具有非线性运动学约束的非完整系统的能量方程：一类特殊约束

F. Talamucci

DIMAI，数学与信息学系*"Ulisse Dini"*，佛罗伦萨大学，意大利
电子邮箱：*federico.talamucci@unifi.it*

arXiv:2304.11338v1 [physics.class-ph] 22 Apr 2023

2010年数学学科分类： 37J60，70F25，70H03。
37J60：非完整动力系统 70F25：非完整系统 70H03：拉格朗日方程 70G10 广义坐标；力学问题中的事件、冲量—能量、构型、状态或相空间

关键词：
非完整力学系统 - 线性和非线性运动学约束 - 拉格朗日运动方程 - Voronec 运动方程。

摘要

本文的主题是建立这类系统的运动方程，以及由此得出的能量平衡。具体而言，我们将对运动方程进行解析推导，旨在探讨系统的能量平衡。正如我们将要看到的，定义系统所允许位移这一微妙问题，会导致系统能量的定义并非唯一；而对于某一类特殊的非完整约束，这种定义则能实现一致与统一。

1 引言

从奠定该理论基础的早期历史性研究开始，关于受运动学约束的力学系统的研究无疑日益受到关注，其中值得一提的是 [1], [5], [14]。毫无疑问， [21] 是一部具有奠基性意义的著作，它全面总结了截至当时的研究现状，并为此后诸多研究进展奠定了基础。

我们可以说，时至今日，对非完整系统的处理仍处于不完善阶段：既没有可与完整系统相媲美的一般理论，也未能令人满意地理解诸如对称性与守恒定律之间的联系，或诺特定理的推广等基本问题。

事实上，非完整约束的类别十分广泛：关于完整约束与非完整约束的定义和特征，在大量力学与运动学文献中均有论述，但有时所依据的选择和判据并不唯一。此外，教科书中对非完整系统力学的讨论往往局限于特定系统的研究，并采用针对具体问题设计的专门技术。对此需要指出的是，自最早被研究的实例和模型（例如 [2], [31]）以来，通常涉及在表面上发生滑动或无滑动滚动的刚体，而伪坐标的使用为这类问题提供了理想的处理方法。这些伪坐标根据具体问题有针对性地选取（[13] [3]），其理论基础则源自 [15] 中阐述的相关理论。

必须指出，线性运动学约束与非线性约束之间存在显著的概念和方法论差异：一方面，第一类约束可以令人信服地视为完整约束情形的直接扩展；另一方面，对动能变量施加非线性条件的情形似乎尚无定论性的理论框架。

对于线性和非线性非完整约束问题这两种情况，我们都可以大致概述不止一种处理非完整系统的方法，也可以提出一种混合方法：

- 分析方法，遵循并拓展了在几何约束情况下已为人熟知且确立的拉格朗日形式（其中包括 [32], [33], [4], [18]），

- 一种通过拉格朗日乘子形式体系的方法，其中，约束方程对动能变量的导数取代了完整约束情形下对几何坐标的导数（[34], [24], [22], [19]），

- 基于几何支撑的方法，通过可微流形将完整约束表述扩展到非完整系统，并涉及理论中更复杂的方面，例如射流流形方法（[20], [17], [26]），

- 一种变分方法，主要研究修改原理以纳入非完整约束情形的可能性（[23], [25]）； [10] 和 [12] 中开展的分析表明，这一问题十分微妙，至今仍未得到解决。

The 紧接着呈现的数学研究明显更倾向于第一种方法。 h.
在我们已介绍的背景下，本文将通过以下建模领域的选择和以下步骤展开。我们将考虑非完整约束，这些约束涉及对运动学状态（包括几何坐标和动能变量）的限制（也可能是非线性的），并且可能显式依赖于时间（时变约束）。正如完整约束能够确定本质的位置参数一样，我们利用运动学类型的限制来构建一个独立广义速度的子集，以便按照拉格朗日形式的基本原则编写运动方程并发展相关理论。这种基于运动学参数选择的框架受到一项年代久远但具有奠基意义的工作的启发 [30], ，该工作中的理论针对的是线性运动学约束（并且在 [21] 中仍以线性形式呈现），而本文则将其扩展至非线性运动学约束的一般情形。

众所周知，对于完整系统，可以从运动方程推导出能量型方程，并适当地引入系统能量的概念。如果将同样的形式化步骤应用于非完整情形，那么当出发点分别是以本质参数表示的方程组，或含拉格朗日乘子的方程组（此时无需选取独立速度）时，我们会发现二者存在一些差异。对于一大类特殊的运动学约束，这种差异会消失；对于这类约束，即使是为推导运动方程而提出的虚位移概念（切塔耶夫条件， [7], [8], [9]），也显得自然而且与完整约束情形一致。

1.1 运动方程

该模型由一个力学系统构成，其构型由拉格朗日坐标 q_1、.....、 q_n 唯一确定。此外，我们假设系统受到以下约束，这些约束涉及广义速度以及可能的时间 t:

$$\begin{cases} \phi_1(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,t)=0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \phi_k(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,t)=0 \end{cases} \tag{1}$$

为了写出运动方程，一种直接的方法是写出拉格朗日运动方程。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\mathcal{F}^{(i)}+\mathcal{R}^{(i)}, \qquad i=1,\dots,n \tag{2}$$

其中 $T(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,t)$ 是系统的动能，而 $\mathcal{F}^{(q_i)}$、 $\mathcal{R}^{(q_i)}$ 分别是作用力和约束力的第 i 个拉格朗日分量。通过引入拉格朗日乘子，可以概述约束的结构，令

$$\mathcal{R}^{(i)}=\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\frac{\partial \phi_\nu}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i=1,\dots,n \tag{3}$$

使得方程组 $n+k$（2）、（1）恰当地包含 $n+k$ 未知函数 q_i、 $i=1$、.....、 n、 λ_ν、.....、 k。

尽管广义速度 $\dot{q}_i$、 $i=1$、.....、 n 并不独立，但采用观点（2）可以不显式声明虚位移，而只需将（3）型约束视为光滑的。另一种截然不同的形式化路径是显式声明虚位移，并直接忽略约束力的存在：第一步是利用限制条件（1）构造虚位移集合。

若满足以下条件，则条件组 (1) 可以明确写出（除重新排列变量外，不失一般性）：

$$det\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\dot{q}_{m+j}}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\neq 0,\quad m=n-k \tag{4}$$

在这种情况下，可以确定函数

$$\begin{cases}\dot{q}_{m+1}=\alpha_1(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m,t)\\ \ldots\\ \ldots\\ \dot{q}_n=\alpha_k(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m,t)\end{cases} \tag{5}$$

其中 $m=n-k$。动能参数 $\dot{q}_r, =1,\ldots,m$ 起独立速度的作用，也就是说，确定一个 m 元组 $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m$，即可确定系统处于位置 $q_1,\ldots,q_n$ 时的完整运动学状态。在设定 (5) 下，运动方程的表述可以基于以下关于系统虚位移的假设:

$$\delta q_{m+\nu}=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}\delta q_r,\qquad \nu=1,\ldots,k \tag{6}$$

其中虚变分 $\delta q_1,\ldots,\delta q_r$ 相互独立。假设 (8) 成立，则相应的方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{m+\nu}}-\frac{\partial T}{\partial q_{m+\nu}}\right)=\mathcal{F}^{(r)}+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}\mathcal{F}^{(m+\nu)},\qquad r=1,\ldots,m. \tag{7}$$

注 1 若 $\mathbf{r}_1$，...，$\mathbf{r}_N$ 是确定系统中各质点位置的向量，则假设 *(6)* 对应于

$$\delta\mathbf{r}_j=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_j}{\partial\dot{q}_r}\delta q_r,\qquad j=1,\ldots,N \tag{8}$$

实际上，由于

$$\dot{\mathbf{r}}_j=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_r}\dot{q}_r+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_{m+\nu}}\alpha_\nu+\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial t},\qquad j=1,\ldots,N \tag{9}$$

我们看到

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_j}{\partial\dot{q}_r}=\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_r}+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_{m+\nu}}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r},\qquad j=1,\ldots,N,\quad r=1,\ldots,m$$

因此，*(8)* 可写成

$$\delta\mathbf{r}_j=\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_r}+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_{m+\nu}}\right)\delta q_r,\qquad j=1,\ldots,N \tag{10}$$

就虚位移而言，这包含了与*(6)*相同的信息。用虚速度表示，假设*(8)*可形式化地写成

$$\widehat{\dot{\mathbf{r}}}_j=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_j}{\partial\dot{q}_r}\dot{q}_r=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_r}+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_{m+\nu}}\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}\dot{q}_r,\qquad j=1,\ldots,N \tag{11}$$

这与系统瞬时构型（即在固定时间 t）下相容的速度集合不符；该集合是通过在式 *(9)* 中去掉项 $\partial\mathbf{r}_j/\partial t$ 得到的。

回到方程 (7)，我们指出，可以适当地仅用独立广义速度 $\dot{q}_r$, $r = 1, \ldots, m$ 来表示这些方程：事实上，将满足约束 (5) 的动能 T^* 定义为

$$\begin{aligned} &T^*(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, t) \\ &= T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, \alpha_1(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t), \ldots, \alpha_k(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t), t) \end{aligned} \tag{12}$$

可以看出，运动方程 (7) 具有如下形式（详情见 [28] ）

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T^*}{\partial q_r} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial T^*}{\partial q_{m+\nu}}\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} - \sum_{\nu=1}^{k} B_r^\nu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} = \mathcal{F}^{(q_r)} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r}\mathcal{F}^{(q_{m+\nu})}, \qquad r = 1, \ldots, m \tag{13}$$

其中

$$B_r^\nu(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_r} - \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \dot{q}_r}\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_{m+\mu}}, \quad r = 1, \ldots, m, \ \ \nu = 1, \ldots, k \tag{14}$$

方程（13）包含未知函数 q_1、……、 q_n，但由于（5），其中仅出现导数 $\dot{q}_r$、 $\ddot{q}_r$ $r = 1$、……、 m；必须利用（5），将（13）中的 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}$ 所包含的变量（$\dot{q}_{k+1}$、……、 $\dot{q}_n$）表示为（q_1、……、 q_n、 $\dot{q}_1$、……、 $\dot{q}_m$）的函数。方程组（13）与（5）联立，构成一个包含 $m + k = n$ 个方程、以 q_1、……、 q_n 为 n 个未知函数的方程组。该方程组是所谓沃罗涅茨方程在线性情形下的非线性推广，后者是在 [21] 中针对线性约束推导出来的。

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{1,i}(q_1, \ldots, q_n, t)\dot{q}_i + \zeta_1(q_1, \ldots, \ldots, q_n, t) = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{k,i}(q_1, \ldots, q_n, t)\dot{q}_i + \zeta_k(q_1, \ldots, \ldots, q_n, t) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

与显式形式 (5) 相关联；根据 (4)，只要 $k \times n$ 矩阵 $(\sigma)_{\nu,\ i}$ 具有满秩 k,

$$\begin{cases} \dot{q}_{m+1} = \sum\limits_{r=1}^{m} \alpha_{1,r}(q_1, \ldots, q_n, t)\dot{q}_r + \beta_1(q_1, \ldots, q_n, t) \\ \cdots \\ \cdots \\ \dot{q}_n = \sum\limits_{r=1}^{m} \alpha_{k,r}(q_1, \ldots, q_n, t)\dot{q}_r + \beta_k(q_1, \ldots, q_n, t) \end{cases} \tag{16}$$

对于合适的 系数 $\alpha_{nu,\ r}$ 以及 β_r, $\nu = 1, \ldots, k$, $r = 1, \ldots, m$。在这个更简单的情形下，(6) is

$$\delta q_{m+\nu} = \sum_{r=1}^{m} \alpha_{\nu,r}(q_1, \ldots, q_n, t)\delta q_r, \qquad \nu = 1, \ldots, k.$$

注 2 仅有完整约束的情形对应于不存在条件 *(1)*；从 *(13)* 中删去所有含有 α_ν 函数的项后，我们便得到通常的、带有 $T^* = T$ 的欧拉-拉格朗日运动方程。

注释 3 尽管方程组 *(13)* 似乎取决于独立速度的选择，因而也取决于这些 α_ν 函数，但由于对后者的特定依赖仅通过导数体现，我们可以用约束函数来表示系数：这是利用对任意索引$\nu = 1$、……、 k都成立的关系得到的：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi_\nu}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \dot{q}_{m+\mu}}\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ &\frac{\partial \phi_\nu}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \dot{q}_{m+\mu}}\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \dot{q}_r} = 0, \quad r = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{17}$$

对于固定的 $i=1,\ldots,n$，并对每个 $j=1,\ldots,k$写出第一行，我们得到一个关于 k 个未知数 $\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial q_i}$, $\nu=1,\ldots,k$ 的非奇异线性方程组，共有k个方程。对于第二组条件也同样如此：固定 $r=1,\ldots,m$，并令 j取值$1,\ldots,k$，便得到一个关于 k 个未知数 $\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}$, $\nu=1,\ldots,k$ 的非奇异线性方程组，共有k个方程。

备注 4 两种方法（*2*）（连同（*3*））与（*13*）之间的一个接点，可以在所谓的切塔耶夫条件（*[7], [8], [9]*）中找到。

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i=0,\qquad i=1,\ldots,\nu \tag{18}$$

（ϕ_ν 是约束函数 *(1)*）。显然，在约束力按照 *(3)* 的形式表述时，*(18)* 意味着约束力的虚功为零：

$$\sum_{i=1}^{n}\mathcal{R}^{(i)}\delta q_i=\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\lambda_\nu\frac{\partial\phi_\nu}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i=0$$

另一方面，假设 *(10)* 为 *(3)* 提供了一组虚位移，从而使约束成为理想约束：实际上

$$\sum_{i=1}^{n}\mathcal{R}^{(i)}\delta q_i=\sum_{r=1}^{m}\left(\mathcal{R}^{(r)}+\sum_{\nu=1}^{k}\mathcal{R}^{(m+\nu)}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}\right)\delta q_r=\left(\frac{\partial\phi_\nu}{\partial\dot{q}_r}+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial\dot{q}_{m+\nu}}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}\right)\delta q_r=0 \tag{19}$$

由于关系式（*17*）中的第二组关系。

拉格朗日函数

如果广义力满足这样的条件，即

$$\mathcal{F}^{(i)}=\frac{\partial U}{\partial q_i}(q_1,\ldots,q_n,t),\quad i=1,\ldots,n \tag{20}$$

对于适当的函数 U，则可以定义拉格朗日函数 $\mathcal{L}=T+U$，并且（在假设（3）的条件下）式（2）和式（7）可分别写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\frac{\partial\phi_\nu}{\partial\dot{q}_i}\qquad i=1,\ldots,n \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_r}+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_{m+\nu}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{m+\nu}}\right)=0\qquad r=1,\ldots,m$$

反过来，受限动能 (12) 使我们定义

$$\mathcal{L}^*(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m,t)=T^*(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m,t)+U(q_1,\ldots,q_n,t). \tag{22}$$

用函数（22）表示，运动方程（13）变为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial q_r}-\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial q_{m+\nu}}\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_r}-\sum_{\nu=1}^{k}B_r^\nu\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{m+\nu}}=0,\qquad r=1,\ldots,m \tag{23}$$

其中，B_r^ν 与式（14）中的函数相同。

2 能量方程

接下来的目标是从（23）式推导出有关系统能量的信息：为此，我们简要回顾一下完整系统（HC）的经典情形（可将其与（12）式中的 $m = n$ 和 $T^* = T$ 对应起来）：拉格朗日运动方程可得以下公式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \mathcal{F}^{(i)},\ i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}^{(q_i)} \dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial t} \tag{24}$$

此外，若 (20) 成立，则 $\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathcal{F}^{(i)} = \dfrac{dU}{dt} - \dfrac{\partial U}{\partial t}$，而 (24) 通过定义 $\mathcal{L} = T + U$，即可简单得到：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}\right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{25}$$

这表明哈密顿函数的总变化（括号内的量可视为系统能量）与拉格朗日函数对时间可能存在的显式依赖有关；简言之，回顾一下，(24) 是通过将每个运动方程乘以 $\dot{q}_i$，对各方程求和并适当地重新整理各项而得到的。

现在考察非线性非完整约束系统（NNC）的情形。就我们的目的而言，考虑力 (20) 的情形是合理的，因为无法归结为势能的力并不会影响结果的含义。因此，需要考虑的运动方程为 (21) 或 (23)。为了更清楚地界定非完整系统中的能量，我们先从设定 (21) 开始，这是文献中常见的第一组方程（[], []）。仿照前面对（HC）系统的处理，即将第 i 个方程乘以 $\dot{q}_i$，再从 1 到 n 求和，重新整理各项后可得：

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}\right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \tag{26}$$

关于式(25)，双重求和中的附加项给出了运动学约束的贡献，$_n$即约束力(3)的功 $\sum \mathcal{R}^{(i)} \dot{q}_i$。我们强调，函数 $\mathcal{L}$ 中不带$_{i=1}$星号表示尚未进行替换(5)，并且我们不认为约束力的功为零。

我们将要进一步深入考察的主要方面，是显式函数 α_ν、$\nu = 1$、.....、k在阐明系统能量平衡方面所起的作用。让我们从以下内容开始

命题1 约束力*(3)*满足

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}^{(i)} \dot{q}_i = \sum_{\nu=1}^{k} (\alpha_\nu - \overline{\alpha}_\nu) \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{m+\nu}}\right) \tag{27}$$

其中 α_ν、 $\nu = 1$、.....、 k 是函数*(5)*，并且

$$\overline{\alpha}_\nu(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r. \tag{28}$$

证明。比较　　考虑针对 $i = 1$、.....、 m 的（21），紧接着的方程意味着　　es

$$\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \dot{q}_r} = -\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{m+\nu}}\right), \qquad r = 1, \dots, m$$

thus

$$\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{r=1}^{m} \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r = -\sum_{\nu=1}^{k} \overbrace{\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r}^{=\overline{\alpha}_\nu} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{m+\nu}}\right).$$

另一方面，考虑 (21) 中的 $i = m+1, \ldots, n$，很容易得到

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} \dot{q}_{m+\nu} = \sum_{\nu=1}^{k} \overbrace{\dot{q}_{m+\nu}}^{=\alpha_\nu} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{m+\nu}} \right).$$

结合前两个公式，我们总体得到

$$\sum_{\nu=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{\nu=1}^{k} (-\overline{\alpha}_\nu + \alpha_\nu) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{m+\nu}} \right)$$

即（27）。 □

性质（27）使我们能够将（26）写成如下形式

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \sum_{\nu=1}^{k} (\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{m+\nu}} \right) \tag{29}$$

后一个公式表明，与完整约束情形（25）的差异完全在于 α_ν 与（28）中定义的函数 $\overline{\alpha}_\nu$ 之间可能存在差异。

此时，自然可以对运动方程（23）应用相同的技术，以获得类似于（26）的信息，不过这次涉及受限函数 $\mathcal{L}^*$：为此，我们证明如下命题

命题 2 运动方程（*23*）蕴含如下关系

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{r=1}^{m} \dot{q}_r \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r} - \mathcal{L}^* \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k} (\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu) \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_{m+\nu}} + \sum_{\nu=1}^{k} \overline{B}_\nu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} \tag{30}$$

其中，$\overline{\alpha}_\nu$ 定义见式（*28*），并且

$$\overline{B}_\nu(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, t) = \sum_{r=1}^{m} B_r^\nu \dot{q}_r, \qquad \nu = 1, \ldots, k \tag{31}$$

其中 B_r^ν *t*采用相同的系数（*14*）。

证明。与前面一样，只需将方程（23）的每个方程乘以 $\dot{q}_r$，并对指标 r求和；注意以下微分公式

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^*(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, t) = \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r} \ddot{q}_r \right) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_{m+\nu}} \alpha_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial t} \tag{32}$$

可得

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{m} \dot{q}_r \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_r} \right) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_{m+\nu}} \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r - \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{r=1}^{m} B_r^\nu \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{r=1}^{m} \dot{q}_r \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r} \right) - \overbrace{\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r} \ddot{q}_r \right)}^{= \frac{d\mathcal{L}^*}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial t} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_{m+\nu}} \alpha_\nu} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_{m+\nu}} \overline{\alpha}_\nu - \sum_{\nu=1}^{k} \overline{B}_r^\nu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} \end{aligned}$$

由此立即得到式（30）。 □

公式（30）清楚地展示了源自函数 α_ν 的非完整约束贡献，与完整约束情形（25）的比较也显而易见：附加项仅在系统受到非完整约束时出现；在没有这些约束的情况下，$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$，并恢复完整系统通常的能量平衡。

注释 5 值得引用以下对式（*31*）的表述。

$$\overline{B}_\nu(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, t) = \frac{d}{dt} (\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu) - \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_{m+\mu}} (\overline{\alpha}_\mu - \alpha_\mu) + \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial t} \tag{33}$$

其检验基于与（*32*）类似的计算。（*33*）这一形式更清楚地显示了系数对 $\overline{\alpha}$ 与 α 之间偏差的依赖性，以及约束可能具有的可变性；后者由函数（*1*）中出现变量 t 标示（时变约束）。

注6 如果系统的力并非来源于势能，则采用类似于上述方法的步骤，可以导出一种能量方程类型的方程。

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{r=1}^{m}\dot{q}_r\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_r}-T^*\right)-\sum_{\nu=1}^{k}(\overline{\alpha}_\nu-\alpha_\nu)\frac{\partial T^*}{\partial q_{m+\nu}}-\sum_{\nu=1}^{k}\overline{B}_\nu\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{m+\nu}}=-\frac{\partial T^*}{\partial t}\sum_{r=1}^{m}\mathcal{F}^{(r)}\dot{q}_r+\sum_{\nu=1}^{k}\mathcal{F}^{(m+\nu)}\overline{\alpha}_\nu. \tag{34}$$

它取代了（*30*）；函数 $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{B}_\nu$ 与（*28*）和（*31*）相同。部分可归因于势能、部分不可归因于势能的混合力情形显而易见。

2.1 能量函数

现在让我们引入本分析的核心问题。能量型信息 (25) 仅使用独立变量 q_1、$dots$、q_n 进行表述。另一方面，非完整系统的表达式 (26) 来源于方程 (21) 的第一行，其中动能变量并非相互独立，而且情况也只能如此，因为推导出的关系 (5) 被忽略了。结果 (29) 使我们将等式左侧圆括号内的量定义为系统能量。另一方面，对于 (30)，也可以作出相同的说明，以便用受限函数 $\mathcal{L}^*$ 来定义能量，并将圆括号内的量称为系统能量。

因此，值得考察并比较由 (26) 和 (29) 得出的两个表达式，即

$$\mathcal{E}(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t)=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\mathcal{L} \tag{35}$$

and

$$\mathcal{E}^*(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m,t)=\sum_{r=1}^{m}\dot{q}_r\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\dot{q}_r}-\mathcal{L}^*. \tag{36}$$

为了处理如何恰当地定义系统能量以及可能存在的第一积分这一问题（这些第一积分唯一源自我们上述引入的平衡方程），我们首先指出，一般而言，函数 (35) 和 (36) 并不相同：实际上，只有当它们用相同的变量表示时，才能对二者进行比较，即令

$$\mathcal{E}(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m,t)=\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\mathcal{L}\right)\Bigg|_{\dot{q}_{m+\nu}=\alpha_\nu,\nu=1,\ldots,k} \tag{37}$$

即通过（5）式替换从属动能变量；为简便起见，我们仍用 $\mathcal{E}$ 表示重新计算得到的函数。由受限函数 $\mathcal{L}^*$ 计算得到的函数 $\mathcal{E}^*$ 通常与（37）式并不一致，因为后者的计算需要先使用 $\mathcal{L}$，然后再施加约束（5）。下面我们通过一个标准情形来展示这两种计算过程。

例1 假设动能具有标准形式

$$T(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{i,j}\dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{n}b_i\dot{q}_i+c \tag{38}$$

其中，系数 $g_{i,j}(q_1,\ldots,q_n,t)$ 是一个 $n\times n$ 正定矩阵的元素，而函数$b_i(q_1,\ldots,q_n,t)$、$c(q_1,\ldots,q_n,t)$ 仅在完整约束显式依赖时间的情况下出现。于是，*(12)*具有如下形式

$$T^*=\frac{1}{2}\left(\sum_{r,s=1}^{m}g_{r,s}\dot{q}_r\dot{q}_s+\sum_{\nu,\mu=1}^{k}g_{m+\nu,m+\mu}\alpha_\nu\alpha_\mu\right)+\sum_{r=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{k}g_{r,m+\nu}\dot{q}_r\alpha_\nu+\sum_{r=1}^{m}b_r\dot{q}_r+\sum_{\nu=1}^{k}b_{m+\nu}\alpha_\nu+c \tag{39}$$

而在（*20*）成立的条件下计算（*36*），可得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^* &= \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{m} g_{r,s}\dot{q}_r\dot{q}_s + \sum_{\nu,\mu=1}^{k} g_{m+\nu,m+\mu}\alpha_\mu(\overline{\alpha}_\nu - \frac{1}{2}\alpha_\nu) \\ &+ \sum_{r=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{k} g_{r,m+\nu}\overline{\alpha}_\nu\dot{q}_r + \sum_{\nu=1}^{k} b_{m+\nu}(\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu) - c - U.\end{aligned} \tag{40}$$

相反，计算（*35*）可得

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\sum_{r,s}^{m} g_{r,s}\dot{q}_r\dot{q}_s + \frac{1}{2}\sum_{\nu,\mu=1}^{k} g_{m+\nu,m+\mu}\alpha_\nu\alpha_\mu + \sum_{r=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{k} g_{r,m+\nu}\alpha_\nu\dot{q}_r - c - U \tag{41}$$

该示例表明，当 $\overline{\alpha}_\nu = \alpha_\nu$, $\nu = 1, \ldots, k$ 时，这两个表达式相同；事实上，以下性质展示了 (35) 和 (36) 之间的偏差。

命题 3 公式（*35*）和（*36*）中的函数满足以下关系：

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E} + \sum_{\nu=1}^{k}(\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}. \tag{42}$$

证明。我们写

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{r=1}^{m}\dot{q}_r\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\alpha_\nu.$$

另一方面，链式求导

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \qquad \text{for any } \; r = 1, \ldots, m$$

通过将每个关系分别乘以 $\dot{q}_r$ 并求和，得出，

$$\sum_{r=1}^{m}\dot{q}_r\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{r=1}^{m}\dot{q}_r\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r = \sum_{r=1}^{m}\dot{q}_r\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\overline{\alpha}_\nu$$

由于定义（28）。因此

$$\mathcal{E}^* = \sum_{r=1}^{m}\dot{q}_r\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\overline{\alpha}_\nu - \mathcal{L}^*, \qquad \mathcal{E} = \sum_{r=1}^{m}\dot{q}_r\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\alpha_\nu - \mathcal{L}|_{\dot{q}_{m+\nu}=\alpha_\nu, \nu=1,\ldots,k}.$$

由于 $\mathcal{L}^*(q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)|_{\dot{q}_{m+\nu}=\alpha_\nu, \; \nu=1, \; \ldots k}$，我们最终推导出（42）。 □

推论 1 在非奇异情形下 $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} \neq 0$, $\nu = 1$, ..., k, $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$ 当且仅当 $\overline{\alpha}_\nu = \alpha_\nu$对任意$\nu = 1$, ..., k。

注 7 该关系

$$\frac{d\mathcal{E}^*}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{k}(\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\right)$$

对（*42*）求导后得到的结果，在考虑到（*57*）的情况下可还原为（*30*），反之亦然：这一验证基于（*33*）以及该规则

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial y} \qquad \textit{for any of the variables } \; q_{m+1}, \ldots, q_{m+k}, t$$

对各种公式依赖于 (28) 的关注表明，情形 $\alpha_\nu = \overline{\alpha}_\nu, \nu = 1, \ldots, k$ 是一种需要单独研究的特殊情况。在此之前，我们先指出一些值得注意的情形，它们涉及拉格朗日函数的结构或约束函数的结构。

定常情形

我们确定了静态　　满足这些假设的系统的定常情形（再回到一般情形 (1)）

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \phi_\nu}{\partial t} = 0, \quad \nu = 1, \dots, k \tag{43}$$

由后一条件可知，显函数 α_ν 也不依赖于 t，即 $\dfrac{\partial \alpha_\nu}{\partial t} = 0$，因此 $\dfrac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial t} = 0$，这是由 (22) 得出的。能量方程 (29) 和 (30) 具有如下形式

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \sum_{\nu=1}^{k} (\alpha_\nu - \overline{\alpha}_\nu) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{m+\nu}} \right), \\ \frac{d\mathcal{E}^*}{dt} &= -\sum_{\nu=1}^{k} (\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu) \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_{m+\nu}} + \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{d}{dt} (\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu) - \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_{m+\mu}} (\overline{\alpha}_\mu - \alpha_\mu) \right) \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} \end{aligned} \tag{44}$$

正如（25）所回顾的，对于完整系统，在定常情形下能量守恒：这一性质不能推广到非完整系统，除非对每个 $\nu = 1$，....., k，性质 $\bar{\alpha}_u = \alpha_\nu$ 均成立。

在定常系统的语境中，非完整约束[] [] 早期示例里反复出现的一种特殊情形，涉及额外的假设。

$$\begin{aligned} &\phi_\nu = \phi_\nu(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \quad \text{for each } \nu = 1, \dots, k \text{ and } j = 1, \dots, m \\ &\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \end{aligned} \tag{45}$$

也就是说，与从属速度相对应的拉格朗日坐标（$q_{m+1}, \dots, q_n$）不存在。方程（13）化简为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_r} - \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \right) \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} = 0 \quad r = 1, \dots, m \tag{46}$$

并将线性 ˇCaplygin 方程（见（[5]）和 [21]）推广到非线性情形。其明显优点是，(46) 仅包含未知函数 $q_1, \dots, q_m$，且与约束方程 (16) 相互分离。

在相同背景下，假设 (45) 使 (44) 化为如下简化形式

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{k} (\alpha_\nu - \overline{\alpha}_\nu) \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}, \quad \frac{d\mathcal{E}^*}{dt} = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{d}{dt} (\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu) \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} \tag{47}$$

这突显了每个运动学约束对能量变分的贡献。由于拉格朗日函数具有特殊形式，还有一类需要特别处理的系统，即满足 $T = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} M_{(i)} \dot{q}_i^2$ 的系统，其中 $M^{(i)}$ 为正常数（例如与 i 坐标相关的质点的质量），其对应的受限形式为 (12)

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} M^{(i)} \dot{q}_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k} M^{(\nu)} \alpha_\nu^2 \tag{48}$$

其中 $\alpha_\nu, \nu = 1, \dots, k$ 是一般函数 (5)。容易验证，运动方程 (13) 为

$$M^{(r)} \ddot{q}_r + \sum_{\nu=1}^{k} M^{(m+\nu)} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \frac{d\alpha_\nu}{dt} = \mathcal{F}^{(q_r)} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \mathcal{F}^{(q_{m+\nu})} \quad r = 1, \dots, m \tag{49}$$

with 当 (20) 成立时，只需作显然的修改。在后一种情况下，(35) 和 (36) 为

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} M^{(r)} \dot{q}_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k} M^{(\nu)} \alpha_\nu^2 - U, \qquad \mathcal{E}^* = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} M^{(r)} \dot{q}_r^2 + \sum_{\nu=1}^{k} M^{(\nu)} \alpha_\nu \left(\overline{\alpha}_\nu - \frac{1}{2} \alpha_\nu \right) - U,$$

而（29）或（30）的一种直观表达方式是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}M^{(r)}\dot{q}_r^2-U\right)+\sum_{\nu=1}^{k}M^{(\nu)}\overline{\alpha}_\nu\frac{d\alpha_\nu}{dt}=\sum_{\nu=1}^{k}(\overline{\alpha}_\nu-\alpha_\nu)\frac{\partial U}{\partial q_{m+\nu}}-\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{50}$$

后一种形式强调了第 ν 个约束对外力的能量贡献；当 $\overline{\alpha}_\nu=\alpha_\nu$ 时，这种贡献不存在。

在下一个例子中，函数 $\overline{\alpha}_\nu$ 与 α_ν不一致。

例2 关于（*48*）的一个特殊情形涉及质点 P 在空间中运动，并受到保持速度长度不变的约束：

$$|\dot{P}|=C(t) \tag{51}$$

其中 C 为非负时间函数。该例在 C 为常数时由 *[29], [27]*分析，而在 $C(t)=1/\sqrt{t}$的情形下由 *[27], [16]* 分析。在坐标系$(q_1,q_2,q_3)=(x,y,z)$ 中，（*51*）为 $\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2-C(t)=0$，因此 $k=1m=2$，而（*5*）为

$$\dot{q}_3=\alpha_1(\dot{q}_1,\dot{q}_2,t)=\pm\sqrt{C^2(t)-\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2}.$$

假设力的势能为 $U(q_1,q_2,q_3)$，显然 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+U$，且（*48*）为$T^*=\frac{1}{2}MC^2(t)$，因此 $\mathcal{L}^*=T^*+U=\mathcal{L}^*(q_1,q_2,q_3,t)$。运动方程（*49*）为

$$\begin{cases}\dfrac{M}{R}\left((C^2-\dot{q}_2^2)\ddot{q}_1+\dot{q}_1(\dot{q}_2\ddot{q}_2-C\dot{C})\right)=\dfrac{\partial U}{\partial q_1}\mp\dfrac{\dot{q}_1}{\sqrt{R}}\dfrac{\partial U}{\partial q_1}\\[2ex]\dfrac{M}{R}\left((C^2-\dot{q}_1^2)\ddot{q}_2+\dot{q}_2(\dot{q}_1\ddot{q}_1-C\dot{C})\right)=\dfrac{\partial U}{\partial q_2}\mp\dfrac{\dot{q}_2}{\sqrt{R}}\dfrac{\partial U}{\partial q_2}\end{cases}$$

其中我们设定 $M=M^{(1)}$ 和 $R(\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ t)=C^2(t)-\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2$。
由于 $\overline{\alpha}_1=\mp\dfrac{C^2-R}{\sqrt{R}}$、$\overline{\alpha}_1-\alpha_1=\mp\dfrac{C^2}{\sqrt{R}}$、$\overline{\alpha}_1\dfrac{d\alpha_1}{dt}=-\dfrac{(C^2-R)}{2R}\dot{R}$，*(50)* 可写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{2}(C^2-R)-U\right)-\frac{M}{2}(C^2-R)\frac{\dot{R}}{R}=\mp\frac{C^2}{R}\frac{\partial U}{\partial q_3}-\frac{\partial U}{\partial t}$$

其中 $C^2-R=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2$。在较简单的情形 $U=U(q_1,q_2)$ 下，我们所写出的表达式可能有助于求解运动方程，或为运动的可能第一积分是否存在提供线索。特别地，当 $C>0$ 为常数时，*(50)* 化简为 $\dfrac{d}{dt}(\frac{M}{2}y-U)$ $-\frac{M}{2}\frac{y}{C^2-y}\dot{y}=0$，其中 $y=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2$。在更一般的背景下，*(51)* 可以被视为以下运动学条件的一部分，该条件涉及每一个奇异分量：

$$a\dot{x}^2+b\dot{y}^2+c\dot{z}^2=C^2(t)$$

情况 $a=b,\ c=-1,\ C(t)=0$ 已在 *[11]* 中进行研究。

线性运动学约束

许多实例和具体应用都体现了线性运动学约束。事实上，大多数文献和理论研究仅考虑这一情形。实际上，最常见的运动学约束实例，例如圆盘或球体在平面上的纯滚动，或者带有刀刃的物体在无摩擦条件下滑动，且只能沿纵向滑动，都可以用速度的线性方程来描述，并且是最早得到研究的实例（[6], [2], [31]）。

$_m$在线性约束（15）的情况下，我们从显式表达式（16）中看到，对于$_{r=1}\nu=1$，……，k，系数（28）和（31）是{lng?}

$$\overline{\alpha}_\nu=\sum_{r=1}^{m}\alpha_{\nu,r}\dot{q}_r=\alpha_\nu-\beta_\nu,\qquad \overline{B}_\nu=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu,j}}{\partial t}-\frac{\partial\beta_\nu}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{k}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu,j}}{\partial q_{m+\mu}}\beta_\mu-\frac{\partial\beta_\nu}{\partial q_{m+\mu}}\alpha_{\mu,j}\right)\right)$$

因此（30）成立（关于（29）也可以作出类似的观察）

$$\frac{d\mathcal{E}^*}{dt}=-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial t}-\sum_{\nu=1}^{k}\beta_\nu\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial q_{m+\nu}}+\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu,j}}{\partial t}-\frac{\partial\beta_\nu}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{k}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu,j}}{\partial q_{m+\mu}}\beta_\mu-\frac{\partial\beta_\nu}{\partial q_{m+\mu}}\alpha_{\mu,j}\right)\right)\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{m+\nu}}.$$

后一个方程表明，除了这些项可能显式依赖于 t 之外，（15）中存在函数 ζ_ν，进而（16）中存在 β_ν，是导致（36）发生变化的唯一原因。换言之，如果 $\mathcal{L}$不显式依赖时间，且（15）是关于 $\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_n$的线性齐次函数，那么能量守恒。

一种特殊情况涉及以下形式的仿射约束。

$$\alpha_\nu = \sum_{j=1}^{m} a_{\nu,j}(q_1,\dots,q_n,t)\dot{q}_j + c_\nu(t), \quad \nu = 1,\dots,k \tag{52}$$

其中 c_ν 为非零函数。在这种情况下，$\bar{\alpha}_\nu = \alpha_\nu - c_\nu$，因此 $\overline{B}_\nu = \dfrac{\partial\overline{\alpha}_\nu}{\partial t}$，且（30）为

$$\frac{d\mathcal{E}^*}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial t} - c_\nu\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial q_{m+\nu}} + \sum_{\nu=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\alpha_{\nu,j}}{\partial t}\dot{q}_j + \dot{c}_\nu\right)\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{m+\nu}}. \tag{53}$$

例 3 对于处于 $\mathbb{R}^3$ 中、质量为 M 且受到约束 $ax\dot{y} + b\dot{x}y + c - \dot{z} = 0$, $c \neq 0$ 作用的质点，我们设定 $(q_1,q_2,q_3) = (x,y,z)$，使得 *(54)* 可写为 $\dot{q}_3 = aq_1\dot{q}_2 + bq_2\dot{q}_1 + c$（在此情形下 $m = 2$ 和 $k = 1$）；此外

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}M[(1+a^2q_1^2)\dot{q}_1^2 + (1+b^2q_2^2)\dot{q}_2^2 + 2abq_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2c(aq_1\dot{q}_2 + bq_2\dot{q}_1)] + U(q_1,q_2,q_3).$$

每当 $U = U(q_1,q_2)$ 时，*(53)* 给出了量的守恒关系

$$\frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}M(aq_1\dot{q}_2 + bq_2\dot{q}_1 + c)(aq_1\dot{q}_2 + bq_2\dot{q}_1 - c).$$

*[11]*讨论并证明了能量积分存在的一个必要且充分条件（以约束流形的几何性质表示）。

注释 8 更一般地，对于正整数 p，条件集合

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{\nu,j}(q_1,\dots,q_n,t)\dot{q}_j^p + \zeta_\nu(q_1,\dots,q_n,t) = 0, \quad \nu = 1,\dots,k \tag{54}$$

定义了 p 次仿射非完整约束；线性情形 $p = 1$ 对应于 *(15)*。推广了 *(16)* 的显式形式 *(5)* 为

$$\dot{q}_{m+\nu}^p = (\pm1)^{p+1}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{\nu,j}(q_1,\dots,q_n,t)\dot{q}_j^p + \beta_\nu(q_1,\dots,q_n,t)\right)^{1/p}, \qquad \nu = 1,\dots,k \tag{55}$$

对于适当的系数 $\alpha_{\nu,j}$ 和 β_ν。由 *(55)* 可推得：

$$\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_i} = \frac{1}{p}\alpha_\nu\frac{\alpha_{\nu,i}\dot{q}_i^{p-1}}{\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{\nu,j}\dot{q}_j^p + \beta_\nu} \qquad i = 1,\dots,m, \quad \nu = 1,\dots,k$$

因此

$$\overline{\alpha}_\nu = \frac{1}{p}\alpha_\nu\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{\nu,i}\dot{q}_i^p}{\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{\nu,j}\dot{q}_j^p + \beta_\nu} \qquad \nu = 1,\dots,k$$

使得式（*56*）成立，当且仅当

$$(1-p)\sum_{j=1}^{m}\alpha_{\nu,j}\dot{q}_j^p = p\beta_\nu.$$

显然的解是线性齐次约束的情形（对于每个 $\nu = 1$，$p = 1$、$\beta_\nu = 0$，……，k）。

3 非完整约束非完整系统中的一个相关类别

由此可见，值得进一步探讨这一特殊情形。

$$\overline{\alpha}_\nu = \sum_{r=1}^{m} \dot{q}_i \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} = \alpha_\nu \quad \text{for each} \quad \nu = 1, \ldots, k \tag{56}$$

显然，只要（56）成立，（34）和（30）就值得进行特殊处理；这一假设对于系统能量的守恒起着至关重要的作用。根据（17）中的观察，该条件仅取决于函数 ϕ_ν、 $nu = 1$、.....、 k 的性质，而不取决于显式函数 α_ν 的选择。

我们首先指出，只要（56）成立，那么虚位移与受阻构形相容的速度之间的不一致性（如注释1所述）便得以消除：事实上，在这种情况下，表达式（11）与去掉最后一项后的速度（9）相吻合。因此，性质（56）将完整系统以及具有线性齐次约束的非完整系统中的情形（即以 $\zeta_\nu = 0$、 $\nu = 1$、.....、 k 表示的（15））推广到了非线性非完整约束。与此同时，（27）表明约束力的虚功率为零，这一点也可由（19）看出。

关于满足（56）的系统的能量，我们陈述如下性质，该性质涉及（35）、（36）及相应的能量方程。

命题4 假设对于每个 $\nu = 1, \ldots, k$，式（*56*）均成立。那么 $\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{r=1}^{m} \dot{q}_r \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r}$，从而 $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$，且（*29*）、（*30*）化简为

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad or \quad \frac{d\mathcal{E}^*}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\nu}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{57}$$

在定常情形 *(43)* 中，量 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$ 在运动过程中保持守恒。

这些陈述是公式 (42)、(33)（其蕴含 $\overline{B}_\nu = \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial t}$）和 (44) 的直接推论。

式 (57) 的一个显著推论如下

推论2 设 α_ν, $\nu = 1, \ldots, k$ 是满足（*56*）的函数。那么，量 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$ 是运动（*13*）的第一积分，当且仅当拉格朗日函数 $\mathcal{L}$ 不显含时间，即 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$。

如果参考 T 的表达式（38），推论要求 $g_{i,\ j}$、 b_i 和 c、 i、 $j = 1$、.....、 n 不显含 t， $U = U$（q_1、.....、 q_n）也是如此；守恒量即为式（41）中计算得到的量：

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s}^{m} g_{r,s} \dot{q}_r \dot{q}_s + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{k} g_{m+\nu,m+\mu} \alpha_\nu \alpha_\mu + \sum_{r=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{k} g_{r,m+\nu} \dot{q}_r \alpha_\nu - U - c = T_2^* - U - c \tag{58}$$

其中， T_2^*（其定义见式（58））汇集了二次项。显然，不含系数 b_i、 $i = 1$、.....、 n 的项，这与完整系统的雅可比积分相一致。对于线性运动学约束（15），量（58）为（另见式（16））

$$\sum_{r,s=1}^{m} \left(\frac{1}{2} g_{r,s} + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{k} g_{m+\nu,m+\mu} \alpha_{\nu,r} \alpha_{\mu,s} + \sum_{\nu=1}^{k} g_{r,m+\nu} \alpha_{\nu,s} \right) \dot{q}_r \dot{q}_s - U - c. \tag{59}$$

例 4 考虑一个由两个质点 P_1 和 P_2 组成的系统，其质量分别为 M_1 和 M_2，它们受到平面约束，且速度彼此垂直，同时 P_2 的速度平行于连接 P_1 与 P_2 的直线（或者等价地， P_1 的速度垂直于该连线）。约束方程为

$$\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 = 0, \qquad (y_1 - y_2)\dot{x}_2 - (x_1 - x_2)\dot{y}_2 = 0$$

其显式表达式为，令 $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, $q_3 = y_1$, $q_4 = y_2$,

$$\dot{q}_3 = -\frac{q_1 - q_2}{q_3 - q_4} \dot{q}_1, \qquad \dot{q}_4 = \frac{q_3 - q_4}{q_1 - q_2} \dot{q}_2$$

考虑到式 *(16)* 及 $k=2$ 和 $m=2$，我们可以看到 $\alpha_{1,1}=-(q_1-q_2)/(q_3-q_4)$, $\alpha_{1,2}=\alpha_{2,1}=0$,$\alpha_{2,2}=(q_3-q_4)/(q_1-q_2)$，$\beta_1=\beta_2=0$ 且函数 *(12)* 为

$$T^*(q_1,q_2,q_3,q_4,\dot{q}_1,\dot{q}_2)=\frac{1}{2}M_1\left(1+\alpha_{1,1}^2\right)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\left(1+\alpha_{2,2}^2\right)\dot{q}_2^2$$

其中 M_1 和 M_2 是质量。假设两个质点由弹簧连接，弹簧对 P_1 施加力 $-\kappa(P_1-P_2)$，并对 P_2 施加大小相等、方向相反的力（κ 为正常数）；同时计入沿 y 减小方向的重力，则拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}M_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}M_2(\dot{q}_2^2+\dot{q}_2^2)-\frac{\kappa}{2}\left((q_1-q_2)^2+(q_3-q_4)^2\right)-g(M_1q_3+M_2q_4)$$

由此可得 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}=0$；运动常数 *(58)* 为

$$I(q_1,q_2,q_3,q_4,\dot{q}_1,\dot{q}_2)=T^*+\frac{\kappa}{2}\left((q_1-q_2)^2+(q_3-q_4)^2\right)+g(M_1q_3+M_2q_4).$$

我们看到，只要函数 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{L}^*$ 在 (57) 中的位置适当，情况 (56) 就会使能量平衡恢复为完整系统 (25) 的能量平衡。

例*5* 我们考虑平面上的两个质点（P_1，M_1）和（P_2，M_2），它们的速度均垂直于连接 P_1 与 P_2 的直线。在当前情况下，有 $m=k=2$：令 $(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)=(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)$，并将约束方程 *(16)* 写成 $\dot{q}_3=\frac{q_2-q_1}{q_3-q_4}\dot{q}_1$，$\dot{q}_4=\frac{q_2-q_1}{q_3-q_4}\dot{q}_2$。假设主动外力满足 *(20)*，则拉格朗日函数为 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}M_1\ (q_1^2+q_3^2)\ +\frac{1}{2}M_2\ (q_2^2+q_4^2)\ +U\ (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)$，不依赖于时间；根据 *(59)*，有 $g_{1,\ 1}=g_{3,\ 3}=M_1$，$g_{2,\ 2}=g_{4,\ 4}=M_2$，$g_{i,\ j}=0$，其中 $i\neq j$，$\alpha_{1,\ 1}=\alpha_{2,\ 2}=\frac{q_2-q_1}{q_3-q_4}$，$\alpha_{2,\ 1}=\alpha_{2,\ 2}=0$，因此守恒量为

$$I(q_1,q_2,q_3,q_4,\dot{q}_1,\dot{q}_2)=\frac{1}{2}(m_1\dot{q}_1^2+m_2\dot{q}_2^2)\left(1+\left(\frac{q_2-q_1}{q_3-q_4}\right)^2\right)-U(q_1,q_2,q_3,q_4).$$

下面讨论约束 (1) 的时间依赖性：式 (57) 中相互关联的等式使我们意识到，即使非完整约束不是定常的，也可以赋予系统一个第一积分，也就是说，函数 (5) 显式依赖于 t，因而 $\dfrac{\partial\alpha_\nu}{\partial t}\neq0$ 也随之依赖于它。实际上，式 (57) 保证了量 (35) 守恒，当且仅当 $\mathcal{L}$ 不显式依赖于时间，尽管约束 (1) 确实依赖于时间：下面可以给出一个相关示例。

例*6* 在三维空间中，质点 $Q\equiv(x_Q,y_Q,z_Q)$ 按照给定关系 $x_Q=x_Q(t)$、$y_Q=y_Q(t)$、$z_Q=z_Q(t)$ 运动。质点 $P\equiv(x,y,z)$ 只能沿着 Q 运动，这意味着它在任意时刻的速度方向都与连接 P 和 Q 的直线一致：条件 $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})\wedge(x_Q(t)-x,y_Q(t)-y,z_Q(t)-z)=\mathbf{0}$ 给出了两个独立的约束

$$\begin{cases}(y_Q(t)-y)\dot{x}-(x_Q(t)-x)\dot{y}=0,\\(z_Q(t)-z)\dot{x}-(x_Q(t)-x)\dot{z}=0\end{cases}\tag{60}$$

该系统仅由质点 P 构成，拉格朗日坐标可以是 $q_1=x$、$q_2=y$、$q_3=z$；显式形式 *(16)* 为，在 $x\neq x_Q$ 的任意位置，

$$\begin{cases}\dot{q}_2=\dfrac{y_Q(t)-q_2}{x_Q(t)-q_1}\dot{q}_1=\alpha_{1,1}(q_1,q_2,t)\dot{q}_1,\\[2ex]\dot{q}_3=\dfrac{z_Q(t)-q_3}{x_Q(t)-q_1}\dot{q}_1=\alpha_{2,1}(q_1,q_3,t)\dot{q}_1\end{cases}\tag{61}$$

系统的动能（仅由质点 P 构成）为 $T=\frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$，其中 M 是质量，而式 *(12)* 根据式 *(61)* 为，

$$T^*(q_1,q_2,q_3,\dot{q}_1,t)=\frac{1}{2}M\dot{q}_1^2\left(1+\frac{(q_2-\eta(t))^2+(q_3-\zeta(t))^2}{(q_1-\xi(t))^2}\right).\tag{62}$$

很容易验证约束 *(61)* 满足假设 *(56)*。假设没有外力（不失一般性），我们有 $\mathcal{L}=T$，因此 $\dfrac{\partial T}{\partial t}=0$，由此可知，尽管约束是可动的，量 *(35)*（或 *(36)*）仍根据 *(57)* 保持守恒。该量等于 $\dot{q}_1\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_1}=T^*$，因此

$$\dot{P}^2=\frac{2}{M}T^*=\dot{q}_1^2\left(1+\frac{(q_2-\eta)^2+(q_3-\zeta)^2}{(q_1-\xi)^2}\right)$$

在运动过程中保持恒定，即速率大小不随时间变化。这一信息有助于求解运动方程 *(13)*

$$\left(1+\frac{(q_2-\eta)^2+(q_3-\zeta)^2}{(q_1-\xi)^2}\right)\ddot{q}_1=-\frac{\dot{q}_1\dot{\xi}}{q_1-\xi}\frac{(q_2-\eta)^2+(q_3-\zeta)^2}{(q_1-\xi)^2}+\frac{\dot{q}_1}{(q_1-\xi)^2}\left(\dot{\eta}(q_2-\eta)+\dot{\zeta}(q_3-\zeta)\right). \tag{63}$$

最后我们指出，对于具有如（48）所示的 T^* 的系统，（56）的成立消除了（50）中外力（势能为 U）的额外贡献；同时，在这种情况下，$\sum_{\nu=1}^{k}M_{(\nu)}\overline{\alpha}_\nu\dfrac{d\alpha_\nu}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k}M^{(\nu)}\alpha_\nu^2\right)$，因此（50）呈现为通常形式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}M^{(i)}\dot{q}_i^2+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k}M^{(\nu)}\alpha_\nu^2-U\right)=\frac{d}{dt}(T^*-U)=-\frac{\partial U}{\partial t} \tag{64}$$

类似于完整系统相关的情况。

3.1 运动学约束的若干特殊类别

为了筛选出采用这种特殊处理（57）的约束类别，从数学角度来看，必须明确哪些函数满足条件（56）：一个简单但意义重大的第一步如下

命题5 函数 $\overline{\alpha}_\nu=\sum_{i=1}^{m}\dot{q}_i\dfrac{\partial\alpha_\nu}{\partial\dot{q}_i}$ 与 α_ν 重合，当且仅当 α_ν 是关于 $\dot{q}_1$、…、$\dot{q}_m$ 的 *1* 次正齐次函数，即

$$\alpha_\nu(q_1,\dots,q_n,\lambda\dot{q}_1,\dots,\lambda\dot{q}_m,t)=\lambda\alpha_\nu(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m,t)\quad for\ any\ \ \lambda>0. \tag{65}$$

证明。这仅仅是欧拉齐次函数定理：$f(x_1,\dots,x_N)$ 次正齐次函数恰好是偏微分方程 $\sum_{i=1}^{N}x_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=kf$ 的解；在当前情形下，变量 $x_1,\dots,x_N$ 是动能变量 $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m$，而 f 是 α_ν，对于每个 $\nu=1,\dots,k$ 均成立。□

现在将注意力转向所赋予的函数 (1)，自然有必要询问函数ϕ_ν 应满足什么条件，才能使显式表达式验证 (65)：我们至少可以确定以下几类约束：

(1) 线性齐次运动学约束，即式 (15) 中 $\zeta_j=0$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_{\nu,i}(q_1,\dots,q_n,t)\dot{q}_i=0\qquad\nu=1,\dots,k \tag{66}$$

(2) 类型的非线性运动学约束

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}^{(\nu)}(q_1,\dots,q_n,t)\dot{q}_i\dot{q}_j=0,\qquad\nu=1,\dots,k \tag{67}$$

即相对于动能变量呈二次齐次的函数。

对线性情形 (66) 检验 (65) 是直接的；至于情形 (2)，利用隐函数定理可以看出，由 (67) 定义的函数 (5) 实际上是关于变量 $\dot{q}_1$、……、 $\dot{q}_r$ 的 1 次齐次函数。

类型（67）的例子包括标准运动学约束，这些约束常见于实际应用和文献中（为便于书写，我们仅考虑由两个质点组成的系统）：

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2-\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2\right)=0 & \text{same magnitude of the velocities} \\ \dot{x}_1\dot{y}_2-\dot{x}_2\dot{y}_1=0, \quad \dot{x}_1\dot{z}_2-\dot{x}_2\dot{z}_1=0 & \text{parallel velocities} \\ \dot{x}_1\dot{x}_2+\dot{y}_1\dot{y}_2+\dot{z}_1\dot{z}_2=0 & \text{perpendicular velocities} \end{array}$$

上述系统满足平衡方程（57），而 $\mathcal{L}$ 不含 t 将给出运动的第一积分（36）。

对于上述列出的示例，式（67）中的系数 $a_i^{(\nu)}{}_{,j}$ 是常数；而在下面最后一个示例（称为非完整约束摆）中，系数取决于拉格朗日坐标。

例 7 质点 P_1 和 P_2 在平面上运动，使得垂直于质点 P_1、 P_2 速度的直线交于平面上一条给定曲线 γ 上的某一点。

如果$(x_i, y_i, 0)$是坐标为 P_i, $i=1,2$的质点的坐标，则两条垂直于速度的直线相交于坐标为的质点处

$$\bar{x}=\frac{\dot{y}_1\dot{y}_2(y_1-y_2)-x_2\dot{y}_1\dot{x}_2+x_1\dot{x}_1\dot{y}_2}{\dot{x}_1\dot{y}_2-\dot{x}_2\dot{y}_1}, \quad \bar{y}=\frac{\dot{x}_1\dot{x}_2(x_2-x_1)-y_1\dot{y}_1\dot{x}_2+y_2\dot{x}_1\dot{y}_2}{\dot{x}_1\dot{y}_2-\dot{x}_2\dot{y}_1}$$

s因此，如果曲线 γ 是 $y=g(x)$ 的图像，则运动学约束表示为 b y

$$\bar{y}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{x}_2,\dot{y}_2)=g(\bar{x}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{x}_2,\dot{y}_2))$$

为简单起见，假设 γ 是直线 $ax+by=0$：约束为

$$a\left(\dot{y}_1\dot{y}_2(y_1-y_2)-x_2\dot{y}_1\dot{x}_2+x_1\dot{x}_1\dot{y}_2\right)+b\left(\dot{x}_1\dot{x}_2(x_2-x_1)-y_1\dot{y}_1\dot{x}_2+y_2\dot{x}_1\dot{y}_2\right)=0. \tag{68}$$

关于（*1*），我们有 $n=4$ 和 $k=1$ （因此有 $m=3$）：令 $q_1=x_1$、 $q_2=y_1$、 $x_2=q_3=x_2$、 $q_4=y_2$，则（*68*）的显式形式为

$$\dot{q}_4=\frac{b(q_1-q_3)\dot{q}_1+(bq_2+aq_3)\dot{q}_2}{(aq_1+bq_4)\dot{q}_1+a(q_2-q_4)\dot{q}_2}\dot{q}_3=\alpha_1(q_1,q_2,q_3,q_4,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3) \tag{69}$$

约束（*68*）属于（*67*）类型，我们看到，显式形式（*69*）相对于运动学独立变量 $\dot{q}_1$、 $\dot{q}_2$、 $\dot{q}_3$ 是关于这些变量的一次齐次函数。假设这些力产生势能$U(q_1,q_2,q_3,q_4)$，函数既不

$$\mathcal{L}^*=\frac{1}{2}M_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}M_2\dot{q}_3^2\left(1+\left(\frac{b(q_1-q_3)\dot{q}_1+(bq_2+aq_3)\dot{q}_2}{(aq_1+bq_4)\dot{q}_1+a(q_2-q_4)\dot{q}_2}\right)^2\right)+U(q_1,q_2,q_3,q_4)$$

也不显式依赖于时间 t，约束（*69*）同样如此。由（*57*）得到的守恒量，是将 $\mathcal{L}^*$ 中 U 前的符号反转后得到的。

4 结论与后续研究

本研究第一部分的核心主题是条件18)。尽管这一条件可追溯至七十多年前，但它被直接视为公理（无论如何，这与物理测量结果相符），而非源自力学定律。

若采用拉格朗日乘子法，则该假设可确保约束力不做虚功。若改为借助(5)选取一组独立速度，同一假设则可提供一组虚位移，用于写出运动方程(13)。

使具有非线性约束的系统比完整系统和具有线性约束的系统更加复杂的根本区别在于，对于后两者，位移的概念与虚速度的概念重合。相反，公式 (11) 并未描述虚速度，因为分量 $\dot{q}_{m+\nu}=\alpha_\nu, \nu=1,\ldots,k$ 被式 (28) 中定义的函数 ϖ_ν 所取代。这种差异

可以采用 [23] 中所进行的分析（尽管其形式背景复杂得多），其中探讨并区分了容许位移或虚位移的概念。

不可避免的是，在拉格朗日形式中，从运动方程推导能量类信息的标准过程（我们已在本文第二部分对此进行了讨论），在这种情况下也会与完整约束或线性非完整约束情形有所不同。其根本原因在于，力的功率无法直接出现在能量方程（34）及类似方程中。

因此，有理由探究，仅使用独立速度构建的哈密顿型函数（36）在多大程度上可以被视为系统能量：我们最初报告的差异意味着，该函数不一定对应于使用所有变量计算得到的能量（35）。

我们在强调各个公式（首先是公式 (42)）对差值$\overline{\alpha}_\nu - \alpha_\nu$ 的依赖关系时所做的细致工作，使我们得出结论：假设 (56) 对于将非线性非完整约束情形视为线性情形的简单扩展而言，是必不可少且具有指示意义的。在相同的假设下，“虚拟”与“可容许”之间的区别，换言之，也就不复存在。

这一结论引出了有待进一步研究的问题：哪些类型的约束 (1) 能够使假设 (56) 成立？数学猜想如下：如果 (1) 中的所有函数 $\phi_n u$、 $\nu = 1$、. . .、 k 关于动能变量 $\dot{q}_1$、. . .、 $\dot{q}_n$ 均为齐次函数（即使它们的齐次次数不同），那么显式函数 (5) 关于独立速度是一次齐次函数。

另一方面，可以假设由（1）定义的零集总能通过齐次函数来实现（众所周知，相同的约束，即使是运动学约束，也可以通过不同的条件集来实现）。

总之，值得进一步探讨的问题是：解耦条件 (28) 是否是具有齐次非完整约束的系统所独有的特性，从而为以下论断扫清道路：只有这类系统才能在进一步假设的条件下表现出能量守恒。

参考文献

[1] Appell P.，《动力学方程的一种新形式》，J. Reine Angew. Math.，**121**，301–319，1899.[2] Appell P.，《动力学中的滚动运动》，巴黎：Scientia Phys. Math.，**4**，1899.[3] Bloch, A. M., Mardsen, J. E. 和 Zenkov, D. V.，《非完整系统中的准速度与对称性》，Dynamical Systems，**24**，187–222，2009.[4] Cameron, J. , M. , Book, W.，《利用玻尔兹曼–哈梅尔方程对具有非完整关节的机构进行建模》，The International Journal of Robotics Research 16(1)，47–59，1997[5] ˇCaplygin, S. A.，《关于非完整系统运动理论：约化乘子定理》，数学文集 **28**，303–314，1911.[6] ˇCaplygin, S. A.，《水平面上的球体滚动问题》，数学文集 **24**，139—168，1903.[7] ˇCetaev, N. G.，《高斯原理的修正》，Prikl. Mat. i Mekh. **5** 第1期，11—12，1941（俄文）[8] ˇCetaev, N. G.，《论高斯原理》，《分析力学论文集》，323，科学院，1962.[9] Rumyantsev, V. V.，《论 Chetaev 原理》，Dokl. Akad. Nauk SSSR，**210** 第4期，787–790，1973（俄文）[10] Cronström, C.，《非完整系统与相关变分系统的相容性》，Acta Physica Universitatis comenianae，第 L–LI 卷，第 1 和第 2 期，25–36，2010.[11] Fassò, F. , Sansonetto, N.，《具有仿射约束的非完整系统中的能量与动量守恒》，《规则与混沌动力学》，**20** 第4期，449–462，2015.[12] Flannery M. R.，《非完整约束之谜》，美国物理学杂志 **73**，265，2005.[13] Gantmacher, F. R.，《分析力学讲义》，莫斯科：Mir 出版社，1970.[14] Hamel, G.，《关于非完整系统》，Math. Ann. **92**，31–41，1924.[15] Hamel, G.，《力学中的拉格朗日–欧拉方程》，Z. Math. Phys.，**50**，1–57，Fortschritte **34**，757，1904.

[16] Krupkovà, O.，《受非完整约束的力学系统》，《数学物理杂志》，**38**，5098–5126，1997年。[17] de León, M.，de Diego, D. M.，《非完整拉格朗日系统的几何》，《数学物理杂志》**37**，3389–3414，1996年。[18] Li, S. M.，Berakadar, J.，《非线性非完整约束的切塔耶夫条件推广：速度决定的虚位移方法》，《数学物理报告》**63**，第2期，179–189，2009年。[19] Lurie, A. I.，《分析力学》，Springer–Verlag，柏林、海德堡，2002年。[20]Massa, E.，Pagani, E.，《非完整系统的经典动力学：一种几何方法》，《庞加莱理论物理研究所年刊》55，第1期，511–544，1991年。[21] Neˇimark Ju. I.，Fufaev N. A.，《非完整系统动力学》，美国数学学会，普罗维登斯，1972年。[22] Papastavridis, J. G.，《分析力学：受约束系统动力学综合论述》，世界科学出版社，2014年。[23]Papastravidis, J. G.，《非线性非完整系统的时间积分变分原理》，《应用数学杂志》，**64**，985–991，1997年。[24] Cariñena, J. F.，Rañada, M. F.，《受约束拉格朗日系统：拉格朗日乘数法的几何方法》，《物理学杂志A：数学与一般》**26**，1335–1351，1993年。[25] Rumyantsev, V. V.，《非完整系统的哈密顿原理的各种形式》，《力学、自动化与机器人学》，**2**，第10期，1035–1048，2000年。[26] Salehani, M. K.，《非完整力学系统变分结构的喷射丛方法》，《数学物理报告》**83**，第3期，373–385，2019年。[27] Swaczyna, M.，《非完整力学系统的若干实例》，《数学通讯》**19**，27–56，俄斯特拉发大学，2011年。[28] Talamucci, F.，《具有非线性非完整约束的时变系统：沃罗涅茨方程》，规则与混沌动力学，**25** 第6期，662–673，2020年。[29] Virga, E.，《关于非完整非理想约束的一点观察》，《帕尔马大学数学杂志》，**13**，379–384，1987年。[30] Voronec, P. V.，《关于非完整系统的运动方程》，《数学文集》**22**，659–686，1901年。[31] Voronec, P. V.，《重刚体在水平面上无滑动滚动时的运动方程》，《基辅大学通报》第11期，1–17，1901年。[32] Zeković, D. N.，《具有非线性非完整约束的力学系统动力学——II：运动微分方程》，《应用数学与力学杂志》**91** 第11期，899–922，2011年。[33] Zeković, D. N.，《具有非线性非完整约束的力学系统动力学——III：运动分析》，《应用数学与力学杂志》**93** 第8期，550–574，2013年。[34]Zeković, D. N.，《具有非线性非完整约束的力学系统的能量积分》，《国际非线性力学杂志》**73**，105–113，2015年。