。换言之，μ_c 始终位于 $\hat{\mu} \in \partial\mathbb{D}$ 处开口角为 $2A_0$ 的 Stolz 角内。（参见 [P，第7页]，以及下一节中的图 4。）

双曲朱利亚集的全纯运动。 众所周知，在任意一个 $\mathbb{M}$ 的双曲分支 $\mathbb{X}$ 上，朱利亚集存在一种全纯运动（[BR、L、Mc1、MSS]）。事实上，我们有如下等变全纯运动。对于任意基点 $\sigma \in \mathbb{X}$，存在唯一的映射 $H\colon \mathbb{X} \times J(f_\sigma) \to \mathbb{C}$，使得

(1) $H(\sigma,\ z) = z$ 对任意 $z \in J(f_\sigma)$。

(2) 对任意 $c \in \mathbb{X}$，映射 $z \mapsto H(c,\ z)$ 在 $J(f_\sigma)$ 上是单射的。

(3) 对任意 $z \in J(f_\sigma)$，映射 $c \mapsto H(c,\ z)$ 在 $\mathbb{X}$ 上是全纯的。

(4) 对任意 $c \in \mathbb{X}$，映射 $h_c(z) := H(c,\ z)$ 满足 $h_c(J(f_\sigma)) = J(f_c)$，并且 $f_c \circ h_c = h_c \circ f_\sigma$ 在 $J(f_\sigma)$ 上。

更多细节请参见 [Mc1，第 §4] 节。本文选取 $\mathbb{X}$ 的中心 $\sigma := \Phi(0)$ 作为该运动的基点。我们关注当 $c \in \mathbb{X}$ 沿一条厚内部射线趋近某个 $\hat{c} \in \partial\mathbb{X}$ 时，这种朱利亚集 $J(f_\sigma)$ 的等变全纯运动的边界行为。

抛物参数。现在假设内部射线 $I(\theta)$ 的角度 θ 是一个有理数。那么，对于 $I(\theta)$ 的着陆点 $\hat{c}$，$f_{\hat{c}}$ 具有一个抛物周期点，即乘子为单位根的周期点。我们称这样的参数 $\hat{c}$ 为抛物参数。如果 $f_{\hat{c}}$ 的抛物周期点 b 具有 q 个花瓣，则意味着在适当的局部 $\hat{c}$ 坐标中，b 附近的局部动力学 $f_{\hat{c}}^k$ 具有某个 k 所对应的形式 $\zeta \mapsto \zeta + \zeta^{q+1} + O(\zeta^{q+2})$。在我们的研究情形中，已知当且仅当 b 的乘子 $\hat{c}$ 是一个本原 q 次单位根时，b 才具有 q 个花瓣（因为 $f_{\hat{c}}$ 是二次的，并且在 $\mathbb{C}$ 中只有一个临界点）。

例 1（周期一，主心形）。 对于包含 0 的双曲分支 $\mathbb{X}_1$（主心形），映射 $\Phi = \Phi_{\mathbb{X}_1}$ 由 $\Phi(\mu) := -\mu^2/4 + \mu/2$ $(\mu \in \mathbb{D})$ 显式给出，而 $f_{\Phi(\mu)}$ 有一个乘子为 μ 的不动点。角度为 θ 的内部射线由 $I_{\mathbb{X}_1}(\theta) = \left\{-r^2 e^{4\pi\theta i}/4 + r e^{2\pi\theta i}/2 \colon\ 0 \le r < 1\right\}.$ 给出。在图1中，$I_{\mathbb{X}_1}(\theta)$ 对于 $\theta = 0,\ 1/2$ 和 $1/3$ 分别描绘为路径 (a)、(b) 和 (c)。沿着 $I_{\mathbb{X}_1}(0)$ 和 $I_{\mathbb{X}_1}(1/2)$ 的相应全纯运动展示于图2以及图3(a)和图3(b)中。沿着 $I_{\mathbb{X}_1}(1/3)$ 的运动展示于图3(c)中。

例2（周期二）。 类似地，包含 -1 的双曲分支 $\mathbb{X}_2$ 由满足以下条件的双曲参数 c 组成：f_c 具有一个周期为二的吸引周期轨道。映射 $\Phi = \Phi_{\mathbb{X}_2}$ 由 $\Phi(\mu) := \mu/4 - 1$ 显式给出，其中 $\mu \in \mathbb{D}$，且 $f_{\Phi(\mu)}$ 与$\mu \in \mathbb{D} - \{1\}$ 具有一个乘子为 μ 的二周期点。角度为 θ 的内部射线由 $I_{\mathbb{X}_2}(\theta) = \left\{r e^{2\pi\theta i}/4 - 1 \colon\ 0 \le r < 1\right\}.$ 给出。在图1中，$I_{\mathbb{X}_2}(\theta)$ 对应 $\theta = 0,$ 而 $1/3$ 分别描绘为路径 (d) 和 (e)。内部射线 $I_{\mathbb{X}_2}(0)$ 着陆于 $\mathbb{X}_2$ 的根 $\hat{c} = \Phi(1) = -3/4$，在此处，映射 $f_{\hat{c}}$ 有一个乘子为 -1 且具有两个花瓣的抛物不动点。注意，$\hat{c}$ 是 $\mathbb{X}_1$ 的另一条内部射线 $I_{\mathbb{X}_1}(1/2)$ 的着陆点。沿着 $I_{\mathbb{X}_2}(0)$ 和 $I_{\mathbb{X}_2}(1/3)$ 的运动见图3(d)和图3(e)。

例3（周期三）。有一个双曲分支 $\mathbb{X}_3$ 与主心形 $\mathbb{X}_1$ 相连，它由满足 $\operatorname{Im} c > 0$ 且 f_c 具有一个吸引的

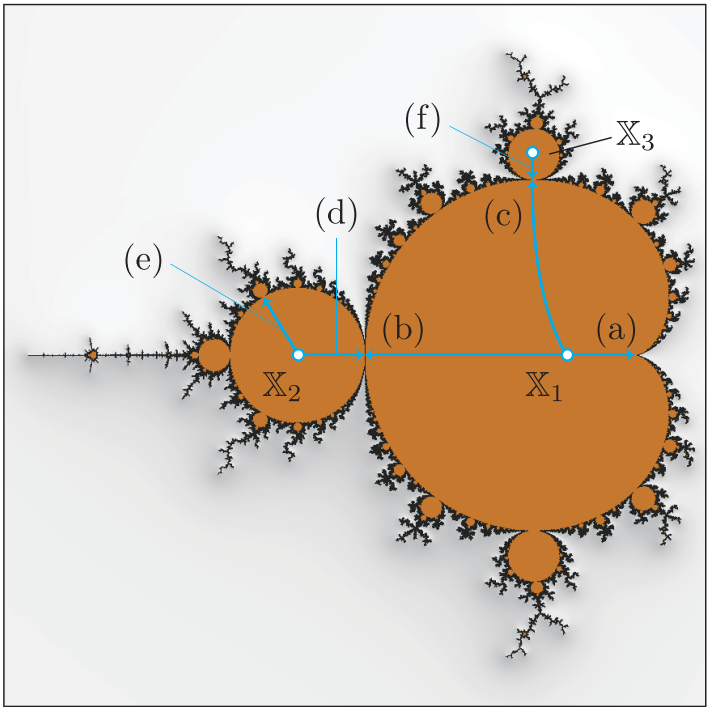


图1：曼德布洛特集的内部射线 (a) – (f)。

周期三周期轨道的参数 $I_{\mathbb{X}_1}$ 构成。内部射线 $I_{\mathbb{X}_3}(0)$（在图1中描绘为路径 (f)）连接中心（所谓的“兔子”）与根 $\hat{}c = \Phi(1)$（“胖兔子”），此处映射 $f_{\hat{c}}$ 有一个乘子为 $e^{2\pi i/3}$ 且具有三个花瓣的抛物不动点。（参见图3(f)，其中展示了沿 $I_{\mathbb{X}_3}(0)$ 的全纯运动。）同样，$\hat{}c$ 是 $\mathbb{X}_1$ 的另一条内部射线 $I_{\mathbb{X}_1}(1/3)$ 的着陆点。

主要结果。设 $\mathbb{X}$ 是曼德布洛特集中的一个双曲分支，σ 是其中心。对于任意 z_* 属于 $J(f_\sigma)$ 的情形，映射 $c \mapsto z(c) := H(c, z_*)$ 在 $\mathbb{X}$ 上全纯。设 $\hat{}c \in \partial\mathbb{X}$ 为有理角度 θ 的内部射线 $I_{\mathbb{X}}(\theta)$ 的着陆点。我们的主定理指出，当 c 沿一条厚内部射线趋近于 $\hat{}c$ 时，$z(c) = H(c, z_*)$ 的速度一致地受一个仅依赖于 $|c - \hat{}c|$ 的函数所界：

定理1.1 (主定理)。假设 $f_{\hat{c}}$ 有一个含 q 个花瓣的抛物周期点，且 c 沿 $\mathbb{X}$ 中的厚内部射线 $\mathcal{I}(\theta, \delta)$ 趋近于 $\hat{}c$。那么存在一个仅依赖于 $\hat{}c$ 和 δ 的常数 $K > 0$，使得对于任意 $z = z(c) \in J(f_c)$，点 $z(c)$ 全纯地移动，且

$$\left|\frac{d}{dc} z(c)\right| \le \frac{K}{|c - \hat{c}|^{1-1/Q}},$$

其中 $Q =$ 最大$\{2, q\}$。

由此定理，我们得到沿着落在抛物参数上的厚内部射线的全纯运动具有单侧 H¨older 连续性：

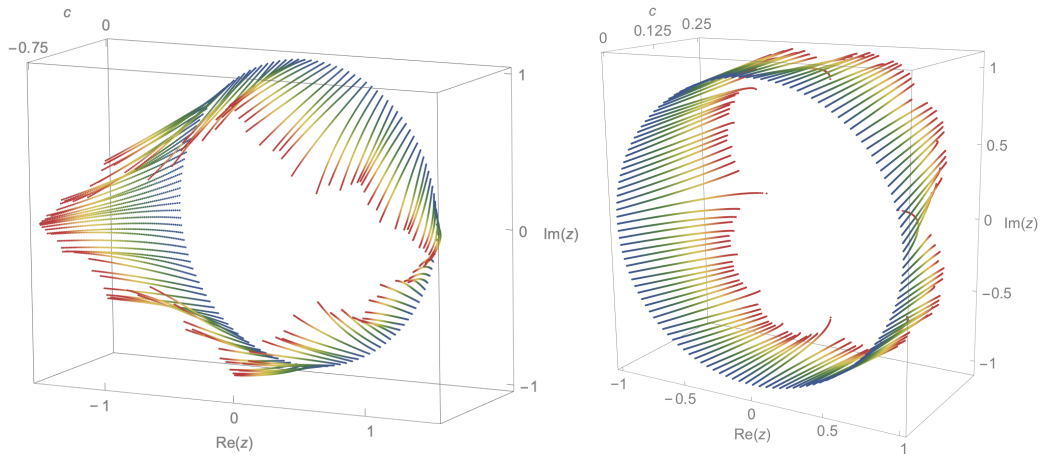


图2：在 $\mathbb{X}_1$ 中，排斥不动点的原像沿内部射线 $I(1/2)$（左）和 $I(0)$（右）的实解析运动。

定理 1.2 (单侧H¨older连续性)。 在与上述定理*1.1*相同的假设下，当$\hat{}c$沿厚内部射线 $\mathcal{I}(\theta,\delta)$趋近于$\hat{}c$时，点 $z = z(c)$ 在 $J(f_c)$ 中的极限为 $z(\hat{}c)$ 在 $J(f_{\hat{c}})$ 中的极限。此外，存在一个常数 K'，它仅依赖于$\hat{}c$ 和 δ，使得

$$|z(c) - z(\hat{c})| \le K' |c - \hat{c}|^{1/Q} \tag{1.2}$$

对于任意属于 $\mathcal{I}(\theta,\delta)$的 c，
均成立。

因此，当 c 沿内部射线 $I(\theta) = \mathcal{I}(\theta,0)$ 移动时，每个点 $z(c) \in J(f_c)$ 的全纯运动都能延拓到射线端点。该定理精确描述了沿有理角度的内部射线，朱利亚集上的动力学如何退化：

定理 1.3 (挤压半共轭)。 在与上述定理相同的假设下，共轭 $H(c,\cdot) = h_c\colon J(f_\sigma) \to J(f_c)$ 沿厚内部射线$I(\theta,\delta)$趋近$\hat{}c$ 时，一致收敛到一个从 f_σ 到 $f_{\hat{c}}$ 的半共轭 $h_{\hat{c}}\colon J(f_\sigma) \to J(f_{\hat{c}})$。此外，$h_{\hat{c}}$ 满足以下条件：

(1) 如果$\hat{}c$ 是 $\mathbb{X}$的根，那么 $h_{\hat{c}}$ 是单射的，因而是共轭。

(2) 如果$\hat{}c$ 不是 $\mathbb{X}$ 的根（因此 $q \ge 2$），那么任意 $w \in J(f_{\hat{c}})$的原像 $h^{-1}{}_{\hat{c}}(\{w\})$ 由一个或 q 个不同的点组成；当且仅当 w 最终落在 $f_{\hat{c}}$的一个抛物周期点上时，后者成立。

(3) 半共轭 $\eta_c := h_{\hat{c}} \circ h_c^{-1}\colon J(f_c) \to J(f_{\hat{c}})$ 满足

$$|\eta_c(z) - z| \le K' |c - \hat{c}|^{1/Q} \tag{1.3}$$

对于厚内部射线 $\mathcal{I}(\theta,\ \delta)$中的任意 c。

由该定理的 (3) 式可得：

推论 1.4（豪斯多夫收敛）。 $J(f_c)$ 与 $J(f_{\hat{c}})$ 之间的豪斯多夫距离为 $O(|c-\hat{c}|^{1/Q})$，当 c 沿着厚内部射线趋近于 $\hat{c}$ 时成立。

注释 1.5。

- 这些结果是作者在 [CK1] 中关于落在曼德博集合半双曲参数上的参数射线（外射线）结果的抛物对应版本。

- 对于任意 $c \in \mathbb{X}$ 和 $z = z(c) \in J(f_c)$，我们都有

$$\left|\frac{d}{dc} z(c)\right| \leq \frac{1+\sqrt{1+6\,|c|}}{\operatorname{dist}(c, \partial\mathbb{X})} \tag{1.4}$$

  根据 [CK1]中的命题3.1。然而，这只能得到

$$\left|\frac{d}{dc} z(c)\right| = O\left(\frac{1}{|c-\hat{c}|}\right)$$

  当 c 趋近于 $\hat{c}$ 时。

- 在 [CK2], 中，作者证明了，对于任意 $c \in [0, 1/4) = I_{\mathbb{X}_1}(0)$ 和 $z = z(c) \in J(f_c)$，我们都有一个最优估计。

$$\left|\frac{d}{dc} z(c)\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{1/4-c}}.$$

  In p特别地， $J(f_c)$ 与 $J(f_{1/4})$ 之间的豪斯多夫距离恰为 $\sqrt{1/4-c}$。

- 定理 1.3 中半共轭的存在性以及推论 1.4 中朱利亚集的豪斯多夫收敛，此前已由第二作者 [K1] 和 McMullen [Mc2] 分别在更一般的背景下证明。我们结果的新意在于定量估计 $O(|c-\hat{c}|^{1/Q})$。

论文结构。 在第 2 节中，我们定义了 c 的参数化，其中复参数为 $t \in \mathbb{C}$，使得当 $t \to 0$时， $c = c_t$ 沿着一条厚内部射线收敛于 $\hat{c}$。同样在第 2 节中，我们陈述了三个命题，即命题 2.2、命题 2.3 和命题 2.4。这些命题涉及当 c 接近 $\hat{c}$时， f_c 在$f_{\hat{c}}$ 的一个抛物点的邻域 U_0 中的局部动力学，并将用于证明定理 1.2 和定理 1.3，以及本文中的一些引理。随后，我们引入“S-循环”的概念，用于描述 f_c 的一个轨道如何反复（无限次、有限次或从不）进入和离开 U_0的一个固定子集。在第3节中，假设引理 A、B 和 C 成立，我们证明主定理，即定理1.1。众所周知（例如参见 [Mc1, 第 §3.2] 节），相对于 $\mathbb{C} - P(f_c)$上的双曲度量，朱利亚集是扩张的，其中 $P(f_c)$表示 f_c的后临界集。为了估计朱利亚集相对于欧几里得度量的扩张性，在第4节的引理 D 中，对于 z 不太接近 $f_{\hat{c}}$的抛物周期的情形，我们给出了 $z \in J(f_c)$与 $P(f_{\hat{c}})$之间距离的一个估计。第5节中，我们假设另外两个引理，即引理 G 和 H，并证明引理 A。这两个引理都依赖于扰动抛物周期的局部动力学。我们在第

6节证明引理 B，并在第8节证明引理 G。第7节专门用于证明命题 2.2 和命题 2.3。我们在第9节中使用分支坐标证明命题 2.4。在第10节中，我们也利用分支坐标证明引理 H。随后，借助第10节中给出的一些结果，我们得以在第11节证明引理 D。引理 H 和 D 的证明中的一些论证被用于在第12节证明引理 C。最后，我们在第13节中同时证明定理1.2和定理1.3。

2 径向可达条件与 S-循环

本节将介绍朱利亚集中给定轨道的 S-循环概念。CK 在 [CK1] 中提出了 S-循环的概念，用以描述反复接近后临界集的轨道。这里我们介绍一个修改后的版本，将后临界集替换为抛物周期。

记号。首先介绍一些记号和下文将使用的术语。

- 令 $\mathbb{N}$ 表示正整数集。我们用 $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ 表示非负整数集。

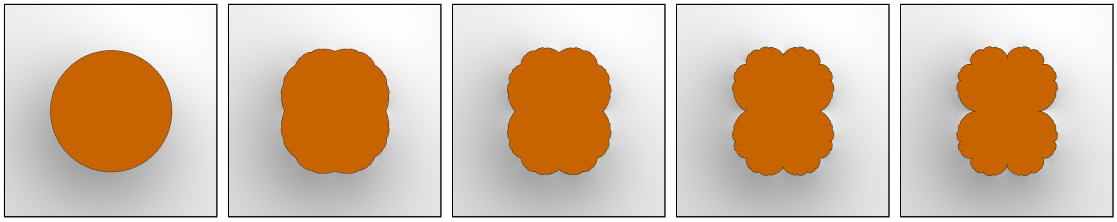
- 令 $\mathbb{D}(a, r)$ 表示以 a 为中心、半径为 $r > 0$ 的 $\mathbb{C}$ 圆盘。当 $a = 0$ 时，我们将其记作 $\mathbb{D}(r)$。
- 对于非负变量 X 和 Y，$X \asymp Y$ 表示存在一个隐含常数 $C > 1$，它与 X 和 Y 无关，使得 $X/C \le Y \le CX$。
- 当我们说“对任意 $X \ll 1$”时，意思是“对任意充分小的 $X > 0$”。更准确地说，我们指存在一个隐含常数 $C > 0$，使得 $0 < X < C$。

双曲分支与内部射线。设 $\hat{c} \in \partial\mathbb{M}$ 是一个抛物参数，$\hat{\ }\hat{\ }\hat{\ }$ 具有一个周期恰为 p 的抛物周期点 b。设 $\lambda := Df^p_{\hat{c}}(b)$ 为该周期轨道的乘子，并假设它是一个本原 q 次单位根。我们如下指定双曲分支 $\mathbb{X}$ 的一条内部射线 $I(\theta) = I_{\mathbb{X}}(\theta)$，该射线在 $\hat{c}$ 处着陆。（有关 $\mathbb{M}$ 的双曲分支的详情，请参见 [DH] 或 [Mi]。）

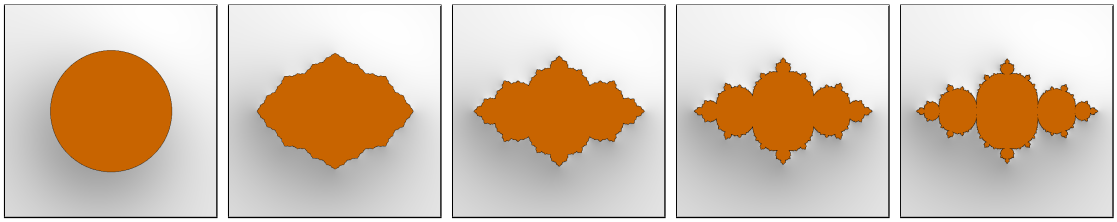
情形 1。若 $q = 1$，则仅存在一个双曲分支 $\mathbb{X}$，使得 $\hat{c} = \Phi_{\mathbb{X}}(1) \in \partial\mathbb{X}$，其中 $\Phi_{\mathbb{X}}$ 是 $\mathbb{X}$ 的一致化映射。因此，令 $\theta = 0$，双曲分支 $\mathbb{X}$ 的内部射线 $I(\theta)$ 在 $\hat{c}$ 处着陆。

情形 2. 如果 $q \ge 2$，那么恰有两个双曲分支 $\mathbb{X}^-$ 和 $\mathbb{X}^+$，使得

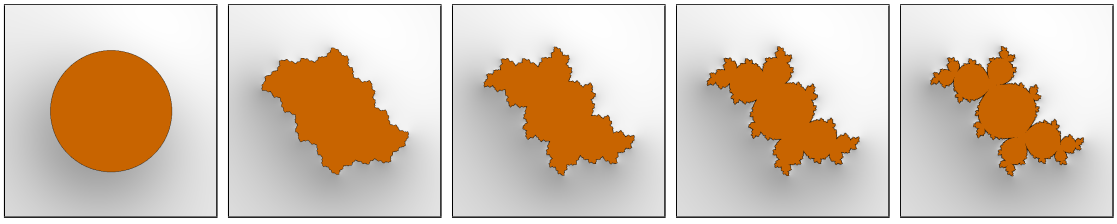
- $\partial\mathbb{X}^- \cap \partial\mathbb{X}^+ = \{\hat{c}\}$。
- $\hat{c} = \Phi_{\mathbb{X}^-}(\hat{\lambda})$ 和 $\hat{c} = \Phi_{\mathbb{X}^+}(1)$，其中 $\Phi_{\mathbb{X}^\pm}$ 是 $\mathbb{X}^\pm$的标准化映射。



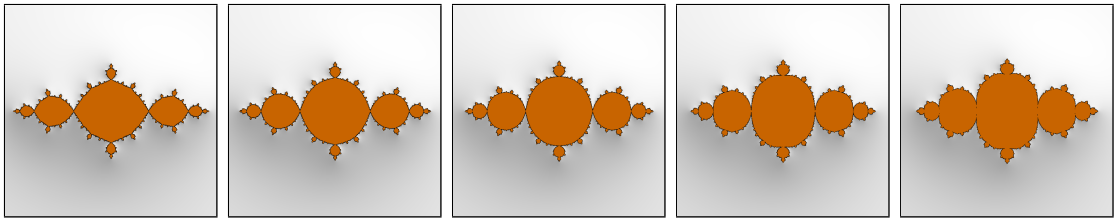
(a)： $I(0)$ 属于 $\mathbb{X}_1$



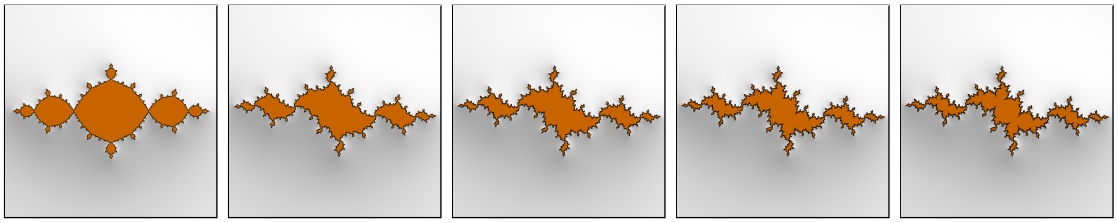
(b)： $I(1/2)$ 属于 $\mathbb{X}_1$



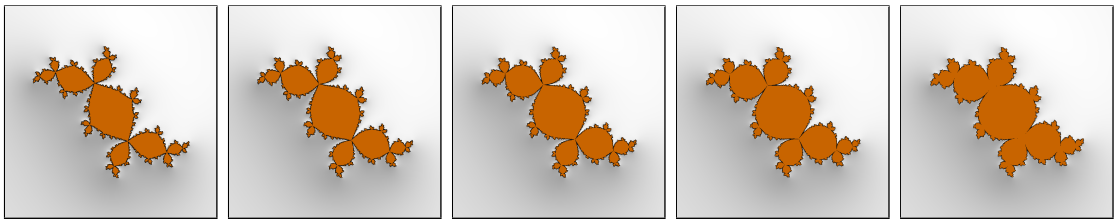
(c)： $I(1/3)$ 属于 $\mathbb{X}_1$



(d)： $I(0)$ 属于 $\mathbb{X}_2$



(e)： $I(1/3)$ 属于 $\mathbb{X}_2$



(f)： $I(0)$ 属于 $\mathbb{X}_3$

图3：沿图1所示内部射线的全纯运动。8

因此， $\mathbb{X}$ 可以是 $\mathbb{X}^-$ 或 $\mathbb{X}^+$，而 $q \geq 2$ 的情形分为两个子情形。

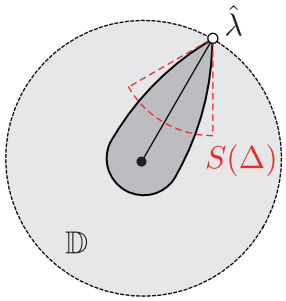
- **情形 2^-：** 如果 $\mathbb{X} = \mathbb{X}^-$，那么我们令 $\theta = (\arg \hat{\lambda})/(2\pi)$；并且
- **情形 2^+：** 如果 $\mathbb{X} = \mathbb{X}^+$，那么我们令 $\theta = 0$

使得 $\mathbb{X}$ 的内部射线 $I(\theta) = I_{\mathbb{X}}(\theta)$落在$\hat{c}$上。

注意，当且仅当$\hat{c}$ 属于情形 1或情形 2^+时，它才是 $\mathbb{X}$ 的根。因此，

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{for Case 1 or Case } 2^+, \\ (\arg \hat{\lambda})/(2\pi) & \text{for Case } 2^-. \end{cases}$$

例4. 当$\hat{c} = 1/4$ 与 $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1$ 相伴时，情形 1成立（例1）；或者当$\hat{c} = -7/4$ 与$\mathbb{X}$相伴时，情形 1也成立，其中$\mathbb{X}$的中心是一个唯一的实参数 $\sigma < 0$，满足 $f_\sigma^3(0) = 0$（“飞机”）。若$\hat{c} = -3/4$，则当 $\mathbb{X}^- = \mathbb{X}_1$时情形 2^- 成立，而当 $\mathbb{X}^+ = \mathbb{X}_2$ 时情形 2^+ 成立（例2）。



$\hat{}$ 图 4：在 $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ 处，开口角度等于 $\pi/3$ 的 Stolz 角 $S(\Delta)$。深灰色区域是 Φ^{-1} 在 $\delta = \delta(A_0)$ 条件下，将 δ 厚内部射线 $\mathcal{I}(\theta, \delta)$ 映射所得的像。

径向收敛与厚内部射线。 设 A_0 和 T_0 为满足以下条件的常数：$0 \leq A_0 < \pi/2$ 以及 $0 < T_0 < 2\cos A_0$，并设

$$\Delta = \Delta(A_0, T_0) := \{t \in \mathbb{C} : 0 < |t| \leq T_0, \ |\arg t| \leq A_0\}.$$

$\hat{}$ 在 λ 处，开口角度为 $2A_0$ 的*Stolz* 角定义为

$$S(\Delta) := \{\mu = (1-t)\hat{\lambda} \in \mathbb{D} : t \in \Delta\} \subset \mathbb{D}. \tag{2.1}$$

设 $\Phi := \Phi_{\mathbb{X}}$。如果参数 $c \in \mathbb{X}$ 趋于 $\hat{c}$，且满足 $\Phi(c) \in S(\Delta)$，则称 $c \to \hat{c}$径向地趋于 McMullen [Mc2]。

F对于给定的角度为 θ 的 δ 厚内部射线 $\mathcal{I}(\theta, \delta) \subset \mathbb{X}$，容易验证 t

$$\Phi^{-1}(\mathcal{I}(\theta, \delta)) \cap \mathbb{D}(\hat{\lambda}, T_0) \subset S(\Delta)$$

如果 $\delta \leq \delta(A_0)$，其定义见式（1.1）。参见图 4。因此，在下文中，只需考虑形如 $c = \Phi(\mu)$ 且满足 $\mu \in S(\Delta) \cup \{\lambda\}$ 的参数。

注记 2.1。 反过来，通过取充分小的 T_0，Stolz 角 $S(\Delta)$ 包含于 $\Phi^{-1}(\mathcal{I}(\theta, \delta))$，其中 $\delta = \delta(A_0) + 1$。这意味着，厚内部射线中的收敛等价于某个角度下的径向收敛。

参数化与记号。出于技术原因，与其使用 (2.1)，不如将 $\mu \in S(\Delta)$ 重新参数化为

$$\mu = \mu_t := \begin{cases} 1 - q\,t & \text{in Case 1 or Case } 2^+ \\ (1 - t/q)\hat{\lambda} & \text{in Case } 2^- \end{cases}$$

对于充分小的 T_0，$t \in \Delta = \Delta(A_0,\ T_0)$。

径向可达条件。下文中，

$$c \approx \hat{c} \quad \text{or} \quad c = c_t \approx \hat{c}$$

我们指参数 c 具有如下形式

$$c = c_t = \Phi(\mu_t)$$

对于某个 $t \in \Delta = \Delta(A_0,\ T_0)$，其中如有必要，我们在 Δ 的定义中取更小的 T_0。我们称这样的参数 c 满足径向可达条件，或者说 c 位于一条厚内部射线上。

ˆ抛物点的扰动。设 $c_0 := \hat{c}$ 且 $\lambda_0 := \lambda$。在第 7 节中，我们将在径向可达条件下证明以下两个命题：

命题 2.2。函数 $t \mapsto c = c_t$ 在 Δ 上全纯，并且存在一个常数 $B_0 \neq 0$，使得

- **情形 1 ($q = 1$):** $c_t = \hat{c} + B_0 t^2 + O(t^3)$
- **情形 $2^\pm$ ($q \geq 2$):** $c_t = \hat{c} + B_0 t + O(t^2)$

当 $t \in \Delta$ 趋近于 0 时。特别地，根据情形 *1* 或情形 $\overline{2^\pm}$，我们有 $\sqrt{|c_t - \hat{c}|} \asymp |t|$ 或 $|c_t - \hat{c}| \asymp |t|$，其中 $t \in \Delta$。

命题 2.3。存在一个连续映射 $t \mapsto b_t$，其定义于 $t \in \Delta \cup \{0\}$，使得

ˆ ˆ(1) $b_0 = b$ 和 b_t 是 f_{c_t} 的一个周期点，其周期与 b相同，均为 p。

(2) 设 $\lambda_t := Df_{c_t}^p(b_t)$。那么，在圆盘 $U := \mathbb{D}(b, R)$ 上存在两族全纯局部坐标 ˆ ˆ ˆ $\{\zeta = \varphi_t(z)\}_{t \in \Delta \cup \{0\}}$和 $\{w = \psi_t(z)\}_{t \in \Delta \cup \{0\}}$，使得：对于每个 $z \in U$，$\varphi_t(z)$ 和 $\psi_t(z)$ 关于 $t \in \Delta$ 全纯，并在 $t = 0$ 处连续；$\varphi_t(b_t) = \psi_t(b_t) = 0$；并且

$$\varphi_t \circ f_{c_t}^p \circ \varphi_t^{-1}(\zeta) = \lambda_t \zeta + \zeta^{q+1} + O(\zeta^{2q+1}),\ and \tag{2.2}$$

$$\psi_t \circ f_{c_t}^{pq} \circ \psi_t^{-1}(w) = \lambda_t^q w\,(1 + w^q + O(w^{2q})). \tag{2.3}$$

特别是，$D\varphi_t^{-1}(0)$和 $D\psi_t^{-1}(0)$ 都一致地远离零。

(3) 在情形 *1* 或情形 $\mathcal{2}^{+}$ 中， b_t 对 $t \in \Delta$ 是排斥的，且乘子满足

$$\lambda_t = (1 + t/q + o(t))\,\hat{\lambda}.$$

此外，存在 q 个不同的吸引不动点 α_t^1、 $\cdots$、 α_t^q，它们属于 $f_{c_t}^{pq}$，满足$Df_{c_t}^{pq}$ $(\alpha_t^j) = \mu_t = 1 - qt$ 以及 $\left(\psi_t\left(\alpha_t^j\right)\right)^q = -t + o\left(t\right)$ ，其中 $j = 1$、 $\cdots$、 q。

(4) 在情形 $\mathcal{2}^{-}$中， b_t 对于 $t \in \Delta$ 是吸引的，且乘子满足

$$\lambda_t = \mu_t = (1 - t/q)\,\hat{\lambda}.$$

此外，存在 q 个不同的排斥不动点 β_t^1、 $\cdots$、 β_t^q，它们属于 $f_{c_t}^{pq}$，满足$Df_{c_t}^{pq}$ $(\beta_t^j) = 1 + qt + o\left(t\right)$ 以及 $\left(\psi_t\left(\beta_t^j\right)\right)^q = t + o\left(t\right)$ ，其中 $j = 1$、 $\cdots$、 q。

$f_{c_t}^{pq}$的局部动力学如（2.3）所示，与 $f^{pq}{}_{\hat{c}}$的局部动力学非常相似。ˆˆˆ 见图 5。特别地，在 ψ_t的域 $U = \mathbb{D}\left(b,\ R\right)$ 中，映射 $f_{c_t}^{pq}$恰好有

- 情形 1 或情形 2^{+}中有一个排斥不动点 b_t ；并且
- q 情形 2^{-} 中有排斥不动点，它们在 b_t附近对称排列。

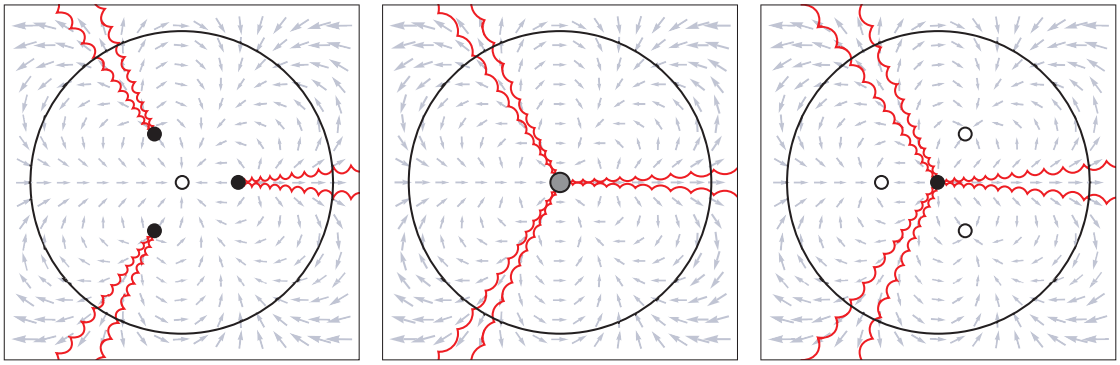


图 5：中间的图展示了 $f^{pq}{}_{\hat{c}}$ 在 ˆU 附近（由大圆圈标示）的局部动力学，这种动力学可以通过两种方式进行轻微扰动：左侧为情形 2^{-} ，右侧为情形2^{+} 。白点、黑点和灰点分别表示吸引不动点、排斥不动点和抛物不动点。红色尖刺状曲线表示朱利亚集。

ˆ**定义** U_0。 我们固定一个小的 $R_0 \in (0, R)$，使得圆盘

$$U_0 := \mathbb{D}(\hat{b}, R_0) \quad (\Subset \hat{U})$$

具有如下性质：$f^{p}{}_{\hat{c}}$：$U' \to U_0$对每个连通分支U' of $f^{-p}{}_{\hat{c}}(U_0)$都是单叶的。这样的 R_0 存在，因为 0 的轨道 $f^{n}{}_{\hat{c}}(0)$（0 是临界点）与抛物周期之间始终保持一定距离，且 $0 \le n \le p$。 下一个命题将在第 9 节证明：

命题 2.4。 对于每个参数 c_t，满足 $t \in \Delta$，如果 $z_0 \in J\left(f_{c_t}\right) \cap U_0$ 不是上述描述的 $f_{c_t}^{pq}$ 的任何一个排斥不动点，那么轨道 $z_{kpq} := f_{c_t}^{kpq}\left(z_0\right)$ $k \in \mathbb{N}_0$）会在某个 $k > 0$ 时离开 U_0 。

我们选取某个 $\xi \in (0,1]$，使得

$$\operatorname{dist}(0, f_{\hat{c}}^k(U_0)) \geq \frac{3\xi}{4}$$

对任意满足 $-p \leq k \leq p$ 的整数 k。注意，由连续性可得

$$\operatorname{dist}(0, f_c^k(U_0)) \geq \frac{\xi}{2}$$

对任意 $c \approx \hat{c}$（必要时在 Δ 的定义中取更小的 T_0），以及任意满足$-p \leq k \leq p$的 k。

注 2.5。我们将经常使用以下性质：若 $z \in f_c^k(U_0)$ 对某个$c \approx \hat{c}$ 以及 k 满足 $-p \leq k \leq p$成立，则 $|Df_c(z)| = 2|z| \geq \xi$。

的定义 V_0 **和** $\mathcal{V}(c)$。现在取一个较小的 $\nu \in (0, R_0)$，并令

$$V_0 := \mathbb{D}(\hat{b}, \nu) \quad (\Subset U_0).$$

我们还定义

$$\mathcal{V}(c) := \bigcup_{j=0}^{p-1} f_c^{-j}(V_0)$$

对每个 $c \approx \hat{c}$。由上面的注 2.5，$f_c(z) \in \mathcal{V}(c)$ 蕴含 $|Df_c(z)| \geq \xi$，对 $c \approx \hat{c}$ 成立。

S-循环。对于 $c \approx \hat{c}$，令 z_0 为朱利亚集 $J(f_c)$ 中的任意一点。轨道 $z_n := f_c^n(z_0)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ 可能落在 V_0 $(\Subset U_0)$ 上，并根据命题 2.4 离开 U_0（除非它恰好落在排斥性周期轨道上），随后它又可能回到 V_0。为了描述此类轨道的行为，我们引入 z_0 的轨道的“S-循环”概念，其中“S”表示该轨道始终靠近双曲度量的“奇异点”$\rho(z)|dz|$，该度量定义在 $f_{\hat{c}}$ 的后临界集的补集上，具体定义见第4节。

定义（S-循环）。$z_n = f_c^n(z_0)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$的轨道的一个有限 *S*-循环 是 $\mathbb{N}_0$ 的一个有限子集，其形式为

$$\mathsf{S} = \{n \in \mathbb{N}_0 : M \leq n < M'\} = [M, M') \cap \mathbb{N}_0$$

并具有以下性质：

(S1) $z_M \in V_0$，并且如果 $M > 0$，则 $z_{M-1} \notin V_0$。

（S2）存在一个最小的 $m \geq 1$，使得对于 $n = M + mpq$、$z_{n-pq} \in U_0$，但 $z_n \notin U_0$。

（S3）$M' = M+mpq+L$ 对于某个 $L \in [1, \infty)$，使得 $z_n \notin V_0$ 对于 $n = M+mpq+i$ （$0 \leq i < L$）以及 $z_{M'} \in V_0$。

轨道 $z_n = f_c^n(z_0)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ 的一个无限 *S*-循环 S 是 $\mathbb{N}_0$ 的一个无限子集，其形式为

$$\mathsf{S} = \{n \in \mathbb{N}_0 : M \le n < \infty\} = [M, \infty) \cap \mathbb{N}_0,$$

满足以下任一条件

- Type (I): (S1), (S2), and

  (S3)' $z_n \notin V_0$ for all $n \ge M + mpq$;

or

- 类型（II）：(S1) 且

  (S2)' $z_{M+kpq} \in V_0$ 对于任意 $k \in \mathbb{N}$。等价地，z_M 是周期为 p 或周期为 pq 的排斥周期点，位于 V_0 中（由命题 2.4 可知）。

我们用 *S*-循环 表示有限或无限的 S-循环。为简洁起见，这两种情况分别记为 $\mathsf{S} = [M, M')$ 或 $\mathsf{S} = [M, \infty)$。

注 2.6。不失一般性，我们可以通过缩小圆盘 U_0 的半径，假设有限 S-循环的 L 至少为 p。事实上，当轨道 z_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ 在 $n = M + mpq$ 时离开 U_0 后，它会沿着抛物周期运行一段时间；根据扰动后周期附近的局部动力学，它不会立即落在 V_0 上。见图 6。

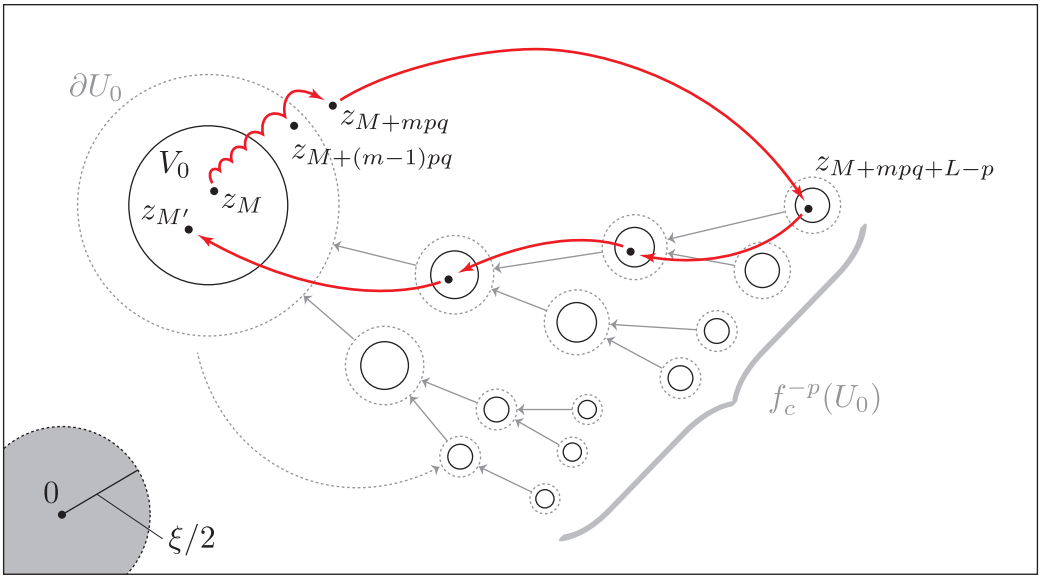


图 6：一个有限 S-循环 $[M, M')$，其中包含 $M' = M + mpq + L$、$p = 3$。点状箭头表示 $f_c^{-p}(U_0)$ 的另一个连通分支与 U_0 相交，但未绘出。

通过 S-循环对轨道进行分解。 对于给定的 $z_0 \in J(f_c)$ 的轨道 $z_n = f_c^n(z_0)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, 索引集合 $\mathbb{N}_0$ 可通过使用有限或无限 S-循环，唯一地分解为以下三种类型之一:

- 第一种类型的形式为

$$\mathbb{N}_0 = [0, M_1) \sqcup \mathsf{S}_1 \sqcup \mathsf{S}_2 \sqcup \cdots, \tag{2.4}$$

其中，对于 $n \in [0, M_1)$, $z_n \notin V_0$ ，且 $\mathsf{S}_k := [M_k, M_{k+1})$ 对每个$k \geq 1$都是有限 S-循环。

- 第二种类型的形式为

$$\mathbb{N}_0 = [0, M_1) \sqcup \mathsf{S}_1 \sqcup \mathsf{S}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathsf{S}_{k_0} \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \cdots \tag{2.5}$$

其中 $k_0 \geq 1$，对于 $n \in [0, M_1)$ 有 $z_n \notin V_0$ ； $\mathsf{S}_k := [M_k, M_{k+1})$ 对每个 $1 \leq k \leq k_0 - 1$ 都是有限 S- 循环； $\mathsf{S}_{k_0} = [M_{k_0}, \infty)$ 是无限 S- 循环；且 $\mathsf{S}_k = \emptyset$ 对于 $k \geq k_0 + 1$。

- 第三种类型为

$$\mathbb{N}_0 = [0, M_1) \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \cdots \tag{2.6}$$

其中 $M_1 = \infty$ ，且对于 $k \geq 1$， $\mathsf{S}_k = \emptyset$ ；对于所有 $n \in \mathbb{N}$, $z_n \notin V_0$ 。

在第一类和第二类中， $M_1 = 0$ 和 $[0, M_1)$ 可能为空。

3 在假设三个引理的情况下证明主定理

导数公式。 令 z_* 为 $J(f_\sigma)$ 中的任意一点（其中 σ 是 $\mathbb{X}$的中心），并考虑其运动 $z = z(c) = H(c, z_*) \in J(f_c)$，其中 $c \in \mathbb{X}$。主定理中的估计基于以下公式:

命题3.1 （导数公式）。 对于任意 $c \in \mathbb{X}$ 和 $z = z(c) \in J(f_c)$，有

$$\frac{d}{dc} z(c) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Df_c^n(z(c))}.$$

证明见 [CK1，命题3.2] 。由于 f_c 是双曲的，上述级数绝对收敛，因此只需证明

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Df_c^n(z(c))} \right| \leq \frac{K}{|c - \hat{c}|^{1-1/Q}}$$

对于厚内部射线中的某个常数 $K > 0$，其与 c 无关，其中 $Q := \max\{2, q\}$ ˆ， q 是抛物不动点 b的花瓣数。

现在我们给出关于 S-循环的三个主要引理。在径向可达条件 $c = c_t \approx$ ˆc 下，只要 ν （ V_0 的半径）足够小，这些引理便成立。也就是说，我们只考虑满足上一节中所述 $t \in \Delta = \Delta$（A_0， T_0）的 $c = c_t$ 。

引理 A. 存在一个常数 $K_{\mathrm{A}}>0$，使得对于任意 $c\approx\hat{}c$、任意 $z_0\in J(f_c)$，以及轨道 $z_n=f_c^n(z_0)$ $(n\in\mathbb{N}_0)$ 的任意 S-循环 $\mathsf{S}=[M,M')$，我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{M'-M}\frac{1}{Df_c^i(z_M)}\right|\le\frac{K_{\mathrm{A}}}{|c-\hat{c}|^{1-1/Q}},\tag{3.1}$$

其中我们设定 $M'-M:=\infty$ 若 $M'=\infty$。

引理 B。 存在一个常数 $K_{\mathrm{B}}>0$，使得对于任意 $c\approx\hat{}c$ 以及任意 $M\le\infty$，若 $z_0\in J(f_c)$ 满足 $z_n\notin V_0$ 对于任意 $n\in[0,M)$，则有

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{|Df_c^i(z_0)|}\le K_{\mathrm{B}}.\tag{3.2}$$

引理 B 的一个直接推论是：

推论 3.2。 对于 $c\approx\hat{}c$，如果 $z=z(c)\in J(f_c)$ 在 f_c 作用下的轨道从未落到 V_0 上，则导数满足

$$\left|\frac{d}{dc}z(c)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|Df_c^n(z(c))|}\le K_{\mathrm{B}}.\tag{3.3}$$

引理 C（S-循环一致扩张）。存在一个常数 $\Lambda>1$，使得对于任意 $c\approx\hat{}c$、任意 $z_0\in J(f_c)$，以及轨道 $z_n=f_c^n(z_0)$ $n\in\mathbb{N}_0$）的任意有限 S-循环 $\mathsf{S}=[M,M')$，我们有

$$|Df_c^{M'-M}(z_M)|\ge\Lambda.\tag{3.4}$$

上面的常数 K_{A}、K_{B} 和 Λ 仅取决于 $\hat{}c$、ν 的选取，以及 $\mathcal{I}(\theta,\ \delta)$ 的厚度 δ（等价地，$\Delta=\Delta(A_0,\ T_0)$ 的角度 A_0）。这些引理的证明将在后文给出。

假设这三个引理成立，我们可以给出主定理的证明：

假设引理 A、B 和 C 的主定理证明。只需证明定理对 $c\approx\hat{}c$ 成立。（事实上，如果 c 与 $\partial\mathbb{X}$ 保持一致距离，则根据不等式 (1.4)，导数有上界。）

对于给定的 $c\approx\hat{}c$ 和 $z_*\in J(f_\sigma)$，令 $z_0=z(c)=H(c,\ z_*)\in J(f_c)$。我们考虑如 (2.4)、(2.5) 或 (2.6) 中的分解 $\mathbb{N}_0=[0,M_1)\sqcup\mathsf{S}_1\sqcup\mathsf{S}_2\sqcup\cdots$。于是有

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dc}z(c)\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Df_c^n(z_0)}\right|&\le\sum_{n=1}^{M_1}\frac{1}{|Df_c^n(z_0)|}+\left|\sum_{k\ge1}\sum_{n\in\mathsf{S}_k}\frac{1}{Df_c^{n+1}(z_0)}\right|\\&\le\sum_{n=1}^{M_1}\frac{1}{|Df_c^n(z_0)|}+\sum_{k\ge1,\mathsf{S}_k\neq\emptyset}\frac{1}{|Df_c^{M_k}(z_0)|}\left|\sum_{i=1}^{M_{k+1}-M_k}\frac{1}{Df_c^i(z_{M_k})}\right|.\end{aligned}$$

由引理 B，显然有 $1/|Df_c^{M_1}(z_0)| \le K_{\mathrm{B}}$。由引理 C，得到

$$|Df_c^{M_k}(z_0)| = |Df_c^{M_k-M_{k-1}}(z_{M_{k-1}})|\cdots|Df_c^{M_2-M_1}(z_{M_1})|\,|Df_c^{M_1}(z_0)| \ge \Lambda^{k-1}/K_{\mathrm{B}}$$

只要 $\mathsf{S}_k \neq \emptyset$。因此，根据引理 A，我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Df_c^n(z_0)}\right| \le K_{\mathrm{B}} + \sum_{k\ge1}\frac{K_{\mathrm{B}}}{\Lambda^{k-1}}\cdot\frac{K_{\mathrm{A}}}{|c-\hat{c}|^{1-1/Q}} = K_{\mathrm{B}} + \frac{K_{\mathrm{B}}\Lambda}{\Lambda-1}\cdot\frac{K_{\mathrm{A}}}{|c-\hat{c}|^{1-1/Q}}.$$

我们可以假设 $|c-\hat{c}| \le 1$，使得 $K_{\mathrm{B}} \le K_{\mathrm{B}}/|c-\hat{c}|^{1-1/Q}$。因此，令$K$:
$= K_{\mathrm{B}} + \dfrac{K_{\mathrm{B}}K_{\mathrm{A}}\Lambda}{\Lambda-1}$，我们有 $\left|\dfrac{dz}{dc}\right| \le \dfrac{K}{|c-\hat{c}|^{1-1/Q}}$，对任意 $c \approx \hat{c}$均成立。 ■

4 后临界集与双曲度量

本节将介绍 $f_{\hat{c}}$ 的后临界集补集上的双曲度量的一些性质。

后临界集。多项式 $f_c(z) = z^2 + c$的后临界集 $P(f_c) \subset \mathbb{C}$ 定义为

$$P(f_c) := \overline{\{f_c(0),\, f_c^2(0),\, f_c^3(0),\, \cdots\}}.$$

本文只考虑 $P(f_{\hat{c}})$，它是一个可数集，且其唯一的聚点是 $f_{\hat{c}}$ 的抛物周期。特别地，$\mathbb{C} - P(f_{\hat{c}})$ 的万有覆盖是单位圆盘 $\mathbb{D}$。

设 dist $(z, P(f_{\hat{c}}))$ 为 z与 $P(f_{\hat{c}})$ 之间的欧氏距离。以下引理给出了 $z, P(f_{\hat{c}})$ 的 dist 估计，其中 $z \in J(f_c) - \mathcal{V}(c)$ 对于 $c \approx \hat{c}$，并且起着非常重要的作用。

引理 D. 存在一个常数 $K_{\mathrm{D}} \in (0,1]$，使得对于任意充分小的$\nu \in (0, R_0)$，对于任意 $z \in J(f_c) - \mathcal{V}(c)$，只要 $c = c_t \approx \hat{c}\ (t \in \Delta)$，便有 $\operatorname{dist}(z, P(f_{\hat{c}})) \ge K_{\mathrm{D}}\nu$。这可通过在 $\Delta = \Delta(A_0, T_0)$ 的定义中取充分小的 T_0 （其取值取决于 ν）得到。

证明将在第 11 节稍后给出。

双曲度量。对于 $c = \hat{c}$，令 $\rho(z)|dz|$ 表示 $\mathbb{C} - P(f_{\hat{c}})$ 的双曲度量，它由单位圆盘上常曲率 -4 的度量 $|dz|/(1-|z|^2)$ 诱导。度量 $\rho(z)|dz|$ 具有以下性质:

(i) $\rho:\ \mathbb{C} - P(f_{\hat{c}}) \to \mathbb{R}_+$在 $P(f_{\hat{c}}) \cup \{\infty\}$ 上是实解析的，并且发散。

(ii) 若 z和 $f_{\hat{c}}(z)$ 均属于 $\mathbb{C} - P(f_{\hat{c}})$，则有

$$\frac{\rho(f_{\hat{c}}(z))}{\rho(z)}|Df_{\hat{c}}(z)| > 1.$$

例如，参见 [Mc1, §3.2]。

这里有一个重要的观察：取 Γ of $\mathbb{C} - P(f_{\hat{c}})$ 的任意紧致子集，并假设 z 和 $f_c(z)$ 都包含在某个 $c \approx \hat{c}$ 的 Γ 中。那么由 $\rho(f_c(z))|Df_c(z)|$ 关于 c 的连续性可知，

$$\frac{\rho(f_c(z))}{\rho(z)}|Df_c(z)| \geq A, \quad \text{or equvalently } |Df_c(z)| \geq \frac{\rho(z)}{\rho(f_c(z))} \cdot A,$$

其中存在一个与 $c \approx \hat{c}$ 无关的统一常数 $A = A_\Gamma > 1$。

为了给出函数 $\rho(z)$ 的一些估计，我们需要以下结果：

命题 4.1. $\mathbb{C} - P(f_{\hat{c}})$ 上的双曲度量 $\rho(z)|dz|$ 满足

$$\rho(z) \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, P(f_{\hat{c}}))}.$$

这只是双曲度量的一个标准事实的应用。例如参见 [A，定理 1.10 和 1.11]。

现在我们可以证明：

引理 E。 如果常数 ν 足够小，则存在一个常数 $K_{\mathrm{E}} \asymp \nu$，使其具有以下性质：对于任意 $c \approx \hat{c}$，我们有

$$\frac{\rho(z)}{\rho(\zeta)} \geq K_{\mathrm{E}}$$

如果 $z, \zeta \in J(f_c) - \mathcal{V}(c)$。

证明。 注意，对于 $c \in \mathbb{M}$，有 $\overline{J(f_c)} \subset \mathbb{D}(2)$。由于 ρ 在 $\mathbb{D}(3)$ 中仅在后临界集 $P(f_{\hat{c}})$ 处发散，因此存在一个常数 $C_1 > 0$，使得对于任意 $w \in \mathbb{D}(3) - P(f_{\hat{c}})$，都有 $\rho(w) \geq C_1$。特别地，我们有 $\rho(z) \geq C_1$。根据引理 D，对于 $\nu \ll 1$ 和 $c \approx \hat{c}$，我们有

$$\operatorname{dist}(\zeta, P(f_{\hat{c}})) \geq K_{\mathrm{D}}\nu$$

因此命题 4.1 蕴含：对于充分小的 ν，有 $\rho(\zeta) \leq 1/(K_{\mathrm{D}}\nu)$。现在我们有$\rho(z)/\rho(\zeta) \geq C_1 K_{\mathrm{D}}\nu =: K_{\mathrm{E}}$。 ■

由引理 E，我们得到相对于 ρ 的 f_c 的一种一致扩张：

引理 F。 存在一个常数 $A > 1$，使得对于 $c \approx \hat{c}$，如果 $z, f_c(z) \ldots, f_c^n(z)$都包含于 $J(f_c) - \mathcal{V}(c)$中，则有

$$|Df_c^n(z)| \geq K_{\mathrm{E}} A^n.$$

证明。 根据引理 D， $J(f_c) - \mathcal{V}(c)$ 包含于 $\mathbb{C} - P(f_c)$ 中的一个紧致集 Γ 内，该紧致集与 $c \approx \hat{} c$ 无关。如上面的观察所述，存在一个常数$A = A_\Gamma > 1$，使得对于任意 $c \approx \hat{} c$,

$$\frac{\rho(f_c(w))}{\rho(w)}|Df_c(w)| \geq A$$

如果两者均为 w, $f_c(w) \in J(f_c) - \mathcal{V}(c)$。

根据链式法则，我们有

$$|Df_c^n(z)| = \prod_{i=0}^{n-1} |Df_c(f_c^i(z))| \geq \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\rho(f_c^i(z))}{\rho(f_c^{i+1}(z))} A \geq \frac{\rho(z)}{\rho(f_c^n(z))} A^n. \tag{4.1}$$

应用引理 E 和 $\zeta = f_c^n(z)$，我们得到所需的不等式。 ■

5 在假设引理 G 和 H 的条件下证明引理 A

对于任意 $c = c_t \approx \hat{} c$，我们任取一个 $z_0 \in J(f_c)$，并令 $z_n := f_c^n(z_0)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$。对于该轨道的一个给定 S-循环 S $= [M, M')$，不失一般性，我们可以假设 $M = 0$。我们将证明分为两种情形。

首先假设 S 是有限 S-循环，或是类型（I）的无限 S-循环。那么存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 使得

- $z = z_0 \in V_0$;
- $z_{(m-1)pq} \in U_0$ 但是 $z_{mpq} \notin U_0$;
- $z_{mpq+i} \notin V_0$ 若 $0 \leq i < L$; 且
- $M' < \infty$ 当且仅当 $L < \infty$ 且 $M' = mpq + L$。

如注 2.6 所示，必要时通过缩小 U_0 （即取更小的 R_0），每个满足 $0 \leq i \leq p$ 的 z_{mpq+i} 仍然靠近 f^i（U_0），并且我们可以假设，对任意 S-循环， $L > p$ 。

回想一下，在径向可达条件 $c = c_t \approx \hat{} c$ 下，存在一个周期为 p 的周期点 $b_t \hat{}$，位于 U_0 中，使得当 $t \in \Delta$ 趋于 0 时， $b_t \to b$ （命题 2.3）。对于 $c = c_t \approx \hat{} c$，分别用 b_0（c） b_1（c） $\ldots, b_{p-1}$（c）表示周期点 b_t， f_{c_t}（b_t） $\cdots$， $f_{c_t}^{p-1}$（b_t）。

接下来的两个引理依赖于扰动抛物周期的局部动力学。

引理 G. 假设 $q \geq 2$。存在一个常数 $K_{\mathrm{G}} > 0$，满足以下性质：对于任意 $c \approx \hat{} c$ 和 $z_0 \in J(f_c) \cap U_0$，使得 $z_p, z_{2p}, \ldots, z_{qp} \in U_0$，我们有

$$\left| \sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{Df_c^{lp}(z_j)} \right| \leq K_{\mathrm{G}} \big(|c - \hat{c}| + |z_j - b_j(c)| \big).$$

对每个 $0 \leq j \leq p - 1$。

引理 H。 存在一个常数 $K_{\mathrm{H}} > 0$ ，具有如下性质：对于任意$c \approx \hat{} c$， $z_0 \in J(f_c) \cap V_0$，以及满足 $z_{kpq} \in U_0$ 对于 $0 \le k \le m-1$ 成立的 $m \in \mathbb{N}$，对于每个 $0 \le j \le p-1$，我们都有

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{|Df_c^{kpq}(z_j)|} \le \frac{K_{\mathrm{H}}}{|c-\hat{c}|^{1/2}} \qquad \textit{if } q = 1,$$

and

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|c-\hat{c}| + |f_c^{kpq}(z_j) - b_j(c)|}{|Df_c^{kpq}(z_j)|} \le \frac{K_{\mathrm{H}}}{|c-\hat{c}|^{1-1/q}} \qquad \textit{if } q \ge 2.$$

引理 G 和 H 的证明将在后面给出。

有限 S-循环。设 $f = f_c$。对于满足 $M' = mpq + L$ 的有限 S-循环 $\mathsf{S} = [0, M')$，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M'} \frac{1}{Df^i(z_0)} \\
=&\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{Df^j(z_0)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{Df^{kpq}(z_j)} \sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{Df^{lp}(z_{kpq+j})} \\
&+ \sum_{i=1}^{L-p} \frac{1}{Df^{mpq}(z_0)\, Df^i(z_{mpq})} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{Df^{mpq+(L-p)}(z_0)\, Df^i(z_{mpq+(L-p)})}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

当 $1 \le j \le p$ 时，我们有 $z_j \in f^j(U_0)$，因此

$$|Df^j(z_0)| \ge \xi^j$$

根据注 2.5，式 (5.1) 中有。注意，由科比畸变定理，

$$|Df^{mpq}(z_j)| \ge C_2 \cdot \frac{\operatorname{diam} U_0}{\operatorname{diam} V_0} \ge \frac{C_3}{\nu}$$

对于某个常数 C_2和 C_3与 c和 $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$无关。因此 ，

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{|Df^j(z_0)|} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{|Df^{kpq}(z_j)|} \left| \sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{Df^{lp}(z_{kpq+j})} \right| \\
\le\ & \begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\xi^j} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{|Df^{kpq}(z_j)|} & \text{if } q = 1 \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\xi^j} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{K_{\mathrm{G}}\left(|c-\hat{c}| + |z_{kpq+j} - b_j(c)|\right)}{|Df^{kpq}(z_j)|} & \text{if } q \ge 2 \text{ (by using Lemma G)}
\end{cases} \\
\le\ & \frac{p}{\xi^p} \cdot \max\{1, K_{\mathrm{G}}\} \cdot \frac{K_{\mathrm{H}}}{|c-\hat{c}|^{1-1/Q}} \qquad \text{(by Lemma H)}
\end{aligned}$$

其中 $Q = \text{最大}\{2,\, q\}$。

当 $n = mpq + i$ 满足 $1 \le i \le L - p$ 时，我们有 $z_{mpq},\quad z_{mpq+i} \notin \mathcal{V}(c)$，因此 s

$$\begin{aligned} |Df^n(z_0)| &= |Df^{mpq}(z_0)|\,|Df^i(z_{mpq})| \\ &\ge |Df^{mpq}(z_0)| \cdot K_{\mathrm{E}} \cdot A^i. \end{aligned}$$

这里，上述常数 A 与引理 F 中的常数相同。因此，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{L-p} \frac{1}{|Df^{mpq}(z_0)|\,|Df^i(z_{mpq})|} &\le \sum_{i=1}^{L-p} \frac{1}{|Df^{mpq}(z_0)|\ K_{\mathrm{E}}\ A^i} \\ &\le \frac{\nu}{C_3\ K_{\mathrm{E}}} \frac{1}{A-1}. \end{aligned}$$

当 $n = mpq + (L-p)$ 满足 $1 \le i \le p$ 时，$f(z_n) \in \mathcal{V}(c)$，因此

$$\begin{aligned} |Df^n(z)| &= |Df^{mpq+(L-p)}(z_0)|\,|Df^i(z_{mpq+(L-p)})| \\ &\ge |Df^{mpq}(z_0)| \cdot K_{\mathrm{E}} \cdot A^{L-p} \cdot \xi^i \\ &\ge |Df^{mpq}(z_0)| \cdot K_{\mathrm{E}} \cdot 1 \cdot \xi^p. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|Df^{mpq+(L-p)}(z_0)|\,|Df^i(z_{mpq+(L-p)})|} &\le \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|Df^{mpq}(z_0)|\ K_{\mathrm{E}}\ \xi^p} \\ &\le \frac{p\nu}{C_3\ K_{\mathrm{E}}\ \xi^p}. \end{aligned}$$

根据这些估计，当 $M' < \infty$ 时，我们有：

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{M'} \frac{1}{Df^i(z_0)}\right| &\le \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{|Df^j(z_0)|} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{|Df^{kpq}(z_j)|} \left|\sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{Df^{lp}(z_{kpq+j})}\right| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{L-p} \frac{1}{|Df^{mpq}(z_0)|\,|Df^i(z_{mpq})|} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|Df^{mpq+(L-p)}(z_0)|\,|Df^i(z_{mpq+(L-p)})|} \\ &\le \frac{p}{\xi^p} \cdot \max\{1, K_{\mathrm{G}}\} \cdot \frac{K_{\mathrm{H}}}{|c-\hat{c}|^{1-1/Q}} + \frac{\nu}{C_3\ K_{\mathrm{E}}} \left(\frac{1}{A-1} + \frac{p}{\xi^p}\right). \end{aligned}$$

因此，令

$$K_{\mathrm{A}} := \max\{1, K_{\mathrm{G}}\} \cdot \frac{2p}{\xi^p} \cdot K_{\mathrm{H}},$$

我们得到了所需的估计

$$\left|\sum_{i=1}^{M'} \frac{1}{Df^i(z_0)}\right| \le \frac{K_{\mathrm{A}}}{|\,c-\hat{c}\,|^{1-1/Q}}$$

当 $|c - \hat{}c|$ 足够小时。注意，K_{A} 不依赖于 m 和 L。

无限 S-循环，类型（I）。如果 $M'=\infty$，那么 $L=\infty$，并且很容易验证

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{Df^i(z_0)}\right| \le & \frac{p}{\xi^p}\cdot\max\{1,K_{\mathrm{G}}\}\cdot\frac{K_{\mathrm{H}}}{|c-\hat{c}|^{1-1/Q}}+\frac{\nu}{C_3\ K_{\mathrm{E}}}\left(\frac{1}{A-1}\right)\\ < & \frac{K_{\mathrm{A}}}{|\,c-\hat{c}\,|^{1-1/Q}}\end{aligned}$$

与有限 S-循环的情形采用相同的论证。

无限 S-循环，类型（II）。接下来假设 $S=[0,\infty)$ 是一个类型（II）的无限 S-循环。正如我们在第 2 节中所见（特别参见命题 2.3 和 2.4），通过在必要时缩小 Δ 定义中的 $T_0>0$，z_0 必须是周期为 p 的排斥周期点，或者是 f_c 的 pq，且包含于 V_0 中，满足 $c=c_t\approx\hat{c}\,(t\in\Delta)$。注意，即使在这种情况下，引理 G 和 H 仍然成立。

情形 1（$q=1$）。由于引理 H 的假设对任意大的 m 都成立，我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|Df_c^{kp}(z_j)|}\le\frac{K_{\mathrm{H}}}{|\,c-\hat{c}\,|^{1/2}}$$

对于 $q=1$ 和 $0\le j\le p-1$。因此，对于 $c\approx\hat{c}$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{Df^i(z_0)}\right| &\le\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{|Df^{kp}(z_j)||Df^j(z_0)|}\\ &\le\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{|Df^{kp}(z_j)|\cdot\xi^j}\le\frac{pK_{\mathrm{H}}}{\xi^p|\,c-\hat{c}\,|^{1/2}}.\end{aligned}$$

情形 $2^{\pm}$。与情形 1 一样，引理 H 推出

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c-\hat{c}|+|f_c^{kpq}(z_j)-b_j(c)|}{|Df_c^{kpq}(z_j)|}\le\frac{K_{\mathrm{H}}}{|\,c-\hat{c}\,|^{1-1/q}}$$

对于 $q\ge 2$ 和 $0\le j\le p-1$。（在情形 2^+ 中，$b_j(c)$ 是一个排斥周期点，并且对于任意 $k\ge 0$，我们有 $f_c^{kpq}(z_j)=b_j(c)$。）因此，对于 $c\approx\hat{c}$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{Df^i(z_0)}\right| &\le\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{|Df^j(z_0)|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|Df^{kpq}(z_j)|}\left|\sum_{l=0}^{q-1}\frac{1}{Df^{lp}(z_{kpq+j})}\right|\\ &\le\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\xi^j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|Df^{kpq}(z_j)|}\cdot K_{\mathrm{G}}\big(|c-\hat{c}|+|z_{kpq+j}-b_j(c)|\big)\\ &\le\frac{p}{\xi^p}\cdot K_{\mathrm{G}}\cdot\frac{K_{\mathrm{H}}}{|c-\hat{c}|^{1-1/q}}\end{aligned}$$

根据引理 G。在情形 1 和情形 $2^{\pm}$中，我们得出引理 A 成立，且使用与上文定义的相同常数 $K_{\mathrm{A}}>0$。■

6 引理 B 的证明

不妨假设以下两者之一成立

- $M < \infty$ 和 $z_M \in V_0$；或
- $M = \infty$。

对于第一种情况，若 $M \le p$，则 $z_0 \in \bigcup_{k=0}^{p} f_c^{-k}(V_0)$，因为 $z_M \in V_0$。因此

$$|Df_c^i(z_0)| \ge \xi^i \ge \xi^p$$

对于 $i \in [1, M]$。这意味着

$$\sum_{i=0}^{M} \frac{1}{|Df_c^i(z_0)|} \le \frac{M}{\xi^p} \le \frac{p}{\xi^p}.$$

若 $M > p$，则对于 $i \in [0, M-p)$，有 $z_{M-p} \in f_c^{-p}(V_0)$ 和 $z_i \notin \bigcup_{k=0}^{p} f_c^{-k}(V_0)$。那么

- $|Df_c^i(z_0)| \ge K_{\mathrm{E}} A^i$ 对于 $i \in [1, M-p]$（由引理 F）
- $|Df_c^{M-p+j}(z_0)| \ge K_{\mathrm{E}} A^{M-p} \cdot \xi^j \ge K_{\mathrm{E}} \xi^p$ 对于 $j \in [1, p]$。

这意味着：

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{|Df_c^i(z_0)|} \le \sum_{i=1}^{M-p} \frac{1}{K_{\mathrm{E}} A^i} + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{K_{\mathrm{E}} \xi^p} \le \frac{1}{K_{\mathrm{E}}} \left(\frac{1}{A-1} + \frac{p}{\xi^p} \right).$$

通过定义

$$K_{\mathrm{B}} := \frac{1}{K_{\mathrm{E}}} \left(\frac{1}{A-1} + \frac{p}{\xi^p} \right)$$

我们得到了所需的估计。

对于第二种情况（$M = \infty$），轨道永远不会落在 $\mathcal{V}(c)$ 上，根据引理 F，我们有

$$|Df_c^i(z_0)| \ge K_{\mathrm{E}} A^i$$

对于任意 $i \in \mathbb{N}$。因此

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|Df_c^i(z_0)|} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{K_{\mathrm{E}} A^i} \le \frac{1}{K_{\mathrm{E}}} \cdot \frac{1}{A-1} < K_{\mathrm{B}}.$$

■

7 命题 2.2 和 2.3 的证明

本节旨在证明命题 2.2 和命题 2.3，它们描述了抛物周期点及其沿厚内部射线扰动的局部性质。这里的论证依赖于一些最初由 Douady 和 Hubbard [DH, Expos´e XIV] on perturbation of parabolic cycles 所得的众所周知的事实。本文将采用 Milnor 在 [Mi, §4] 中的表述。（另见 [T, 定理 1.1 和定理 A.1]。）

ˆ 设 ˆc 是一个抛物参数，b 是 $f_{\hat{c}}$ 的一个周期为 p 的抛物周期点。设 ˆλ 为乘子 $Df^p{}_{\hat{c}}$(ˆb)，其中 ˆb 是一个本原 q 次单位根。

命题 *7.1*（[*Mi*] 的引理 *4.5*）。存在唯一的单值函数 $c(\lambda)$ ˆ 和 $z(\lambda)$，定义在 λ 的某个邻域上，使得 $z(\lambda)$ 是映射 $f_{c(\lambda)}$ 的一个周期为 p、乘子为 λ 的周期点，并且 ˆ ˆ $\hat{c} = c(\lambda)$ 和 $b = z(\lambda)$。当 $q = 1$（情形 *1*）时，函数 $c(\lambda)$ 在 ˆλ 处有唯一临界点；而当 $q \geq 2$（情形 $2^{\pm}$）时，该函数是单叶的。

通过应用 [K2，附录 A.4] 中的论证，可以找到一族全纯的局部坐标 $\zeta = \varphi_\lambda(z)$ 和 $w = \psi_\lambda(z)$，它们定义在 $z(\lambda)$ 附近，使得 $\varphi_\lambda(z(\lambda)) = \psi_\lambda(z(\lambda)) = 0$,

$$\varphi_\lambda \circ f^p_{c(\lambda)} \circ \varphi_\lambda^{-1}(\zeta) = \lambda\zeta + \zeta^{q+1} + O(\zeta^{2q+1}), \text{ and} \tag{7.1}$$

$$\psi_\lambda \circ f^{pq}_{c(\lambda)} \circ \psi_\lambda^{-1}(w) = \lambda^q w\,(1 + w^q + O(w^{2q})) \tag{7.2}$$

其中

$$w = \left(\frac{1 + \lambda^q + \lambda^{2q} + \cdots + \lambda^{(q-1)q}}{\lambda}\right)^{1/q} \zeta.$$

（注意，与 [DH，命题 11.1] 和 [Mi，引理 4.2] 中给出的类似坐标相比，(7.1) 和 (7.2) 中的误差项略作了改进。）然后我们取充分小的 ˆ $R > 0$，使得这些局部坐标的定义域包含 ˆ$U = \mathbb{D}$(ˆb, ˆR)，其中 λ 充分接近 ˆλ。特别地，$D\varphi_\lambda^{-1}$ (0) 和 $D\psi_\lambda^{-1}$ (0) 都一致地有界离零。

ˆ**命题 7.2**。对于 $\lambda \neq \lambda$，可以找到恰好 q 个非零不动点，它们是 $\psi_\lambda \circ f^{pq}_{c\,\lambda()} \circ \psi_\lambda^{-1}(w) = \lambda^q w\,(1 + w^q + O(w^{2q}))$ 的，形式为 $w = w_\lambda(1 + o(1))$，其乘子为ˆ$1 + q(1 - \lambda^q) + o(|\lambda - \lambda|)$，其中 w_λ 是$(1 - \lambda^q)/\lambda^q$的 q 次根。

证明。由于形如 $\lambda^q w(1 + w^q + O(w^{2q})) = w$ 的方程被视为 $\lambda = \lambda$ 情形的一个 ˆ 扰动，根据 Hurwitz 定理，它恰有 q 个非零根。为了得到解的估计，我们应用 Rouch´e 定理[1]。乘子来自 $D(\psi_\lambda \circ f^{pq}_{c\,\lambda()} \circ \psi_\lambda^{-1})(w) = \lambda^q(1 + (q+1)w^q + O(w^{2q}))$ 和 $|w_\lambda| \asymp |\lambda - \hat{\lambda}|^{1/q}$.■

现在我们固定一个双曲分支 $\mathbb{X}$，它附着于 ˆc，并带有一致化 $\Phi = \Phi_{\mathbb{X}} : \hat{\mathbb{D}} \to \mathbb{X}$；以及一个 Stolz 角 $S(\Delta) \subset \mathbb{D}$，位于 λ，其中 $\Delta = \Delta(A_0, T_0)$。下文中，如有必要，我们将取充分小的 T_0。我们从情形 2^- 开始。

[1]令 $F(w) = w^q - w_\lambda^q = w^q - (1 - \lambda^q)/\lambda^q$ 且 $G(w) = O(w^{2q})$。令 $\ell := |\lambda - \hat{\lambda}|$。现在考虑圆 $|w - w_\lambda| = \ell^s$，其满足 $1/q < s < 1 + 1/q$。例如，可以取 $s := (2q + 1)/(2q)$。现在可以验证 $|w_\lambda| \asymp \ell^{1/q}$，因此 $|F(w)| \asymp \ell^{1-1/q+s}$ 和 $|G(w)| = O(\ell^2)$在这个圆上。由于对于 $\ell \ll 1$, $|F(w)| > |G(w)|$，并且 $F(w) + G(w) = 0$和 $F(w) = 0$的零点数相同，均为一个。因此，解的形式为 $w = w_\lambda + O(\ell^s) = w_\lambda(1 + o(1))$。

命题 2.2 和命题 2.3 在情形 2^- 的证明。令 $\hat{\lambda} = \lambda_t := (1-t/q)\lambda$，其中 $t \in \Delta$，代入命题 7.1，即可得到情形 2^-。事实上，双曲分支 $\mathbb{X}$由 $f_{c(\lambda)}^p$ 的一族吸引不动点 $z(\lambda)$ 所确定，其中 $\lambda = \lambda_t$。命题 7.1 表明，令 $c_t = c(\lambda_t)$，则 $|c_t - \hat{c}| \asymp |\lambda_t - \lambda| \asymp |t|$。这就证明了命题 2.2 在此情形下成立。

通过将命题 7.2 应用于 $b_t := z(\lambda_t)$、$\varphi_t := \varphi_{\lambda_t}$ 以及 $\psi_t := \psi_{\lambda_t}$ for $t \in \Delta$，命题 2.3 的条目 (1)、(2) 和 (4) 可直接得到。

情形 1 和情形 2^+的命题 2.2 和命题 2.3 的证明。在这些情形中，命题 7.2 给出的 f_λ^{pq} 的 q 个非零不动点应当是吸引的，其乘子为$1 - qt$ for $t \in \Delta$，这就确定了情形 1 或情形 2^+ 中的双曲分支 $\mathbb{X}$。因此，由等式 $1 - qt = 1 + q(1 - \lambda^q) + o(|\lambda - \lambda|)$，我们得到 $\lambda = \lambda_t := \hat{(1 + t/q + o(t))}\lambda$ for $t \in \Delta$。令 $c_t := c(\lambda_t)$，命题 7.1 蕴含，在情形 1 中 $|c_t - \hat{c}| \asymp |\lambda_t - \hat{\lambda}|^2 \asymp |t|^2$，而在情形 2^+ 中 $|c_t - \hat{c}| \asymp |\lambda_t - \hat{\lambda}| \asymp |t|$。这就证明了这些情形下的命题 2.2。

通过对 $b_t := z(\lambda_t)$、$\varphi_t := \varphi_{\lambda_t}$ 和 $\psi_t := \psi_{\lambda_t}$ 应用命题 7.2，可直接得到命题 2.3 的第 (1)、(2) 和 (3) 项，$t \in \Delta$。■

8 引理 G 的证明

预备。引理 G 源于 f_c^p 在周期点 $b(c)$ 附近的局部动力学的对称行为。事实上，即使不满足径向可达条件，也不要求假设 $z_0 \in J(f_c)$，该结论仍成立。为以更一般的形式描述其原理，我们采用上文 Milnor 的表述。

令 λ 在 λ 的一个邻域 S 内变化，使得命题 7.1 中的全纯映射 $c(\lambda)$ 和$z(\lambda)$ 有定义。注意，由于我们处于 $q \geq 2$（情形 $2^\pm$），映射 $\lambda \mapsto c(\lambda)$ 给出了 $\hat{S}$ 与 $\hat{c} = c(\hat{\lambda})$ 的一个邻域之间的同构。我们断言：

命题 8.1。设 $q \geq 2$。对于任意 $\lambda \in S$ 和 $z_0 \in U = \mathbb{D}(b、R)$，设 $z_{lp} := f_{c(\lambda)}^{lp}(z_0) \in \hat{U}$，其中 $0 \leq l \leq q$。则有

$$\left|\sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{Df_{c(\lambda)}^{lp}(z_0)}\right| = O(|c(\lambda) - \hat{c}|) + O(|z_0 - z(\lambda)|)$$

如有必要，可取更小的 S 和 U。

命题 8.1 的证明。设 $\epsilon := \lambda/\lambda - 1$ $(\lambda \in S)$ 是一个替代参数，使得

$$\lambda = (1 + \epsilon)\hat{\lambda} \in \hat{S}.$$

由于我们处于 $q \geq 2$ 的情形（情形 $2^\pm$），因此有 $\hat{\lambda} \neq 1$，且 $\lambda \mapsto c(\lambda)$ 是单叶的（命题 7.1）。因此，对于 $\lambda \in S$，我们得到 $|c(\lambda) - \hat{c}| \asymp |\lambda - \lambda| \asymp |\epsilon|$。

回顾 $\varphi_\lambda(z)$ 在 0，并且使得 $\varphi_\lambda(\hat{\lambda}) = 0$，并定义了一个局部坐标 $\zeta = \varphi_\lambda(z)$

$$F_\lambda(\zeta) := \varphi_\lambda \circ f_{c(\lambda)}^p \circ \varphi_\lambda^{-1}(\zeta) = \lambda\zeta + \zeta^{q+1} + O(\zeta^{2q+1})$$

如（7.1）所示。对于给定的 $z_0 \in \hat{U}$，令 $\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_0) = z_0$ 和 $\zeta_{lp} := \varphi_\lambda(z_{lp})$。

然后很容易验证,

$$\zeta_{lp} = F_\lambda^l(\zeta_0) = \lambda^l \zeta_0 + \lambda^{l-1}\left(1 + \lambda^q + \cdots + \lambda^{(l-1)q}\right)\zeta_0^{q+1} + O(\zeta_0^{2q+1}) \tag{8.1}$$

对于任意 $1 \le l \le q$。由于局部坐标 $\varphi_\lambda(z)$ 关于 λ 全纯依赖，我们有

$$\varphi_\lambda^{-1}(\zeta) = z(\lambda) + C_4\zeta + C_5\zeta^2 + O(\zeta^3) \tag{8.2}$$

fo对于某些 $C_4 = C_4(\lambda)$ 和 $C_5 = C_5(\lambda)$，其中 C_4 远离零点，且对于 $\lambda \in \hat{S}$.

Let

$$\mathcal{A}(z_0) := \sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{Df_{c(\lambda)}^{lp}(z_0)}.$$

Now,

$$Df_{c(\lambda)}^{lp}(z_0) = D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_{lp})\ DF_\lambda^l(\zeta_0)\ D\varphi_\lambda(z_0),$$

and

$$\mathcal{A}(z_0) = 1 + \frac{D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_0)}{D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_p)}\frac{1}{DF_\lambda(\zeta_0)} + \frac{D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_0)}{D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_{2p})}\frac{1}{DF_\lambda^2(\zeta_0)} + \cdots + \frac{D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_0)}{D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_{(q-1)p})}\frac{1}{DF_\lambda^{q-1}(\zeta_0)}.$$

由 (8.1) 和 (8.2) 可得,

$$\begin{aligned} D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_{lp}) &= C_4 + 2C_5\zeta_{lp} + O(\zeta_{lp}^2) \\ &= C_4 + 2C_5\lambda^l\zeta_0 + O(\zeta_0^2), \end{aligned}$$

thus

$$\begin{aligned} \frac{D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_0)}{D\varphi_\lambda^{-1}(\zeta_{lp})} &= \frac{C_4 + 2C_5\zeta_0 + O(\zeta_0^2)}{C_4 + 2C_5\zeta_{lp} + O(\zeta_{lp}^2)} \\ &= 1 + \frac{2C_5}{C_4}(1 - \lambda^l)\ \zeta_0 + O(\zeta_0^2). \end{aligned}$$

公式（8.1）还给出

$$\frac{1}{DF_\lambda^l(\zeta_0)} = \frac{1}{\lambda^l}\left(1 + O(\zeta_0^2)\right).$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z_0) &= 1 + \sum_{l=1}^{q-1}\left\{\left(1 + \frac{2C_5}{C_4}(1-\lambda^l)\zeta_0 + O(\zeta_0^2)\right)\cdot\frac{1}{\lambda^l}\left(1 + O(\zeta_0^2)\right)\right\} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{\lambda^l}\left(1 + \frac{2C_5}{C_4}(1-\lambda^l)\zeta_0 + O(\zeta_0^2)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^q}\left(\lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^q + \frac{2C_5}{C_4}(\lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{q-1} + \lambda^q - q\lambda^q)\zeta_0\right) + O(\zeta_0^2) \\ &= \frac{\lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^q}{\lambda^q}\left(1 + \frac{2C_5}{C_4}\zeta_0\right) - \frac{2qC_5}{C_4}\zeta_0 + O(\zeta_0^2). \end{aligned}$$

显然，

$$\hat{\lambda} + \hat{\lambda}^2 + \cdots + \hat{\lambda}^q = 0.$$

因此，通过使用替代参数 ϵ，我们得到

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^q &= (1+\epsilon)\hat{\lambda} + (1+\epsilon)^2\hat{\lambda}^2 + \cdots + (1+\epsilon)^q\hat{\lambda}^q \\ &= (\hat{\lambda} + 2\hat{\lambda}^2 + \cdots + q\hat{\lambda}^q)\,\epsilon + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{q\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}-1}\epsilon + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z_0) &= \frac{1}{(1+\epsilon)^q}\left\{\frac{q\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}-1}\epsilon + O(\epsilon^2)\right\}\left(1 + \frac{2C_5}{C_4}\zeta_0\right) - \frac{2q\,C_5}{C_4}\zeta_0(1+O(\zeta_0)) \\ &= O(\epsilon) + O(\zeta_0) \end{aligned}$$

^ ^ ^ 其中隐含常数与 $\lambda = (1+\epsilon)\lambda \in S$ 和 $\zeta_0 \in \varphi_\lambda(U)$ 无关。

由于 (8.2) 推出，$|\zeta_0|$ 始终与零保持正距离 $|\epsilon| \asymp |c(\lambda) - \hat{c}|$，我们得出

$$|\mathcal{A}(z_0)| = O(|c(\lambda) - \hat{c}|) + O(|z_0 - z(\lambda)|).$$

■

引理 G 的证明。当 $j = 0$ 时，我们按照上一节给出的命题 2.3 的陈述 (3) 和 (4) 的证明中的做法，令 $\lambda := \lambda_t, c = c_t := c(\lambda_t)$，$b_0(c) = b_t := z(\lambda_t)$，并应用命题 8.1。（注意，取更小的 T_0 后，我们有 $U_0 \subset U$ 和 $S(\Delta) \subset S$。）于是立即得到

$$\left|\sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{Df_c^{lp}(z_0)}\right| = O(|c - \hat{c}|) + O(|z_0 - b_0(c)|).$$

当 $1 \le j \le p-1$ 时，我们可以将 $\hat{}U$ 替换为 $\hat{}\,U_j := f_c^j(\hat{}U)$，并将 $b_0(c)$ 替换为 $b_j(c)$，从而应用与命题 8.1 相同的论证。更准确地说，在 $\hat{}U$ 上针对 $c = c_t = c(\lambda_t)$ 有局部坐标 $\varphi_0 = \varphi_{\lambda_t}$ 后，我们可以通过选取满足 $\varphi_j(z_{lp+j}) = \zeta_{lp}$（对 $0 \le l \le q$ 成立）的一个分支，为每个 $1 \le j \le p-1$ 在 $\hat{}U_j$ 上定义局部坐标 $\varphi_j := \varphi_c \circ f_c^{-j}|_{\cdot U_j}$。由于 φ_j^{-1} 的形式为

$$\varphi_j^{-1}(\zeta) = b_j(c) + C_{4,j}\zeta + C_{5,j}\zeta^2 + O(\zeta^3)$$

其中 $C_{4,j}$ 是一个远离零的有界常数，因此我们有 $|z_j - b_j(c)| \asymp |\zeta_0|$，与命题 8.1 相同的论证可得

$$\left|\sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{Df_c^{lp}(z_j)}\right| = O(|c - \hat{c}|) + O(|z_j - b_j(c)|).$$

因此 t 这里存在一个与 $c = c_t \approx \hat{}c$ 和 $z_0 \in U_0$ 无关的常数 $K_{\mathrm{G}} > 0$，使得 t

$$\left|\sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{Df_c^{lp}(z_j)}\right| \le K_{\mathrm{G}}\big(|c - \hat{c}| + |z_j - b_j(c)|\big)$$

对于 $0 \le j \le p-1$。 ■

9 命题 2.4 的证明

本节致力于证明命题 2.4。

无穷远附近的分支坐标。 令 $c = c_t = c(\lambda_t) \in \mathbb{X} \cup \{\hat{c}\}$，其中 $\lambda_t \in \hat{S}(\Delta) \cup \{\lambda\}$ 且 $t \in \underline{\Delta} \cup \{0\}$。使用分支坐标 $\Psi_t : \psi_t(\hat{U}) \to \mathbb{C}_W$（由 $\underline{W} = \Psi_t(w) := -\lambda_t^{q^2}/(q\, w^q)$ 给出）较为方便，其中 $\mathbb{C}_W$ 表示 W 坐标中的黎曼 $\hat{}$ 球面。令 $W = \Phi_t(z) := \Psi_t \circ \psi_t(z)$。我们可以假设 $\Phi_t(U)$ 总包含于 $\{W \in \mathbb{C}_W : |W| \geq \hat{r}\}$，其中某个常数 $\hat{r} > 0$ 与 $\hat{}\,\hat{t} \in \Delta$无关，且 $\hat{r} R^q \asymp 1$；如有必要，可取更小的 R。

在这个坐标系中，我们将映射 $f_{c_t}^{pq}$视为如下形式的 $G := \Phi_t \circ f_{c_t}^{pq} \circ \Phi_t^{-1}$（取 Φ_t^{-1}的一个适当分支）

$$G(W) = G_t(W) = \tau W + 1 + O(1/W),$$

其中

$$\tau := \lambda_t^{-q^2} = \begin{cases} 1 - qt + O(t^2) & \text{for Case 1 and Case } 2^+, \\ 1 + qt + O(t^2) & \text{for Case } 2^- \end{cases}$$

由命题 2.3 得。对于 $t \in \Delta$，令

$$B := \frac{1}{1-\tau} = \pm\frac{1}{qt} + O(1).$$

注意，B是 $W \mapsto \tau W + 1$的不动点，且 $G(W) - B = \tau(W - B) + O(1/W)$。由 Rouch´e 定理，$G$ 存在一个形如 $B^* = B + O(1) = O(1/t)$ 的不动点 B^*，其乘子为 $\tau^* := DG(B^*) = \tau + O(t^2)$。

图 7 展示了 $\mathbb{C}_W$中的朱利亚集。

G 在无穷远附近的动力学。 令

$$d_0 := \frac{\cos A_0}{4} > 0,$$

其中，$A_0 \in [0, \pi/2)$ 在 Δ 的定义中给出（因此由给定的厚内部射线厚度确定）。

命题 9.1. 当 $|W| > 1/(qd_0|t|)$时，我们有

$$\begin{aligned} &|G(W)| < |W| \quad \textit{in Cases 1 and } 2^+, \textit{ and} \\ &|G(W)| > |W| \quad \textit{in Case } 2^- \end{aligned}$$

$\hat{}$ $\hat{}$通过在 U 和 Δ 的定义中取充分小的 R 和 T_0。

证明。 由于 $G(W)/W = \tau + W^{-1} + O(W^{-2}) = 1 \mp qt + O(t^2) + W^{-1} + O(W^{-2})$，我们有

$$\log\left|\frac{G(W)}{W}\right| = \operatorname{Re}\log\frac{G(W)}{W} = \operatorname{Re}\left(\mp qt + O(t^2) + W^{-1} + O(W^{-2})\right).$$

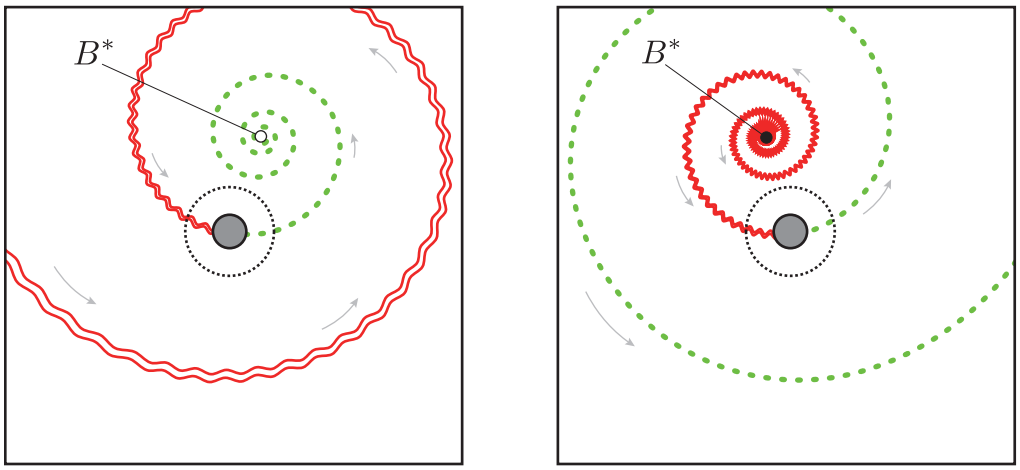


图 7：朱利亚集（红色）在 W 坐标下经 Φ_t 的像：情形 1 和 2^+（左），以及情形 2^-（右）。W 平面的原点是虚线圆（或黑色圆）的中心。黑色圆的半径等于 $\hat{}r$。虚线圆与黑色圆之间的环域包含这样一个区域：G 的动力学与平移 $W \mapsto W+1$ 相对接近（见命题 10.1）。

现在假设 $|W| > 1/(qd_0|t|)$。必要时取更小的 T_0，则对于任意$t \in \Delta = \Delta(A_0, T_0)$，我们有

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(qt) \geq q|t| \cos A_0 = 4qd_0|t|,\\ &\operatorname{Re}(W^{-1}) \leq |W^{-1}| \leq qd_0|t|, \quad \text{and} \quad \operatorname{Re}\left(O(t^2) + O(W^{-2})\right) \leq qd_0|t|.\end{aligned}$$

因此

$$\log\left|\frac{G(W)}{W}\right| \leq (-4+1+1)qd_0|t| < 0$$

在情形 1 和 2^+ 中，以及

$$\log\left|\frac{G(W)}{W}\right| \geq (4-1-1)qd_0|t| > 0$$

在情形 2^- 中。 ■

W我们先证明情形 2^- 下的命题 2.4，再证明情形 1 和情形 2^+ 下的命题 2.4 .

命题 2.4 的证明：情形 2^-。 在此情形下，$\tau = 1 + qt + O(t^2)$，因此 $B = -1/(qt) + O(1)$。注意，如有必要，我们可以取更小的 T_0，从而假设对任意 $t \in \Delta$，都有 $|B| > 7\hat{}r$。我们首先断言：

命题 9.2。 在情形 2^- 中，对于任意满足 $|W| \geq \hat{}r$ 且满足 $|W-B| \geq |B|/2$ 的 W，我们有

$$|G(W) - B| \geq |W - B| + d_0$$

$\hat{}$ $\hat{}$通过在 U 和 Δ 的定义中取足够小的 R 和 T_0。

证明。 由于 $G(W) - B = \tau(W - B) + O(W^{-1})$ 且 $|W - B| \geq |B|/2$,

$$|G(W) - B| = |\tau|\,|W - B| + |O(W^{-1})| \geq |W - B| + \frac{|\tau| - 1}{2|\tau - 1|} + |O(W^{-1})|.$$

取更小的 R（从而更大的 $\hat{r}$），并在必要时取 T_0，我们得到

$$\frac{|\tau| - 1}{2|\tau - 1|} = \frac{\mathrm{Re}\,(qt) + O(|t^2|)}{2|qt + O(|t^2|)|} \geq \frac{q|t|\cos A_0 \cdot (1 + O(|t|))}{2q|t| \cdot (1 + O(|t|))} \geq \frac{\cos A_0}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

以及 $|O(W^{-1})| \leq (\cos A_0)/8$。因此

$$|G(W) - B| \geq |W - B| + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right)\cos A_0 = |W - B| + d_0.$$

■

命题 9.3。 在情形 2^- 中，存在唯一的线性化坐标 $L:\ \mathbb{D}(B, 3|B|/4) \to \mathbb{C}$，对应于 G 的排斥不动点 B^*，使得 $L(B^*) = 0,\ DL(B^*) = 1$，并且若 $G(W) \in \mathbb{D}(B, 3|B|/4)$</style>,

$$L \circ G(W) = \tau^* L(W)$$

其中 $\tau^* = DG(B^*)$。

证明。根据前一个命题，圆盘 $\mathbb{D}(B, 3|B|/4)$ 紧致地包含于$G(\mathbb{D}(B, 3|B|/4))$ 中。因此，G^{-1} 在 $G(\mathbb{D}(B, 3|B|/4))$ 上的单叶分支是严格压缩的。由黎曼映射定理和施瓦茨引理，G^{-1} 在 $\mathbb{D}(B, 3|B|/4)$ 中存在唯一的吸引不动点，该不动点必为 B^*。因此，在 B^* 附近存在唯一的线性化坐标 L，满足 $L(B^*) = 0, DL(B^*) = 1$，以及关系 $L \circ G^{-1}(W) = (\tau^*)^{-1} L(W)$。通过利用该关系将 L 延拓到 $\mathbb{D}(B, 3|B|/4)$，即可得到所需的线性化坐标。■

现在我们准备在情形 2^- 下完成命题 2.4 的证明。对于给定的 $t \in \Delta$，任取$z_0 \in J(f_{c_t}) \cap U_0$。令 $W_0 := \Phi_t(z_0)$，并令 $W_k := G^k(W)$，其中 $k \geq 0$。

如果 $|W_0 - B| \leq |B|/2$，命题 9.3 表明，对于某个 $k \geq 1$，$|W_k - B| > |B|/2$，除非 $W_0 = B^*$。如果 $W_0 = B^*$，那么 z_0 是 f_c^{pq} 在 U_0 中的一个排斥不动点。如果 $W_0 \neq B^*$，根据命题 9.2，要么 $|W_{k+j} - B| \geq |W_k - B| + jd_0 \to \infty$ 如 $j \to \infty$，要么对于某个 $j \geq 0$，$|W_{k+j}| \leq \hat{r}$。前者意味着 z_0 的轨道被吸引到 f_c^{pq} 的一个吸引不动点（见命题 9.1），因而产生矛盾。后者意味着 $z_{pq(k+j)}$ 不再包含于 U_0 中。■

命题 2.4 的证明：情形 1 和 2^+。 在这种情况下，$\tau = 1 - qt + O(t^2)$，因此 $B = 1/(qt) + O(1)$。证明与情形 2^- 类似，这里只给出概要。

由于 $G^{-1}(W) - B = \tau^{-1}(W - B) + O(W^{-1})$，我们得到

$$|G^{-1}(W) - B| \geq |W - B| + d_0 \tag{9.1}$$

当 $|W| \geq \hat{r}$ 且 $|W - B| \geq |B|/2$时。G^{-1} 的固定点 B^* 是排斥的，并且我们可以在 $\mathbb{D}(B,\ 3|B|/4)$ 中找到 G^{-1} 的线性化坐标 L。

对于给定的 $t \in \Delta$，令 $z_0 \in J(f_{c_t}) \cap U_0$。对于 $k \geq 0$，令 $W_0 := \Phi_t(z_0)$ 且 $W_k := G^k(W_0)$。若 $W_0 = \infty$，则 z_0 是 $f_{c_t}^{pq}$ 的排斥不动点（见命题 9.1）。假设 $W_0 \neq \infty$。那么 W_0 不包含在 $\mathbb{D}(B, |B|/2)$ 中，否则W_k 会在 $k \to \infty$时趋于 B^*。由 (9.1)，我们有 $|W_0 - B| \geq |W_k - B| + kd_0$，因此对于某个 $k \geq 0$，要么 $|W_k - B| < 3|B|/4$，要么 $|W_k| \leq \hat{r}$。前者意味着 z_{pqk}包含在 f_c^{pq}的某个吸引不动点的吸引盆中，因此产生矛盾。后者意味着 z_{pqk} 不再包含在 U_0 中。■

10 引理 H 的证明

本节给出引理 H 的证明。证明采用分支坐标以及上一节中形式为 $G(W) = \tau W + 1 + O(1/W)$ 的动力学。

在原点附近的 G 动力学。 由于 $\tau \to 1$ 当 $t \in \Delta$ 趋于 0 时，原点附近（相对而言）的 G 动力学会越来越接近平移 $W \mapsto W + 1$:

命题 10.1. 对于任意 $t \in \Delta$ 以及任意满足 $\hat{r} \leq |W| \leq 1/(5q|t|)$的 W，只要在 U和 Δ 的定义中取充分小的 R和 T_0，就有 $\hat{}\ \hat{}|G(W) - (W+1)| \leq 1/2$。特别地，我们有

$$1/2 \leq \operatorname{Re} G(W) - \operatorname{Re} W \leq 3/2 \quad and \quad |\arg(W - G(W))| \leq \pi/6. \tag{10.1}$$

证明。 取更小的 T_0，当 $|W| \leq (5q|t|)^{-1}$时，我们有 $|(\tau - 1)W| = |(\mp qt + O(t^2))W| \leq 1/4$。取更小的 R（因此 $\hat{r}$更大），当 $\hat{}|W| \geq \hat{r}$时，我们也有 $|G(W) - (\tau W + 1)| = |O(1/W)| \leq 1/4$。由此可得 $|G(W) - (W+1)| = |(\tau - 1)W + O(1/W)| \leq 1/2$，因此（10.1）立即成立。■

关于 U_0 在 W坐标中的一些附加条件。 下文中我们假设 $z_0 \in J(f_{c_t}) \cap U_0$，并且存在一个 $m \in \mathbb{N}$，使得 $z_{(m-1)pq} \in U_0$，但 $z_{mpq} \notin U_0$。令 $W_k := \Phi_t(z_{kpq})$。那么我们可以假设 $W_{m-1} \in \Phi_t(U_0)$，但 $W_m \notin \Phi_t(U_0)$。

$\hat{}\ \hat{}$ 通过在 U 和 U_0 的定义中取更小且适当的 R 和 R_0（如有必要，再取一个更小的 T_0），我们可以假设集合 $\Phi_t(\partial U_0)$ 包含于环域中

$$\hat{A} := \left\{ W \in \overline{\mathbb{C}}_W \,:\, 5\hat{r} < |W| < 6\hat{r} \right\}$$

对于任意 $t \in \Delta$，$\hat{r} \asymp R^{-q}$（在上一节中引入）。事实上，我们可以对局部坐标 $\{\psi_t\}$ 的族应用科比畸变定理，以控制像 $\Phi_t(\partial U_0)$ 的形状（离心率）。由于根据命题 10.1，$\operatorname{Re} W_m - \operatorname{Re} W_{m-1} \leq 3/2\hat{}$，我们还可以假设 W_m 包含在这个 A 中。

现在我们断言 $3\pi/4 \leq \arg W_m \leq 5\pi/4$，等价地，$|\arg(-W_m)| \leq \pi/4$。事实上，由于 z_0 包含于朱利亚集中，按照命题 2.4 中的相同论证，W_0 在 G 作用下的轨道必定离开 G 的定义域（如有必要，可取更大的 $\hat{r}$）。换言之，存在一个整数 $k > m$，使得 $|W_k| > \hat{r}$ 且$|W_{k+1}| \leq \hat{r}$。由于根据上述命题，$|\arg(W_k - W_m)| \leq \pi/6$，条件$|W_m| > 5\hat{r}$ 蕴含 $|\arg(-W_m)| \leq \pi/4$。（这里我们使用了 $\cos(5\pi/12) > 1/5$。见图 8。）

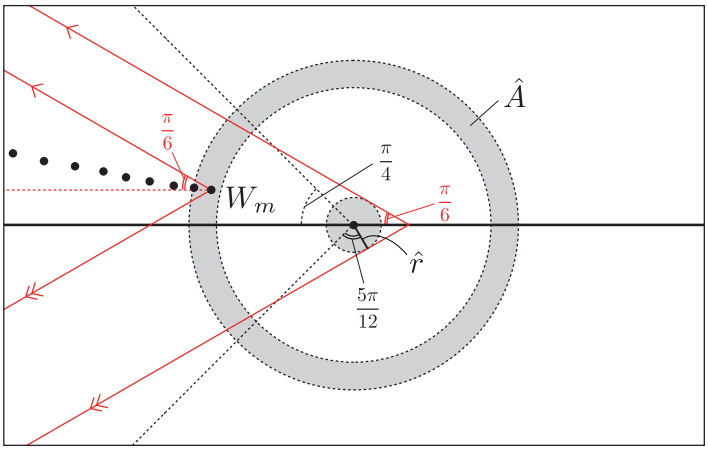


图 8：离开 G 的域 $\Phi_t(U_0)$ 的轨道。

T下面的引理是径向访问条件得出的一个非常重要的结论 on:

引理 I。 存在一个常数 $K_{\mathrm{I}} \in (0,\ 1/(5q)]$，使得对于任意 $t \in \Delta$、 $z_0 \in J(f_{c_t}) \cap U_0$ 和 $k \geq 0$，条件 $|W_k| \leq K_{\mathrm{I}}/|t|$ 蕴含 $|\arg(-W_k)| \leq \pi/4$。此外，对于这样的 W_k，我们有 $|W_{k+1}| < |W_k|$。

因此，我们只能在圆盘 $\mathbb{D}(0,\ K_{\mathrm{I}}/|t|)$ 中负实轴附近找到 W_k 。

证明。 根据上述关于 $|W_m|$ 的假设，我们可以假设存在 $j \in \mathbb{N}$，使得

$$W_{m-j}, W_{m-j+1}, \cdots, W_m \in \left\{W \in \overline{\mathbb{C}}_W \,:\, |W| \leq (5q|t|)^{-1}, |\arg(-W)| \leq \pi/4\right\}$$

并且 $|W_{m-j}| \geq (6q|t|)^{-1}$。注意，条件 $|\arg(-W)| \leq \pi/4$ 蕴含 $|W|/\sqrt{2} \leq -\mathrm{Re}\ W \leq |W|$.

根据命题 10.1，我们有 $\mathrm{Re}\ W_m - \mathrm{Re}\, W_{m-j} \leq 3j/2$，因此

$$3j/2 \geq -|W_m| + |W_{m-j}|/\sqrt{2} \geq -|W_m| + (6\sqrt{2}q|t|)^{-1}.$$

由于假设 $5\hat{r} < |W_m| < 6\hat{r}$ 蕴含 $|W_m| \asymp 1,$，我们得出 $j \geq C_6/|t|$，其中某个常数 $C_6 \asymp 1$ 与 $t \in \Delta$ 无关（必要时取更小的 T_0）。

在情形 2^- 中，与命题 2.4 的证明一样，存在 $k' > j \geq 1$ 使得$|W_{m-k'} - B| > |B|/2$（否则 $W_0 = B^*$）。我们有

$$|W_m - B| \geq |W_{m-k'} - B| + k'd_0 > |W_{m-k'} - B| + C_6 d_0/|t|$$

根据命题 9.2。因此

$$|W_{m-k'}| \geq |B| - |W_{m-k'} - B| > |B| - |W_m - B| + C_6 d_0/|t| \geq -|W_m| + C_6 d_0/|t|.$$

由于 $|W_m| \asymp 1,$，存在一个常数 $K_{\mathrm{I}} \asymp 1$，使得 $|W_{m-k'}| > K_{\mathrm{I}}/|t|$ 对于任意这样的k' 以及 $t \in \Delta$ （如有必要，再取一个更小的 T_0）。因此，如果我们有 $|W_k| \leq K_{\mathrm{I}}/|t|$

对于某个 k，那么 $m-j \le k \le m$，从而 $|\arg(-W_k)| \le \pi/4$。由于 $|W_k| \le K_{\mathrm{I}}/|t|$ 也意味着 $|W_k| \le 1/(5q|t|)$，我们得出 $K_{\mathrm{I}} \le 1/(5q)$。

情形 1 和 2^+ 的证明类似：由 (9.1)，我们有

$$|W_{m-k'} - B| \ge |W_m - B| + k'd_0 > |W_m - B| + C_6 d_0/|t|$$

而不是，且这意味着

$$|W_{m-k'}| \ge |W_{m-k'} - B| - |B| > |W_m - B| - |B| + C_6 d_0/|t| \ge -|W_m| + C_6 d_0/|t|.$$

然后我们重复上述相同的论证。

现在，我们证明条件 $|W_k| \le K_{\mathrm{I}}/|t|$ 蕴含 $|W_{k+1}| < |W_k|$。由命题 10.1，我们得到 $|W_{k+1} - (W_k + 1)| \le 1/2$，因此

$$\left|\frac{W_{k+1}}{W_k}\right| \le \left|1 + \frac{1}{W_k}\right| + \frac{1}{2|W_k|}.$$

由于 $|\arg(-W_k)| \le \pi/4$ 蕴含 $3\pi/4 \le \arg(1/W_k) \le 5\pi/4$，我们得到

$$\left|1 + \frac{1}{W_k}\right| \le \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}\,|W_k|}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}\,|W_k|}\right)^2}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{W_{k+1}}{W_k}\right| &\le 1 - \frac{1}{\sqrt{2}\,W_k} + \frac{1}{2\,|W_k|} + O\left(\frac{1}{|W_k|^2}\right)\\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\,|W_k|} + O\left(\frac{1}{|W_k|^2}\right)\\ &< 1\end{aligned}$$

如有必要，取足够大的 $\hat{r}$。 ■

注记 10.2. 一旦有了 $|W_k| \le K_{\mathrm{I}}/|t|$，那么对于 $k \le j \le m$，$|W_j| \le K_{\mathrm{I}}/|t|$。

命题 10.3。对于任意 $t \in \Delta$、任意不是 $f_{c_t}^{pq}$ 不动点的 $z_0 \in J(f_{c_t}) \cap U_0$，以及任意满足 $0 \le k \le m$ 的 k，我们有

$$|DG^k(W_0)| \asymp |\tau|^k$$

在情形 *1* 或情形 2^+ 中，并且

$$|DG^k(W_0)| \asymp |\tau^*|^k$$

在情形 2^- 中，其中 $W_0 = \Phi_t(z_0)$。隐含常数与 t、z_0 和 k 无关。

情形 1 和情形 2^+ 的证明。由于 $DG(W) = \tau + O(W^{-2})$,

$$DG^k(W_0) = \tau^k \prod_{j=0}^{k-1} \big(1 + O({W_j}^{-2})\big). \tag{10.2}$$

因此，只需证明 $\sum_{j=0}^{k-1} |W_j|^{-2}$ 在 t、W_0 和 k 中一致有界。

与命题 2.4 的证明相同，$\mathbb{D}(B, 3|B|/4)$ 包含在 B^* 的吸引盆中。因此，我们总可以假设 $|W_j| \geq \hat{r}$，并且 $|W_j - B| > |B|/2$ 对于 $j = 0, 1, \ldots, k$ 成立。由 (9.1) 可知，$|W_j - B|$ 关于 j 严格递减。这意味着，如果对某个 $0 \leq k_1 \leq k$ 有 $|W_{k_1} - B| < 4|B|$，那么对所有 $k_1 \leq j \leq k$ 都有 $|W_j - B| < 4|B|$。另一方面，由引理 I 可知，如果对某个 $0 \leq k_2 \leq k$ 有 $|W_{k_2}| \leq K_{\mathrm{I}}/|t|$，那么对所有 $k_2 \leq j \leq k$ $(\leq m)$，都有 $|W_j| \leq K_{\mathrm{I}}/|t|$ 且 $|\arg(-W_j)| \leq \pi/4$。因此，我们可以假设 $W_0, \ldots, W_k$ 的位置为

(i$^+$) $|W_j - B| \geq 4|B|$ 对 $j = 0, \ldots\ldots, k_1 - 1$,

(ii$^+$) $|W_j - B| < 4|B|$ 并且当 $|W_j| > K_{\mathrm{I}}/|t|$ $j = k_1, \ldots, k_2 - 1$,

(iii$^+$) $|W_j - B| < 4|B|$ 并且当 $|W_j| \leq K_{\mathrm{I}}/|t|$ $j = k_2, \ldots, k$。

对于情形 (i$^+$)，再次由 (9.1) 可得

$$|W_j| \geq |W_j - B| - |B| \geq |W_{k_1-1} - B| - |B| + (k_1 - 1 - j)d_0 \geq |B| + (k_1 - 1 - j)d_0.$$

因此

$$\sum_{j=0}^{k_1-1} |W_j|^{-2} = O\left(\sum_{j=0}^{k_1-2} \frac{1}{(k_1 - 1 - j)^2}\right) + \frac{1}{|B|^2} = O\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right) + O\big(|t|^2\big) = O(1).$$

条件 $|W_j - B| < 4|B|$ 意味着 $|W_j| < 5|B| = 5/(q|t|) + O(1)$。因此，情形 (ii$^+$) 蕴含 $|W_j| \asymp |t|^{-1}$，从而 $|W_j|^{-2} \asymp |t|^2$。由 (9.1)，我们得到

$$4|B| > |W_{k_1} - B| \geq |W_{k_2-1} - B| + (k_2 - 1 - k_1)d_0 \geq (k_2 - 1 - k_1)d_0$$

因此 $k_2 - 1 - k_1 = O(|t|^{-1})$。由此可得

$$\sum_{j=k_1}^{k_2-1} |W_j|^{-2} = O(|t|).$$

在 (iii$^+$) 情形下，我们有 $|\arg(-W_j)| \leq \pi/4$，因此 $|W_j|/\sqrt{2} \leq -\mathrm{Re}\, W_j \leq |W_j|$。根据命题 10.1，我们有 $-\mathrm{Re}\, W_j \geq -\mathrm{Re}\, W_k + (k - j)/2$.。因此，我们得到 $|W_j| \geq |W_k|/\sqrt{2} + (k - j)/2 \geq (k - j)/2$，并且

$$\sum_{j=k_2}^{k-1} |W_j|^{-2} = O\left(\sum_{j=k_2}^{k-1} \frac{1}{(k - j)^2}\right) = O\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right) = O(1).$$

情形 2^-. 首先，根据命题 9.1，对于 $0 \le j \le k$，有 $|W_j| \le 1/(qd_0|t|)$（否则 W_j 必须被 ∞ 吸引）。其次，根据命题 9.2，如果对于某个最小的 $k_1 \le k$，有 $|W_{k_1} - B| \ge |B|/2$，那么对于满足 $k_1 \le j \le k$ 的 j，$|W_j - B|$ 严格递增。因此，对于这样的 j，有 $|W_j - B| \ge |B|/2$。此外，如果对于某个 $0 \le k_2 \le k$，有 $|W_{k_2}| \le K_{\mathrm{I}}/|t|$，那么与情形 1 和情形 2^+ 中的情况一样，$W_0, \ldots, W_k$ 的位置必须是

(i$^-$) $|W_j - B| < |B|/2$ 当 $j = 0, \ldots\ldots, k_1 - 1$,

(ii$^-$) $|W_j - B| \ge |B|/2$ 且当 $|W_j| > K_{\mathrm{I}}/|t|$，$\ldots\ldots$，$k_2 - 1$,

(iii$^-$) $|W_j - B| \ge |B|/2$ 且当 $|W_j| \le K_{\mathrm{I}}/|t|$，$\ldots\ldots$，$k$。

Now,

$$\begin{aligned}
&\frac{DG^k(W_0)}{(\tau^*)^k} \\
&= \frac{DG^{k_1-1}(W_0)}{(\tau^*)^{k_1-1}} \cdot \frac{DG^{k-k_1+1}(W_{k_1-1})}{(\tau^*)^{k-k_1+1}} \\
&\asymp 1 \cdot \frac{DG^{k-k_1+1}(W_{k_1-1})}{(\tau^*)^{k-k_1+1}} \qquad \text{(by Proposition 9.3)} \\
&\asymp \Big(\frac{\tau}{\tau^*}\Big)^{k-k_1+1} \prod_{j=k_1-1}^{k-1} \big(1 + O({W_j}^{-2})\big) \qquad \text{(as (10.2))} \\
&\asymp \big(1 + O(t^2)\big)^{k-k_1+1} \cdot \prod_{j=k_1-1}^{k-1} \big(1 + O({W_j}^{-2})\big) \qquad \Big(\text{since } \frac{\tau}{\tau^*} = 1 + O(t^2).\Big)
\end{aligned}$$

因为 $|W_{k_1-1}| \ge |B| - |W_{k_1-1} - B| > |B| - |B|/2 = |B|/2 = O(1/|t|)$ 且因为 $|W_{k_1-1}| \le 1/(qd_0|t|)$，所以我们有 $|W_{k_1-1}^{-2}| = O(|t|^2)$。

根据命题 9.2，我们知道

$$|W_k - B| \ge |W_{k_1} - B| + (k - k_1)d_0 \ge (k - k_1)d_0$$

因此 $k - k_1 \le (|W_k| + |B|)/d_0 = O(|t|^{-1})$。这意味着 $(1 + O(t^2))^{k-k_1+2} = 1 + O(t)$。

还需对 $\prod_{j=k_1}^{k-1} \big(1 + O(W_j^{-2})\big)$ 作出估计。同样，只需证明 $\sum_{j=k_1}^{k-1} |W_j|^{-2}$ 在 k 和 W_0 中一致有界，即可得到该估计。

对于 (ii$^-$) 情形，由于 $|W_j| < 1/(qd_0|t|)$，我们得到 $|W_j| \asymp |t|^{-1}$。因此 ，

$$\sum_{j=k_1}^{k_2-1} |W_j|^{-2} = O(|t|) \qquad \big(\text{since } k - k_1 = O(|t|^{-1}) \text{ so is } k_2 - k_1.\big)$$

(iii$^-$) 情形的证明与 (iii$^+$) 情形完全相同。

命题 10.3 的证明完成。 ■

分支坐标中的引理 H。为了给出以下形式的和的估计

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{|Df_c^{kpq}(z_j)|}\quad\text{and}\quad\sum_{k=0}^{m-1}\frac{|c-\hat{c}|+|f_c^{kpq}(z_j)-b_j(c)|}{|Df_c^{kpq}(z_j)|}$$

利用 $0\le j\le p-1$，我们将它们改写为 W 坐标。只需考虑 $j=0$ 的情形，因为我们可以应用引理 G 证明中的相同论证。

令 U 使得 $W_k := \Psi_t(z_k)$，其中 $z_k \in \Phi_t(z_{kpq})$。注意，对于任意 $z\in U$，$|D\psi_t(z)|\asymp 1$，其中隐含常数与 $t\in\Delta$ 无关。由于 $D\Psi_t(w)=\lambda_t^{q^2}/w^{q+1}$，我们有

$$|D\Phi_t(z)|=|D\Psi_t(w)\cdot D\psi_t(z)|\asymp|w|^{-(q+1)}\asymp|W|^{1+1/q}.$$

由链式法则，我们得到

$$\begin{aligned}|Df_{c_t}^{kpq}(z_0)|&=|D(\Phi_t^{-1}\circ G^k\circ\Phi_t)(z_0)|=|D\Phi_t^{-1}(W_k)\cdot DG^k(W_0)\cdot D\Phi_t(z_0)|\\&\asymp|W_k|^{-1-1/q}\cdot|DG^k(W_0)|\cdot|W_0|^{1+1/q}\\&=\left|\frac{W_0}{W_k}\right|^{1+1/q}\cdot|DG^k(W_0)|.\end{aligned}$$

令

$$\mathcal{S}_1:=\sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{W_k}{W_0}\right|^{1+1/q}\cdot\frac{1}{|DG^k(W_0)|}\asymp\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{|Df_{c_t}^{kpq}(z_0)|},$$

and

$$\mathcal{S}_2:=\frac{1}{|W_0|^{1/q}}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{W_k}{W_0}\right|\cdot\frac{1}{|DG^k(W_0)|}\asymp\sum_{k=0}^{m-1}\frac{|f_{c_t}^{kpq}(z_0)-b_t|}{|Df_{c_t}^{kpq}(z_0)|},$$

其中我们使用了以下事实：$|f_c^{kpq}(z_0)-b_0(c)|=|z_{kpq}-b_t|\asymp|W_k|^{-1/q}$。现在，引理 H 归结为以下估计

$$\mathcal{S}_1=O\left(\frac{1}{|t|}\right)\quad\text{and}\quad\mathcal{S}_2=O\left(\frac{1}{|t|^{1-1/q}}\right).$$

事实上，命题 2.2 推出

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{|Df_{c_t}^{kpq}(z_0)|}\asymp\mathcal{S}_1=O\left(\frac{1}{|t|}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{|c_t-\hat{c}|}}\right)$$

在情形 1 中，并且

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{|c_t-\hat{c}|+|f_{c_t}^{kpq}(z_0)-b_t|}{|Df_{c_t}^{kpq}(z_0)|}&\asymp|c_t-\hat{c}|\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2\\&=O\left(|t|\cdot\frac{1}{|t|}+\frac{1}{|t|^{1-1/q}}\right)=O\left(\frac{1}{|c_t-\hat{c}|^{1-1/q}}\right)\end{aligned}$$

在情形 2 中。

情形 2^-下引理 H 的证明。 我们将用到这一事实： $\tau^* = 1 + qt + O(t^2)$，并且

$$|\tau^*| = 1 + \operatorname{Re}(qt) + O(|t^2|) \geq 1 + qd_0|t|$$

对于 $t \in \Delta$，若有必要，我们取一个更小的 T_0。

首先，假设 $|W_0| \geq K_{\mathrm{I}}/|t|$。由于根据命题 9.1，对于任意 k =0，1，……，m，它必定是 $|W_k| \leq 1/(qd_0|t|)$（否则 W_k 会被 ∞ 吸引），因此我们有 $|W_0| \asymp |t|^{-1}$ 和 $|W_k/W_0| = O(1)$。于是，根据命题 10.3，我们有

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \left|\frac{W_k}{W_0}\right|^{1+1/q} \cdot \frac{1}{|DG^k(W_0)|} = \sum_{k=0}^{m-1} O(1) \cdot \frac{1}{|\tau^*|^k} = O\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(1+qd_0|t|)^k}\right) = O\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

and

$$\mathcal{S}_2 = \frac{1}{|W_0|^{1/q}} \sum_{k=0}^{m-1} \left|\frac{W_k}{W_0}\right| \cdot \frac{1}{|DG^k(W_0)|} = |t|^{1/q} \sum_{k=0}^{m-1} O(1) \cdot \frac{1}{|\tau^*|^k} = O\left(\frac{1}{|t|^{1-1/q}}\right).$$

接下来，假设 $|W_0| \leq K_{\mathrm{I}}/|t|$。根据命题 10.1 和引理 I，我们有$|\arg(-W_k)| \leq \pi/4$，因此对于任意 $k = 0$，1，……，m，有 $|\bar{W}_k|/\sqrt{2} \leq -\operatorname{Re} W_k \leq |W_k|$。再次根据命题 10.1，我们有 $\operatorname{Re} W_0 + k/2 \leq \operatorname{Re} W_k$。因此

$$0 \leq |W_k|/\sqrt{2} \leq -\operatorname{Re} W_k \leq -\operatorname{Re} W_0 - k/2 \leq |W_0| - k/2 \tag{10.3}$$

这就意味着

$$\left|\frac{W_k}{W_0}\right| \leq \sqrt{2} \cdot \frac{|W_0| - k/2}{|W_0|} = O(1).$$

特别地，将 $k = m$ 代入（10.3），可得 $m \leq 2|W_0| = O(|W_0|)$。

由于 $|W_0| \leq K_{\mathrm{I}}/|t|$，我们有

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^{m-1} O(1) \cdot \frac{1}{|\tau^*|^k} \leq \sum_{k=0}^{m-1} O(1) \cdot 1^k = O(m) = O(|W_0|) = O\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2 &= \frac{1}{|W_0|^{1/q}} \sum_{k=0}^{m-1} O(1) \cdot \frac{1}{|\tau^*|^k} \leq \frac{1}{|W_0|^{1/q}} \sum_{k=0}^{m-1} O(1) \cdot 1^k \\ &= \frac{O(m)}{|W_0|^{1/q}} = O(|W_0|^{1-1/q}|) = O\left(\frac{1}{|t|^{1-1/q}}\right).\end{aligned}$$

这就完成了情形 2^- 的证明。

情形 1 和情形 2^+ 的预备工作。我们将使用这一事实： $\tau^{-1} = 1 + qt + O(t^2)$ 以及

$$|\tau|^{-1} = 1 + \operatorname{Re}(qt) + O(|t^2|) \geq 1 + qd_0|t|$$

对于 $t \in \Delta$，如果有必要，我们可以取一个更小的 T_0。

使用上田模数 非常方便，其定义如下（见 [U]）：对于 $W \neq \infty$,

$$N(W) := |W - B| - |B|.$$

然后很容易验证

- $|W| \geq N(W)$; 且
- $N(W) \geq |W|/3$ 当 $|W - B| \geq 4|B|$。

事实上，$|W| \geq N(W)$ 只是三角不等式；而当 $|W - B| \geq 4|B|$ 时，我们有 $|W| \geq 3|B|$，因此 $N(W)/|W| = |1 - B/W| - |B/W| \geq 1/3$。

这里还有另一个有用的事实：

命题10.4. 在情形 *1* 和情形 $\mathcal{2}^+$ 中，我们有

$$N(G^{-1}(W)) \geq |\tau|^{-1}N(W) + d_0$$

$\hat{}$ $\hat{}$在定义 U 和 Δ 时取充分小的 R 和 T_0 即可。

证明。 由于 $|G^{-1}(W) - B| = |\tau|^{-1}|W - B| + O(|W^{-1}|)$，我们有

$$N(G^{-1}(W)) = |\tau|^{-1}N(W) + \frac{|\tau|^{-1} - 1}{|1 - \tau|} + O(|W^{-1}|).$$

如有必要，取更小的 T_0，则有

$$\frac{|\tau|^{-1} - 1}{|1 - \tau|} = \frac{\operatorname{Re} t}{|t|}(1 + O(|t|)) \geq \frac{\cos A_0}{2} = 2d_0$$

对任意 $t \in \Delta$均成立。如有必要，取更小的 R （从而使$\hat{}r$更大），则对任意 $|W| \geq \hat{}r$，有$O(|W^{-1}|) \leq (\cos A_0)/4 = d_0$。因此，所需的不等式成立。■

命题 10.5. 在情形 *1* 和情形 $\mathcal{2}^+$中，我们有

$$\left|\frac{W_k}{W_0}\right| = O(|\tau|^k)$$

对任意 $k = 0, 1, \ldots, m$。

证明。 我们采用命题 10.3 的论证，并假设

(i$^+$) $|W_j - B| \geq 4|B|$ 对于 $j = 0, \ldots, k_1 - 1$, (ii$^+$) $|W_j - B| < 4|B|$ 以及 $|W_j| > K_1/|t|$ 对于 $j = k_1, \ldots, k_2 - 1$,

(iii$^+$) $|W_j - B| < 4|B|$ 以及 $|W_j| \leq K_1/|t|$ 对于 $j = k_2, \ldots\ldots, k$

对于某些 k_1 和 k_2。现在我们考虑乘积

$$\left|\frac{W_k}{W_0}\right| = \left|\frac{W_{k_1-1}}{W_0}\right| \cdot \left|\frac{W_{k_2}}{W_{k_1-1}}\right| \cdot \left|\frac{W_k}{W_{k_2}}\right|. \tag{10.4}$$

在 (i$^+$) 的情况下，我们可以应用命题10.4，从而得到

$$|W_0| \geq N(W_0) \geq |\tau|^{-(k_1-1)}N(W_{k_1-1}) \geq |\tau|^{-k_1+1}|W_{k_1-1}|/3.$$

因此 $|W_{k_1-1}/W_0| \le 3\,|\tau|^{k_1-1}$。由于 $|W_{k_1-1}| \ge 3|B| = 3/(q|t|) + O(1)$ 且 $|W_{k_2}| \le K_{\mathrm{I}}/|t|$，我们有 $|W_{k_2}/W_{k_1-1}| = O(1)$。根据引理 I，在 (iii$^+$) 的情况下，$|W_j|$ 是递减的，因此我们有 $|W_k/W_{k_2}| \le 1$。因此，由 (10.4) 可得 $|W_k/W_0| = O(|\tau|^{k_1-1})$。

为了证明估计 $|W_k/W_0| = O(|\tau|^k)$，只需证明 $|\tau|^{k-(k_1-1)} = O(1)$。由于 $|W_{k_1} - B| \le 4|B|$，因此 $|W_{k_1}| \le 5|B|$；由 (9.1) 得

$$|W_{k_1} - B| \ge |W_k - B| + (k - k_1)\, d_0 \ge (k - k_1)\, d_0$$

从而 $k - k_1 \le (|W_{k_1}| + |B|)/d_0 = O(|t|^{-1})$。因此

$$|\tau|^{k-(k_1-1)} = (1 - \mathrm{Re}\,(qt) + O(t^2))^{k-k_1} \cdot |\tau| = O(1)$$

这就完成了证明。 ■

情形 1 和情形 2^+下引理 H 的证明。由命题 10.3 和 10.5，得

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \left|\frac{W_k}{W_0}\right|^{1+1/q} \cdot \frac{1}{|DG^k(W_0)|} = \sum_{k=0}^{m-1} O(|\tau|^{k(1+1/q)}) \cdot \frac{1}{|\tau|^k} = O\left(\sum_{k=0}^{m-1} |\tau|^{k/q}\right).$$

由于 $|\tau|^{1/q} \le 1 - d_0|t|$ 对 $t \in \Delta$ 成立（如有必要，可取更小的 T_0），我们得到 $\mathcal{S}_1 = O(|t|^{-1})$。

类似地，我们有

$$\mathcal{S}_2 = \frac{1}{|W_0|^{1/q}} \sum_{k=0}^{m-1} \left|\frac{W_k}{W_0}\right| \cdot \frac{1}{|DG^k(W_0)|} = \frac{1}{|W_0|^{1/q}} \sum_{k=0}^{m-1} O(|\tau|^k) \cdot \frac{1}{|\tau|^k} = \frac{O(m)}{|W_0|^{1/q}}.$$

首先我们假设 $|W_0 - B| < 4|B|$。于是有 $|W_0| < 5|B| = O(|t|^{-1})$。由 (9.1),

$$|W_0| \ge |W_0 - B| - |B| \ge |W_m - B| - |B| + md_0 \ge -|W_m| + md_0.$$

ˆ 根据 $W_m \in A$这一假设，我们有 $|W_m| < 6\hat{}r$，从而 $md_0 \le |W_0| + 6\hat{}r$。由于 $5\hat{}r < |W_0| = O(|t|^{-1})$，我们得到 $m = O(|W_0|)$。因此

$$\mathcal{S}_2 = \frac{O(m)}{|W_0|^{1/q}} = O(|W_0|^{1-1/q}) = O\left(\frac{1}{|t|^{1-1/q}}\right).$$

接下来我们假设 $|W_0 - B| \ge 4|B|$。存在一个 $k \ge 0$，使得

- $0 \le j \le k$时的 $|W_j - B| \ge 4|B|$；并且
- $k \le j \le m$时的 $|W_j - B| < 4|B|$。

（我们可以分别将证明命题 10.5 中的 k 和 m 视为 $k_1 - 1$ 和 k。）由于 $|W_k/W_0| \le 3|\tau|^k$，正如命题 10.5 的证明中所述，并且对于 $t \in \Delta$，有 $|W_k| \ge 3|B| > 1/(q|t|)$，因此我们有 $3|\tau|^k \ge 1/(q|tW_0|)$。于是

$$1 < |\tau|^{-k} \le 3q|tW_0|, \quad \text{or equivalently} \quad 0 < k \log|\tau|^{-1} \le \log(3q|tW_0|).$$

这意味着

$$0 < k(\operatorname{Re}(qt) + O(t^2)) \le \log(3q|tW_0|).$$

由于对于 $t \in \Delta$ 有 $\operatorname{Re}(qt) + O(t^2) \ge (q|t|\cos A_0)/2$（必要时取更小的 T_0），我们得出结论

$$k = O\left(\frac{\log(3q|tW_0|)}{|t|}\right).$$

如命题 10.5 的证明中所示，我们有 $m - k = O(1/|t|)$。由于 $|W_0| \ge 3|B| \ge 2/(q|t|)$（对于 $t \in \Delta$，必要时取更小的 T_0），我们得到 $\log(3q|tW_0|) \ge \log 6 > 1$，因此

$$m = k + (m-k) = O\left(\frac{\log(3q|tW_0|)}{|t|}\right) + O\left(\frac{1}{|t|}\right) = O\left(\frac{\log(3q|tW_0|)}{|t|}\right).$$

因此，我们得出结论：

$$\mathcal{S}_2 = \frac{O(m)}{|W_0|^{1/q}} = O\left(\frac{\log(3q|tW_0|)}{|tW_0|^{1/q}}\right) \cdot \frac{1}{|t|^{1-1/q}} = O\left(\frac{1}{|t|^{1-1/q}}\right),$$

其中我们使用了当 $3qx \ge 6$ 时 $x^{-1/q}\log(3qx)$ 有界这一事实。 ■

11 引理 D 的证明

本节我们给出引理 D 的证明。由于该证明严重依赖引理 I，因此我们用参数 $t \in \Delta \cup \{0\}$ 重新表述引理 D。（注意，我们有 $\hat{c} = c_0$）。

命题 11.1. 存在常数 $K_{\mathrm{D}} > 0$ 和 $\nu_0 \in (0,\ R_0)$，使得对于任意 $\nu \in (0,\ \nu_0)$，都存在常数 $T_0 = T_0(\nu) \in (0,\ 2\cos A_0)$，使得对于任意 $t \in \Delta = \Delta(A_0,\ T_0)$、$\zeta \in P(f_{c_0})$ 和 $z \in J(f_{c_t}) - \mathcal{V}(c_t)$，

$$|\zeta - z| \ge K_{\mathrm{D}}\,\nu.$$

不失一般性，我们可以假设 $K_{\mathrm{D}} \le 1$。

证明。 我们用反证法证明。假设对于任意 $K_{\mathrm{D}} > 0$ 和 $\nu_0 \in (0,\ R_0)$，都存在一个 $\nu \in (0,\ \nu_0)$，使得对于任意 $T_0 \in (0,\ 2\cos A_0)$，都存在 $t \in \Delta = \Delta(A_0,\ T_0)$、$\zeta \in P(f_{c_0})$ 和 $z \in J(f_{c_t}) - \mathcal{V}(c_t)$，满足

$$|\zeta - z| < K_{\mathrm{D}}\,\nu.$$

例如，令 $K_{\mathrm{D}} := 1/n$, $\nu_0 := R_0/n$ 对于整数 $n \ge 1$。那么对于任意充分大的 n，我们可以假设 $R_0/n < 1$，并且存在一个 $\nu_n \in (0, R_0/n)$，使得对于 $T_0 := 2\nu_n^{2q}\cos A_0$，我们可以找到序列 $t_n \in \Delta = \Delta(A_0, T_0)$、$\zeta_n \in P(f_{c_0})$ 和 $z_n \in J(f_{c_n}) - \mathcal{V}(c_n)$，满足 $c_n = c_{t_n}$，使得

$$|\zeta_n - z_n| < \frac{1}{n} \cdot \nu_n.$$

（现在，$\mathcal{V}(c_n) = \bigcup_{k=0}^{p-1} f_{c_n}^{-k}(V_0)$ 以及 $V_0 = \mathbb{D}(\hat{}b,\ \nu_n)$。）我们可以假设 ζ_n 和 z_n 经过一个子序列后趋于同一个极限 $\zeta \in P(f_{c_0})$，因为 $P(f_{c_0})$ 是紧致的，并且朱利亚集 $J(f_{c_n})$ 是一致有界的。此外，存在一个 $j \geq 0$，使得 $f_{c_0}^j(\hat{}\zeta)$ 包含于 $\mathbb{D}(\hat{}b,\ R_0/2) \subset U_0 = \mathbb{D}(\hat{}b,\ R_0)$ 中。分别将 ζ_n 和 z_n 替换为 $f_{c_0}^j(\zeta_n)$ 和 $f_{c_n}^j(z_n)$ 后，我们可以假设对于充分大的 n，$\zeta_n \in U_0$ 和 $z_n \in U_0 - V_0$。

在命题 2.3 中针对 $t = 0$ 给出的 $w = \psi_0(z)$ 的 w 坐标中，可以观察到 $f_{c_0}^{pq}$ 在 U_0 中的局部动力学表现为 $w \mapsto w(1 + w^q + O(w^{2q}))$，而 $\psi_0(\zeta_n)$ 在此映射下的轨道沿吸引方向（即满足 $\mathrm{Im}(w^q) = 0$ 且 $\mathrm{Re}(w^q) < 0$ 的 w 的集合）切向趋于 0。这意味着（如有必要，取充分大的 j），$\psi_0(\zeta_n)$ 包含于集合 $X := \{w \in \psi_0(U_0) : |\arg(-w^q)| \leq \pi/4\}$ 中。

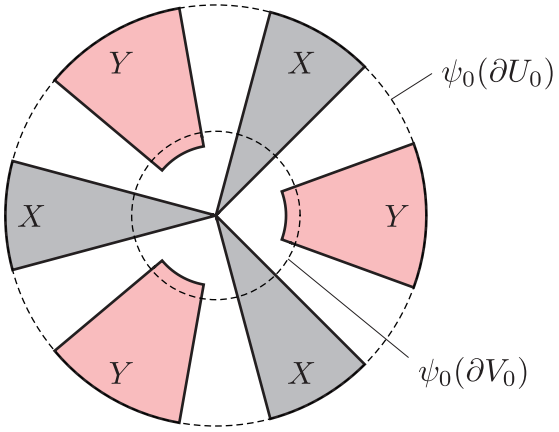


图 9：$q = 3$ 的 w 坐标中的集合 X 和 Y。

接下来我们在局部坐标 $w = \psi_{t_n}(z)$ 中考虑 $z_n \in U_0 - V_0$。由于 ψ_{t_n} 是ˆ单叶且 $\nu_n < |z_n - b| < R_0$，存在一个与 n 无关的常数 $C_7 > 0$，使得 $w_n := \psi_{t_n}(z_n)$ 满足 $|w_n| \geq C_7\nu_n$。在 W 坐标 $W = \Psi_{t_n}(w)$ 中，$= -\lambda_{t_n}^{q^2}/(qw^q)$，我们有 $\arg(-W) = -\arg(w^q) + O(t_n)$，因为 $\lambda_{t_n}^{q^2} = 1 + O(t_n)$。现在，对于 $W_n = \Psi_{t_n}(w_n) = \Psi_{t_n} \circ \psi_{t_n}(z_n)$，当 n 足够大时，我们得到

$$|W_n| \leq \left|\frac{1 + O(t_n)}{qC_7^q\nu_n^q}\right| \leq \left|\frac{\sqrt{2\cos A_0}}{qC_7^q}\frac{1 + O(|t_n|)}{\sqrt{|t_n|}}\right| \leq \frac{K_{\mathrm{I}}}{|t_n|}.$$

因此，由引理 I，我们有 $|\arg(-W_n)| \leq \pi/4$，因为 $z_n \in J(f_{c_n}) \cap U_0$。因此，在 w 坐标中，我们有 $|\arg(w_n^q)| = |\arg(-W_n)| + O(|t_n|) \leq \pi/4 + O(\nu_n^{2q})$，其中 $w_n = \psi_{t_n}(z_n)$。

我们还有 $|\psi_{t_n}(z_n) - \psi_0(z_n)| = O(|t_n|) = O(\nu_n^{2q})$，因为映射 $(t, z) \mapsto \psi_t(z)$ 关于 t 和 z 都是全纯的。因此，$\psi_0(z_n)$ 包含于 $Y := \{w \in \psi_0(U_0) : |\arg(w^q)| \leq \pi/3,\ |w| \geq C_7\nu_n \cdot (3/4)\}$，当 n 充分大时成立。由此可得，$|\psi_0(\zeta_n) - \psi_0(z_n)|$ 大于集合 X 和 Y之间的距离，而该距离与 V_0 的半径 ν_n 相当（见图 9）。然而，ψ_0 的单叶性意味着，$|\psi_0(\zeta_n) - \psi_0(z_n)|$ 与 ν_n 并不相当，依据是 $|\psi_0(\zeta_n) - \psi_0(z_n)| \asymp |\zeta_n - z_n| < \nu_n/n$。这就产生了矛盾。■

12 引理 C 的证明

我们将证明，对于某个常数 κ_{C}，有 $|Df_c^{M'-M}(z_M)| \geq \kappa_{\mathrm{C}}/\nu$，且该常数不依赖于满足 $t \in \Delta$ 的 $c = c_t$。通过选取充分小的 ν，我们有 $\Lambda := \kappa_{\mathrm{C}}/\nu > 1$。

与引理 A 的证明中一样，我们假设 $M = 0$ and $M' = mpq + L$ for ˆ which $z_0 \in V_0$（等价地，$|z_0 - b| < \nu$），$z_{(m-1)pq} \in U_0$，$z_{mpq} \notin U_0$（等价地，ˆ$|z_{mpq} - b| \geq R_0$），以及 $z_{M'} \in V_0$。由链式法则可得

$$|Df_c^{M'}(z_0)| = |Df_c^{mpq}(z_0)| \cdot |Df_c^{L}(z_{mpq})|. \tag{12.1}$$

首先，我们来估计 $|Df_c^{mpq}(z_0)|$。对于 $c = c_t$ ($t \in \Delta$)，令 $b(c)$ 为命题 2.3 中给出的周期为 p 的ˆ周期点 b_t，其中当 $c = c_t$ 趋于ˆˆc 时，$b(c) \to b$。我们可以假设对于 $c \approx$ˆc，有 $|b(c) - b| \leq \nu$；由科比畸变定理可得

$$|Df_c^{mpq}(z_0)| \asymp \frac{|z_{mpq} - b(c)|}{|z_0 - b(c)|} \geq \frac{|z_{mpq} - \hat{b}| - |b(c) - \hat{b}|}{|z_0 - \hat{b}| + |b(c) - \hat{b}|} \geq \frac{R_0 - \nu}{\nu + \nu}.$$

这意味着，对某个与 $c \approx$ˆc、z_0 和 $\nu \ll 1$ 无关的常数 $C_8 > 0$，有 $|Df_c^{mpq}(z_0)| \geq C_8/\nu$。

接下来，我们给出形如 $|Df_c^{L}(z_{mpq})| \geq C_9$ 的估计，其中 C_9 是与 $c \approx$ˆc、$\nu \ll 1$ 和 $z_0 \in J(f_c)$ 无关的常数。（于是，由 (12.1)，令 $\kappa_{\mathrm{C}} := C_8 C_9$ 即可完成证明。）

与引理 A 的证明中一样，如有必要，可缩小 U_0，从而总可以假设 $L > p$。由于 $z_{M'} \in V_0$，我们有 $z_{M'-p} \in f_c^{-p}(V_0)$，因此 $|Df_c^{p}(z_{M'-p})| \geq \xi^p$。由命题 4.1 和引理 F 中的不等式 (4.1)，可得

$$\begin{aligned}
|Df_c^{L}(z_{mpq})| =& |Df_c^{L-p}(z_{mpq})||Df_c^{p}(z_{M'-p})| \\
\geq& \frac{\rho(z_{mpq})}{\rho(z_{M'-p})} A^{L-p} \cdot \xi^p \\
\geq& \rho(z_{mpq}) \cdot \operatorname{dist}\left(z_{M'-p}, P(f_{\hat{c}})\right) \cdot \xi^p.
\end{aligned}$$

由于 $z_{mpq} \notin U_0$ 和 z_{mpq} 与抛物周期有确定的距离，z_{mpq} 与后临界集 $P(f_{\hat{c}})$ 之间的距离大于一个与 $c \approx$ˆc、$\nu \ll 1$ 和 $z_0 \in J(f_c)$ 无关的正常数。（事实上，如有必要，通过取更小的 R_0，我们可以应用引理 D 的证明来得到 $\operatorname{dist}(z_{mpq}, P(f_{\hat{c}})) \geq K_{\mathrm{D}} R_0$。）因此，我们始终有 $\rho(z_{mpq}) \asymp 1$。最后，我们证明 $\operatorname{dist}(z_{M'-p}, P(f_{\hat{c}}))$ 与零之间存在一致的距离。由于 $z_{M'} \in V_0$，$\operatorname{dist}(z_{M'-p}, P(f_{\hat{c}}))$ 只有在 $z_{M'-p}$ 属于 $f_c^{-p}(V_0)$ 的、包含于 U_0 中的连通分支 V_0' 时才可能接近 0。（见图 6。）然而，f_c^p 在 U_0 上的局部动力学不允许存在同时满足 $z \in V_0' - V_0$ 和 $f_c^p(z) \in V_0$ 的任何点 $z \in J(f_c)$。（更准确地说，我们可以应用命题 10.1 和引理 I 来排除 Julia 集中的这种 z。）因此，$z_{M'-p}$ 属于 $f_c^{-p}(V_0)$ 的一个连通分支，该分支与 $P(f_{\hat{c}})$ 有确定的距离，并且 $\operatorname{dist}(z_{M'-p}, P(f_{\hat{c}}))$ 有一个与 $c \approx$ˆc、$\nu \ll 1$ 和 $z_0 \in J(f_c)$ 无关的正常数下界。总之，$|Df_c^{L}(z_{mpq})|$ 与零之间的距离大于一个与 $c \approx$ˆc、$\nu \ll 1$ 和 $z_0 \in J(f_c)$ 无关的常数。■

13 定理 1.2 和 1.3 的证明

在本节中，我们将一并证明定理 1.2 和定理 1.3。

定理 1.2 和 1.3 的证明。设 σ_0 为厚内部射线$\mathcal{I}(\theta,\ \delta)$上的任意一点，且 $\ell := |\sigma_0 - \hat{c}|$。对于每个 $n = 0,\ 1,\ .....,$ 令

$$E_n := \left\{ c \in \mathcal{I}(\theta,\delta) \ :\ \frac{\ell}{2^{n+1}} \le |c-\hat{c}| \le \frac{\ell}{2^n} \right\}.$$

注意， $E_n \asymp \ell/2^n$ 的直径，并且对于任意 $c \in E_n$，我们有 $|c - \hat{c}| \asymp \ell/2^n$。

我们为每个 $n \ge 1$ 取一个 $\sigma_n \in E_n$。然后，我们可以用一条位于 $E_n \cup E_{n+1}$ 内、长度与 $\ell/2^n$ 相容的分段光滑路径 γ_n 将 σ_n 和 σ_{n+1} 连接起来。根据主定理，我们有

$$\left|\frac{d}{dc}z(c)\right| \le \frac{K}{|c-\hat{c}|^{1-1/Q}} \asymp \left(\frac{\ell}{2^n}\right)^{-1+1/Q}$$

对于任意的 $c \in \gamma_n$ 和 $n \ge 0$。因此

$$|z(\sigma_{n+1}) - z(\sigma_n)| = \left|\int_{\gamma_n} \frac{d}{dc}z(c)\,dc\right| = O\left(\left(\frac{\ell}{2^n}\right)^{-1+1/Q} \cdot \frac{\ell}{2^n}\right) = O\left(\frac{1}{2^{n/Q}}\right)\cdot \ell^{1/Q}.$$

由此可得，序列 $\{z(\sigma_n)\}_{n\ge 0}$ 是柯西序列，并将极限记为 $z(\hat{c})$。（容易验证，该极限与序列$\{\sigma_n\}$ 和 $\{\gamma_n\}$的选取无关。）此外，我们有

$$|z(\sigma_0) - z(\sigma_n)| \le O\left(1 + \frac{1}{2^{1/Q}} + \cdots + \frac{1}{2^{(n-1)/Q}}\right)\cdot \ell^{1/Q} = O(\ell^{1/Q})$$

从而 $|z(\sigma_0) - z(\hat{c})| = O(\ell^{1/Q}) = O(|\sigma_0 - \hat{c}|^{1/Q})$，其中隐含常数仅取决于 $\hat{c}$ 以及厚内部射线的厚度 δ。这证明了定理 1.2 中的 (1.2)。

半共轭。接下来我们证明 $z(\hat{c})$ 属于朱利亚集 $J(f_{\hat{c}})$。对于每个 $z_* \in J(f_\sigma)$ 及其沿厚内部射线 $\mathcal{I}(\theta,\delta)$ 的运动 $z(c) = h_c(z_*) = H(c, z_*)$，我们按照上述方式通过极限 $z(\hat{c})$ 定义 $h_{\hat{c}}(z_*)$。由于 $h_c\colon J(f_\sigma) \to J(f_c)$ 连续，且当 $c \in \mathcal{I}(\theta,\delta)$ 趋于 $\hat{c}$ 时， h_c 到 $h_{\hat{c}}$ 的收敛是一致的，因此 $h_{\hat{c}}\colon J(f_\sigma) \to h_{\hat{c}}(J(f_\sigma))$ 也连续。由此，根据 $f_c \circ h_c = h_c \circ f_\sigma$，我们得到 $f_{\hat{c}} \circ h_{\hat{c}} = h_{\hat{c}} \circ f_\sigma$。特别地，这意味着 $f_{\hat{c}} \circ h_{\hat{c}}(J(f_\sigma)) = h_{\hat{c}}(J(f_\sigma))$，因而像集 $h_{\hat{c}}(J(f_\sigma))$ 是一个紧致的正向不变集，且包含于 $f_{\hat{c}}$ 的填充 Julia 集中。假设存在一个 $z_* \in J(f_\sigma)$，使得 $h_{\hat{c}}(z_*) = z(\hat{c}) \in h_{\hat{c}}(J(f_\sigma))$ 属于 $f_{\hat{c}}$ 的 Fatou 集。实际上，它属于 b 的吸引盆，因此存在一个 l，使得对任意 $k \ge 0$， $f^{l+kpq}\hat{c}(z(\hat{c}))$ 都包含于 V_0 中。由于 $h_{\hat{c}}$ 连续， z_* 的任意邻近点在 $h_{\hat{c}}$ 下的像也属于同一吸引盆。此外，由于在 f_σ 的动力系统中非最终周期点在 $J(f_\sigma)$ 中稠密，我们可以假设 z_* 的轨道 $f_\sigma^n(z_*)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ 从未落在周期点上。由 $f^{l+kpq}\hat{c}(z(\hat{c})) = h_{\hat{c}}(f_\sigma^{l+kpq}(z_*))$ 以及 h_c 到 $h_{\hat{c}}$ 的一致收敛，我们得到

$h_c(f_\sigma^{l+kpq}(z_*)) \in V_0$ 对任意 k 和 $c \approx \hat{c}$ 都成立。由于 $h_c(f_\sigma^{l+kpq}(z_*)) \in J(f_c)$，命题 2.4 表明 $h_c(f_\sigma^{l+kpq}(z_*))$ 是包含于 U_0 中的排斥周期点。这是不可能的，因为 z_* 不是最终周期的。定理 1.2 的证明至此完成。

为确认 $h_{\hat{c}}$ 是半共轭，我们证明 $h_{\hat{c}}$ 的满射性： $J(f_\sigma) \to J(f_{\hat{c}})$：首先，任取一个排斥周期点 $\hat{x} \in J(f_{\hat{c}})$。由于存在一个全纯族 $x(c)$，由排斥周期点构成，且当 c 充分接近 $\hat{c}$ 时满足 $\hat{x} = x(\hat{c})$，因此对于任意 $c \in \mathcal{I}(\theta, \delta)$，存在某个 $z_0 \in J(f_\sigma)$ 使得 $h_c(z_0) = x(c)$。特别地，我们有$h_{\hat{c}}(z_0) = \hat{x}$。接下来，任取 $w \in J(f_{\hat{c}})$，并取 $f_{\hat{c}}$ 的一列排斥周期点 $\hat{x}_n$，当 $n \to \infty$ 时，该序列收敛于 w。（这样的序列存在，因为排斥周期点在朱利亚集中稠密。）令 $z_n \in J(f_\sigma)$ 为满足$h_{\hat{c}}(z_n) = \hat{x}_n$ 的排斥周期点。那么，由连续性可知，序列 z_n 的任意聚点 y 都满足 $h_{\hat{c}}(y) = w$。

最后，我们验证定理 1.3 的性质 (1)–(3)。性质 (3) 直接由定理 1.2 中的 (1.2) 得出。（特别地，我们得到推论 1.4。）为证明 (1) 和 (2)，设 $\eta_c := h_{\hat{c}} \circ h_c^{-1}$: $J(f_c) \to J(f_{\hat{c}})$ 对于 $c \approx \hat{c}$，使得 η_c 是 f_c 与 $f_{\hat{c}}$ 之间的半共轭，并且根据 (3) 满足 $|\eta_c(z) - z| \le K'|c - \hat{c}|^{1/Q}$。我们假设 c 充分接近 $\hat{c}$，使得 $K'|c - \hat{c}|^{1/Q} < K_{\mathrm{D}}\,\nu/4$，其中常数 $K_{\mathrm{D}} \le 1$ 由引理 D 给出。假设对于某些互不相同的点 $z, z' \in J(f_c)$，有 $\eta_c(z) = \eta_c(z')$。令 $z_n := f_c^n(z)$ 且 $z_n' := f_c^n(z')$ 对于 $n \in \mathbb{N}$。于是 $\eta_c \circ f_c = f_{\hat{c}} \circ \eta_c$ 蕴含对任意 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $\eta_c(z_n) = \eta_c(z_n')$，因此

$$|z_n - z_n'| \le |\eta_c(z_n) - z_n| + |\eta_c(z_n') - z_n'| = 2K'|c - \hat{c}|^{1/Q} < K_{\mathrm{D}}\nu/2 < \nu/2. \qquad (13.1)$$

假设轨道 z_n $(n \in \mathbb{N})$ 从未落在命题 2.3 的断言 (3) 或 (4) 中所述的 $\hat{} \hat{} \hat{} U = \mathbb{D}(b,\ R)$ 内的 f_c 的排斥周期点上。根据命题 2.4，轨道 z_n' $(n \in \mathbb{N})$ 必须具有相同的行为。设 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个子序列，使得对每个 k，当 $n = n_k$ 时，$z_n,\ z_n' \in J(f_c) - \mathcal{V}(c)$。根据引理 D，当 n 遍历子序列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 时，$\mathbb{D}(z_n,\ K_{\mathrm{D}}\nu)$ 不包含后临界集 $P(f_{\hat{c}})$ 中的任何点。因此，我们有一个定义在 $\mathbb{D}(z_n,\ K_{\mathrm{D}}\nu)$ 上的 f_c^{-n} 的单叶分支 g_n，它将 z_n 和 z_n' 映到 z 和 z'。然而，由于 f_c 是双曲的，科比畸变定理（见 [A，定理 5-3]）推出

$$|z - z'| \le \operatorname{diam} g_n(\mathbb{D}(z_n, K_{\mathrm{D}}\nu/2)) \asymp \frac{\nu}{|Df_c^n(z)|} \to 0$$

如 $n = n_k \to \infty$。这与假设 $z \ne z'$ 矛盾。因此，我们可以假设 $\hat{}$ 轨道 z_n $(n \in \mathbb{N})$ 落在 $V_0 = \mathbb{D}(b,\ \nu)$ 中 f_c^{pq} 的一个排斥不动点上。设 z_N 为这样的排斥不动点。

情形 1 或情形 2^+。 根据 (13.1) 和命题 2.4，z_N' 必定是命题 2.3 的断言 (3) 中给出的 V_0 内唯一的排斥不动点，因此 $z_N = z_N'$。由于 $z \ne z'$，必有 $z_n \ne z_n' = -z_n$，其中 $n < N$。然而，这是不可能的，因为朱利亚集 $J(f_{\hat{c}})$ 与临界点 0 之间有一个正距离；根据 (1.3)，当 $c \approx$ 趋于 $\hat{c}$时，$J(f_c)$ 也同样如此。（事实上，当 c 沿着一条厚内部射线趋于 $\hat{c}$ 时，$J(f_c)$ 收敛到 $J(f_{\hat{c}})$。见推论 1.4。）因此我们得出结论： η_c 是单射。由于 $h_{\hat{c}} = \eta_c \circ h_c$，且 h_c 是一个共轭，性质 (1) 成立。

情形 2⁻。通过与上文相同的论证，z'_N 必定是命题 2.3 的断言 (4) 中给出的 V_0 内 f_c^{pq} 个排斥不动点之一。因此我们得出结论，$\hat{}\eta_c(z_N)$ 是一个抛物周期点 b，并且由关系式 $h_{\hat{c}} = \eta_c \circ h_c$.■ 可知性质 (2) 成立

致谢

Chen 部分获得了 MOST 108-2115-M-001-005 和 109-2115-M-001-006 项目的资助。Kawahira 部分获得了 JSPS KAKENHI 资助项目，编号为 16K05193 和 19K03535。他们感谢中央研究院、名古屋大学、京都大学数理解析研究所和东京工业大学的热情接待，本研究的部分工作正是在这些机构开展的。

参考文献

[A] L.V.Ahlfors. 保角不变量，*McGraw-Hill Book Co.*，1973。

[BR] L. Bers 和 H.L. Royden。单射的全纯族。Acta Math. 157（1987），259–286。[CK1] Y.-C. Chen 和 T. Kawahira。沿外射线从康托尔参数到半双曲参数。Trans. Amer. Math. Soc. 372（2019），7959–7992。[CK2] Y.-C. Chen 和 T. Kawahira。关于曼德布洛特集两个边界点附近全纯运动导数估计的简明证明。J. Math. Anal. App. 473（2019），345–356。[DH] A. Douady 和 J. H. Hubbard，《复多项式的动力学 I 与 II》。Publ. Math. Orsay，巴黎南大学，D ´eparte ment de Math´ematiques，Orsay，1984/85，84-2，85-4。[K1] T. Kawahira。几何有限有理映射的朱利亚集之间的半共轭。Ergodic Theory Dynam. Systems，23（2003），1125–1152。[K2]T. Kawahira。与二次映射相关的镶嵌和 Lyubich-Minsky 层：I：压缩半共轭。Ergodic Theory Dynam. Systems，29（2009）第2期，579–612。[L] M. Yu. Lyubich。有理映射动力学的一些典型性质。Russian Math. Surveys 38（1983），154–155。[MSS] R. Ma˜ne、P. Sad 和 D. Sullivan。关于有理映射的动力学。Ann. Sci. ´Éc. Norm. Sup. 16（1983），193–217。[Mc1] C. McMullen。《复动力学与重整化》，Annals of Mathematics Studies，135，Princeton University Press，1994。

[Mc2] C. McMullen。Hausdorff 维数与共形动力学 II：几何有限有理映射。*Comment. Math. Helv.* **75**（2000），535–593。[Mi] J. Milnor。周期轨道、外射线与曼德布洛特集：一篇介绍性论述。G´eom´etrie complexe et syst`èmes dynamiques，M. Flexor（编）等。*Ast´erisque*。**261**（2000），277–333。[P] Ch. Pommerenke。共形映射的边界行为。Springer-Verlag，1992。[T] L. Tan。抛物点处曼德布洛特集的局部性质，载于曼德布洛特集：主题与变体，London Math. Soc. Lecture Note Ser. **274**，Cambridge Univ. Press，Cambridge（2000），133–160。[U] T. Ueda。具有双曲和抛物不动点的全纯映射的同时线性化，*Publ. RIMS, Kyoto Univ.*，**44**（2008），91–105。

Yi-Chiuan Chen 中央研究院数学
研究所 台湾台北 106319
YCChen@math.sinica.edu.tw

Tomoki Kawahira 一桥大学
经济学研究科 日本东京
186-8602
t.kawahira@r.hit-u.ac.jp