arXiv:2304.11250v2 [math.MG] 1 Jun 2023

Gibbs加权树上的稀疏采样与膨胀运算及多重分形形式主义

JULIEN BARRAL 和 STÉPHANE SEURET

摘要。本文从一个 Gibbs容量出发，通过应用两个简单的算子构造一种新的随机容量：第一个算子引入一定的冗余，第二个算子执行随机采样。根据控制冗余和采样的两个参数取值不同，新容量会呈现截然不同的多重分形行为。具体而言，该容量的多重分形谱可能包含两到四个相变，而多重分形形式主义可能仅在谱定义域的真子集上成立（有时该子集缩减为一个点）。

1. 引言

定义在 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$上的容量的多重分形分析，是Radon测度多重分形分析的自然推广。本文旨在对一个由两个指标 ϱ 和 η参数化的随机容量族进行多重分形分析，其中 ϱ 为冗余指标， η 为空隙指标。这些新的多重分形对象族易于构造，且具有灵活多样的多重分形结构，呈现出多种不同的相变。

现在让我们进一步具体说明。我们考虑定义在 $[0,1]^d$ 上的容量集合 $\mathrm{Cap}([0,1]^d)$，即非递减的非负映射 $\mu\colon \mathcal{B}([0,1]^d) \to \mathbb{R}^+$，其中 $\mathcal{B}([0,1]^d)$ 表示 $[0,1]^d$ 的 Borel子集。构造这类容量的一种方法是：从一个由复数构成的序列 $c=(c_I)_{I\in\mathcal{D}}$ 出发，该序列以 $[0,1]^d$ 的二进子立方体集合 $\mathcal{D}$ 为索引，并按如下方式为 c 设置层级结构。

定义 1.1. 对于每个 $c=(c_I)_{I\in\mathcal{D}}$，容量 $\mathsf{M}(c) \in \mathrm{Cap}([0,1]^d)$ 定义为

$$\mathsf{M}(c) : E \in \mathcal{B}([0,1]^d) \mapsto \sup\{|c_J| : J \in \mathcal{D},\, J \subset E\}.$$

例如，当 $c=(c_I)_{I\in\mathcal{D}}$ 是 Hölder连续函数 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ 的小波系数集合（详情见第 2.4 节）时，序列 $(\mathsf{M}(c)(3I))_{I\in\mathcal{D}}$ （其中 $3I$ 是立方体 I 与其所有同代相邻立方体的并集）就是所谓的函数 f 的小波领袖。于是，对函数 f 进行多重分形分析，就相当于对容量 $(\mathsf{M}(c)(3I))_{I\in\mathcal{D}}$ 进行多重分形分析。实际上，本文所研究的多重分形容量模型（作者在 [5] 中研究的模型是其特例）受到 Jaffard 在 [13], 中提出的稀疏小波级数的启发，见第 2.4 节。

在 [5], 中，我们定义了如下关于容量的随机稀疏采样。在本文余下部分中，固定一个概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$。对于 $j \in \mathbb{N}$，用 $\mathcal{D}_j$ 表示包含于 $[0,1]^d$ 中的第 j 代二进立方体集合。我们用 $g(I)$ 表示二进立方体 $I \subset [0,1]^d$ 的代数，即当 $I \in \mathcal{D}_j$ 时， $g(I)=j$。根据定义，$\mathcal{D}=\bigcup_{j\geq 0}\mathcal{D}_j$。

定义 1.2. 令 $\eta \in (0,1)$，并令 $(p_I)_{I\in\mathcal{D}}$ 为一族独立随机变量，其中每个 p_I 都是参数为 $2^{-g(I)d(1-\eta)}$的伯努利变量。对于每个 $\mu \in$ 容量$([0,1]^d)$，定义序列$(S_\eta\mu)$ 如下

$$(S_\eta\mu) = (S_\eta\mu(I))_{I\in\mathcal{D}} = (p_I\,\mu(I))_{I\in\mathcal{D}}.$$

于是，随机容量$\mathsf{M}\eta(\mu)$ 定义为

$$\mathsf{M}_\eta(\mu) := \mathsf{M}(S_\eta\mu).$$

要得到 $\mathsf{M}\eta(\mu)$，首先对序列 $(S_\eta\mu)$ 进行随机稀疏抽样。注意，当 $j \to \infty$ 时，该采样操作渐近地在 2^{jd} 个值 $\mu(I)$ 中保留约 $2^{jd\eta}$ 个，适用于$I \in \mathcal{D}_j$，并将其他值置为 0。然后，从这个稀疏序列出发，通过利用上文定义的算子 M 重新施加层级结构，得到 $\mathsf{M}\eta(\mu)$。

当 $\mu(E) = \lambda_\gamma(E) := (\mathcal{L}^d(E))^\gamma$ 时，其中 $\mathcal{L}^d$ 表示勒贝格测度，且 $\gamma > 0$，容量 $\mathsf{M}\eta(\lambda_\gamma)$ 与 Jaffard 在 [13] 中研究的稀疏小波级数所对应的小波领袖非常相似。虽然 λ_γ 本质上是完全支撑于 $[0,1]^d$ 上的最简单的单分形对象（其含义将在下文明确），但容量 $\mathsf{M}\eta(\lambda_\gamma)$ 是一个丰富的多重分形对象。特别地，它在以下意义下满足多重分形形式主义。

$\mu \in \mathsf{Cap}([0,1]^d)$ 的拓扑支撑定义为

$$\mathrm{supp}(\mu) = \{x \in [0,1]^d : \mu(B(x,r)) > 0,\ \forall\, r > 0\}.$$

若 $\mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$，则令

$$\tau_\mu : q \in \mathbb{R} \mapsto \liminf_{j\to\infty} \tau_{\mu,j}(q), \quad \text{where } \tau_{\mu,j}(q) := \frac{-1}{j}\log_2 \sum_{I\in\mathcal{D}_j,\mu(I)>0} \mu(3I)^q. \tag{1}$$

一个等价的定义是

$$\tau_\mu(q) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\log \sup \sum_i \mu(B(x_i,r))^q}{\log(r)}$$

其中，上确界取遍所有由互不相交的闭球 $\{B(x_i,r)\}_i$ 组成的族，这些闭球的半径为 r，中心属于 $x_i \in \mathrm{supp}(\mu)$，且 $\mu(B(x,r)) := \mu(B(x,r) \cap [0,1]^d)$。该函数是凹的且单调不减，并且其取值属于 $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$。

该奇异性，或多重分形，谱 关于 μ 随后定义为

$$\sigma_\mu : H \mapsto \dim \underline{E}_\mu(H), \quad H \in \mathbb{R},$$

其中

$$\underline{E}_\mu(H) = \left\{ x \in \mathrm{supp}(\mu) : \liminf_{r\to 0^+} \frac{\log\big(\mu(B(x,r))\big)}{\log(r)} = H \right\},$$

其中，dim 表示 Hausdorff维数，并约定，当且仅当 E 为空时，$\dim E = -\infty$。奇异性谱通过给出等赫尔德集 $E_\mu(H)$ 的 Hausdorff维数，对 μ 在小尺度下提供精细的几何描述。注意，由于 μ 是一种容量，当 $H < 0$ 时，集合 $E_\mu(H)$ 为空。以下结论总是成立（关于测度，见 [7, 19, 22, 16]；关于容量，见 [17]）：

$$\sigma_\mu(H) \le \tau_\mu^*(H), \quad \forall\, H \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

对于任意函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，$f$ 的勒让德变换 f^* 定义为

$$f^* : H \in \mathbb{R} \mapsto \inf\{Hq - \tau_\mu(q) : q \in \mathbb{R}\}.$$

此类函数 f 的定义域，即其取实数值的点集，记为 $\mathrm{dom}(f)$。

当不等式（2）取等号时，多重分形形式主义对 μ 在 H 处成立。若对所有 $H \in \mathbb{R}$，（2）都取等号，则多重分形形式主义对 μ 成立。

当容量 μ 在 τ_μ 为线性时，或更一般地，当对于某个$H_0 \in \mathbb{R}_+$有 $E_\mu(\underline{H_0}) = \mathrm{supp}(\mu)$时，称其为单分形；当存在至少两个不同的非负指数$H$ 和 H'，使得 $E_\mu(H) \neq \emptyset \neq E_\mu(H')$时，称其为多重分形。

— —

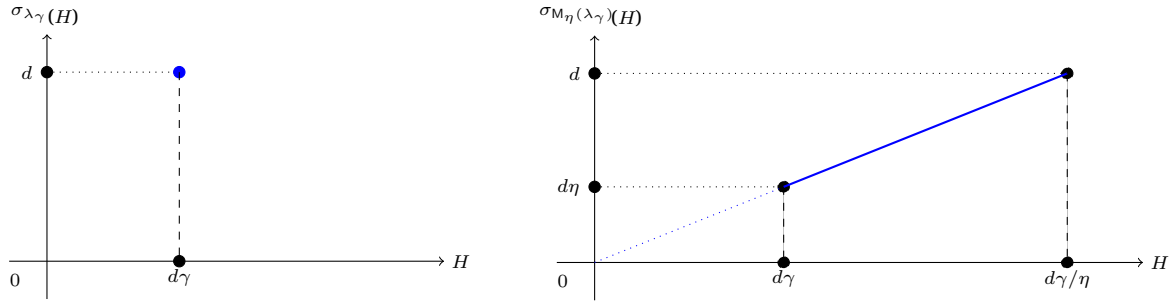
回到容量 $\lambda_\gamma(E) = (\mathcal{L}^d(E))^\gamma$，对于 $\gamma > 0$，显然有

$$\sigma_{\lambda_\gamma}(H) = \begin{cases} d & \text{if } H = d\gamma \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad \tau_{\lambda_\gamma}(q) = d(\gamma q - 1), q \in \mathbb{R}.$$

因此， λ_γ 是单分形，并且满足多重分形形式主义。对于 $\mathsf{M}_\eta(\lambda_\gamma)$，情况则更为复杂：文献 [5]中证明（对于略有不同的模型，另见 [13]），几乎必然，

$$\sigma_{\mathsf{M}_\eta(\lambda_\gamma)}(H) = \begin{cases} \frac{\eta}{\gamma} H & \text{if } H \in [d\gamma, d\gamma/\eta] \\ -\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{and} \quad \tau_{\mathsf{M}_\eta(\lambda_\gamma)}(q) = \begin{cases} \eta^{-1} d(\gamma q - \eta) & \text{if } q < 1/\gamma \\ d(\gamma q - \eta) & \text{if } q \geq 1/\gamma \end{cases}$$

因此，$\mathsf{M}_\eta(\lambda_\gamma)$ 是多重分形的，并且也遵循多重分形形式主义。



现在让我们在这些构造中引入一些冗余。

定义 1.3. 对于 $\varrho \in (0, 1]$, $j \in \mathbb{N}$ 和 $I \in \mathcal{D}_j$，令 I^ϱ 表示 $\mathcal{D}_{\lfloor \varrho j \rfloor}$ 中包含 I且边长为 $2^{-\lfloor \varrho j \rfloor}$ 的唯一二进立方体。

对 容量$([0,1]^d)$ 的 ϱ-膨胀操作定义为

$$D_\varrho \mu = \mathsf{M}(c_\varrho(\mu)), \ \textit{where } c_\varrho(\mu) = (\mu(I^\varrho))_{I \in \mathcal{D}}.$$

注意， D_1 是恒等映射。

当 $\varrho < 1$时， $D_\varrho\mu$中会引入一些冗余，因为每个 $I \in \mathcal{D}_j$ 都与 I^ϱ 中第 j 代的 $2^{j - \lfloor \varrho j \rfloor}$ 个二进子立方体共享同一个立方体 I^ϱ。此外，值得注意的是，尤其当测度 μ 具有倍增性时，对于两个相邻立方体 I 和 I'，测度 $\mu(I^\varrho)$ 与 $\mu((I')^\varrho)$ 非常接近。

值得注意的是，族 $(\lambda_\gamma)_{\gamma>0}$ 具有一个相当特殊的性质： $D_\varrho\lambda_\gamma$ 仍然满足多重分形形式主义。事实上， $D_\varrho\lambda_\gamma \approx \lambda_{\gamma\varrho}$，其中对于两个容量 μ 和 μ'， $\mu \approx \mu'$ 表示存在 $C \geq 1$，使得对所有 $I \in \mathcal{D}$，均有 $C^{-1}\mu(I) \leq \mu'(I) \leq C\mu(I)$。

如果 $\mu \in$ 容量$([0,1]^d)$ 且 $\mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$，则容易验证

$$\sigma_{D_\varrho\mu}(H) = \sigma_\mu(H/\varrho), \forall\, H \in \mathbb{R}$$

并且如果 $\mathrm{supp}(\mu) = [0,1]^d$,

$$\tau_{D_\varrho\mu}(q) = \varrho\tau_\mu(q) + d(\varrho - 1), \ \forall\, q \in \mathbb{R},$$

其勒让德变换等于 $\varrho\tau_\mu^*(\cdot/\varrho) + d(1 - \varrho)$。特别地，如果 μ 满足多重分形形式主义，那么 $\sigma_{D_\varrho\mu} = \tau_\mu^*(\cdot/\varrho)$，因此，当且仅当 $D_\varrho\mu$ 满足多重分形形式主义时，$\tau_\mu^*(\cdot/\varrho) = \tau_{D_\varrho\mu}^* = \varrho\tau_\mu^*(\cdot/\varrho) + d(1 - \varrho)$，也就是说，当 $\varrho < 1$时， τ_μ^*的取值属于 $\{d, -\infty\}$。假设$\tau_\mu'(0)$存在，并令 $\gamma = \tau_\mu'(0)/d$，则此等式意味着必有 $\tau_\mu = \tau_{\lambda_\gamma}$和 $\sigma_\mu = \sigma_{\lambda_\gamma}$。因此，只要 μ 是多重分形的，且 τ_μ 在 0 处可微，当 μ 满足多重分形形式主义时，关于 $\varrho < 1$ 的容量 $D_\varrho\mu$ 就不可能满足多重分形形式主义。

我们引入一个记号（此前已用它定义 $\lambda_\gamma = (\mathcal{L}_d)^\gamma$）：对于任意 $\gamma > 0$ 和 $\mu \in \mathsf{Cap}([0,1]^d)$，容量 μ^γ 定义为

$$\mu^\gamma : E \in \mathcal{B}([0,1]^d) \mapsto \mu(E)^\gamma. \tag{3}$$

利用前面的观察可知，对于任意 $\mu \in$ 容量$([0,1]^d)$，$\gamma > 0$ 和 $\varrho \in (0,1]$，使得 $(D_\varrho(\mu))^\gamma = D_\varrho(\mu^\gamma)$，并且

$$\sigma_{D_\varrho(\mu^\gamma)} = \sigma_\mu(\cdot/\gamma\varrho), \quad \tau_{D_\varrho\mu}(q) = \varrho\tau_\mu(\gamma\cdot) + d(\varrho - 1), \quad \text{and} \quad \sigma_{D_\varrho(\mu)} = \sigma_{(\mu^\varrho)}.$$

显然，只要 μ 满足多重分形形式主义，μ^γ 也满足多重分形形式主义。此外，若 $\mu \in$ 容量$([0,1]^d)$ 满足以下三个性质：(i) μ 满足多重分形形式主义，(ii) μ 是多重分形的，且 (iii) τ_μ 在 0 处可微，那么容量 $D_\varrho(\mu^{1/\varrho})$、$0 < \varrho < 1$与 μ 具有相同的奇异性谱，但它们都不满足多重分形形式主义。

本文关注将 D_ϱ 与 $\mathsf{M}\eta$结合起来。

定义 1.4. 对于任意 $\mu \in$容量$([0,1]^d)$，对于任意 $\eta \in (0,1]$ 和 $0 < \varrho \leq 1/\eta$，容量$\mathsf{M}_{\varrho,\,\eta}(\mu)$ 定义为

$$\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu) = \mathsf{M}_\eta(D_{\varrho\eta}\mu) = \mathsf{M}(S_\eta(D_{\varrho\eta}\mu)).$$

这两个算子在某种意义上互为补充：一方面，$D_{\varrho\eta}$ 会产生冗余，因为 $\varrho\eta$始终小于 1；另一方面，$\mathsf{M}\eta$ 则会引入稀疏性。

我们的目标是研究 $\{M_{\varrho,\eta}(\mu)$中元素的多重分形性质：当 μ是按如下方式定义的*Gibbs*容量时，$0 < \varrho \leq 1/\eta\}$。

设 $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是一个 $\mathbb{Z}^d$-不变的 Hölder 连续势函数。众所周知，Radon测度序列

$$\nu_n(\mathrm{d}x) = \frac{\exp\left(S_n\varphi(x)\right)}{\int_{[0,1]^d}\exp\left(S_n\varphi(t)\right)\mathcal{L}^d(\mathrm{d}t)}\,\mathcal{L}^d(\mathrm{d}x), \quad \text{where } S_n\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\varphi(2^n x),$$

在弱意义下收敛到一个在 $\mathbb{R}^d$ 上支撑集为全集的测度（见 [6]）。记 ν 为该吉布斯测度在 $[0,1]^d$上的限制。

定义 1.5。 *Gibbs*容量 μ 是一个容量 $\mu \in$ 容量$([0,1])^d$，满足 $\mu \approx \nu^\gamma$，其中 $\gamma > 0$，且 ν 是如上所述定义在 $[0,1]^d$ 上的吉布斯测度。

关于吉布斯测度的经典结果（见 [23, 8, 19]）给出：

- One has
$$\tau_\nu(q) = \big(qP(\varphi) - P(q\varphi)\big)/\log(2), \quad q \in \mathbb{R}$$
where $P(q\varphi) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\int_{[0,1]^d} 2^n \exp\left(S_n(q\varphi)(x)\right)\mathcal{L}^d(\mathrm{d}x) \in \mathbb{R}$ is the topological pressure of $q\varphi$. In particular $\tau_\nu = \lim_{j\to\infty}\tau_{\nu,j}$.
- τ_ν is analytic, concave increasing and $\lim_{q\to+\infty}\tau_\nu(q) = +\infty$.
- ν satisfies the multifractal formalism: $\sigma_\nu = \tau_\nu^*$.

因此，任何满足 $\gamma > 0$ 的 Gibbs 容量 $\mu \approx \nu^\gamma$ 都具有相同的性质。

Gibbs 容量族显然在算子 $\mu \mapsto \mu^\gamma$ 作用下保持不变。众所周知，Gibbs 容量 $\mu \approx \nu^\gamma$ 是多重分形的，当且仅当吉布斯测度 ν 与勒贝格测度不等价，也就是说，当 φ 在赋予动力系统 $\times 2$ 的 $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ 上不与常数上同调时（见 [6]）。

在 [5][1] 中研究的情形对应于极端情况 $\varrho = 1/\eta$，即 $\mathsf{M}_{\varrho,\,\eta}(\mu) = \mathsf{M}(S_\eta(D_1\mu)) = \mathsf{M}\eta(\mu)$。在那里，我们证明了 $\mathsf{M}\eta(\mu)$ 仍满足多重分形形式主义。本文对 Gibbs 容量 μ 的先前结果作如下补充：

[1]在 [5] 中，我们考察了形如 $\mu(I) = K\nu(I)^\alpha 2^{-\beta j}$ 的容量，其中 $I \in \mathcal{D}_j$，且 $K > 0$、$\alpha \geq 0$、$\beta \geq 0$ 和 $\alpha + \beta > 0$。这实质上等价于在修改 φ 后假设 $\mu \approx \nu^\gamma$。

- 当 $\varrho \in [1, 1/\eta)$ 时，$\mathsf{M}_{\varrho,\,\eta}(\mu)$ 满足多重分形形式主义（尽管 $D_{\varrho\eta}(\mu)$ 在 μ 为多重分形时并不满足）——参见定理 2.5；
- 当 $0 < \varrho < 1$ 且 μ 是多重分形时，$\mathsf{M}_{\varrho,\,\eta}$ 仅在 $\mathrm{dom}(\sigma_{M_{\varrho,\,\eta}})$ 的一个真子集上满足多重分形形式主义——参见定理 2.1 和 2.4。

作为本研究的推论，即使所有容量 $D_\varrho(\mu^{1/\varrho})$（$0 < \varrho < 1$）都具有相同的奇异性谱（根据上述观察），容量 $\mathsf{M}\eta(D_\varrho(\mu^{1/\varrho}))$（$0 < \varrho < 1$）的奇异性谱仍各不相同，并且当且仅当 $\varrho \in [\eta, 1]$ 时满足多重分形形式主义。

本文将重点讨论 $\varrho = 1$ 和 $0 < \varrho < 1$这两种情形，因为新的有趣现象正是在这些情形下出现的。对于 $1 < \varrho \le 1/\eta$，我们仅给出一个陈述，因为通过调整 [5] 中所讨论的 $\varrho = 1/\eta$ 情形的证明，即可得到该结果及其证明。

在精确陈述我们的结果之前，有必要简要讨论一下当 μ 为 Gibbs 时，$\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)$ 的 L^q 谱和奇异性谱的性质。尽管 τ_μ 是解析的，但我们将证明，对于任意 $\varrho \in (0, 1/\eta]$，$\tau_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}$ 总是呈现一阶相变（即存在一个不可微点），在某些情况下甚至会出现二阶相变（即存在一个可微但二阶不可微的点）。此外，$\tau_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}$ 在其相变点之外均为解析的。此外，尽管当 $\varrho \in (0, 1/\eta]$ 时，σ_μ 在其定义域内部是解析的，但 $\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}$ 却并非如此。事实上，$\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}$ 仍然是凹的，但可能包含三至五个连续的解析部分，并且在某些点处可能不可微。

2. 主要结果陈述

固定一个多重分形吉布斯容量 μ，以及 $\eta \in (0, 1)$。令 $H_{\min} = \tau'_\mu(+\infty)$，并令 $H_{\max} = \tau'_\mu(-\infty)$。我们先讨论 $\varrho = 1$ 的情形，它既是最简单的情形，也是 $\varrho \in (1, 1/\eta]$ 与 $\varrho \in (0, 1)$ 两种情形之间的过渡。对于前一种情形，$M_{\varrho,\eta}(\mu)$ 的多重分形行为与 [5] 中研究的情形 $\varrho = 1/\eta$ 类似，且多重分形形式主义成立；后一种情形则更为灵活，多重分形形式主义仅部分成立。

2.1. 情形 $\varrho = 1$。 这种情况对应于冗余过程与随机抽样几乎相互抵消的情形。事实上，采用这些参数时，每个带有 $I \in \mathcal{D}_j$ 的 $\mu(I)$ 都会被替换为 $\mu(I^\eta)$，但只保留其中的 $\sim 2^{jd\eta}$。由于存留下来的立方体是在 $[0, 1]^d$ 中均匀选取的，直观地说，采样后存留下来的立方体 I 所对应立方体的并集 I^η 覆盖 $[0, 1]^d$（这并不完全正确，但已相差不远）。

定理 2.1。 设 μ 为一个多重分形吉布斯容量，且 $\eta \in (0, 1)$。设 q_1 为方程 $\tau_\mu(q) = 0$ 的唯一解，并令 $H_1 = \tau'_\mu(q_1)$。等价地，$q_1 = \sigma'_\mu(H_1)$。

概率为 *1*，$\mathsf{M}_{1,\eta}(\mu)$ 满足多重分形形式主义，且

$$\sigma_{\mathsf{M}_{1,\eta}(\mu)}(H) = \begin{cases} \eta\sigma_\mu(H/\eta) & \text{if } \eta H_{\min} \le H < \eta H_1, \\ \dfrac{\sigma_\mu(H_1)}{H_1} H & \text{if } \eta H_1 \le H < H_1, \\ \sigma_\mu(H) & \text{if } H_1 \le H < H_{\max}. \end{cases} \tag{4}$$

以及 $\sigma_{\mathsf{M}_{1,\,\eta}(\mu)}(H) = -\infty$ 否则。此外，

$$\tau_{\mathsf{M}_{1,\eta}(\mu)}(q) = \sigma^*_{\mathsf{M}_{1,\eta}(\mu)}(q) = \begin{cases} \tau_\mu(q) & \text{if } q < q_1, \\ \eta\tau_\mu(q) & \text{if } q \ge q_1. \end{cases} \tag{5}$$

$\sigma_{\mathsf{M}_{1,\,\eta}(\mu)}$ 的连续性可以直接从公式中验证。中间线性阶段是 $H \mapsto \eta\sigma_\mu(H/\eta)$ 与 $H \mapsto \sigma_\mu(H)$ 之间唯一能使所得谱成为凹谱的插值。

2.2. 情形 $0<\varrho<1$。在这种情况下，数值 $\mu(I^\varrho)$ 中存在大量冗余，因此适用范围相当广，并涉及一些额外参数。第 5 节将研究下文所引入参数的存在性、引入这些参数的依据及其性质。

- 设 θ_ϱ 为如下定义的映射

$$\theta_\varrho : H\in[H_{\min},\tau'_\mu(0)]\mapsto \frac{\varrho H\sigma_\mu(H)}{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H)}.$$

它从 $\frac{\varrho H_{\min}\sigma_\mu(H_{\min})}{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H_{\min})}$ 连续递增至 $\varrho\tau'_\mu(0)$。

- 定义 q_ϱ 为唯一的 $q\in\mathbb{R}$，使得 $\tau_\mu(q)=\frac{d}{(1-\varrho)\varrho}$，并令 $H_\varrho=\tau'_\mu(q_\varrho)$。

现在定义一个映射，它将是 $\mathrm{M}_{\varrho,\eta}(\mu)$ 的多重分形谱。

定义 2.2。*(1)* 假设 $\sigma_\mu(H_{\min})>\frac{d}{(1-\varrho)}\frac{1/\eta-\varrho}{}$。则令

$$D_{\mu,\varrho,\eta}(H)=\begin{cases}\eta(d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H/\varrho\eta)) & \text{if } \varrho\eta H_{\min}\le H<\varrho\eta H_\varrho,\\ \dfrac{\sigma_\mu(H_\varrho)}{\theta_\varrho(H_\varrho)}H & \text{if } \varrho\eta H_\varrho\le H<\theta_\varrho(H_\varrho),\\ \sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H)) & \text{if } \theta_\varrho(H_\varrho)\le H<\varrho\tau'_\mu(0),\\ \sigma_\mu(H/\varrho) & \text{if } \varrho\tau'_\mu(0)\le H\le\varrho H_{\max},\end{cases}\tag{6}$$

以及 $D_{\mu,\varrho,\eta}(H)=-\infty$ 否则。

(2) 假设 $\sigma_\mu(H_{\min})\le\frac{d}{(1-\varrho)}\frac{1/\eta-\varrho}{}$。令 $H_{\varrho,\eta}\in[H_{\min},\tau'_\mu(0)]$ 为以下方程的唯一解

$$\sigma_\mu(H_{\varrho,\eta})=\frac{d(1-\varrho)}{1/\eta-\varrho}.$$

这可以等价地改写为 $\varrho\eta H_{\varrho,\eta}=\theta_\varrho(H_{\varrho,\eta})$

(a) 如果 $H_{\varrho,\eta}<H_\varrho$，则设

$$D_{\mu,\varrho,\eta}(H)=\begin{cases}\sigma_\mu(H/\varrho\eta) & \text{if } \varrho\eta H_{\min}\le H<\varrho\eta H_{\varrho,\eta},\\ \eta(d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H/\varrho\eta)) & \text{if } \varrho\eta H_{\varrho,\eta}\le H<\varrho\eta H_\varrho,\\ \dfrac{\sigma_\mu(H_\varrho)}{\theta_\varrho(H_\varrho)}H & \text{if } \varrho\eta H_\varrho\le H<\theta_\varrho(H_\varrho),\\ \sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H)) & \text{if } \theta_\varrho(H_\varrho)\le H<\varrho\tau'_\mu(0),\\ \sigma_\mu(H/\varrho) & \text{if } \varrho\tau'_\mu(0)\le H\le\varrho H_{\max},\end{cases}\tag{7}$$

和 $D_{\mu,\varrho,\eta}(H)=-\infty$ 否则。

(b) 若 $H_{\varrho,\eta}\ge H_\varrho$，则设

$$D_{\mu,\varrho,\eta}(H)=\begin{cases}\sigma_\mu(H/\varrho\eta) & \text{if } \varrho\eta H_{\min}\le H<\varrho\eta H_{\varrho,\eta},\\ \sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H)) & \text{if } \varrho\eta H_{\varrho,\eta}\le H<\varrho\tau'_\mu(0),\\ \sigma_\mu(H/\varrho) & \text{if } \varrho\tau'_\mu(0)\le H\le\varrho H_{\max},\end{cases}\tag{8}$$

且 $D_{\mu,\varrho,\eta}(H)=-\infty$ 否则。

注意，当$H_{\varrho,\eta}=H_\varrho$时，则 $\varrho\eta H_{\varrho,\eta}=\varrho\eta H_\varrho=\theta_\varrho(H_\varrho)$，并且 (7) 中的第二个和第三个区间合并为一个点。当 $H_{\varrho,\eta}\ge H_\varrho$ 时，这些区间在 (8) 中无关紧要。

这些公式不易处理，但它们由模型驱动。特别是，在每种情况下都存在不同的相。$D_{\mu,\varrho,\eta}$ 的连续性可以根据公式得到验证，而其其他性质（可微性、凹性）将在第 5 节中进行研究，并在下一个命题中加以总结。我们已经可以注意到，在 (6) 和 (7) 中，谱存在一个线性部分。

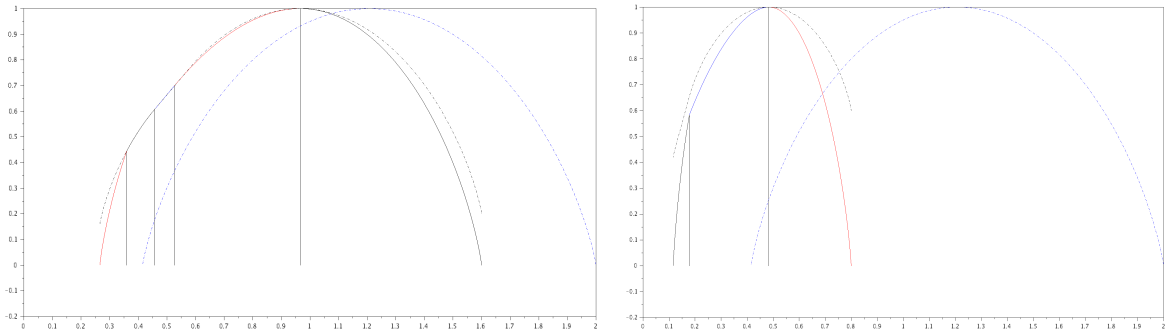


图 1. **左：** 对于给定的 μ 谱，当 $\varrho = 0.8, \eta = 0.8$ 时，$\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)$ 的谱，情形 **2a**：5 个相位。**右：** 当 $\varrho = 0.7$, $\eta = 0.4$ 时的谱，情形 **2b**：3 个相位。原始谱以蓝色虚线表示，勒让德谱以黑色虚线表示。

命题 2.3。 对于所有 $\varrho \in (0,\ 1)$，函数 $D_{\mu,\ \varrho,\ \eta}$ 在定义 *2.2* 中不同公式所给出的每个开区间上都是凹的、连续的和解析的。此外，$D_{\mu,\ \varrho,\ \eta}$ 是可微的，但在定义 *2.2* 的情形 *(2a)* 和 *(2b)* 中的 $\varrho\eta H_{\varrho,\ \eta}$ 处除外。

我们的主要定理如下。

定理 2.4. 设 μ 是定义在 $[0,1]^d$ 上的多重分形吉布斯容量，且 $\eta \in (0,\ 1)$。对于所有 $\varrho \in (0,1)$，概率为 *1*：

(1) $\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)} = D_{\mu,\varrho,\eta}$.

(2) One has

$$\tau_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}(q) = \begin{cases} d(\varrho-1) + \varrho\tau_\mu(q) & \text{if } q < q_\varrho, \\ \eta(d(\varrho-1) + \varrho\tau_\mu(q)) & \text{if } q \geq q_\varrho. \end{cases}$$

(3) 令

$$I_{\varrho,\eta} = \begin{cases} [\varrho\eta H_{\min}, \theta_\varrho(H_\varrho)] \cup \{\varrho\tau'_\mu(0)\} & \text{if } \sigma_\mu(H_{\min}) > \frac{d(1-\varrho)}{1/\eta-\varrho} \\ [\varrho\eta H_{\varrho,\eta}, \theta_\varrho(H_\varrho)] \cup \{\varrho\tau'_\mu(0)\} & \text{if } \sigma_\mu(H_{\min}) \leq \frac{d(1-\varrho)}{1/\eta-\varrho} \text{ and } H_{\varrho,\eta} < H_\varrho, \\ \{\varrho\eta H_{\varrho,\eta}\} \cup \{\varrho\tau'_\mu(0)\} & \text{if } \sigma_\mu(H_{\min}) \leq \frac{d(1-\varrho)}{1/\eta-\varrho} \text{ and } H_{\varrho,\eta} = H_\varrho \\ \{\varrho\tau'_\mu(0)\} & \text{if } \sigma_\mu(H_{\min}) \leq \frac{d(1-\varrho)}{1/\eta-\varrho} \text{ and } H_{\varrho,\eta} > H_\varrho. \end{cases}$$

The 多重分形形式主义对 $\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)$ 在 $I_{\varrho,\eta}$ 上成立，而对 $\mathrm{dom}(\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}) \setminus I_{\varrho,\eta}$ 上不成立。

因此，在每种情况下，我们都能够计算多重分形谱和 L^q-谱，但这两个量并不构成勒让德对（即，它们互不构成勒让德变换）。必须进行非常仔细的分析，才能为 $\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho,\ \eta}(\mu)}$ 找到比多重分形形式主义所提供的上界更精确的上界。

人们可能会想知道，Olsen 在 [19] 中提出的多重分形形式主义是否也适用于 $\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)$。然而，这一形式主义旨在研究局部维数水平集的 Hausdorff维数，而（对于所有 ρ），这些集合 $E_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta(\mu)}}(H)$（见定义 3.1）在$H$ 的一个非平凡子区间内为空，该子区间包含于 $\mathrm{dom}(\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)})$。

2.3. **情形** $1 < \varrho \leq 1/\eta$。 在这种情况下，冗余较少。对于 $\varrho \in (1,\ 1/\eta]$，我们引入一些参数：

- Let q_ϱ be the unique solution of $\varrho - 1 + \varrho\tau_\mu(q) = 0$, and $H_\varrho = \tau'_\mu(q_\varrho)$.
- Let $\widetilde{H}_\varrho = \min\{H \geq 0 : \sigma_\mu(H) \geq d(1 - 1/\varrho)\}$.

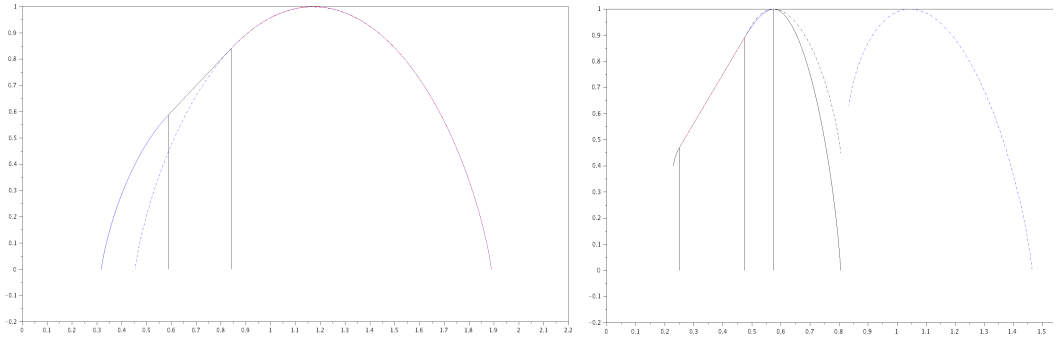


图 2. **左图：** 给定 μ 的谱时， $\eta = 0.7$ 下 $\mathsf{M}_{1,\eta}(\mu)$ 的谱：3 个相变。**右图：** $\varrho = 0.55$、 $\eta = 0.5$ 下 $\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)$ 的谱，情形 **1**：4 个相变。原始谱以蓝色虚线表示，勒让德谱以黑色虚线表示（仅针对 $\rho < 1$）。

- Finally, $\widehat{H}_\varrho = -\frac{\tau_\mu(q_\varrho)}{q_\varrho}$.

定理 2.5. 设 μ 为多重分形吉布斯容量，且 $\eta \in (0,1)$。对于所有 $\varrho \in (1, 1/\eta]$，概率为 *1*，$\mathsf{M}_{\varrho,\eta}$ 满足多重分形形式主义，

$$\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}(H) = \begin{cases} \eta(1-\varrho+\varrho\sigma_\mu(H/\varrho\eta)) & if \quad \varrho\eta\widetilde{H}_\varrho \le H < \varrho\eta H_\varrho, \\ q_\varrho H & if \quad \varrho\eta H_\varrho \le H < H_\varrho + \widehat{H}_\varrho, \\ \sigma_\mu\big(H - \widehat{H}_\varrho\big) & if \quad H_\varrho + \widehat{H}_\varrho \le H \le \tau'_\mu(\infty) + \widehat{H}_\varrho \end{cases}$$

以及 $\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}(H) = -\infty$，否则。特别是，

$$\tau_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}(q) = \sigma^*_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}(q) = \begin{cases} \tau_\mu(q) - \frac{\tau_\mu(q_\varrho)}{q_\varrho}\cdot q & if \quad q \le q_\varrho, \\ \eta(\varrho - 1 + \varrho\tau_\mu(q)) & if \quad q_\varrho < q < \widetilde{q}_\varrho, \\ \eta\varrho\tau'_\mu(\widetilde{q}_\varrho)\cdot q & if \quad \widetilde{q}_\varrho < +\infty \ and \ q \ge \widetilde{q}_\varrho. \end{cases}$$

$\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}$ 中有两个相变，而 $\tau_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}$ 中有一个或两个相变。

$\varrho \in (1, 1/\eta)$ 的情形与 [5], 中研究的情形 $\varrho = 1/\eta$ 非常相似，稍加努力即可轻松调整 [5] 中的论证。注意，在 [5], 中，当 $\varrho = 1/\eta$ 时，我们等价地将 H_ϱ 定义为唯一一个实数，使得 σ_μ 在点 $(H_\varrho, \sigma_\mu(H_\varrho))$ 处的图像切线经过点 $(0, d(1-1/\varrho))$；并将 $\widehat{H}_\varrho$ 定义为 $-\tau_\mu(\sigma'_\mu(H_\varrho))\,\sigma'_\mu(H_\varrho)$。当 $\varrho \in (1, 1/\eta)$ 时，这些等价表述确实成立。

我们选择不对定理2.5给出证明，而是聚焦于定理2.1和定理2.4，因为这两种情形中出现了新的现象，尤其是多重分形形式主义不再成立。

还需注意，$\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)$ 的多重分形谱图关于 $\eta \in (0,1)$ 和 $\varrho \in (0, 1/\eta]$ 连续依赖（以 Hausdorff 距离度量）。

2.4. **稀疏小波级数**。 我们简要说明其与稀疏小波级数的联系。在 [13], Jaffard 研究了称为稀疏小波级数的实值随机过程，它们本质上等价于

以下模型（当 $d=1$ 时）：对于 $\gamma>0$ 和 $\eta<1$，令

$$L_{\gamma,\eta}(x)=\sum_{j\geq 1}\sum_{k=0}^{2^j-1}2^{-j\gamma}X_{j,k}\psi(2^jx-k),\quad x\in\mathbb{R},$$

其中 ψ 是一个小波（精确定义见 [18]），而 $X_{j,k}$ 是独立随机变量，且每个 $X_{j,k}$ 都是参数为 $2^{-j\eta}$ 的伯努利变量。回顾定义 1.1，可知，分析 μ 的逐点正则性和多重分形性质，等价于对容量 $\mathsf{M}(c_w)$ 进行多重分形分析，其中序列 c_w 是 $L_{\gamma,\eta}$ 的小波系数：$c_w=(2^{-j\gamma}X_{j,k})_{j\geq 1,\ k\in\{0,\dots,2^j-1\}}$。

因此，我们的模型可视为 $L_{\gamma,\eta}$ 过程的一种推广：对于 $I\in\mathcal{D}_j$，系数 $2^{-j\gamma}$（可解释为 $(\mathcal{L}^1(I))^\gamma$ 或 $\mathcal{L}^1(I^\gamma)$）被吉布斯测度 μ 对应的 $\nu(I)^\gamma$ 所取代。换言之，我们不再基于均匀的勒贝格测度，而是从一个多重分形测度出发，从而得到一个结构丰富得多的随机过程。

提及一下 [11]，其中探讨了 Jaffard 模型的一些变体，用于构造支撑在康托尔集上的随机函数。这些函数在其支撑集上的限制具有分段线性、非递减的多重分形谱，且不满足多重分形形式主义。[1, 3, 10] 中还研究了其他有趣的多重分形随机小波级数。

2.5. **关于 $\tau_{\mathsf{M}_\varrho}$ 和 M_ϱ 的大偏差谱的最后说明**。

Defi定义 2.6. 令 $\mu\in$ 容量$([0,1]^d)$ 满足 支集$(\mu)\neq\emptyset$. 对于 $H\in\mathbb{R}$、$j\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$，令

$$\mathcal{E}_\mu(j,H\pm\varepsilon)=\left\{w\in\Sigma_j:\frac{\log_2\mu(I_w)}{-j}\in[H-\varepsilon,H+\varepsilon]\right\}.$$

那么，μ 的下、上大偏差谱分别定义为

$$\begin{aligned}\underline{f}_\mu(H)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{j\to+\infty}\frac{\log_2\#\mathcal{E}_\mu(j,H\pm\varepsilon)}{j}\\ and\quad\overline{f}_\mu(H)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{j\to+\infty}\frac{\log_2\#\mathcal{E}_\mu(j,H\pm\varepsilon)}{j}.\end{aligned}$$

现在设 μ 是多重分形吉布斯容量。等式 $\sigma_\mu(H)=\tau_\mu^*(H)$ 可加强为对所有 $H\in\mathbb{R}$ [8, 20]，均有 $\dim\ E_\mu(H)=\tau_\mu^*(H)$（$E_\mu(H)$ 的定义见定义 3.1）；结合标准不等式 $\dim\ E_\mu(H)\leq\underline{f}_\mu(H)\leq f_\mu(H)\leq\tau_\mu^*(H)$（对任意容量 [19, 16, 17] 都成立），可得 $\underline{f}_\mu=f_\mu=\tau_\mu^*$ [21, 19, 12]。或者，这可由以下事实推出：τ_μ 可微且 $\tau_\mu=\lim_{j\to\infty}\tau_{\mu,j}$，以及 Gärtner–Ellis 定理 [9]。不难从本文及其姊妹篇 [5] 的研究中推得，对于所有 $\varrho\in(0,1/\eta]$，概率为 1 时，均有 $\tau_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}=\lim_{j\to\infty}\tau_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu),j}$ 且 $f_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}=f_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}=\tau^*_{\mathsf{M}_{\varrho,\eta}(\mu)}$。

2.6. **文章结构**。在第 3 节中，我们回顾与 Gibbs 容量和测度的多重分形形式主义相关的其他性质，以及此前已在 [5] 中确立的随机抽样过程的一些性质。在第 4 节中，讨论 $\rho=1$ 的情形（定理 2.1）。第 5 节包含冗余情形 $\rho\in$（0,1）的证明，即定理 2.4。

3. 关于多重分形形式主义、Gibbs 容量和随机抽样的进一步讨论

3.1. **一些记号**。对于每个 $j\geq 1$，令 $\Sigma_j=(\{0,1\}^d)^j$。令 $\Sigma^*=\bigcup_{j\geq 0}\Sigma_j$ 和 $\Sigma=(\{0,1\}^d)^{\mathbb{N}}$ 分别表示字母表 $\{0,1\}^d$ 上的有限词和无限词的集合。按照约定，$(\{0,1\}^d)^0$ 包含由 ϵ 表示的空词。集合 Σ^* 通过连接作用于 $\Sigma^*\cup\Sigma$，即

若 $u \in \Sigma^*$ 和 $v \in \Sigma^* \cup \Sigma$, u 与 v 的连接 $u \cdot v$ 是通过将前缀 u添加到词 v得到的。若 $u \in \Sigma^*$, 则它定义圆柱集 $[u]$, 该集合由所有具有公共前缀 u的无限词组成。令 $\mathcal{C} = \{[u] : u \in \Sigma^*\}$。元素 u 的长度, 即其字母数, 记为 $|u|$。若 $0 \le j \le |u|$, $u_{|j}$ 表示 u 中长度为 j的前缀。集合 Σ 赋予标准超度量距离 $\mathrm{d}: (x, y) \mapsto 2^{-|x \wedge y|}$, 其中 $x \wedge y$ 是 x 和 y的最长公共前缀。

编码映射 $\pi: t = (t_n^{(1)}, \ldots\ldots, t_n^{(d)})_{n\ge 1} \in \Sigma \mapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(i)} 2^{-n}\right)_{1\le i\le d} \in [0,1]^d$ 将每个圆柱集 $[w] \in \mathcal{C}$ 映射到闭的非退化二进立方体

$$I_w = \prod_{i=1}^{d} \left[\sum_{k=1}^{|w|} w_k^{(i)} 2^{-k}, 2^{-|w|} + \sum_{k=1}^{|w|} w_n^{(i)} 2^{-k} \right].$$

我们定义

$$x_w = \left(\sum_{k=1}^{j} w_k^{(i)} 2^{-k} \right)_{1\le i\le d}. \tag{9}$$

若 $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\ldots, x^{(d)}) \in [0,1]^d$ 不含二进制分量, 则 x 由唯一的$w = (w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots\ldots, w^{(d)}) \in \Sigma$编码, 而 $I_j(x)$ 表示 $I_{w_{|j}}$。当 $x^{(i)}$ 为二进有理数时, $w^{(i)}$ 取字典序中 $\{0,1\}^{\mathbb{N}_+}$ 内编码 $x^{(i)}$的最大元素。两种情况下, $w_{|j}$ 也记作 $x_{|j}$。

3.2. 与多重分形形式主义和 Gibbs 容量相关的其他性质。

定义 3.1。设 $\mu \in \mathrm{Cap}([0,1]^d)$ 具有满支撑。对于 $x \in [0,1]^d$, μ 在 x 处的下局部维数和上局部维数分别定义为

$$\underline{\dim}(\mu, x) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \quad and \quad \overline{\dim}(\mu, x) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}.$$

当 $\underline{\dim}(\mu, x) = \overline{\dim}(\mu, x)$时, 它们的共同值记为 $\dim(\mu, x)$。对于 $H \in \mathbb{R}$, 令

$$\underline{E}_\mu(H) = \left\{ x \in [0,1]^d : \underline{\dim}(\mu, x) = H \right\},$$
$$\overline{E}_\mu(H) = \left\{ x \in [0,1]^d : \overline{\dim}(\mu, x) = H \right\},$$
$$E_\mu(h) = \underline{E}_\mu(H) \cap \overline{E}_\mu(H).$$

注意, 对每个 $x \in [0,1]^d$,

$$\underline{\dim}(\mu, x) = \liminf_{j\to+\infty} \frac{\log \mu\left(\bigcup_{I\in\mathcal{N}(I_j(x))} I\right)}{-j} = \liminf_{j\to+\infty} \frac{\log \max\left(\mu(I) : I \in \mathcal{N}(I_j(x))\right)}{-j}, \tag{10}$$

其中 $I_j(x)$ 表示包含 x 的第 j 代唯一二进立方体, 而记号 $\mathcal{N}(I)$ 对于 $I \in \mathcal{D}_j$ 表示与 I 同代且相邻的二进立方体族:

$$\text{for } I \in \mathcal{D}_j, \quad \mathcal{N}(I) = \{I' \in \mathcal{D}_j : \overline{I} \cap \overline{I'} \neq \emptyset\} \tag{11}$$

包含 $I_j(x)$ 及其在第 j 代的 $3^d - 1$ 相邻二进制立方体。按照符号滥用的惯例, 我们有时将 $w \in \mathcal{N}(I)$ 写作 $I \in \mathcal{D}_j$, 以描述属于 $\mathcal{N}(I)$ 的所有二进立方体 $I_w \in \mathcal{D}_j$ 。

D定义 3.2. 对于任意全支撑容量 $\mu \in \mathrm{Cap}([0,1]^d)$，定义水平集

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\mu}^{\leq}(H) &= \{x \in [0,1]^d : \underline{\dim}(\mu, x) \leq H\} \\ \textit{and} \quad \overline{E}_{\mu}^{\geq}(H) &= \{x \in [0,1]^d : \overline{\dim}(\mu, x) \geq H\}. \end{aligned}$$

多重分形形式主义还声称

$$\dim \underline{E}_{\mu}^{\leq}(H) \leq \tau_{\mu}^{*}(H) \text{ if } H \leq \tau_{\mu}'(0^{-}), \tag{12}$$

$$\text{and } \dim \overline{E}_{\mu}^{\geq}(H) \leq \tau_{\mu}^{*}(H) \text{ if } H \geq \tau_{\mu}'(0^{+}). \tag{13}$$

现在令 μ 为多重分形吉布斯容量 μ。总有:

- τ_{μ} 是一个极限（不仅仅是下极限），即

$$\tau_{\mu}(q) = \lim_{j \to \infty} \tau_{\mu,j}(q), \quad \text{for every } q \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

- τ_{μ} 严格凹且解析（得益于前一节回顾的性质），并且σ_{μ} 严格凹，且在 $(H_{\text{最小}}\ H_{\text{最大}})$ 上实解析。

- μ 是准乘性的：存在一个常数 $C \geq 1$，使得对于任意有限词w，$w' \in \Sigma^{*}$,

$$C^{-1}\mu(I_w)\mu(I_{w'}) \leq \mu(I_{ww'}) \leq C\mu(I_w)\mu(I_{w'}). \tag{15}$$

- 存在两个指数 $0 < \alpha_m \leq \alpha_M < +\infty$，使得对于每个有限词 $w \in \Sigma^{*}$,

$$2^{-|w|\alpha_M} \leq \mu(I_w) \leq 2^{-|w|\alpha_m}. \tag{16}$$

- μ是倍增的。

以下将反复用到这些性质。

3.3. 存活顶点分布的基本性质。所有这些性质均在 [5]中得到证明。若 $w \in \Sigma^{*}$，则 p_{I_w} 简记为 p_w。

定义3.3。若 $w \in \Sigma^{*}$ 且 $p_w = 1$，则称 w 为存活顶点（或存活者）。对于每个 $j \geq 1$，
用 $\mathcal{S}_j(\eta)$ 表示 Σ_j中存活顶点构成的（随机）集合:

$$\mathcal{S}_j(\eta) := \big\{w \in \Sigma_j : p_w = 1\big\}.$$

回顾一下，由（9）定义的 x_w是有限词 $w \in \Sigma_j$ 在 $[0,1]^d$上的投影所对应的二进有理点。第一个问题涉及点 x_w在 $w \in \mathcal{S}_j$（η）下的分布。

定义 3.4. 对于每个 $j \geq 1$ 以及每个有限词 $W \in \Sigma^{*}$，定义为

$$\mathcal{S}_j(\eta, W) = \{w \in \mathcal{S}_j(\eta) : I_w \subset I_W\}.$$

集合 $\mathcal{S}_j(\eta,\ W)$ 描述了包含在 I_W 中的第 j 代存活顶点。显然，对于每个 $J \leq j$,

$$\mathcal{S}_j(\eta) = \bigcup_{W \in \Sigma_J} \mathcal{S}_j(\eta, W).$$

引理 3.5。 [5] 存在一个趋于 *0* 的正数列$(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$，使得以概率为 *1*，对于所有足够大的 j，对于每个$W \in \Sigma_{\lfloor j(\eta-\varepsilon_j)\rfloor}$，都有 $\mathcal{S}_j(\eta, W) \neq \emptyset$。

因此，每个第 $\lfloor j(\eta - \varepsilon_j)\rfloor$ 代的圆柱集都包含一个第 j 代的存活顶点 w。**序列$(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$ 现已固定**。

引理 3.5 得出以下结论：几乎必然地，属于无限多个形如 $B(x_w,\ 2^{-\lfloor |w|(\eta-\varepsilon_{|w|})\rfloor})$ 且满足 $p_w = 1$ 的球的点集恰好是整个立方体$[0,1]^d$，即

$$[0,1]^d = \limsup_{j\to+\infty} \bigcup_{w\in\mathcal{S}_j(\eta)} B(x_w, 2^{-\lfloor |w|(\eta-\varepsilon_{|w|})\rfloor}). \tag{17}$$

接下来，我们将给出 $\mathcal{S}_j(\eta,\ W)$ 在 $W \in \Sigma_{\lfloor \eta j\rfloor}$ 时基数的上界。

Lemma 3.6. 几乎必然地，对于每个足够大的 j 和每个 $W \in \Sigma_{\lfloor \eta j\rfloor}$，$\#\mathcal{S}_j(\eta、\ W) \le \qquad j.$

总之，应牢记这样的直觉：每个圆柱集 $W \in \Sigma_{\lfloor \eta j\rfloor}$ 至少包含一个存活顶点，但不会包含多得太多的存活顶点 $w \in \mathcal{S}_j(\eta)$。

4. Proof of Theorem 2.1

回顾定义 1.4，可得

$$\mathsf{M}_{1,\eta}(\mu) = \mathsf{M}_\eta(D_\eta\mu) = \mathsf{M}(S_\eta(D_\eta\mu)).$$

根据定义 1.1 和 1.2，对于 $I \in \mathcal{D}_j$，每个 $\mathsf{M}_{1,\ \eta}(\mu)(I)$ 都可以写成

$$\mathsf{M}_{1,\eta}(\mu)(I) = \sup_{I'\subset I,\ p_{I'}=1} \mu((I')^\eta).$$

为简便起见，本节中将 $\mathsf{M}_{1,\eta}(\mu)$ 记作 M_1 。

4.1. 二进立方体上 M_1 的权重上界和下界。 稍微滥用一下记号，我们有时将第 j 代的二进立方体 $I \subset [0,1]^d$ 与相应的词 $w \in \Sigma_j$ 视为相同。

引理 4.1. *以概率为 1，存在一个正数列 $(\widetilde{\varepsilon}_j)_{j\ge1}$，使得对于每个 $w \in \Sigma^*$,*

$$\mu(I_w)2^{-|w|\widetilde{\varepsilon}_{|w|}} \le \mathsf{M}_1(I_w) \le \mu(I_w^\eta). \tag{18}$$

证明。 固定 $w \in \Sigma_j$。为了计算 $\mathsf{M}_1(I_w)$，需要找出对于$I' \subset I_w$ 和 $p_{I'} = 1$而言 $\mu((I')^\eta)$ 的最大值。

(18) 中的上界直接源于初始吉布斯容量 μ 的层级结构。事实上，在计算 $\mathsf{M}_1(I_w)$ 时可能出现的最大值是 $\mu(I_w^\eta)$。

此外，我们估计下界。覆盖引理 3.5 保证，当 $j = |w|$ 足够大时，至少存在一个存活顶点 $w' \in \mathcal{S}_{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor}(\eta)$，使得 $I_{w'} \subset I_w$。因此

$$\mathsf{M}_1(I_w) \ge \mu(I_{w'}^\eta).$$

立方体 $I_{w'}^\eta$ 对应于一个立方体 $I_{\widetilde{w}}$，其中 $\widetilde{w}$ 是词 w' 的前缀，长度为 $\lfloor \eta|w'|\rfloor = \lfloor \eta\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor\rfloor$，当 j 足够大时（即 ε_j 足够小时）满足

$$j(1+\varepsilon_j/\eta) - \eta - 1 \le \lfloor \eta|w'|\rfloor \le j(1+2\varepsilon_j/\eta).$$

由于 $I_{w'} \subset I_w$，w 是对应于立方体 $I_{w'}^\eta$ 的词的前缀，因此我们可以利用 μ 的拟伯努利性质 (15) 写出

$$\frac{1}{C}\mu(I_w)\mu(J) \le \mu(I_{w'}^\eta) \le C\mu(I_w)\mu(J)$$

对于某个代数介于 $j\varepsilon_j/\eta - \eta - 1$ 和 $j2\varepsilon_j/\eta$ 之间的二进立方体 J。

利用一致界 (16) 对 μ 进行界定 $\mu(J)$，并回想 $j = |w|$，我们得到

$$\frac{1}{C}\mu(I_w)2^{-(|w|\varepsilon_{|w|}\eta-\eta-1)\alpha_M} \le \mu(I_{w'}^\eta) \le C\mu(I_w)2^{-(|w|\varepsilon_{|w|}\eta-\eta-1)\alpha_m}.$$

这可以改写为：存在一个收敛到零的正数列 $(\widetilde{\varepsilon}_j)_{j\geq 1}$ ，使得

$$2^{-|w|\widetilde{\varepsilon}_{|w|}} \leq \frac{\mu(I^{\eta}_{w'})}{\mu(I_w)} \leq 2^{|w|\widetilde{\varepsilon}_{|w|}}, \tag{19}$$

因此得出该结果。 □

4.2. M 的局部维数 M_1， μ及逼近速率。 M_1 在点 $x \in [0,1]^d$ 处的局部维数取值取决于其与“存活”小波系数 x 的接近程度。因此，我们引入一个逼近速率以及以下一些逼近集合。

4.2.1. M_1的逼近率和局部维数。对于每个 $w \in \Sigma^*$，记

$$\ell_w = 2^{-\lfloor |w|(\eta-\varepsilon_{|w|})\rfloor}. \tag{20}$$

回忆一下，根据公式 (17)，几乎处处都有覆盖性质。

$$[0,1]^d = \limsup_{j\to+\infty} \bigcup_{k\in\mathcal{S}_j(\eta)} B(x_w, \ell_w).$$

定义 4.2. 对于每个 $\delta \geq 1$，我们定义

$$\mathcal{A}_\delta = \limsup_{j\to+\infty} \bigcup_{k\in\mathcal{S}_j(\eta)} B\big(x_w, (\ell_w)^\delta\big).$$

集合 $\mathcal{A}_\delta$ 包含那些点 x ，它们以速率 $\delta \geq 1$ 被满足 $p_w = 1$的二进数 x_w 逼近。显然，$\mathcal{A}_1 = [0,1]^d$ 几乎处处成立。

定义 4.3。 对于每个 $x \in [0,1]^d$， x 的逼近速率为实数

$$\delta_x = \sup\{\delta \geq 1 : x \in \mathcal{A}_\delta\}.$$

一个显著的性质是，在那些被幸存二进数逼近得很差的点 x 处，M_1 的局部维数可以很容易地用 μ的局部维数表示。

命题 4.4。 几乎处处，对于每个 $x \in [0,1]^d$，若 $\delta_x = 1$，则 维数(M_1, x) = 维数(μ, x)。

证明。设 $x \in [0,1]^d$ 满足 $\delta_x = 1$。回顾一下， $I_j(x) \in \mathcal{D}_j$ 是包含 x的、代数为 j 的唯一二进立方体。我们的目标是估计 $\mathsf{M}_1(B(x,\ 2^{-j}))$。注意，根据公式 (10)，这等价于估计

$$\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_j(x)) = \max\Big(\mathsf{M}_1(I) : I \in \mathcal{N}(I_j(x)))\Big), \tag{21}$$

其中， $\mathcal{N}(I)$ 在式 (11) 中定义。

由于 $\delta_x = 1$，对于每个 $\varepsilon > 0$, x 不属于 $\mathcal{A}_{1+\varepsilon}$。换句话说，存在一个整数$J_{\varepsilon,x}$ 使得对于任意 $j \geq J_{\varepsilon,x}$， x 不属于$\bigcup_{w\in\mathcal{S}_j(\eta)} B(x_w,(\ell_w)^{1+\varepsilon})$。

让我们利用这一点从上方估计 $\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w)$ 的值，其中 $w \in \Sigma_j$ 是满足 $I_j(x) = I_w$ 的唯一词。为此，只需考虑满足以下条件的二进立方体 $I_{w'}$：

- $|w'| \geq |w| = j$,
- $w' \in \mathcal{S}_{j'}(\eta)$,
- $x_{w'} \in \bigcup_{I\in\mathcal{N}(I_j(x))} I$.

正如引理 4.1 的证明中所注意到的，只需考虑满足 $j \leq |w'| \leq j/(\eta-\varepsilon_j)$ 的词 w'。此外，当 j 足够大时，不可能有 $w' \in \mathcal{S}_{j'}(\eta)$ 满足 $j' \leq j/(\eta+\varepsilon)$ 和 $|x_{w'} - x| \leq 2\cdot 2^{-j}$.。这将意味着

$$|x_{w'} - x| \leq 2\cdot 2^{-j} \leq 2\cdot 2^{-j'(\eta+\varepsilon)} < (\ell_{w'})^{1+\varepsilon},$$

这与 $\delta_x = 1$ 矛盾。因此，对于某个长度满足 $j/(\eta+\varepsilon) \le j' \le j/(\eta-\varepsilon_j)$ 的词 w'，可以取到 $\mathsf{M}_1(I_w)$ 的值。利用与引理 4.1 中相同类型的估计以及 μ 的倍增性质，相应的值 $\mu(I_{w'})$ 可以被以下量所界定：

$$\mu(I_w)2^{-j\widetilde{\varepsilon}_j} \le \mu(I_{w'}) \le \mu(I_w)2^{j\widetilde{\varepsilon}_j}, \tag{22}$$

对于某个与 x 无关的其他序列 $\widetilde{\varepsilon}_j$（为简便起见，我们对新序列仍使用相同的记号（$\widetilde{\varepsilon}_j$），$\widetilde{\ }$）。因此，$\mathsf{M}_1(I_w)$满足

$$\max\left(\mu(I) : I \in \mathcal{N}(I_j(x))\right) 2^{-j\widetilde{\varepsilon}_j} \le \widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w) \le \max\left(\mu(I) : I \in \mathcal{N}(I_j(x))\right) 2^{j\widetilde{\varepsilon}_j}. \tag{23}$$

在（23）中取下极限，我们便完成了命题 4.4 的证明。 □

4.2.2. 一些逼近集；异质普适性. 为了更好地理解 μ 的局部行为与逼近速率之间的关系，我们引入一些逼近集。

定义 4.5. 设 $H \ge 0$、$\delta \ge 1$，并设 $\xi := (\xi_j)_{j\ge 1}$ 为一个正数列。若词 $w \in \Sigma^*$ 满足性质 $\mathcal{P}(H,\xi)$，则称其满足该性质

$$|I_w^\eta|^{H+\xi_{|w|}} \le \mu(I_w^\eta) \le |I_w^\eta|^{H-\xi_{|w|}}. \tag{24}$$

Set

$$\mathcal{A}_{H,\widetilde{\xi},\delta} = \bigcap_{J\ge 1} \bigcup_{j\ge J} \bigcup_{w\in\mathcal{S}_j(\eta):\ w\ satisfies\ \mathcal{P}(H,\widetilde{\xi})} B\Big(x_w, (\ell_w)^\delta\Big),$$

集合$\mathcal{A}_{H,\ \widetilde{\xi},\ \delta}$ 包含那些以速率 δ 被二进有理点 x_w逼近的点 x，其中这些二进有理点满足这样的性质：测度 μ 在 x_w附近具有受控的局部 Hölder 行为。

命题 4.6。 如果 ξ 收敛到 *0*，且 $x \in \mathcal{A}_{H,\ \widetilde{\xi},\ \delta}$，那么

$$\eta H \le \underline{\dim}(\mathsf{M}_1, x) \le \frac{H}{\min(\delta, 1/\eta)}.$$

证明。 左侧的不等式对所有 x 都成立，并且由 (18) 直接推出。

令 $x \in \mathcal{A}_{H,\ \widetilde{\xi},\ \delta}$。存在一个无限词序列 $(w_n)_{n\ge 1}$，使得

- $|x - x_{w_n}| \le (\ell_{w_n})^\delta = 2^{-\delta\lfloor |w_n|(\eta-\varepsilon_{|w_n|})\rfloor}$,
- $p_{w_n} = 1$,
- $2^{-\lfloor \eta|w_n|\rfloor(H+\xi_{|w_n|})} \le \mu(I_{w_n}^\eta) \le 2\cdot 2^{-\lfloor\eta|w_n|\rfloor(H-\xi_{|w_n|})}$.

最后一个性质由 (24) 得出。

令 $\widetilde{\delta} = \min(\delta,\ 1/\eta)$。对于每个 $n \ge 1$，令 $J_n = \lfloor \delta\lfloor |w_n|(\eta-\varepsilon_{|w_n|})\rfloor\rfloor$。我们将从下方估计$\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_{J_n}(x))$。为此，正如引理 4.4 和命题 4.1 的证明中所指出的，只需考虑满足 $J_n \le |w'| \le J_n/(\eta-\varepsilon_{J_n})$ 的词 w'。

特别地，根据构造，二进立方体 I_{w_n} 满足 $I_{w_n} \subset \bigcup_{I\in\mathcal{N}(I_{J_n}(x))} I$ 并且

$$J_n \le \widetilde{\delta}|w_n|(\eta-\varepsilon_{|w_n|}) \le |w_n| \le \frac{J_n}{\widetilde{\delta}(\eta-\varepsilon_{|w_n|})} \le \frac{J_n}{\eta-\varepsilon_{J_n}},$$

因为 $1 \le \delta \le 1/\eta$。所以,

$$\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_{J_n}(x)) \ \ge\ \mu(I_{w_n}^\eta) \ge 2^{-[\eta|w_n|](H+\xi_{|w_n|})} \ge C2^{-(H+\xi_{|w_n|})\eta\frac{J_n}{\widetilde{\delta}(\eta-\varepsilon_{|w_n|})}} \ge C2^{-J_n\cdot\frac{(H+\xi_{|w_n|})}{\widetilde{\delta}}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon_{|w_n|}/\eta}}.$$

因此，

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{\log \widetilde{\mathsf{M}}_1(I_{J_n}(x))}{\log 2^{-J_n}} \le \lim_{n\to+\infty}\frac{(H+\xi_{|w_n|})}{\widetilde{\delta}}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon_{|w_n|}/\eta}=\frac{H}{\widetilde{\delta}}.$$

□

一个显著的性质是，可以利用在 [2, 4] 中提出的异质普适性概念，对集合 $\mathcal{A}_{H,\widetilde{\xi},\delta}$ 的 Hausdorff维数给出下界。下一个定理对应于 [4], 中的定理2.7，或者对应于 [2], 中较弱形式的定理 1.2（在 $\varrho=1$ 的情形下）。

定理 4.7。设 μ 是定义 *1.5* 中的 *Gibbs*容量。概率为 *1* 时，由于(17) 成立$\widetilde{\ }$，对于所有满足 $\sigma_\mu(H)>0$ 的 $\delta\ge 1$ 和 $H\ge 0$，存在一个递减至零的序列 ξ 以及一个博雷尔概率测度 $m_{H,\delta}$，使得:

- $m_{H,\delta}(\mathcal{A}_{H,\widetilde{\xi},\delta})>0$,
- 对于任意 *Hausdorff*维数小于 E 的集合 $\sigma_\mu(H)/\delta$，都有 $m_{H,\delta}(E)=0$.

换言之，$m_{H,\delta}$ 的下*Hausdorff*维数大于或等于 $\sigma_\mu(H)/\delta$。特别地，维数$\mathcal{A}_{H,\widetilde{\xi},\delta}\ge\sigma_\mu(H)/\delta$。

注记 4.8。*(1)* 实际上，当条件 (24) 被替换为时， [2, 4] 的定理得以证明。

$$(\ell_w)^{H+\xi_{|w|}}\le\mu(B(x_w,\ell_w))\le(\ell_w)^{H-\xi_{|w|}}. \tag{25}$$

容易验证，在 [2, 4], 的证明中，(25) 可以替换为 (24)。事实上，回顾 (20)，*Gibbs*容量 μ 的倍增性质意味着 $\mu(B(x_w,\ell_w))$ 与 $\mu(I_w^\eta)$ 可比，因为 $B(x_w,\ell_w)$ 和 I_w^η 都包含 x_w，且直径可比。

(2) [4] 的定理*2.7*处理 $H\in$（$H_{\min}$、$H_{\max}$），但对证明进行简单调整后，可以将结果推广到 $H\in\{H_{\min},H_{\max}\}$。

4.3. M 的谱上界。为求得 σ_{M_1}的上界，我们使用不等式 (2)。回忆一下， q_1 是方程 $\tau_\mu(q)=0$ 的唯一解。

命题 4.9。几乎必然地，对每个 $q\in\mathbb{R}$，都有

$$\tau_{\mathsf{M}_1}(q)\ge T(q):=\begin{cases}\tau_\mu(q) & \text{if } q<q_1,\\ \eta\tau_\mu(q) & \text{if } q\ge q_1.\end{cases} \tag{26}$$

Pr$\widetilde{\ }$证明。令 $j\ge 1$。回顾 (1) 和 (21)，我们需要估计总和 $\sum_{w\in\Sigma_j}\mathsf{M}_1(I_w)^q$.

- **情形** $q<0$**:** 利用 (18) 中的下界，有

$$\begin{aligned}\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w)^q &\le \sum_{w\in\Sigma_j}\max(\mathsf{M}_1(I):I\in\mathcal{N}(I_j(x)))^q\\ &\le 3^{d+1}\sum_{w\in\Sigma_j}\mu(I_w)^q 2^{-q|w|\widetilde{\varepsilon}_{|w|}}\le 3^{d+1}\cdot 2^{-j(\tau_{\mu,j}(q)+q\widetilde{\varepsilon}_j)}.\end{aligned}$$

由于 $\lim_{j\to+\infty}\widetilde{\varepsilon}_j=0$，令 j 趋于无穷可得 $\tau_{\mathsf{M}_1}(q)\ge\tau_\mu(q)$。

- **情形** $q>0$**:** 式 (18) 中的上界实际上过于粗糙。利用覆盖性质 3.5，$\widetilde{\ }$可知，对于每个词 $w\in\Sigma_j$, $\mathsf{M}_1(I_w)$ 的值会在某个词 w' 处达到，其长度介于 j 和 $j/(\eta-\varepsilon_j)$ 之间。反过来，每个满足 $j\le j'\le j/(\eta-\varepsilon_j)$ 的词 $w'\in\mathcal{S}_{j'}(\eta)$ 至多会对 $|w|=j$ 对应的 $\widetilde{\ }\mathsf{M}_1(I_w)$ 的 3^d 个值有所贡献。因此，

$$\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w)^q \le 3^d\sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor}\sum_{w\in\mathcal{S}_{j'}(\eta)}\mu(I_w^\eta)^q\le 3^d\sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor}\sum_{w\in\Sigma_{j'}}p_w\mu(I_w^\eta)^q$$

回顾　可知，当 $w' \in \Sigma_{j'}$ 时， $p_{w'}$ 是一个参数为 $2^{-dj'(1-\eta)}$ 的伯努利变量，于是得到

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w)^q\Big)\le 3^d\sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor}\sum_{w\in\Sigma_{j'}}2^{-dj'(1-\eta)}\mu(I_w^\eta)^q.$$

现在注意到，对于 $w'\in\Sigma_{\lfloor \eta j'\rfloor}$ 和 $j\le j'\le j/(\eta-\varepsilon_j)$，每个立方体 $I_{w'}$ 都包含 $2^{d(j'-\lfloor j'\eta\rfloor)}$ </style}代数为 $2^{j'}$ 的二进立方体。换言之，每个满足 $j\le j'\le j/(\eta-\varepsilon_j)$ 的 $w'\in\Sigma_{\lfloor\eta j'\rfloor}$，都会在前一个双重求和中作为形如 I_w^η、且满足 $w\in\Sigma_{j'}$ 的立方体出现 $2^{d(j'-\lfloor j'\eta\rfloor)}$ </style} 次。因此，

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w)^q\Big)\ \le\ C\sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor}\sum_{w\in\Sigma_{\lfloor j'\eta\rfloor}}\mu(I_w)^q\le C\sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor}2^{-\lfloor j'\eta\rfloor\tau_{\mu,\lfloor j'\eta\rfloor}(q)},\tag{27}$$

其中某个常数 C 仅取决于维数 d。最后一个求和的行为取决于 $\tau_\mu(q)$ 的取值。

• **子情形** $q>0$, $\tau_\mu(q)<0$**：** 这与 $q<q_1$ 这一事实相符。固定 $s<\tau_\mu(q)$ 并且$\varepsilon=(\tau_\mu(q)-s)/3$。回顾 **(14)**，当 j' 足够大时，$|\tau_{\mu,\lfloor j'\eta\rfloor}(q)-\tau_\mu(q)|\le\varepsilon$。于是，由于$\tau_\mu(q)<0$，可得

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w)^q\Big)\le C\sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor}2^{-\lfloor j'\eta\rfloor(\tau_\mu(q)-\varepsilon)}\le C2^{-j\eta/(\eta-\varepsilon_j)(\tau_\mu(q)-\varepsilon)}.$$

因此，

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j\ge1}2^{js}\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w)^q\Big)\le C\sum_{j\ge1}2^{j(s-\eta/(\eta-\varepsilon_j)(\tau_\mu(q)-\varepsilon))}<\infty,$$

由于当 j 变大时， $s-\eta/(\eta-\varepsilon_j)(\tau_\mu(q)-\varepsilon)\le-\varepsilon$。因此，几乎必然，

$$\sum_{j\ge1}2^{js}\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w)^q=\sum_{j\ge1}2^{js}2^{-j\tau_{\mathsf{M}1,j}(q)}<\infty.$$

因而　，$\tau_{\mathsf{M}_1}(q)\ge s$，并令 s 趋于 $\tau_\mu(q)$，可得 $\tau_{\mathsf{M}_1}(q)\ge\tau_\mu(q)$ 几乎必然成立。

• **子情形** $q>0$, $\tau_\mu(q)>0$**：** 这对应于取值 $q>q_1$。上述论证可作相应调整。固定 $s<\tau_\mu(q)$、$\varepsilon=(\tau_\mu(q)-s)/3$，并令 j' 充分大。由于 $\tau_\mu(q)>0$，在此情形下（因为其中涉及一个等比数列的和），式 **(27)** 给出

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_1(I_w)^q\Big)\le C2^{-j\eta(\tau_\mu(q)-\varepsilon)}.$$

Let令 j 趋于无穷，再令 ε 趋于零，我们几乎必然得到 $\tau_{\mathsf{M}_1}(q)\ge\eta\tau_\mu(q)$　　.

• **子情形** $q>0$, $\tau_\mu(q)=0$**：** 在这种情况下，简单计算可得 $\tau_{\mathsf{M}1}(q)\ge\tau_\mu(q)$。

最后，前述下界对每个 q 几乎必然成立，但由于 τ_{M_1} 和 τ_μ 是凹的函数，它们对所有 q 几乎必然成立。□

推论 4.10. 概率为 *1*，有 $\sigma_{\mathsf{M}_1}\le\tau^*_{\mathsf{M}_1}\le T^*$。

证明。 这是多重分形形式主义 **(2)**，即 $\sigma_{\mathsf{M}_1}\le\tau^*_{\mathsf{M}_1}$，以及前一个命题 **4.9** 中所建立的不等式 $\tau_{\mathsf{M}_1}\ge T$ 的直接推论，因此 $\tau^*_{\mathsf{M}_1}\le T^*$。□

简单的 c 计算表明， T 的勒让德变换与公式 (4) 一致，即。 e.

$$T^*(H) = \begin{cases} \eta\sigma_\mu(H/\eta) & \text{if } \eta H_{\min} \le H < \eta H_1 \\ q_1 H & \text{if } \eta H_1 \le H < H_1 \\ \sigma_\mu(H) & \text{if } H_1 \le H < H_{\max} \end{cases} \tag{28}$$

以及 $T^*(H) = -\infty$ 否则。还需证明 $\sigma_{M_1}(\mu) \ge T^*$。

4.4. 奇异性谱的下界 M_1。 我们区分公式 (4) 给出的三个区域，并声称该公式对 σ_{M_1} 成立。回想一下， q_1 是方程 $\tau_\mu(q) = 0$, $H_1 = \tau'_\mu(q_1)$ 的唯一解，这意味着 $q_1 = \sigma'_\mu(H_1)$。

首先注意到，由 (18) 可知，对于每个 $x \in [0,1]^d$，必有 $\dim(\mathsf{M}_1, x) \ge \eta H_{\min}$。

4.4.1. 情形 $\eta H_{\min} \le H \le \eta H_1$。注意，我们处于谱的递增部分。启发式地， $E_{\mathsf{M}_1}(H) = \{x$ 的 Hausdorff维数取值：$\dim(\mathsf{M}_1, x) = H\}$，是针对具有等于 $1/\eta$ 的逼近率的点 x 得到的（回顾定义 4.3）。

令 $\eta H_{\min} \le H \le \eta H_1$，并设 $H = H/\eta$。若 $H = H_{\min}$ 且 $\sigma_\mu(H_{\min}) = 0$，由于容易构造一个递减序列 ξ，使得 $\mathcal{A}_{H_{\min},\, 1/\eta,\, \xi} \neq \emptyset$，并且对所有 $x \in \mathcal{A}_{H_{\min},\, 1/\eta,\, \xi}$，都有 $\dim(\mathsf{M}_1,\ x) \ge \eta H_{\min}$（由上述观察可知），且 $\dim(\mathsf{M}_1,\ x) \le \eta H_{\min} \le H_{\min}$（由命题 4.6 可知），因此得到 $E_{\mathsf{M}_1}(\eta H_{\min}) \neq \emptyset$，从而 $\dim\ \sigma_{\mathsf{M}_1}(\eta H_{\min}) \ge 0 = \sigma_\mu(H_{\min}) = T^*(\eta H_{\min})$。

若 $H \neq H_{\min}$ 或 $\sigma_\mu(H_{\min}) > 0$，由定理 4.7（取 H 和 $\delta = 1/\eta$）可知，存在一个序列 ξ 和一个测度 $m_{\widetilde{H},\ 1/\eta}$，它们满足以下性质：

- $m_{\widetilde{H},1/\eta}(\mathcal{A}_{\widetilde{H},1/\eta,\widetilde{\xi}}) > 0$,
- $m_{\widetilde{H},1/\eta}(E) = 0$ 对于满足 $\dim E < \sigma_\mu(H)/(1/\eta) = \eta\sigma_\mu(H)$ 的任意博雷尔集 E。

应用命题 4.6，每个点 $x \in \mathcal{A}_{\widetilde{H},1/\eta,\widetilde{\xi}}$ 均满足

$$\underline{\dim}(\mathsf{M}_1, x) \le \frac{\widetilde{H}}{\min(1/\eta, 1/\eta)} = \eta\widetilde{H} = H.$$

我们推得（回顾定义3.2），$m_{\widetilde{H},1/\eta}\left(E^{\le}_{\mathsf{M}_1}(H)\right) > 0$.

此外，注意到不等式 $\tau_{\mathsf{M}_1} \ge T$意味着 $\tau'_{\mathsf{M}_1}(0^+) \ge T'(0)$。因此，由于$H \le T'(0) = \tau'_\mu(0)$，根据（12）可推出，对每个 $n \ge 1$,

$$\dim \underline{E}^{\le}_{\mathsf{M}_1}(H - 1/n) \le (\tau_{\mathsf{M}_1})^*(H - 1/n) \le \eta\sigma_\mu\left(\frac{H - 1/n}{\eta}\right) = \eta\sigma_\mu\left(\widetilde{H} - \frac{1}{n\eta}\right) < \eta\sigma_\mu(\widetilde{H}).$$

因此 $m_{\widetilde{H},\ 1/\eta}\left(E^{\le}_{\mathsf{M}_1}(H - 1/n)\right) = 0$。最后，由于

$$\underline{E}^{\le}_{\mathsf{M}_1}(H) = \underline{E}_{\mathsf{M}_1}(H) \cup \bigcup_{n \ge 1} \underline{E}^{\le}_{\mathsf{M}_1}(H - 1/n)), \tag{29}$$

可得到 $m_{\widetilde{H},\ 1/n}(E_{\mathsf{M}_1}(H)) > 0$，这意味着预期的下界 $\sigma_{\mathsf{M}_1}(H) \ge \eta\sigma_\mu(H)$。

4.4.2. 情形 $\eta H_1 < h \le H_1$。证明与用于 $\eta H_{\min} \le H \le \eta H_1$的证明类似，但在这里，$E_{\mathsf{M}_1}(H)$ 的Hausdorff维数值是针对 x 其逼近率介于1和 $1/\eta$之间的点得到的。

令 $\eta H_1 < H \le H_1$ 和 $\delta = \frac{H_1}{H} \in [1, 1/\eta)$。可以用 H_1 和 δ应用定理 4.7。我们完全重复前一小节中的相同论证。存在一个序列 ξ 和一个测度 $m_{H_1,\ \delta}$，具有以下性质：

- $m_{H_1,\delta}(\mathcal{A}_{H_1,\delta,\tilde{\xi}}) > 0$,
- $m_{H_1,\delta}(E)$ 对任意满足以下条件的博雷尔集 E

$$\dim E < \frac{\sigma_\mu(H_1)}{\delta} = \frac{\sigma_\mu(H_1)}{H_1} H = q_1 H,$$

其中，最后一个等式由等式 $\tau_\mu(q_1) = 0$, $H_1 = \tau'_\mu(q_1)$ 和 $\sigma_\mu(\tau'_\mu(q)) = \tau^*_\mu(\tau'_\mu(q)) = q\tau'_\mu(q) - \tau_\mu(q)$ 对所有 $q \in \mathbb{R}$ 均成立得到。

此外，应用命题 4.6，每个点 $x \in \mathcal{A}_{H_1,\delta,\tilde{\xi}}$ 均满足

$$\underline{\dim}(\mathsf{M}_1, x) \le \frac{H_1}{\min(\delta, 1/\eta)} = \frac{H_1}{\delta} = \frac{H_1}{H_1/H} = H.$$

因此，$m_{H_1,\delta}\left(E^{\le}_{\mathsf{M}_1}(H)\right) > 0$，并且按照与上文相同的论证，

$$\dim \underline{E}^{\le}_{\mathsf{M}_1}(H - 1/n) \le (\tau_{\mathsf{M}_1})^*(H - 1/n) \le q_1(H - 1/n),$$

于是 $m_{H_1,\delta}\left(E^{\le}_{\mathsf{M}_1}(H - 1/n)\right) = 0$。最后，利用式 (29)，必有 $m_{H_1,\delta}(E_{\mathsf{M}_1}(H)) > 0$，因此 $\sigma_{\mathsf{M}_1}(H) \ge q_1 H$，这再次给出了所需的下界。

4.4.3. **情形** $H \ge H_1$。我们需要以下命题。回顾一下，若博雷尔概率测度 ν 在 $\mathbb{R}^d$ 上具有维数为 $D \ge 0$ 的精确维数性质，即 $\nu(E_\nu(D)) = 1$，则称其为精确维数测度；在这种情况下，对于所有满足 $\dim E > D$ 的博雷尔集，$\nu(E) = 0$。

命题 4.11。 [5, 定理 5(1)] 概率为 *1* 地，对所有 $H \in [H_{\min}, H_{\max}]$，存在一个维数为 $\sigma_\mu(H)$ 的精确维数博雷尔概率测度 μ_H，使得

$$\mu_H\left(\{x \in [0,1]^d : \dim(\mu, x) = H\} \bigcap \{x \in [0,1]^d : \delta_x = 1\}\right) = \mu_H\left(\{x \in [0,1]^d : \dim(\mu, x) = H\}\right).$$

还需指出，若 $\mu \approx \nu^\gamma$，其中 ν 是与霍尔德势 φ 相关联的吉布斯测度，那么对于 $H \in (H_{\min}, H_{\max})$，$H = \tau'_\mu(q)$ 对某个 q 成立，并且 μ_H 可以取为与势 $q\gamma\varphi$ 相关联的吉布斯测度。

现在，若 $H \ge H_1$，根据命题 4.4，任意满足 $\dim(\mu, x) = H\} \bigcap \{x \in [0,1]^d : \delta_x = 1\}$ 的 $z \in \{x \in [0,1]^d$ 都满足 $\dim(\mathsf{M}_1, z) = H$。因此，$\mu_H$ 支持在 $E_{\mathsf{M}_\varrho}(H)$ 上，所以 $\sigma_{\mathsf{M}_1}(H) \ge \sigma_\mu(H)$，这正是所预期的下界。

5. 定理 2.4 的证明

这里，$\varrho \in (0, 1)$ 和 $\mathsf{M}_{\varrho,\eta}$ 简记为 M_ϱ。

由于 $\varrho < 1$，膨胀参数过度补偿了采样，因此存在大量冗余。

回顾定义 1.4，对于 $I \in \mathcal{D}_j$，每个 $\mathsf{M}_\varrho(I)$ 都可以写成

$$\mathsf{M}_\varrho(I) = \sup_{I' \subset I,\ p_{I'}=1} \mu((I')^{\varrho\eta}),$$

并类比式 (21) 引入

$$\widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I) = \max(\mathsf{M}_\varrho(I) : I \in \mathcal{N}(I_j(x))). \tag{30}$$

计算 $\widetilde{\dim}\mathsf{m}(\mathsf{M}_\varrho, x)$ 相当于估计当 j 趋于无穷时 $\mathsf{M}_\varrho(I_j(x))$ 的行为，

5.1. 一些辅助记号和性质。在以下定义中，我们省略下标 μ，尽管这些量依赖于 σ_μ。

定义 5.1。对于所有 $H \in [H_{\min}, \tau'(0)]$ 和 $\delta \geq 1$，定义

$$\delta_\varrho(H) = \frac{d(1-\varrho) + \varrho\sigma_\mu(H)}{\sigma_\mu(H)} \tag{31}$$

$$\theta_\varrho(H) = \frac{\varrho H}{\delta_\varrho(H)}. \tag{32}$$

注意：

- 映射 $H \mapsto \delta_\varrho(H)$ 从 $d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H_{\text{最小值}})\,\sigma_\mu(H_{\text{最小值}})$ 递减至 $1/[H_{\text{最小值}}\ \tau'_\mu(0)]$（特别地，$\delta_\varrho(H) \geq 1$）。
- 映射 $H \mapsto \theta_\varrho(H)$ 从 $\varrho H_{\text{最小值}}\sigma_\mu(H_{\text{最小值}})\ d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H_{\text{最小值}})$ 连续递增至 $\varrho\tau'_\mu(0)$。
- 由于 $\delta_\varrho(H) \geq 1$, $\theta_\varrho(H) \leq \varrho H$，且仅当 $\delta_\varrho(H) = 1$ 时等号成立，即 $H = \tau'_\mu(0)$。

还需要其他参数（这些参数已在引言中定义，但现在我们将提供更多细节）：

- 令 q_ϱ 为唯一的 q 使得

$$\tau_\mu(q_\varrho) = \frac{d(1-\varrho)}{\varrho}, \tag{33}$$

并设定

$$H_\varrho = \tau'_\mu(q_\varrho).$$

回想一下，由于 τ_μ 是 $\mathbb{R}$ 的一个同胚映射，因此 q_ϱ 存在。

映射

$$H \in [H_{\min}, H_{\max}] \mapsto \frac{d(1-\varrho) + \varrho\sigma_\mu(H)}{H} \tag{34}$$

在 $[H_{\min}, H_\varrho]$ 上递增，并在 $[H_\varrho, H_{\max}]$ 上递减。事实上，当 $\varrho H\sigma'_\mu(H) - d(1-\varrho) - \varrho\sigma_\mu(H) = 0$ 时，该映射的导数为零，即 $H\sigma'_\mu(H) - \sigma_\mu(H) = {}^{d}_{(1-\varrho)\varrho}$。由 $\tau_\mu = \sigma^*_\mu$ 这一事实即可得出结论。因此，该映射在 H_ϱ 处达到最大值。

- 直接计算可得

$$\frac{d(1-\varrho) + \varrho\sigma_\mu(H_\varrho)}{\varrho H_\varrho} = \frac{\sigma_\mu(H_\varrho)}{\theta_\varrho(H_\varrho)} = q_\varrho. \tag{35}$$

事实上，第一个等式由 (31) 和 (32) 得出。第二个等式由 (33) 以及勒让德变换的性质得出：$\sigma_\mu(H_\varrho) = q_\varrho H_\varrho - \tau_\mu(q_\varrho)$。

接下来，如定义 2.2 所述，根据多重分形谱 σ_μ of μ 的行为，必须区分三种情形。

- 情形 1。$\sigma_\mu(H\min) > {}^{d}_{(1-\varrho)}{}^{1/\eta-\varrho}$：对于每个 $H \in [H\min\ \tau'_\mu(0)]$，$\sigma_\mu(H) > {}^{d}_{(1-\varrho)}{}^{1/\eta-\varrho}$，且 $\delta_\varrho(H) \leq \delta_\varrho(H\min) = {}^{d}_{(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu}(H\min)\,\sigma_\mu(H\min) < 1/\eta$。特别地，$\varrho\eta H_\varrho < \theta_\varrho(H_\varrho)$。注意，${}^{d}_{(1-\varrho)}{}^{1/\eta-\varrho}$ 始终小于 d，并且随着 ϱ 从 0 增至 1，它从 ηd 递减至 0。

总之，

$$\varrho\eta H_{\min} < \varrho\eta H_\varrho < \theta_\varrho(H_\varrho) < \varrho H_\varrho < \varrho\tau'_\mu(0) \leq \varrho H_{\max}, \tag{36}$$

这解释了公式（6）中的各个区域。

- **情况 2。** $\sigma_\mu(H_{最小值}) \leq \frac{d}{(1-\varrho)}\ 1/\eta-\varrho$**：** 由于$\sigma_\mu$ 在其递增部分上具有连续性，存在一个（必然唯一的）$H = H_{\varrho,\ \eta} \in [H_{最小值}\ \tau'_\mu(0)]$ 使得

$$\sigma_\mu(H_{\varrho,\eta}) = \frac{d(1-\varrho)}{1/\eta-\varrho}. \tag{37}$$

这等价地写作

$$\delta_\varrho(H_{\varrho,\eta}) = 1/\eta.$$

注意，$H_{\varrho,\ \eta} = H_\varrho$ 当且仅当 $q_\varrho\tau'_\mu(q_\varrho) = d(1-\varrho)/(1-\varrho\eta)$。

– **情形 2.a.** $H_{\varrho,\ \eta} < H_\varrho$**：** 此处 $\delta_\varrho(H_\varrho) < 1/\eta$，因此 $\varrho\eta H_{\varrho,\ \eta} < \varrho\eta H_\varrho < \theta_\varrho(H_\varrho)$，并且

$$\varrho\eta H_{\min} < \varrho\eta H_{\varrho,\eta} < \varrho\eta H_\varrho < \theta_\varrho(H_\varrho) < \varrho H_\varrho < \varrho\tau'_\mu(0) \leq \varrho H_{\max}, \tag{38}$$

这解释了公式（7）中的各个区域。

– **情形 2.b.** $H_{\varrho,\ \eta} \geq H_\varrho$**：** 现在 $\delta_\varrho(H_\varrho) \geq 1/\eta$，因此 $\theta_\varrho(H_\varrho) \leq \varrho\eta H_\varrho \leq \varrho\eta H_{\varrho,\ \eta}$，并且证明将表明，只有 $\varrho\eta H_{\varrho,\ \eta}$ 的取值才重要。因此，（8）中相关的区域为

$$\varrho\eta H_{\min} < \varrho\eta H_{\varrho,\eta} < \varrho\tau'_\mu(0) \leq \varrho H_{\max}. \tag{39}$$

（31）可作如下简单改写：

$$\frac{d(1-\varrho) + \varrho\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))}{\delta_\varrho(\theta_\varrho^{-1}(H))} = \sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H)). \tag{40}$$

在相应的 H 取值区间内，为计算水平集 $E_{\mathsf{M}_\varrho}(H)$ 的 Hausdorff维数，寻找参数的最优取值时，所有这些公式都会派上用场。

本节最后给出命题 2.3 的证明。

命题 2.3 的证明。容易验证 D_μ、$_\varrho$、$_\eta$ 的正则性性质（连续性以及在区域内部的解析性）。此外，显然，在公式（6）、（7）和（8）所区分的、用于给出 D_μ、$_\varrho$、$_\eta$ 的各个区间中，唯一一个无法明确判断 D_μ、$_\varrho$、$_\eta$ 是否为凹函数的区间，是满足 $\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))$ 的区间。一旦验证了这一凹性性质，对于情形 1 和 $2.b.$，D_μ、$_\varrho$、$_\eta$ 的整体凹性便显而易见；而在情形 $2.a$ 中，这一结论则由以下事实推出：D'_μ、$_\varrho$、$_\eta(\varrho\eta H^-_\varrho,_\eta) = \eta^{-1}D'_\mu$、$_\varrho$、$_\eta(\varrho\eta H^+_\varrho,_\eta) > D'_\mu$、$_\varrho$、$_\eta(\varrho\eta H^+_\varrho,_\eta)$。

要证明 $H \mapsto \sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))$ 在 $[H_\varrho, \varrho\tau'_\mu(0)]$（从而在 $[H_{\varrho,\eta}, \varrho\tau'_\mu(0)]$ 情形 2.b. 中）上是凹的，我们改为证明其倒数映射 $F = \theta_\varrho \circ \sigma_\mu^{-1}$ 在 $[\sigma_\mu(H_\varrho)\ d]$ 上是凸的。事实上，可以看出 $F(u) = \varrho^{u\sigma_\mu^{-1}}(u)\ d\ (1-\varrho) + \varrho u$，计算表明ᄂᆞᆫ

$$F''(u) = \frac{\varrho}{(d(1-\varrho)+\varrho u)^3}(G(u) + 2d(1-\varrho)h(u)),$$

其中，令 $g = \sigma_\mu^{-1}$, $h(u) = g'(u)(d(1-\varrho)+\varrho u) - \varrho g(u)$，并且 G 是关于变量 $u, g(u)\ g'(u)\ g''(u)$ 的一个具有正系数的多项式函数；利用 σ_μ 的凹性可知，这些变量在 $[\sigma_\mu(H_\varrho)\ d]$ 上均为非负。此外，令 $H = g(u)$，则有 $g'(u) = \sigma'_\mu(H)^{-1}$。因此，$h(u) \geq 0$ 当且仅当 $d(1-\varrho) \geq \varrho(\sigma'_\mu(H)H - \sigma_\mu(H))$，即 $H = \tau'_\mu(q)$，其中 $\tau_\mu(q) \leq d(1-\varrho)/\varrho)$，也就是说，$H \geq H_\varrho$。因此，$F''$ 在 $[\sigma_\mu(H_\varrho)\ d]$ 上为正，从而得到所需结果。□

5.2. **重写 $D_{\mu,\varrho,\eta}$ 的公式**。定义映射如下（同样，为使符号尽可能简洁，我们省略其对 μ 的依赖）

$$m_\varrho(H,\delta)=\min\Big(\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H)}{\delta},\sigma_\mu(H)\Big),\ H\in\mathbb{R},\ \delta\geq 1. \tag{41}$$

本节的主要命题是计算 M_ϱ 的多重分形谱的关键，它给出了$D_{\mu,\varrho,\eta}$的另一种公式。该公式体现了这样的直觉：M_ϱ在 x 处的局部维数等于 H，这是 μ在 x 处的局部行为与 x 被存活顶点逼近的速率相互折中的结果。

命题5.2。若 $H\geq 0$，令

$$\widetilde{D}_{\mu,\varrho,\eta}(H)=\max\Big\{m_\varrho(u,\delta):0\leq\frac{\varrho u}{\delta}\leq H,\ 1\leq\delta\leq 1/\eta\Big\}. \tag{42}$$

$\widetilde{}$在区间 $[0,\varrho\tau'_\mu(0)]$上，$D_{\mu,\varrho,\eta}=D_{\mu,\varrho,\eta}$成立。

证明。注意，当 $u<H_{\min}$, $\sigma_\mu(u)=-\infty$时， $m_\varrho(u,\ \delta)=-\infty$。因此只需考虑$u\in[H_{\min},H_{\max}]$。

事实： 当 $\delta=\delta_\varrho(u)$且 $u\leq\varrho\tau'_\mu(0)$时，$\sigma_\mu(u)=\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(u)}{\delta}$。当 $\delta<\delta_\varrho(u)$时，式 (41) 中关于 u 的最小值在$\sigma_\mu(u)$处取得；而当 $\delta\geq\delta_\varrho(u)$时，它在$\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(u)}{\delta}$处取得。

情形 1. $\sigma_\mu(H_{\min})>\frac{d(1-\varrho)}{1/\eta-\varrho}$：令 $H\in[0,\tau'_\mu(0)]$。

对于所有 $u\in[H_{\min},\tau'_\mu(0)]$, $\sigma_\mu(u)\geq\sigma_\mu(H_{\min})>\frac{d(1-\varrho)}{1/\eta-\varrho}$，因此

$$\delta_\varrho(u)=\varrho+\frac{d(1-\varrho)}{\sigma_\mu(u)}<1/\eta.$$

(i) 当 $1\leq\delta\leq\delta_\varrho(u)$固定时，根据上述事实，(41) 中的最小值在$\sigma_\mu(u)$处取得。因此，在求 (42) 中的最大值时，我们尝试对 $H_{\min}\leq\frac{\varrho u}{\delta}\leq H,\ 1\leq\delta\leq\delta_\varrho(u)$最大化$\sigma_\mu(u)$。当 $\delta\equiv\delta_\varrho(u)$时，这个最大值在某个 u 处取得，即需要对 $H_{\min}\leq\frac{\varrho u}{\delta_\varrho(u)}\leq H$最大化$\sigma_\mu(u)$。当$\frac{\varrho u}{\delta_\varrho(u)}=H$时，最大值取得，此时 $u=\theta_\varrho^{-1}(H)$（H 在 θ_ϱ下的原像），其值为$\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))$。

(ii) 现在，当 $\delta_\varrho(u)\leq\delta\leq 1/\eta$时，(41) 中的最小值在$\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(u)}{\delta}$处取得。因此，需要对 $H_{\min}\leq\frac{\varrho u}{\delta}\leq H$, $\delta_\varrho(u)\leq\delta\leq 1/\eta$取最大值，以最大化$\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(u)}{\delta}$。给定 δ，当 $\varrho u/\delta=H$时，该值达到最大，且等于 $H^{\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(u)}{\varrho u}}$。由于 $\delta_\varrho(u)\leq\delta$，这意味着 $\varrho u/\delta_\varrho(u)\geq H$，即$u\geq\theta_\varrho^{-1}(H)$。此外，由于 $\delta\leq 1/\eta$，最优的 u 满足 $u=H/(\varrho\eta)$。因此，在这一范围的 δ取值下，(42) 中的最大值可写为

$$\max\left\{H\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(u))}{\varrho u}:\theta_\varrho^{-1}(H)\leq u\leq H/\varrho\eta\right\}.$$

回顾映射 $u\mapsto\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(u))}{u}$在 $[H_{\min},H_\varrho]$ 上递增，在 $[H_\varrho,\tau'_\mu(0)]$上递减。因此，上述最大值会产生三个阶段，具体取决于 H_ϱ 相对于区间 $[\theta_\varrho^{-1}(H)\ H/\varrho\eta]$ 的位置（或者由对称性可知，取决于 H 相对于区间 $[\varrho\eta H_\varrho,\theta_\varrho(H_\varrho)]$的位置）。

更确切地说：

- 当 $\varrho\eta H_{\text{最小值}}\leq H\leq\varrho\eta H_\varrho$时，最大值在 $u=H/\varrho\eta$ （对应的 δ为 $1/\eta$）处达到，其值等于 $\eta(d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H/\varrho\eta))$。

• 当 $\varrho\eta H_\varrho \le H \le \theta_\varrho(H_\varrho)$ 时，在 $u = H_\varrho$ （含 $\delta = \delta_\varrho(H_\varrho)H_\varrho/H$）处达到，并且等于 $H^{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H_\varrho)} = H^{\sigma_\mu(\theta_\varrho(H_\varrho))\theta_\varrho(H_\varrho)}$（此处我们使用了（35））。

• 当 $\theta_\varrho(H_\varrho) \le H \le \varrho\tau'_\mu(0)$ 时，它在 $u = \theta_\varrho^{-1}(H)$ 处取到（其中 $\delta = \delta_\varrho(H_\varrho)$），且其值为 $H^{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))\varrho\theta_\varrho^{-1}(H)} = \sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))$，最后一个等式由 (32) 得出。

~综合前面的估计可知，$D_{\mu,\varrho,\eta}$ 确实与$D_{\mu,\varrho,\eta}$相同，后者由公式 (6) 给出。

情形 2.a. $\sigma_\mu(H_{\min}) \le d(1-\varrho)1/\eta-\varrho$ **以及** $H_{\varrho,\eta} < H_\varrho$**:**

回顾 $H_{\varrho,\eta}$ 的定义 (37)，以及不等式序列 (38)。

(i) 当 $\varrho\eta H_{\min} \le H \le \varrho\eta H_{\varrho,\eta}$ 时，所有满足 $\varrho u/\delta \le H$ 且 $1 \le \delta \le 1/\eta$ 的 $u \in [H_{\min}, \tau'_\mu(0)]$ 必然满足 $u \le H/(\varrho\eta) \le H_{\varrho,\eta}$。因此，(42) 中的最大值在 $u = H/\varrho\eta$ 且 $\delta = 1/\eta$ 时取得，即当 u 尽可能大时取得，其值为 $\sigma_\mu(H/\varrho\eta)$。

(ii) 当 $H > \varrho\eta H_{\varrho,\eta}$ 时，注意到对于 $\varrho u/\delta \le H$， $1 \le \delta \le 1/\eta$ 和 $u \le H_{\varrho,\eta}$，所有值 $\sigma_\mu(u)$ 均小于 $\sigma_\mu(H_{\varrho,\eta})$，因此它们不会对求 (42) 中的最大值有所贡献。因此，讨论归结为**情形 1**。，结论相同。

~这表明，在这种情况下，由公式（7）给出的 $D_{\mu,\varrho,\eta}$ 和 $D_{\mu,\varrho,\eta}$ 相同。

情形 2.b. $\sigma_\mu(H_{\min}) \le d(1-\varrho)1/\eta-\varrho$ **和** $H_{\varrho,\eta} \ge H_\varrho$**:**

回顾（39）。证明与前一个证明基本相同，只是在这种情况下，只有 $H_{\varrho,\eta}$ 起作用:

(i) 当 $\varrho\eta H_{\min} \le H \le \varrho\eta H_{\varrho,\eta}$ 时，按照上述相同的论证，所有满足 $\varrho u/\delta \le H$ 且 $1 \le \delta \le 1/\eta$ 的 $u \in [H_{\min}, \tau'_\mu(0)]$ 都必然满足 $u \le H/(\varrho\eta) \le H_{\varrho,\eta}$。因此，(42) 中的最大值为 $\sigma_\mu(H/\varrho\eta)$。

(ii) 当 $H > \varrho\eta H_{\varrho,\ \eta}$ 时，与**情形 2.a (ii)** 中相同的论证表明，最大值为$\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))$。□

5.3. **局部维数的估计**。 类比引理 4.1 和命题 4.4，可得以下结论。

引理 5.3。 概率为 *1*:

(1) 存在一个正数列$(\widetilde{\varepsilon}_j)_{j\ge1}$，使得对每个 $w \in \Sigma^*$,

$$\mu(I_w^\varrho)2^{-|w|\widetilde{\varepsilon}_{|w|}} \le \mathsf{M}_\varrho(I_w) \le \mu(I_w^{\varrho\eta}). \tag{43}$$

(2) 对每个 $x \in [0,1]$，若 $\delta_x = 1$，则 维数$(\mathsf{M}_\varrho, x)) = \varrho$维数$(\mu, x)$。

证明。 只需将引理 4.1 和命题 4.4 的证明中处处的I_w 替换为 I_w^ϱ，即可轻松得到本证明（例如，在命题 4.4 的式 (22) 以及随后式 (23) 中）。□

现在关注的元素是那些以速率 δ 被二进有理数 x_w 逼近的点 $[0,1]^d$，其中 $\mu(I_w^{\varrho\eta})$（而非第 4.2.2 节中的 $\mu(I_w)$）具有特定的值。这也解释了下文引入性质 $\mathcal{P}(\rho,\ H,\ \xi)$ 的原因。

~**定义 5.4**。设 $H \ge 0$、 $\delta \ge 1$ 和 $\xi = (\xi_j)_{j\ge1}$ 为正数列。若满足下述条件，则称词 $w \in \Sigma^*$ ~满足 $\mathcal{P}(\varrho, H, \xi)$:

$$|I_w^{\varrho\eta}|^{H+\xi_{|w|}} \le \mu(I_w^{\varrho\eta}) \le |I_w^{\varrho\eta}|^{H-\xi_{|w|}}.$$

于是定义

$$\mathcal{A}_{\varrho,H,\widetilde{\xi},\delta}=\bigcap_{J\geq 1}\bigcup_{j\geq J}\bigcup_{w\in\mathcal{S}_j(\eta):\ w\ satisfies\ \mathcal{P}(\varrho,H,\widetilde{\xi})}B\Big(x_w,(\ell_w)^{\delta}\Big).$$

~ ~记号与前一节一致： $\mathcal{P}(1,\ H,\ \xi)\ =\ \mathcal{P}(H,\ \xi)$以及$\mathcal{A}_{1,\ H,\ \widetilde{\xi},\ \delta}=\mathcal{A}_{H,\ \widetilde{\xi},\ \delta}$。命题 4.6 可推广为以下命题。

~**命题 5.5。 </style}概率为 1，若是一个收敛于 0 的正数列，且，** $H,\ \widetilde{\xi},\ \delta$，则

$$\varrho\eta H\leq\underline{\dim}(\mathsf{M}_{\varrho},x)\leq\frac{\varrho H}{\min(\delta,1/\eta)}.$$

证明。同样，将 I_w 替换为 I_w^{η}，并使用~ ~$\mathcal{P}(\varrho,\ H,\ \xi)$代替 $\mathcal{P}(H,\ \xi)$，即可对命题 4.6 的证明作相应修改。□

为计算 M_{ϱ} 的多重分形谱，不能使用标准不等式 (2)，因为多重分形形式主义不成立。我们改用集合 $E_{\mathsf{M}_{\varrho}}(H)$的以下性质。 —

命题 5.6。 概率为 *1*，

(1) 对每个 $H\geq 0$，记 $\tilde{\varepsilon}$ 为等于 ε的常数序列，则有

$$\underline{E}^{\leq}_{\mathsf{M}_{\varrho}}(H)\ \subset\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{H'\geq 0,\,\delta\in[1,1/\eta],\,\frac{\varrho H'}{\delta}\leq h+\varepsilon}\mathcal{A}_{\varrho,H',\tilde{\varepsilon},\delta}.$$

(2) 对每个 $H\geq 0,\ \ \underline{E}_{\mathsf{M}_{\varrho}}(H)\ \subset E^{\geq}_{\mu}\,(H/\varrho)$。

第一个包含关系将用于求递增部分 $H\leq\varrho\tau'_{\mu}(0)$ 中多重分形谱$\sigma_{\mathsf{M}_{\varrho}}$ 的上界，而第二个包含关系将用于递减部分 $H\geq\varrho\tau'_{\mu}(0)$。

证明。 (1) 假设 $x\in E_{\mathsf{M}_{\varrho}}(H)$。回顾 (10)，存在一个正整数递增序列 $(J_n)_{n\geq 1}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\widetilde{\mathsf{M}}_{\varrho}(I_{J_n}(x))}{-J_n\log 2}=H. \tag{44}$$

由引理 3.5，存在一个满足 $J_n\leq J'_n$且 $1\leq\widetilde{\limsup_{n\to\infty}}J'_n/J_n\leq 1/\eta$ 的正整数序列 $(J'_n)_{n\geq 1}$，使得对每个 n，存在 $w_n\in\mathcal{S}_{J'_n}(\eta)$ 和 $\mathsf{M}_{\varrho}(I_{J_n}(x))\ =\mu(I_{w_n}^{\varrho\eta})$。记 $\mu(I_{w_n}^{\varrho\eta})\ =|I_{w_n}^{\varrho\eta}|^{H_n}$为某个 $H_n\in[\alpha_m,\alpha_M]$（回顾 μ 的一致上界 (16)）。于是有

$$\frac{\log\widetilde{\mathsf{M}}_{\varrho}(I_{j_n}(x))}{-j_n\log 2}=\frac{\log\mu(I_{w_n}^{\varrho\eta})}{-J_n\log 2}=\frac{-\lfloor J'_n\varrho\eta\rfloor H_n}{-J_n}=\varrho H_n/\delta_n,$$

其中 $\delta_n=\frac{\varrho J_n}{\lfloor J'_n\varrho\eta\rfloor}$。根据构造，

$$1\leq\liminf_{n\to+\infty}\delta_n\leq\limsup_{n\to+\infty}\delta_n\leq 1/\eta.$$

在抽取一个子序列后，可以假设两个序列 $(H_n)_{n\geq 1}$ 和 $(\delta_n)_{n\geq 1}$ 分别收敛到 $H'\in[H_{\min},H_{\max}]$ 和 $\delta\in[1,1/\eta]$。由（44），可得 $\varrho H'/\delta=H$。最后，我们指出$|x-x_{w_n}|\leq 2\cdot 2^{-J_n}=2\cdot 2^{-\delta_n\lfloor\varrho\eta J'_n\rfloor/\varrho}$。因此，回顾（20），对于每个 $\epsilon>0$，对于每个足够大的 n，使得 $|H_n-H'|\leq\varepsilon/2$、$|\delta_n-\delta|\leq\varepsilon/2$ 和 $|\varrho H_n/\delta-H|\leq\varepsilon/2$:

- $w_n\in\mathcal{S}_{J'_n}(\eta)$,
- $x\in B(x_{w_n},\ \ 2\cdot 2^{-\delta_n\lfloor\varrho\eta J'_n\rfloor/\varrho})\ \subset B(x_{w_n},\ \ \ell_{w_n}^{\delta-\epsilon})$

- 有

$$\mu(I_{w_n}^{\varrho\eta}) \in [|I_{w_n}^{\varrho\eta}|^{H'-\epsilon}, |I_{w_n}^{\varrho\eta}|^{H'+\epsilon}]. \tag{45}$$

最后， x 属于集合 $\mathcal{A}_{\varrho,\ H',\ \widetilde{\epsilon},\ \delta-\varepsilon}$，因此结论成立。

注 5.7. </style}有 ($I_{J_n}(x)$)。令 j_n 表示满足$I_{w_n} \subset \mathcal{N}(I_j(x))$的最大整数 j 。显然 $J_n \le j_n \le J'_n$ 且 $\widetilde{\mathsf{M}\varrho}(I_{j_n}(x)) = \mu(I_{w_n}^{\varrho\eta})$。由此可得 $\lim_{n\to\infty} \frac{J_n}{j_n} = 1$; 否则 $\dim(\mathsf{M}\varrho, x) < H$。 —

(2) 使用与上文相同的记号，对每个 $x \in E_{\mathsf{M}_\varrho}(H)$，由 (45) 及 μ 的倍增性质可推出 $\dim(\mu, x) \ge H' = H\delta/\varrho \ge H/\varrho$ ，因为 $\delta \ge 1$。□

5.4. **用于估计集合，** $H,\ \widetilde{\xi},\ \delta$ **的 Hausdorff维数的有用界**。为了得到多重分形谱 $\sigma_{\mathsf{M}_\varrho}$的上界和下界，我们回顾在 [4]中得到的一些结果。在那里，我们研究了形如以下形式的 limsup 集的 Hausdorff 维数:

$$\bigcap_{N\ge 1} \bigcup_{n\ge N:\ (r_n)^{\varrho H+\xi_n} \le \mu(B(t_n, r_n^{\varrho})) \le (r_n)^{\varrho H+\xi_n}} B(t_n, r_n^{\delta}),$$

其中 $H \ge 0$、 $\delta \ge 1$, $(\xi_n)_{n\ge 1}$ 是一个收敛于零的正数列， μ 是吉布斯测度，并且球列 $(B(t_n, r_n))_{n\ge 1}$ 满足文中所述的一些性质。显然，只要进行适当改写，这与我们目前的情形完全相同: t_n 和 r_n 被 x_w 和 ℓ_w 所替代，而 $\mu(B(t_n,\ r_n^{\varrho}))$ 上的缩放条件则被 $\mathcal{P}(\rho,\ H,\ \xi)$ 取代（如注 4.8 所述，这不会改变结果）。

特别地， [4] 中的一个关键性质称为弱冗余: 当称球族 $(B(t_n,\ r_n))_{n\ge 1}$ 为弱冗余时，$T_N = \{n :\ 2^{-N} \le r_n \le 2^{-N+1}\}$，存在一个正数列 $(\alpha_N)_{N\ge 1}$，使得

- $\lim_{N\to+\infty} \frac{\alpha_N}{N} = 0$。
- 每个 T_N 都可以分解为 α_N 个由两两不相交族组成的族 $(T_{N,\ i})_{i=1,\ \ldots\ldots \alpha_N}$使得对每个 $n \ne n' \in T_{N,\ i}$, $B(t_n,\ r_n) \cap B(t_{n'},\ r_{n'}) = \emptyset$。

球族的弱冗余意味着大小相近的球不会过度重叠（其重叠程度由序列（α_N）$_{N\ge 1}$控制）。根据引理 3.6，序列（$B(x_w,\ \ell_w)$）$_{w\in\mathcal{S}_j(\eta)}$ 正是这种情形。因此，我们可以使用 [4], 的结果，现将其陈述回顾如下:

首先，我们需要对定理 2.2], 作如下轻微修改 [4, ; 该修改可直接由此定理的证明及 μ的倍增性质推出。

定理 5.8。 概率为 *1*，对于每个 *Gibbs*容量 μ、每个 $H \ge 0$、 $\delta \ge 1$以及 $\varepsilon > 0$，记常数序列$(\varepsilon)_{n\ge 1}$为，

$$\dim \mathcal{A}_{\varrho,H,\vec{\varepsilon},\delta} \le \min\Big(\frac{d(1-\varrho) + \varrho S_\mu(H,\varepsilon)}{\delta - \varepsilon}, S_\mu(H,\varepsilon)\Big), \tag{46}$$

其中 $S_\mu(H,\varepsilon) = \sup\{\sigma_\mu(H') :\ H' \in [H-\varepsilon, H+\varepsilon]\}$。

关于下界，由于引理 3.5 表明，以概率为 1，不仅式 (17) 成立，而且对于所有足够大的 $j \ge 1$ ，对所有 $w \in \mathcal{S}_j(\eta)$，都存在 $S_{j,\varrho}(w) \subset \mathcal{S}_j(\eta)$，其基数至少为$5^{-1} \cdot 2^{j(1-\varrho-\varepsilon_j)}$，使得球 $B(x_{w'}, \ell_{w'})$、$w' \in \widetilde{S}_{j,\varrho}(w)$ 包含于 $B(x_w, \ell^{\varrho})$ 中且两两不相交，因此有以下结论（回顾关于 m_ϱ 的公式 (41)）:

The理 5.9 （ [4] 的定理2.7的推论）。 设 μ 为 *Gibbs*容量。设 $\varrho \in (0,1$).

概率为 *1*，对于所有的 $\delta > 1$ 和满足 $\sigma_\mu(H) > 0$ 的 $H \ge 0$ ，都存在一个趋于零的递减序列 ξ, 以及一个博雷尔概率测度$\nu_{\varrho,H,\delta}$ ，使得:

- $\nu_{\varrho,H,\delta}(\mathcal{A}_{\varrho,H,\widetilde{\xi},\delta}) > 0$,
- 对于任意 *Hausdorff*维数小于 $m_\varrho(H,\delta)$ 的集合 E，$\nu_{\varrho,\ H,\ \delta}(E) = 0$。

特别地，维数 $\mathcal{A}_{\varrho,H,\widetilde{\xi},\delta} \geq m_\varrho(H,\delta)$。

注5.10. 与 $\varrho = 1$的情形类似，[4] 中的定理*2.7*讨论的是 $H \in (H_{\min}, H_{\max})$，但通过对证明进行简单调整，可以将该结果推广到 $H \in \{H_{\min}, H_{\max}\}$。

5.5. **的上界**$\sigma_{\mathsf{M}_\varrho}$。 为检验所需的上界 $\sigma_{\mathsf{M}_\varrho} \leq D_{\mu,\ \varrho,\ \eta}$，我们区分 $H \leq \varrho\tau'_\mu(0)$ 和 $H \geq \varrho\tau'_\mu(0)$ 两种情况。第一种情况直接由命题5.2、(46)、命题 5.6(1) 以及以下引理得到。

引理5.11。 对于 $\varepsilon > 0$，记 $\tilde{\varepsilon}$ 为等于 ε 的常数序列。概率为 *1*，对于所有$H \geq 0$,

$$\dim\Big(\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{H'\geq 0,\,\delta\in[1,1/\eta],\,\frac{\varrho H'}{\delta}\leq H+\varepsilon}\mathcal{A}_{\varrho,H',\tilde{\varepsilon},\delta}\Big) \leq \widetilde{D}_{\mu,\varrho,\eta}(H).$$

证明。 固定 $\varepsilon \in (0,1)$。对于每个整数 $N \geq 1/\varepsilon$，令 $P_N = \{k/N\colon\ k \in \mathbb{N}\}$。我们有

$$\bigcup_{H'\geq 0,\,\delta\in[1,1/\eta],\,\frac{\varrho H'}{\delta}\leq H+\varepsilon}\mathcal{A}_{H',\varrho,\tilde{\varepsilon},\delta} = \bigcup_{H'\in P_N,\,\delta\in[1,1/\eta]\cap P_N,\,\frac{\varrho H'}{\delta}\leq H+\varepsilon}\mathcal{A}_{H',\varrho,\tilde{\varepsilon},\delta}.$$

根据引理 3.6，球族 $(B(x_w,\ell_w))_{w\in\bigcup_{j\geq 1}\mathcal{S}_j(\eta)}$ 满足弱冗余性质 prop- erty [4,定义 2.1]。因此，由 (46) 可得,

$$\begin{aligned}\dim\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{\substack{H'\geq 0,\delta\in[1,1/\eta]\\ \frac{\varrho H'}{\delta}\leq H+\varepsilon}}\mathcal{A}_{H',\varrho,\delta,\varepsilon} &\leq \inf_{\varepsilon>0}\liminf_{N\geq 1/\varepsilon}\sup_{\substack{H'\in P_N,\delta\in[1,1/\eta]\cap P_N\\ \frac{\varrho H'}{\delta}\leq H+\varepsilon}}\min\Big(\frac{d(1-\varrho)+\varrho S_\mu(H',\varepsilon)}{\delta-\varepsilon}, S_\mu(H',\varepsilon)\Big)\\ &= \widetilde{D}_{\mu,\varrho,\eta}(H),\end{aligned}$$

由（42）以及上半连续凹函数σ_μ 在其紧致定义域 $[H_{\min}, H_{\max}]$上的连续性得出结论。□

对于第二种情况 $H \geq \varrho\tau'_\mu(0)$，结合命题 5.6 的第 (2) 项以及应用于 μ 的 (13) 式，可得

$$\dim \underline{E}_{\mathsf{M}_\varrho}(H) \leq \dim \overline{E}^{\geq}(H/\varrho) \leq \sigma_\mu(H/\varrho) = D_{\mu,\varrho,\eta}(H).$$

证明完成。

5.6. **谱的下界**。 这里证明了 $\sigma_{\mathsf{M}_\varrho} \geq D_{\mu,\ \varrho,\ \eta}$。主要思路是：对于每个 H，通过精心选择参数 H' 和 δ，要么找到一个形如 μ_H的合适测度（如命题 4.11 中所述），要么找到一个来自定理 5.9 的测度 $\nu_{\varrho,\ H',\ \delta}$，其承载于集合 $E_{\mathsf{M}_\varrho}(H)$ 上。 —

5.6.1. **谱的递减部分：** $H \geq \varrho\tau'_\mu(0)$。如果 $H_{\min} \leq H \leq \varrho H_{\max}$，由引理 5.3 的第 (2) 项可知 $\{x \in [0,1]^d\colon\ \dim(\mu,x) = H/\varrho\} \bigcap \{x \in [0,1]^d\colon\ \delta_x = 1\} \subset E_{\mathsf{M}_\varrho}(H) \subset E_{\mathsf{M}_\varrho}(H)$。这意味着，命题 4.11 中考虑的测度 $\mu_{H/\varrho}$ 支持在 $E_{\mathsf{M}_\varrho}(H))$ 上，因此 $\dim E_{\mathsf{M}_\varrho}(H) \geq \sigma_\mu(H/\varrho)$。如果 $H > \varrho H_{\max}$，那么 $\underline{\sigma}_{M_\varrho}(H) \geq -\infty = D_{\mu,\varrho,\eta}(H)$。

5.6.2. **当** $\sigma_\mu(H_{\min}) > d_{(1-\varrho)}\,1/\eta-\varrho$**时，谱的递增部分。**

公式 6 所展示的三个阶段对应于对 H' 和 δ 的不同选择，以便从定理 5.9 得到一个良好的测度 $\nu_{\varrho,H',\delta}$，其支持集位于 $E_{\mathsf{M}_\varrho}(H')$ 上。

• $H \le \varrho\eta H_\varrho$. 令 $H' = H/\varrho\eta$ 且 $\delta = 1/\eta \ge \delta_\varrho(H'$). 注意，$\sigma_\mu(H') > 0$ 或 $\sigma_\mu(H') = -\infty$。如果 $\sigma_\mu(H') > 0$，考虑测度 $\nu_{\varrho,H',\delta}$ 以及集合 $\mathcal{A}_{\varrho,H',\delta,\tilde\xi}$，它们来自定理 5.9（对应某个序列 ξ）。根据命题 5.5，

$$\mathcal{A}_{\varrho,H',\delta,\tilde\xi} \subset \underline{E}^{\le}_{\mathsf{M}_\rho}(H). \tag{47}$$

此外，根据 构造 ，对所有 $n \ge 1$ we kno w 使用.....的上界 $\sigma_{\mathsf{M}_\varrho}$ 在.....中得到第5.5节 that

$$\dim \underline{E}^{\le}{}_{\mathsf{M}_\varrho}(H-1/n) \le \widetilde{D}_{\mu,\varrho,\eta}(H-1/n) < D_{\mu,\varrho,\eta}(H) = \frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H/\varrho\eta))}{\delta} = m_\varrho(H,\ \delta),$$

最后一个不等式由 $D_{\mu,\varrho,\eta}$ 的公式 (6) 得出。因此，对于每个 $n \ge 1$，都有 $\nu_{\varrho,H',\delta}(\mathcal{A}_{\varrho,H',\delta,\tilde\xi}) = 1$ 且 $\nu_{\varrho,H',\delta}\big(E^{\le}{}_{\mathsf{M}_\varrho}(H-1/n)\big) = 0$，故 $\nu_{\varrho,H',\delta}$ 支持在集合

$$F = \mathcal{A}_{\varrho,H',\delta,\tilde\xi} \setminus \bigcup_{n\ge1} \underline{E}^{\le}_{\mathsf{M}_\varrho}(H-1/n) \subset \underline{E}_{\mathsf{M}_\varrho}(H).$$

这表明 $\nu_{\varrho,H',\delta}(E_{\mathsf{M}_\varrho}(H)) = \nu_{\varrho,H',\delta}(F) = 1$，因此 $\dim E_{\mathsf{M}_\varrho}(H) \ge \underline{D}_{\mu,\varrho,\eta}(H)$。

若 $\sigma_\mu(H') = -\infty$，则根据 5.6(1)，$D_{\mu,\varrho,\eta}(H) = D_{\mu,\varrho,\eta}(H) = -\infty$，所以 $E_{\mathsf{M}_\varrho}(H) = \emptyset$。

• $\varrho\eta H_\varrho \le H \le \theta_\varrho(H_\varrho)$. 这里令 $H' = H_\varrho$，并令 $\delta = \delta_\varrho(H_\varrho)\theta_\varrho(H_\varrho)/H = \varrho H_\varrho/H$，再像定理 5.9 中那样固定 ξ。由于 $\frac{\varrho H'}{\delta} = \frac{\varrho H_\varrho}{\varrho H_\varrho/H} = H$，根据命题 5.5，(47) 仍然成立，并且可以采用与 $H \le \varrho\eta H_\varrho$ 时相同的论证。因此，$\dim E_{\mathsf{M}_\varrho}(H)$ 的下界为

$$m_\varrho(H',\delta) = \frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H')}{\delta} = \frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H_\varrho)}{\delta_\varrho(H_\varrho)H_\varrho/H} = \frac{\sigma_\mu(H_\varrho)}{\theta_\varrho(H_\varrho)}H$$

因此得到所需的值。

• $\theta_\varrho(H_\varrho) \le H \le \varrho\tau'_\mu(0)$. 这里我们令 $H' = \theta_\varrho^{-1}(H)$、$\delta = \delta_\varrho(\theta_\varrho^{-1}(H))$，并像定理 5.9 中那样固定 $\widetilde{\xi}$。与引理 5.3 相同的论证给出下界

$$m_\varrho(H',\delta) = \frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H')}{\delta} = \frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H)))}{\delta_\varrho(\theta_\varrho^{-1}(H))} = \sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H)),$$

因此得到期望值。

5.6.3. **当** $\sigma_\mu(H_{\min}) > d_{(1-\varrho)}\,1/\eta-\varrho$ **且** $H_{\varrho,\eta} \le H$ **时谱的递增部分**

我们只需处理 $H \le \varrho\eta H_{\varrho,\eta}$ 的情形，因为其他情形可按前一小节中的方法处理。

若 $H \le \varrho\eta H_{\varrho、\eta}$ 且 $\sigma_\mu(H/\varrho\eta) \ge 0$，则令 $H' = H/\varrho\eta$ 和 $\delta = 1/\eta \le \delta_\varrho(H')$。若 $\sigma_\mu(H') \ge 0$ 且 $\sigma_\mu(H') = 0$，则 $H' = H_{\min}$。在此情形下，注意到由引理 5.3 的第 (1) 项可知，对于所有 $x \in [0,1]^d$，都有 $\underline{\dim}(\mathsf{M}_\varrho, x) \ge \varrho\eta H_{\min}$。此外，不难证明存在一个序列 $\widetilde{\xi}$，使得 $\mathcal{A}_{\varrho、H_{\min}、1/\eta、\tilde\xi} \ne \emptyset$。由于由命题 5.5 可知，$\mathcal{A}_{\varrho、H_{\min}、1/\eta、\tilde\xi} \subset E^{\le}\,\mathsf{M}_\rho(\varrho\eta H_{\min})$，因此得到 $E_{\mathsf{M}_\varrho}(\varrho\eta H_{\min}) \ne \emptyset$ 且 $\sigma_{\mathsf{M}_\varrho}(\varrho\eta H_{\min}) \ge 0 = \sigma_\mu(H_{\min}) = D_{\mu、\varrho、\eta}(\varrho\eta H_{\min})$。

如果 $\sigma_\mu(H') > 0$，讨论与前一节相同，只是这里 $m_\varrho(H',\ \delta) = \sigma_\mu(H')$，而不是 $m_\varrho(H',\ \delta) = (1-\varrho+\varrho\sigma_\mu(H'))/\delta$。

如果 $\sigma_\mu(H') = -\infty$，那么，与前一小节一样，$D_{\mu,\ \varrho,\ \eta}(H) = D_{\mu,\ \varrho,\ \eta}(H) = -\infty$，因此 $E_{\mathsf{M}_\varrho}(H) = \emptyset$，由命题 5.6(1)可知。

5.6.4. **谱的递增部分，当** $\sigma_\mu(H_{\min}) > {}^{d}_{(1-\varrho)\,1/\eta-\varrho}$ **和** $H_{\varrho,\eta} > H_\varrho$**.** ——

• $H \le \varrho\eta H_{\varrho,\ \eta}$。 讨论与前一小节相同。

• $\varrho\eta H_{\varrho,\ \eta} \le H \le \varrho\tau'_\mu(0)$。 当 $H \ge H_\varrho$ 时，讨论与前一小节完全相同，因为我们从第 5.1 节得知 $\varrho\eta H_{\varrho,\ \eta} \ge H_\varrho$。

5.7. **关于** M_ϱ **的多重分形形式主义。** 在本节中，我们计算 $\tau_{\mathsf{M}_\varrho}$ 并研究 M_ϱ 的多重分形形式主义是否成立。首先重述定理 2.4 的第 (2) 项。

命题 5.12。 概率为 *1*，有

$$\tau_{\mathsf{M}_\varrho}(q) = \begin{cases} d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q) & \text{if } q < q_\varrho, \\ \eta(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)) & \text{if } q \ge q_\varrho. \end{cases}$$

~~证明。 对于 $j \ge 1$，估计和式 $\sum_{w\in\Sigma_j} \mathsf{M}_\varrho(I_w)^q$。

(i) $\tau_{\mathsf{M}_\varrho}$的下界:

• **情形** $q < 0$**:** 利用引理 5.3 第 (1) 项中的下界，可得

$$\sum_{w\in\Sigma_j} \widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q \ \le \sum_{w\in\Sigma_j} \max(\mathsf{M}_\varrho(I) : I \in \mathcal{N}(I_j(x)))^q \le 3^d \sum_{w\in\Sigma_j} \mu(I_w^\varrho)^q 2^{-q|w|\widetilde{\varepsilon}_{|w|}}.$$

在最后一个求和中，对于 $w' \in \Sigma_{\lfloor j\varrho\rfloor}$，每个区间 $I_{w'}$ 作为 I_w^ϱ 出现在 $2^{d(j-\lfloor j\varrho\rfloor)}$ 项中。So

$$\sum_{w\in\Sigma_j} \widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q \ \le C2^{d(j-\lfloor j\varrho\rfloor)} \sum_{w'\in\Sigma_{\lfloor j\varrho\rfloor}} \mu(I_{w'})^q 2^{-qj\widetilde{\varepsilon}_j} = C2^{d(j-\lfloor j\varrho\rfloor)} 2^{-\lfloor j\varrho\rfloor\tau_{\mu,j}(q)}.$$

令 j 趋于无穷，得到 $\tau_{\mathsf{M}_\varrho}(q) \ge d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)$。

• **情形** $q > 0$**:** 可以对命题 4.9 中的相同论证进行调整。根据 3.5，对于每个词 $w \in \Sigma_j$，$\mathsf{M}_\varrho(I_w)$ 的值在某个词 w' 处达到，该词的长度介于 j 和 $j/(\eta-\varepsilon_j)$ 之间；并且，每个满足 $j \le j' \le j/(\eta-\varepsilon_j)$ 的词 $w' \in \mathcal{S}_{j'}(\eta)$ 至多可以对 $|w| = j$ 的 $\mathsf{M}_\varrho(I_w)$ 的 3^d 个值作出贡献。因此，引理 5.3 第 (1) 项中的上界给出

$$\sum_{w\in\Sigma_j} \widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q \ \le \ 3^d \sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor} \sum_{w\in\mathcal{S}_{j'}(\eta)} \mu(I_w^{\varrho\eta})^q \le 3^d \sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor} \sum_{w\in\Sigma_{j'}} p_w \mu(I_w^{\varrho\eta})^q$$

取期望后，得到

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{w\in\Sigma_j} \widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q\Big) \le 3^d \sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor} \sum_{w\in\Sigma_{j'}} 2^{-dj'(1-\eta)} \mu(I_w^{\varrho\eta})^q.$$

与之前一样，每个立方体 $I_{w'}$、对于 $w' \in \Sigma_{\lfloor\varrho\eta j'\rfloor}$ 和 $j \le j' \le j/(\eta-\varepsilon_j)$，至多包含 $3^d \times 2^{d(j'-\lfloor j'\varrho\eta\rfloor)}$ 个第 $2^{j'}$ 代二进立方体。因此，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\sum_{w\in\Sigma_j} \widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q\Big) \ &\le \ 3^d \sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor} \sum_{w\in\Sigma_{\lfloor j'\varrho\eta\rfloor}} 2^{d(j'-\lfloor j'\varrho\eta\rfloor)} 2^{-dj'(1-\eta)} \mu(I_w)^q \\ &\le \ C \sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor} 2^{d\eta(1-\varrho)j'} 2^{-\lfloor j'\varrho\eta\rfloor\tau_{\mu,\lfloor j'\varrho\eta\rfloor}(q)}. \end{aligned} \tag{48}$$

再次，最后一个求和的行为取决于 $\tau_\mu(q)$ 的值。

• $0 < q < q_\rho$: 由于根据（33）有 $d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q_\varrho)=0$，可见 $d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)<0$。固定 $s<d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)$ 和 $\varepsilon=(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)-s)/3$。回顾（14），当 j' 充分大时，$|\tau_{\mu,\lfloor j'\varrho\eta\rfloor}(q)-\tau_\mu(q)|\le\varepsilon$，因此

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q\Big) \le C\sum_{j'=j}^{\lfloor j/(\eta-\varepsilon_j)\rfloor} 2^{-j'\eta(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q))-\varepsilon)} \le C2^{-j\eta/(\eta-\varepsilon_j)((d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q))-\varepsilon)}.$$

然后，与之前一样，

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j\ge1}2^{js}\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q\Big)\le C\sum_{j\ge1}2^{j(s-\eta/(\eta-\varepsilon_j)(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q))-\varepsilon))}<\infty,$$

由此我们推得，几乎必然地，

$$\sum_{j\ge1}2^{js}\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_\varrho 1(I_w)^q<\infty.$$

因此，$\tau_{\mathsf{M}_\varrho}(q)\ge s$，并令 s 趋于 $d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)$，即可得到结论。

• $q>q_\varrho$：固定 $0<s<d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)$，$\varepsilon=(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)-s)/3$ 并令 j' 足够大。由于$d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)>0$，(48) 式中的和上界为项 $j'=j$，且

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q\Big)\le C2^{-j\eta(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)-\varepsilon)}.$$

由上述相同的结论可得，$\tau_{\mathsf{M}_\varrho}(q)\ge\eta(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q))$，几乎必然地。当 $\tau_\mu(q)=0$ 时，则由连续性可得。

(ii) $\tau_{\mathsf{M}_\varrho}$的上界:

• 情形 $q\ge0$：我们证明，概率为 1 时，对所有 $q\ge0$,

$$\tau_{\mathsf{M}_\varrho}(q)\le\min(\eta(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)),d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q))=\begin{cases}\eta(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)) & \text{if } q\le q_\varrho\\ d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q) & \text{if } q\ge q_\varrho.\end{cases}$$

根据引理 5.3，概率为 1 时，对所有 $w\in\Sigma_j$, $j\ge1$，$\mathsf{M}_\varrho(I_w)\ge\mu(I_w^\varrho)2^{-j\widetilde{\epsilon}_j}$。因此，对每个 $q\ge0$

$$\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q\ge\sum_{w\in\Sigma_j}\mu(I_w^\varrho)^q2^{-qj\widetilde{\epsilon}_j}.$$

根据前面已经使用过的论证，对于 $w'\in\Sigma_{\lfloor\varrho j\rfloor}$，每个 $I_{w'}$ 在上述求和中出现 $2^{d(j-\lfloor\varrho j\rfloor)}$ 次。因此

$$\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}}_\varrho(I_w)^q\ge\sum_{w'\in\Sigma_{\lfloor\varrho j\rfloor}}\mu(I_{w'})^q2^{d(j-\lfloor\varrho j\rfloor)}2^{-qj\widetilde{\epsilon}_j}=2^{-\lfloor\varrho j\rfloor\tau_{\mu,\lfloor\varrho j\rfloor}(q)+d(j-\lfloor\varrho j\rfloor)-qj\widetilde{\epsilon}_j}.$$

令 j 趋于无穷，得到对所有 $q\ge0$，$\tau_{\mathsf{M}_\varrho}(q)\le d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)$。

为得到另一个界，令 $H=\tau'_\mu(q)$。考虑与引理 3.5 中一样由命题 4.11 给出的测度 μ_H。由于 μ_H 是精确维数的，且支撑在 $E_\mu(H)$ 上，并且 μ 是倍增的，给定 $\varepsilon>0$，当 J 足够大时，存在 Σ_J 的一个子集 $\Sigma_J(H,\varepsilon)$，其基数至少为 $2^{J(\tau^*_\mu(q)-\varepsilon)}$，使得对所有 $u\in\Sigma_J(H,\varepsilon)$，都有 $2^{-J(H+\varepsilon)}\le\mu(I_u)\le2^{-J(H-\varepsilon)}$。

现在我们使用引理 3.5 以及其中定义的序列 $(\varepsilon_j)_{j\ge1}$（该序列不依赖于q）。概率为 1，当 j 足够大时，每个词 $v\in\Sigma_{\lfloor(\eta-\varepsilon_j)j\rfloor}$ 都包含至少一个$w_v\in\Sigma_j$使得 $p_{w_v}=1$。因此，当 j足够大时，取 $J=\lfloor\varrho\eta j\rfloor$，固定 $u\in\Sigma_J(H,\varepsilon)$，这适用于每个满足 $I_v\subset I_u$的元素 $v\in\Sigma_{\lfloor(\eta-\varepsilon_j)j\rfloor}$： I_v 包含一个子立方体 I_{w_v}，其具有

$\sim w_v \in \Sigma_j$和 $p_{w_v} = 1$。特别地，$\mathsf{M}_\varrho(I_{w_v}) \geq \mu(I_{w_v}^{\varrho\eta})$。此外，$I_{w_v}^{\varrho\eta} \in \Sigma_J$，因此 $I_{w_v}^{\varrho\eta} = I_u$，且$\widetilde{\ }\ \mathsf{M}_\varrho(I_v) \geq \mu(I_u) \geq 2^{-J(H+\varepsilon)} = 2^{-\varrho\eta j(H+\varepsilon)}$。

存在 $2^{d(\lfloor(\eta-\varepsilon_j)j\rfloor - J)} = 2^{d(\lfloor(\eta-\varepsilon_j)j\rfloor - \lfloor\varrho\eta j\rfloor)}$ 个这样的互不相交子立方体 I_v。这些观察以及 $q \geq 0$ 这一事实意味着

$$\sum_{w\in\Sigma_j} \widetilde{\mathsf{M}_\varrho}(I_w)^q \geq \sum_{u\in\Sigma_J(H,\varepsilon)} \sum_{v\in\Sigma_{\lfloor(\eta-\varepsilon_j)j\rfloor}: I_v\subset I_u} \sum_{w\in\Sigma_j: I_w\subset I_v \text{and } p_{w_v}=1} \widetilde{\mathsf{M}_\varrho}(I_w)^q$$
$$\geq 2^{\lfloor\varrho\eta j\rfloor(\tau_\mu^*(q)-\varepsilon)} 2^{d(\lfloor(\eta-\varepsilon_j)j\rfloor - \lfloor\varrho\eta j\rfloor)} 2^{-\varrho\eta j(H+\varepsilon)}.$$

由此得到 $\tau_{\mathsf{M}_\varrho}(q) \leq \eta(d(\varrho-1)+\varrho(qH-\tau_\mu^*(q)))+O(\varepsilon)$。由于 $qH-\tau_\mu^*(q) = \tau_\mu(q)$，且 ε 是任意的，我们得出，概率为 1，$\tau_{\mathsf{M}_\varrho}(q) \leq \eta(d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q))$ 对所有 $q \geq 0$ 均成立。

- **情形** $q < 0$**：**我们先作两个初步观察。

首先，若 $1 < \gamma < 1/\eta$，对于所有 $j \geq 1$ 和 $w \in \Sigma_j$，考虑事件 $\mathcal{E}(I_w) = \{\exists\, v \in \bigcup_{k=j}^{\lfloor\gamma j\rfloor} \Sigma_k : I_v \subset 3I_w \text{ 和 } p_v = 1\}$。当某个 $w \in \Sigma_j$ 使得 $\mathcal{E}(I_w)$ 不成立时，采样过程会将所有 $\mu(I_v)$ 置为零，因为 $I_v \subset 3I_w$ 和 $|v| \in \{j+1, ..., \gamma j\}$。因此直观上，相应的$\widetilde{\ }$存活权重 $\mathsf{M}_\varrho(I_w)$ 会很小。由 p_v 的独立性，

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}(I_w)) = 1 - \Big(\prod_{k=j}^{\lfloor\gamma j\rfloor}(1-2^{-d(1-\eta)k})^{2^{d(k-j)}}\Big)^{3^d} \leq 1 - \exp(-C2^{-dj(1-\gamma\eta)}) \leq C2^{-dj(1-\gamma\eta)} \tag{49}$$

对于某个依赖于 $(d,\ \eta,\ \gamma)$ 的 $C > 0$。

接下来，我们关注在给定的立方体 $I \in \Sigma_J$（满足 $J \leq j'$）中，$\mathcal{E}(I_w)$ 对 $I_w \in \Sigma_{j'}$ 不成立的次数。为此，固定 $\varepsilon \in (0,\ 1)$ 和 $\theta > 1$，以及定义在 $[0,1]^d$ 上的博雷尔概率测度 ν。容易验证，结合式 (49)、马尔可夫不等式和富比尼–托内利定理可得，

$$\sum_{J\geq 1}\sum_{j'\geq\theta J} \mathbb{E}\left(\nu\left(\left\{x\in[0,1]^d:\ \mathcal{L}^d(\{y\in I_J(x): \mathcal{E}(I_{j'}(y)) \text{ holds }\}) \geq 2^{-dJ}(1-2^{-d(j'-J)\varepsilon})\right\}\right)\right)$$
$$\leq \sum_{J\geq 1}\sum_{j'\geq\theta J}(1-2^{-d(j'-J)\varepsilon})^{-1}C2^{-dj'(1-\gamma\eta)} < \infty. \tag{50}$$

现在，对于 $q < 0$，令 $H = \tau_\mu'(q)$，并取命题 4.11 中的 ν 测度 μ_H。由博雷尔–坎泰利引理和式 (50)，概率为 1；对于 μ_H-几乎处处的 x，当 J 足够大时，对所有 $j \geq \theta J$，

$$\mathcal{L}^d(\{y\in I_J(x): \mathcal{E}(I_{j'}(y)) \text{ does not hold }\}) \geq 2^{-dJ}2^{-d(j'-J)\varepsilon} = 2^{d(j'-J)(1-\varepsilon)}2^{-dj'}.$$

因此，对每个 $j' \geq \theta J$，都存在 $\Sigma_{j'}$ 的一个子集 $\Sigma_{j'}(I_J(x)))$，其基数至少为 $2^{\lfloor d(j'-J)(1-\varepsilon)\rfloor}$，使得对所有 $w \in \Sigma_{j'}(I_J(x))$，$I_w \subset I_J(x)$ 和 $\mathcal{E}(I_w)$ 均不成立。

取 $\theta = (1+\varrho^{-1})/2$、$\varepsilon \in (0, 1\wedge(\eta^{-1}-1)/2)$ 和 $\gamma = 1/\eta - \varepsilon$。注意，采用这一参数选择时，若 $J = \lfloor\varrho j\rfloor$，则 $j \geq \varrho^{-1}J > \theta j$，因此前面的结论对 $j' = j$ 仍然成立。

将前述结果与在 $q \geq 0$ 情形下已用过的 μ_H 的性质结合起来，可得：对于所有形如 $J = \lfloor\varrho j\rfloor$ 且充分大的 J，存在：

- 一个子集 $\Sigma_J(H,\varepsilon)$，它包含于 Σ_J，其基数至少为 $2^{J(\tau_\mu^*(q)-\varepsilon)}$，且对所有 $u \in \Sigma_J(H,\varepsilon)$，均有 $\mu(I_u) \leq 2^{-J(H-\varepsilon)}$，
- 对所有 $u \in \Sigma_J(H,\varepsilon)$，存在 Σ_j 的一个子集 $\Sigma_j(I_u)$，其基数至少为 $2^{\lfloor d(j-J)(1-\varepsilon)\rfloor}$，使得对所有 $w \in \Sigma_j(I_u)$，$I_w \subset I_u$ 与 $\mathcal{E}(I_w)$ 均不成立。

因此，对于每个 $w \in \Sigma_j(I_u)$，包含在 $3I_w$ 中且满足 $p_v = 1$ 的二进立方体 I_v，其代数至少为 $\lfloor(\eta^{-1}-\varepsilon)j\rfloor$。对于这些存活顶点 v，其代数 $g(v)$ 满足$\lfloor\varrho\eta g(v)\rfloor \geq \varrho\eta\lfloor(\eta^{-1}-\varepsilon)j\rfloor \geq j(\varrho - C'\varepsilon)$，其中某个常数 C' 依赖于 η 和 μ。因此 $I_v^{\rho\eta} \subset$

$I_u^{(\rho-C'\varepsilon\ /\varrho)}$，以及 μ 的倍增性质 (15) 与 (16) 蕴含，对于某个常数 C''，有 $\mu(I_v^{\rho\eta})\le\mu(I_u)2^{C''j\varepsilon}$。因此，$\widetilde{\mathsf{M}_\varrho}(I_w)\le\mu(I_u)2^{C'j\varepsilon}\le 2^{-J(H-\varepsilon)}2^{C''j\varepsilon}$。

综合以上各项，在 $q<0$ 的情况下，最终得到

$$\sum_{w\in\Sigma_j}\widetilde{\mathsf{M}_\varrho}(I_w)^q\ge\sum_{u\in\Sigma_J(H,\varepsilon)}\ \sum_{w\in\Sigma_j(I_u)}\widetilde{\mathsf{M}_\varrho}(I_w)^q$$

$$\ge 2^{J(\tau_\mu^*(q)-\varepsilon)}2^{\lfloor d(j-J)(1-\varepsilon)\rfloor}(2^{-J(H-\varepsilon)}2^{C''j\varepsilon})^q. \tag{51}$$

回顾 $J=\lfloor\varrho j\rfloor$，可推得 $\tau_{\mathsf{M}_\varrho}(q)\le d(\varrho-1)+\varrho(qH-\tau_\mu^*(H))+O(\varepsilon)=d(\varrho-1)+\varrho\tau_\mu(q)+O(\varepsilon)$。由于 ε 是任意的，因此几乎必然地，对所有 $q<0$，均可得到所需的上界。

最后，由于 $\tau_{\mathsf{M}_\varrho}$ 和 τ_μ 是连续函数，前面所有关于这些函数的不等式对所有 $q<0$ 均几乎处处成立。□

Next 该命题意味着，在 $\mathrm{dom}(\sigma_{\mathsf{M}_\varrho}$ 的子集上，多重分形形式主义不成立。).

命题 5.13。 回顾定理 *2.4* 中I_ϱ的定义，η 以概率为 *1*，多重分形形式主义在 $I_{\varrho,\ \eta}$ 上成立，而在 $\mathrm{dom}(\sigma_{\mathsf{M}_\varrho})\setminus I_{\varrho,\ \eta}$上不成立。

证明。 由命题 5.12 可知，概率为 1，

$$\tau^*_{\mathsf{M}_\varrho}(H)=\begin{cases}\eta d(1-\varrho)+\eta\varrho\sigma_\mu(H/\varrho\eta) & \text{when } H\le\varrho\eta H_\varrho,\\ \frac{\sigma_\mu(H_\varrho)}{\theta_\varrho(H_\varrho)}H & \text{when } \varrho\eta H_\varrho<H\le\varrho H_\varrho,\\ d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H/\varrho) & \text{when } H>\varrho H_\varrho.\end{cases} \tag{52}$$

情形 1. 将 (52) 与 (6) 进行比较。

这两个公式在 $H_{\min}\le H\le\theta_\varrho(H_\varrho)$ 时重合，并且在 $H=\varrho\tau'_\mu(0)$ 时重合。

When $\theta_\varrho(H_\varrho)<H\le\varrho H_\varrho$, $\tau^*_{\mathsf{M}_\varrho}$ 保持线性，但 $\sigma_{\mathsf{M}_{\ \varrho}}$ 变得严格凹，因此 $\sigma_{\mathsf{M}_{\ \varrho}}<\tau^*_{\mathsf{M}_\varrho}$.

当 $\varrho H_\varrho<H\le\varrho\tau'_\mu(0)$、$H_\varrho\le H/\varrho\le\theta_\varrho^{-1}(H)$，并且由于映射 (34) 在 $[H_\varrho,H_{\max}]$ 上递减，可得

$$\begin{aligned}\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H)) &= \frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))}{\delta_\varrho(\theta_\varrho^{-1}(H))}=\frac{\theta_\varrho^{-1}(H)}{\delta_\varrho(\theta_\varrho^{-1}(H))}\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))}{\theta_\varrho^{-1}(H)}\\ &< \frac{\theta_\varrho^{-1}(H)}{\delta_\varrho(\theta_\varrho^{-1}(H))}\frac{d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H/\varrho)}{H/\varrho}.\end{aligned}$$

但根据 δ_ϱ 的定义，$\frac{\theta_\varrho^{-1}(H)\ \delta_\varrho(\theta_\varrho^{-1}(H))}{\theta_\varrho(\theta_\varrho^{-1}(H))\ \varrho}=H/\varrho$，因此 $\sigma_\mu(\theta_\varrho^{-1}(H))<d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H/\varrho)$。

当 $H>\varrho\tau'_\mu(0)$ 时，由凸性可得 $\sigma_\mu(H/\varrho)<d(1-\varrho)+\varrho\sigma_\mu(H/\varrho)$。

情形 2.a. 当 $H_{\min}\le H<\varrho\eta H_{\varrho\eta}$ 时，公式 (52) 与 (7) 不再一致；其他区域与情形 **1** 类似。

情形 2.b. 这种情形较简单，可由前面的情形推出。 □

参考文献

[1] J. M. Aubry 和 S. Jaffard。多重分形小波级数。*Comm. Math. Phys.*，227：483–514，2002年。[2] J. Barral 和 S. Seuret。结合多重分形加性与乘性混沌。*Commun. Math. Phys.*，257(2)：473–497，2005年。[3] J. Barral 和 S. Seuret。从多重分形测度到多重分形小波级数。*J. Fourier Anal. Appl.*，11(5)：589–614，2005年。[4] J. Barral 和 S. Seuret。 $\mathbb{R}^d$ 与豪斯多夫维数中的异质普适系统。*Bull. Brazilian Math. Soc*，38(3)：467–515，2007年。[5] J. Barral 和 S. Seuret。Gibbs加权树上的随机稀疏采样与相变。*J. Inst. Math. de Jussieu*，19：65–116，2020年。

[6] R. Bowen。《平衡态与阿诺索夫微分同胚的遍历理论》，第470卷。Springer-Verlag，纽约，1975年。[7] G. Brown、G. Michon 和 J. Peyrière。论测度的多重分形分析。《统计物理学杂志》，66 790，1992 775：–。[8] P. Collet、J. L. Lebowitz 和 A. Porzio。某些动力系统的维数谱。《统计物理学杂志》，47：609–644，1987年。[9] A. Dembo 和 O. Zeitouni。《大偏差技术及其应用》，第38卷。《数学应用》（纽约）。Springer-Verlag，纽约，第二版，2009年。[10] Arnaud Durand。基于树指标马尔可夫链的随机小波级数。《Comm. Math. Phys.》，283(2)：451–477，2008年。[11] C. Esser 和 B. Védel。多重分形形式主义的反例。arXiv:2207.03733。[12] A.-H. Fan 和 D.-J. Feng。符号空间上长期时间平均的分布。《统计物理学杂志》，99：813–856，2000年。[13] S. Jaffard。论稀疏小波级数。《应用概率年刊》，10(1)：313–329，2000年。[14] S. Jaffard。多重分形分析中的小波技术。载于《分形几何及其应用：Benoit Mandelbrot 诞辰纪念文集》，《纯数学研讨会论文集》第72卷，第91–151页。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2004年。[15] S. Jaffard 和 Y. Meyer。函数逐点正则性与局部振荡的小波方法。《美国数学会回忆录》，23：第587号，1996年。[16] K.S. Lau 和 S.-M. Ngai。多重分形测度与弱分离条件。《数学进展》，141：45–96，1999年。[17] J. Lévy Véhel 和 R. Vojak。Choquet 容量的多重分形分析。《应用数学进展》，20：1–43，1998年。[18] Y. Meyer。《小波与算子 I》。Hermann，1990年。[19] L. Olsen。一种多重分形形式主义。《数学进展》，116：92–195，1995年。[20] Y. Pesin。《动力系统中的维数理论：当代观点与应用》。芝加哥大学出版社，1997年。[21] D. Rand。饼干切割器的奇异性谱 $f(\alpha)$。《遍历理论与动力系统》，9：527–541，1989年。[22] R. Riedi。一种改进的多重分形形式主义与自相似测度。《数学分析及其应用杂志》，189 490，1995 462：–。[23] D. Ruelle。《热力学形式：经典平衡统计力学的数学结构》，《数学及其应用百科全书》第5卷。Addison-Wesley 出版公司，马萨诸塞州雷丁，1978年。Julien Barral，分析、几何与应用实验室，法国国家科学研究中心（UMR 7539），巴黎北索邦大学，F-93430 维勒塔讷兹，法国。邮箱地址：barral@math.univ-paris13.fr Stéphane Seuret，巴黎东克雷泰伊大学、古斯塔夫·埃菲尔大学、法国国家科学研究中心、LAMA UMR8050，F-94010 克雷泰伊，法国 E

$mail\ add_{ress}$: seure t@u-pec。fr