arXiv:2304.11344v2 [math.AP] 4 Mar 2024

Lipschitz 曲面上调和函数的梯度结果

BENJAMIN FOSTER

Abstract. 我们研究 Lipschitz 曲面上调和函数的解的梯度的各种性质。借助复分析工具，我们将 Naber和Valtorta [NV17]关于频率函数超水平集大小的指数界改进为这一情形下的尖锐二次界。我们还建立了调和函数梯度的小性传播，从而解决了 [LM18] 在这一情形下提出的一个公开问题。最后，我们将频率超水平集的估计推广到更一般的散度型椭圆偏微分方程，其中漂移项有界，但需要付出一个次多项式因子的代价。

1. Introduction

在全文中，我们将研究具有 Lipschitz 黎曼度量的二维区域上调和函数的梯度大小。我们用 Δ_g表示拉普拉斯—贝尔特拉米算子；若函数 u 满足方程 $\Delta_g u = 0$, 则称其为调和函数。在局部坐标中，若令 g_{ij} 表示度量的分量， g^{ij} 表示逆张量的分量， $|g|$ 表示行列式，则该方程可写为

$$\frac{1}{\sqrt{|g|(x)}}\partial_i(\sqrt{|g|(x)}g^{ij}(x)\partial_j u(x)) = 0 \qquad \text{in } B_2(0), \tag{1}$$

其中我们采用了爱因斯坦求和约定。我们用 λ 表示椭圆性常数和利普希茨常数中的较大者，即

$$|g_{ij}(x) - g_{ij}(y)| \le \lambda|x-y|, \qquad \frac{1}{\lambda}|v|^2 \le \sum_{i,j} g_{ij}v_i v_j \le \lambda|v|^2 \tag{2}$$

对所有 x、 $y \in B_2(0)$ 和所有 $v \in \mathbb{R}^2$，上述估计均一致成立，其中某个 $\lambda > 1$。

标准正则性结果表明，解 u 属于 C^1 [HL11，定理 3.13]。其临界集 $\mathcal{C}(u)$ 由 $B_1(0)$ 中使 ∇u 消失的点组成，且是有限集。事实上，对于单位圆盘上的非常值调和函数，其临界点数量可由该解的频率函数 [1] 的一个倍数控制 [Han07]。最近， [Zhu23a] 证明，对于具有利普希茨系数和有界漂移项的散度型椭圆方程的解，这一结论也成立。

Almgren 的频率函数是一种用途广泛的工具，已用于研究椭圆方程[2]。它以定义域中的一个点和一个尺度参数

[1]频率函数将在第 2 节中作更仔细的定义。[2]例如，关于唯一延拓问题的应用，参见 [GL86], [GL87], [KZ22]，和 [Tol23]；关于椭圆方程解的临界集和奇异集大小的应用，参见 [CNV15] 和 [NV17] 。

r 为输入，并且关于尺度参数满足单调性；当 r 趋于 0 时，它收敛到该点处解的消失阶。当固定 r 时，它则刻画了解从半径为 r 的球到半径为 $2r$的球的增长情况。直观地说，在椭圆方程的解这一背景下，频率函数可视为“多项式的次数”的对应概念；精确定义见式 (8)。有关频率函数性质的更完整论述，请参阅 [LM20] 。

关于以解的频率为依据的临界集大小的定量界，一直是研究关注的主题；目前已知的高维最佳界由 [NV17] 建立。已知临界集的维数至多为 $n-2$，Lin 在 [Lin91] 中猜想：

$$\mathcal{H}^{n-2}(\mathcal{C}(u) \cap B_{1/2}(0)) \leq CN^2, \tag{3}$$

其中，$\mathcal{H}^{n-2}$ 表示$(n-2)$维豪斯多夫测度， N是频率的上界。 [NV17] 的作者通过研究有效临界集 $\mathcal{C}_r(u)$，建立了临界集邻域体积的闵可夫斯基估计。这些有效临界集的优点是，相比临界集[3]，它们在解受到扰动时表现得更稳定。关键在于，这些有效临界集包含在频率函数的超水平集中，而频率函数正是他们能够控制其大小的量。一般而言，他们的估计关于 N^2 呈指数增长，不过在二维情况下，仅关于 N呈指数增长。在二维情况下，我们可以将他们的上界改进为一个尖锐的二次上界。这是我们的第一个主要结果。

定理 1. 假设 u 是半径为 2 的欧几里得圆盘上的一个解。假设其频率满足 $N_u(0,1) \leq \Lambda$。那么，对于频率函数的超水平集，我们有如下体积估计

$$Vol(\{x : N(x,r) > c\} \cap B_{1/2}(0)) \leq C\Lambda^2 r^2, \tag{4}$$

其中 $c < 1$ 是适当选取的常数， $C > 0$ 足够大，二者均取决于 g 的 Lipschitz 常数和椭圆性常数。

我们还将这一结论推广到带有有界漂移项的更一般的散度型椭圆方程；见第 8 节。

如前所述，Naber和Valtorta引入的尺度为 r 的有效临界集具有一项关键性质：对于适当的普适常数 c_0 ，它可由 $\{x : N_u(x,r) > c_0\}$ 覆盖，并且包含临界集的一个管状邻域。在更高维情形中，由于尚未得到关于临界集大小的尖锐界限，非正式地将临界集的 $(n-2)$ 维部分理解为解在局部具有高度对称性、且接近于一个二元函数的情形，可能会有所帮助。通过分层论证可以将这一点精确化；非定量分层见 [Han94] ，定量分层的讨论见 [CNV15], [NV17]。有效临界集是开集，而临界集则不同，受到扰动时其维数可能发生变化。在二维情形中，若能控制频率函数的超水平集（因而也能控制有效临界集）的大小，或可借助上述定量分层，更好地理解高维情形下临界集的大小与结构。

[3] $\mathcal{C}_r(u)$ 在第 2 节中有更精确的定义

在椭圆型偏微分方程领域，人们也一直关注如何根据梯度较小的点集的大小，而非临界集，定量地理解解“接近”常数或非恒定函数的程度。相关结果大致可用以下估计来描述

$$\sup_{B_{1/2}(0)} |\nabla u| \leq C \sup_{E} |\nabla u|^{\alpha} \sup_{B_1(0)} |\nabla u|^{1-\alpha}, \tag{5}$$

其中， E 通常取为梯度的某个次水平集；我们将此称为梯度的小性传播。问题在于，集合 E具有什么性质，才能使我们推出这样的估计？隐含常数 C 又如何依赖于这些性质？关于椭圆方程的解及其梯度，已有许多此类著名结果，例如三球定理。人们一直关注小性传播在任意复杂集合上的表现。 [LM18] 证明，对于具有利普希茨系数的散度型椭圆方程，其解的微小性可以从具有正 $(n-1+\delta)$ 维豪斯多夫内容的任意复杂集合传播出去。该论证采用了新颖的尺度归纳法，以及来自 [Log18] 的一些几何组合引理。对于椭圆方程解的梯度，人们认为其小性传播性质应当更好；也就是说，对于任意 $\delta > 0$，微小性都应能从具有正 $(n-2+\delta)$ 维豪斯多夫内容的任意复杂集合传播出去。 [LM18] 的作者还针对梯度给出了修正后的论证，证明微小性能够从具有正 $(n-1-c_n)$ 维豪斯多夫内容的集合传播出去，其中 $c_n > 0$ 为某个小常数，但他们未能得到猜想中的最优传播结果。

在二维情形下，我们首先运用中间章节中发展出的各种工具，为欧几里得情形下调和函数梯度的小性传播给出一个简短证明。过去也有人利用势理论工具研究这一问题，例如参见 [Mal04，定理 2。1]随后，我们借助等温坐标的存在性理论，将这一结果推广到 Lipschitz 黎曼度量的情形。在这类坐标下，度量与欧几里得度量共形，因此问题可归结为调和情形。关键在于，我们可以根据原椭圆方程的 Lipschitz 常数，逐点控制准共形坐标变换映射的导数；通过分析利用 Beltrami 方程的解构造准共形坐标变换的过程，便可看出这一点。由此，我们可以在坐标图中对解进行局部小性传播，而一个简单的链式论证则可将小性传播推广到全局。我们的第二个主要结果如下。

定理 2. 设 g 是 Lipschitz 黎曼度量，其中 $|g_{ij}(x) - g_{ij}(y)| \leq \lambda$，且 $\lambda^{-1}|v|^2 \leq \sum_{i,j} g_{ij}(x) v_i v_j \leq \lambda |v|^2$ 对某个 $\lambda > 0$ 以及所有 $x, y \in B_1(0)$ 和所有 $v \in \mathbb{R}^2$ 成立。假设 $\Delta_g u = 0$ 对某个 u 成立： $B_1(0) \to \mathbb{R}$ with $\|\nabla u\|_{L^\infty(B_1(0))} = 1$。还假设 $|\nabla u| \leq \epsilon$ 在集合 E_ϵ 上成立，该集合的 δ 维豪斯多夫内容（对于某个 $\delta > 0$）等于 $\beta > 0$。那么

$$|\nabla u(x)| \leq C\epsilon^{\gamma} \tag{6}$$

对所有 $x \in B_{1/2}(0)$ 成立，其中 C、 $\gamma > 0$ 仅依赖于 λ、 δ、 β。

这里，我们给出了该结果的局部版本，但将其应用于 Lipschitz 曲面的足够小的坐标图并进行串联，即可推广该结果至

一种全局的小性传播，其常数仅取决于曲面本身。

本文在若干关键之处使用了维数为 2 这一假设。首先，众所周知，若 u 是平面子集上的调和函数，则函数 $F(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$ 是满足 $|F| = |\nabla u|$ 的全纯函数。这使我们能够运用复分析中的强大工具。我们主要利用这样一个事实：可以将 F 的零点因子分解出来，从而有 $F(z) = P(z)g(z)$，其中 $P(z)$ 是一个多项式，而 $g(z)$ 不为零。随后，我们可以分别研究多项式和非零函数的频率，以了解任意调和函数的梯度的频率。维数为 2 的假设还用于变换到等温坐标，因为在更高维数下一般不存在这样的坐标。

本文结构如下。第 2 节讨论解的频率所采用的约定；出于技术原因，我们对通常的定义作了细微调整。第 3 节研究梯度不为零的解的频率。第 4 节研究多项式频率的水平集。第 5 节利用前几节的结果，在欧几里得情形下，对调和函数的频率超水平集的大小给出一个二次上界（以频率为参数）。第 6 节给出一个简明证明，说明在欧几里得情形下调和函数梯度的小性传播结果。第 7 节讨论如何将梯度的小性传播以及频率超水平集的体积估计推广到利普希茨曲面上的调和函数这一更一般的情形。第 8 节进一步将这一估计推广到具有利普希茨系数和有界可测漂移项的散度型椭圆偏微分方程。这依赖于这样一个事实：这类椭圆方程的解的梯度本身也满足一个散度型椭圆方程；而利用等温坐标变换，可以简化这一问题。

Zhu [Zhu23b] 最近还有一篇论文，该文针对不含漂移项的散度型椭圆方程的解，得到了与本文定理 2 类似的结果；该论文的在线发表时间比本文第一版稍早。该论文的方法启发了本文第二版第 8 节中的一些论证。

作者感谢 Eugenia Malinnikova 在本项目研究过程中进行的诸多宝贵讨论。作者在访问豪斯多夫数学研究所期间完成了本工作的部分内容；此次访问由德国研究联合会（DFG）通过德国卓越战略资助，项目编号为 EXC-2047/1 – 390685813。作者感谢该研究所的热情接待与支持。作者还感谢美国国家科学基金会（NSF）DMS-1956294 号项目提供的部分资助。

2. Conventions and Preliminaries

在全文中，我们将使用 C 来表示各种常数。除非另有说明，这些常数在调和情形下是通用的，而在椭圆情形下，它们仅取决于椭圆性和利普希茨常数。在方便的时候，我们还将使用记号 $A \lesssim B$ 来表示此类常数的 $A \leq CB$ C。

核心结果将是关于频率超水平集的体积估计。出于技术方面的原因，我们对 [NV17] 中给出的一些定义进行了略微修改。

给定一个非常数调和函数 u，我们将其频率[4] 记为

$$N(x,r)=\log_2\frac{\fint_{B_{2r}(x)}|\nabla u(y)|^2\,dy}{\fint_{B_r(x)}|\nabla u(y)|^2\,dy}. \tag{7}$$

若 $u-u(x)=\sum_{d\geq 1}a_dP_d$ 是关于 x 展开为齐次调和多项式，则频率也可以等价地表示为

$$N(x,r)=\log_2\frac{\sum_{d\geq 1}2^{2d-2}da_d^2r^{2d}}{\sum_{d\geq 1}da_d^2r^{2d}}. \tag{8}$$

注意，表述式 (8) 意味着，对于固定的 x，频率关于 r 是单调的，这与频率标准定义中的情形相同。

命题 3。 $N(x,r)$ 关于 r 单调不减。

证明。为方便起见，我们将 r 替换为 $\sqrt{r}$。对 r 求导得到

$$\log(2)\partial_rN(x,\sqrt{r})=\frac{\sum_{d\geq 1}4^{d-1}d^2a_d^2r^{d-1}}{\sum_{d\geq 1}4^{d-1}da_d^2r^d}-\frac{\sum_{d\geq 1}d^2a_d^2r^{d-1}}{\sum_{d\geq 1}da_d^2r^d}. \tag{9}$$

于是，单调性等价于不等式

$$\left(\sum_{d\geq 1}4^{d-1}d^2a_d^2r^{d-1}\right)\left(\sum_{d\geq 1}da_d^2r^{d-1}\right)\geq\left(\sum_{d\geq 1}4^{d-1}da_d^2r^{d-1}\right)\left(\sum_{d\geq 1}d^2a_d^2r^{d-1}\right). \tag{10}$$

然后，我们可以将所有量除以 $\left(\sum_{d\geq 1}da_d^2r^{d-1}\right)$ 进行归一化，因此不妨设 $\left(\sum_{d\geq 1}da_d^2r^{d-1}\right)=1$，并通过 $p(d)=da_d^2r^{d-1}$在正整数上得到一个概率测度。回顾关于和的切比雪夫不等式：对于非递增函数 f、g 以及概率测度 p，有

$$\sum_d f(d)g(d)p(d)\geq\left(\sum_d f(d)p(d)\right)\left(\sum_d g(d)p(d)\right). \tag{11}$$

取 $f(d)=4^{d-1}$ 和 $g(d)=d$，即可推出（10），证明完成。 □

在定义中，我们取以 2 为底的对数，这样，如果 $u-u(x)$ 在点 x处具有消失阶 j，那么对所有 r都有 $N(x,r)\geq 2j-2$。特别地， x 属于临界集，当且仅当 $\lim_{r\to 0}N(x,r)\geq 2$。

在接下来的讨论中，我们令 u 为更一般的椭圆方程 $\operatorname{div}(A\nabla u)=0$ 的一个解。在 [CNV15], 中，有效临界集在尺度 r 上被（粗略地）定义为这样一组点：解 u 在半径为 r 的球上可由一个归一化线性函数很好地近似。随后，在 [NV17], 中，有效临界集在尺度 r 上被定义为

$$\tilde{\mathcal{C}}_r(u)=\left\{x:r^2\inf_{y\in B_r(x)}|\nabla u(y)|^2<C\fint_{\partial B_{2r}(x)}|u(y)-u(x)|^2\,dy\right\}. \tag{12}$$

[4]更一般地，如果 u 满足一个散度形式方程，那么在进行线性坐标变换，使该点 x处的二阶项成为欧几里得拉普拉斯算子后，我们也可以使用这一表述。

一个简短的计算表明，原始定义中的所有有效临界集点也都属于 $\mathcal{C}_r(u)$。正如 [NV17]，中所讨论的，对于常数 C 的适当选取，该集合包含于超水平集中。

$$\tilde{\mathcal{C}}_r(u) \subset \{x : N(x, r) > C\}. \tag{13}$$

此外，注意到 $\mathcal{C}_r(u)$ 显然包含临界集的一个 r-管状邻域。因此，我们对获得频率超水平集的闵可夫斯基估计感兴趣。

我们还将使用调和函数的 L^2 和 L^∞ 范数的局部等价性，即

$$C_1\|u\|_{L^2(B_{1/2}(0))} \leq \|u\|_{L^\infty(B_{1/2}(0))} \leq C_2\|u\|_{L^2(B_1(0))}. \tag{14}$$

特别地，我们可以将其应用于调和函数的偏导数，从而得到调和函数梯度的类似等价性。

我们还回顾一下集合的豪斯多夫内容的定义。与豪斯多夫测度不同，对于有界集合，豪斯多夫内容总是有限的，这使得它更适合从开集（例如梯度的子水平集）定量地传播小量。给定 $\delta > 0$，集合 E 的 δ 维豪斯多夫内容定义为

$$\mathcal{C}_H^\delta(E) = \inf \sum_j r_j^\delta \tag{15}$$

其中，下确界取遍集合 E 的所有球 $B_{r_j}(x_j)$ 覆盖。与豪斯多夫测度不同，我们不要求覆盖集的直径变得任意小。

最后，我们回顾弱 L^p 空间的定义。对于 $0 < p < \infty$ 和测度空间（X，μ），我们定义拟范数

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \sup_{\gamma>0}\{\gamma\mu(\{x : |f(x)| > \gamma\})^{1/p}\}. \tag{16}$$

而空间 $L^{p,\infty}$ 由所有满足以下条件的可测函数 f 组成：$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$有限。当 $p > 1$ 且（X，μ）是 σ-有限时，已知在 $L^{p,\infty}$ 上存在一个范数$|||\cdot|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$，它等价于（16），参见 [Gra14，第 14-15] 页。

3. Empty Superlevel Sets for Nonvanishing Gradients

我们首先要证明的是，如果临界集为空，则在小尺度下频率至多为 $1/2$。在对此作出精确表述之前，我们先证明以下引理：

引理 4. 设 u 是 $B_2(0)$ 上的调和函数，且满足$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_1(0))} = 1$。假设其频率满足 $N(0, 1) \leq \Lambda$，并假定 Λ 充分大。如果 $|\nabla u|$在单位球上处处不为零，则

$$\big|\log|\nabla u(x)|\big| \leq C\Lambda \tag{17}$$

对于所有 $x \in B_{1/2}(0)$，其中 C 是通用常数。

证明。由单调性可得

$$\log_2\left(\frac{⨍_{B_2(0)}|\nabla u(y)|^2\,dy}{⨍_{B_{1/2}(0)}|\nabla u(y)|^2\,dy}\right) = N(0,1) + N(0,1/2) \leq 2\Lambda \tag{18}$$

由于 u 是调和函数，因此 u 的每个偏导数也是调和函数，所以根据（14），将球扩大一倍后， L^2 范数与 L^∞ 范数在局部等价。特别地，这意味着

$$\fint_{B_2(0)} |\nabla u|^2 \geq c\|\nabla u\|^2_{L^\infty(B_1(0)} \geq c \tag{19}$$

对于某个通用常数。我们还可以直接用上确界来界定半球上的平均值。综合这些不等式可得

$$2\Lambda \geq \log(c) - \log\left(\sup_{B_{1/2}(0)} |\nabla u|\right) \tag{20}$$

重新整理可得

$$\inf_{B_{1/2}(0)} (-\log|\nabla u(x)|) \leq -\log(c) + 2\Lambda \tag{21}$$

现在，由于 ∇u 不为零，回想一下， $-\log|\nabla u|$ 是调和的，并且根据我们的归一化，它在单位球上非负。因此，在半球上应用 Harnack 不等式可得

$$\sup_{B_{1/2}(0)} \lesssim \Lambda + C, \tag{22}$$

从而得到该结论，因为 $|\log|\nabla u(x)|| = -\log|\nabla u(x)|$，且 Λ 足够大，可以吸收加性常数。□

有了这一初步结果，不难证明：如果临界集为空，那么频率的足够大的超水平集也为空，至少在梯度处处不为零的情况下如此。

命题 5. 设 u 是单位球的双倍上的调和函数，并且在单位球上处处满足 $|\nabla u(x)| > 0$ 。假设频率界$N(x, 1) \leq \Lambda$ 在整个单位球上成立，其中 $\Lambda > 2$足够大。那么存在一个通用常数 $c > 0$ 使得

$$N(x, c/\Lambda) \leq \frac{1}{2} \tag{23}$$

对单位球中的所有 x 均成立。

证明。在全文中，记 $v = -2\log|\nabla u|$；根据假设，这是一个非负有界的调和函数。我们有

$$N(x, c/\Lambda) = \log_2\left(\frac{⨍_{B_{2c/\Lambda}(x)} \exp(-v(y))\,dy}{⨍_{B_{c/\Lambda}(x)} \exp(-v(y))\,dy}\right) = v(y_1) - v(y_2) \tag{24}$$

对于 $B_{jc/\Lambda}(x)$中的某些点 y_j 。我们回顾 Harnack 不等式的以下定量形式：如果 w 在单位球上为正且调和，那么

$$\frac{1-|y|}{1+|y|}w(0) \leq w(y) \leq \frac{1+|y|}{1-|y|}w(0). \tag{25}$$

在点 y_1, y_2 处对 v 应用这一结论，并利用它们与 x 非常接近这一事实，我们得到存在某个通用常数 K ，使得该差值受到控制，即。

$$|v(y_2) - v(y_1)| \leq Kcv(x)/\Lambda \tag{26}$$

然而，引理 4 表明 $v(x) \leq C\Lambda$。将原始因子 c 取得足够小，这就意味着频率至多为 $1/2$，如所需。□

注意，对于我们所需要的体积估计，我们总能假设 Λ 足够大，从而满足本节结果中的假设。

4. Holomorphic Polynomial Frequency Control

由于我们讨论的是二维情形，因此可以使用复分析工具。给定一个调和函数 u，我们可以构造一个全纯函数 $F(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$，满足 $|F| = |\nabla u|$ 处处成立。我们可以利用的一个有用工具是将 F的根因式分解。由于 F 是在半径为 2 的圆盘上的全纯函数，因此可以写成

$$F(z) = g(z)\prod_j (z - a_j) \tag{27}$$

其中 $g(z)$ 在单位圆盘内不为零， a_js 是 F 在单位圆盘内的根，按重数计。由解析性可知，该乘积是有限的。在上一节中，我们已经研究了不为零的情形，因此现在将研究多项式情形。

命题 6. 设 $P(z) = \prod_{j=1}^{\Lambda}(z - z_j)$ 是圆盘上的一个全纯多项式，它由一个调和多项式通过 $P \sim u_x - iu_y$得到。存在一个普适常数 C ，使得频率大于 $1/2$的点集满足以下体积估计：

$$Vol(\{x \in B_{1/2}(0) : N(x,r) > 1/2\}) \leq C\Lambda^2 r^2. \tag{28}$$

证明。注意，我们可以假设 $r < C\Lambda^{-1}$，否则由于球具有有限测度，该界是平凡的。根据式 (8)， u 的频率受 Λ 控制。固定单位圆盘中的一点 z_0 ，使其到每个 z_j 的距离至少为 $4r$ 。于是，对于任意 $w \in B_{2r}$（z_0）和 $z \in B_r$（z_0），

$$\frac{|w - z_j|}{|z - z_j|} \leq 1 + \frac{|w - z|}{|z - z_j|} \leq 1 + \frac{3r}{|z - z_j|} \tag{29}$$

对 w 和 z 进行优化可得估计

$$N(z_0, r) \leq \log_2 \frac{\sup_{w \in B_{2r}(z_0)} |P(w)|^2}{\inf_{z \in B_r(z_0)} |P(z)|^2} \tag{30}$$

$$\leq \sup_{z \in B_r(z_0)} 2\sum_{j=1}^{\Lambda} \log_2\left(1 + \frac{3r}{|z - z_j|}\right) \tag{31}$$

$$\leq \sup_{z \in B_r(z_0)} C\sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{r}{|z - z_j|} \tag{32}$$

令 $B(r)$ 表示以每个 z_j 为中心、半径为 $4r$ 的球的并集，使得 $B(r)$ 的体积至多为 $C\Lambda r^2$。令 $S(r) = B_1(0) \setminus B(r)$。根据弱$L^2$ 拟范数的定义，我们有

$$\mathrm{Vol}\left(\left\{z_0 \in S(r) : \sup_{z \in B_r(z_0)} \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{Cr}{|z - z_j|} \geq 1/2\right\}\right) \leq 4\left\|\sup_{z \in B_r(z_0)} \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{Cr}{|z - z_j|}\right\|^2_{L^{2,\infty}(S(r))}. \tag{33}$$

对于求和中的单项，我们声称有如下估计

$$\left\| \sup_{z\in B_r(z_0)} \frac{Cr}{|z-z_j|} \right\|^2_{L^{2,\infty}(S(r))} \leq Cr^2. \tag{34}$$

这可由齐次性以及以下众所周知的事实看出：对于任意 $w \in \mathbb{R}^2$

$$\left\| \frac{1}{|z-w|} \right\|^2_{L^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)} \leq C, \tag{35}$$

结合简单估计

$$\sup_{z\in B_r(z_0)} \frac{Cr}{|z-z_j|} \leq \frac{C'r}{|z_0-z_j|}, \tag{36}$$

该估计对所有 $z_0 \in S(r)$ 都成立。因此，我们得到（34）。

由于 $L^{2,\infty}$ 是可赋范的，只需付出一个乘法因子的代价，我们便可以对任意多个项应用三角不等式。特别地，这给出了我们所需的界

$$\left\| \sup_{z\in B_r(z_0)} C\sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{r}{|z-z_j|} \right\|^2_{L^{2,\infty}(S(r))} \leq C\Lambda^2 r^2. \tag{37}$$

我们已经证明，频率的超水平集包含于球集 $B(r)$ 的并集中，其测度至多为 $C\Lambda r^2$；此外，还包含由弱 L^2 估计得到的 $S(r)$ 的一个子集，其测度至多为 $C\Lambda^2 r^2$，由此便得到了所需结论。□

通过考虑单项式 z^Λ （其中 Λ 是正整数），可以看出这一结果是精确的。事实上，在证明中我们展示了以下稍强的结果。

推论 7. 设 $P(z) = \prod_{j=1}^{\Lambda}(z-z_j)$ 为圆盘上的一个全纯多项式，它由一个调和多项式通过 $P \sim u_x - iu_y$ 得到。存在一个通用常数C ，使得

$$Vol\left(\{z_0 \in B_{1/2}(0) : \log_2 \frac{\sup_{w\in B_{2r}(z_0)} |P(w)|^2}{\inf_{z\in B_r(z_0)} |P(z)|^2} > 1/2\} \right) \leq C\Lambda^2 r^2. \tag{38}$$

5. More General Holomorphic Functions

最后，我们必须处理一般情形，即存在因式分解 $F(z) = g(z)P(z)$，其中 g 在单位球内不为零，而 P 是一个在单位球内有根的多项式。为方便起见，我们假设 F 定义在一个以原点为中心且足够大的球上。我们将使用它们的倍增指标类似量；给定一个全纯函数 F，定义

$$N_F(z,r) = \log_2 \frac{⨍_{B_{2r}(0)} |F(z)|^2\, dz}{⨍_{B_r(0)} |F(z)|^2\, dz}. \tag{39}$$

我们首先回顾这样一个事实：在二维情形下，控制大圆盘上的频率，就能控制较小圆盘上的零点数。

命题 8（ [Han07]中的定理 3.4）。假设 $N_F(0,1) \leq \Lambda$。则存在某个通用的 $s > 0$ ，使得 F 在 $B_s(0)$上至多有 2Λ 个根，按重数计。

因此，我们得到了一个关于 P 的次数界，它以 Λ 表示。首先，我们声称，对于给定的因式分解$F = Pg$（其中 P 是首一的），频率满足拟次可加性。

引理 9. 假设 $N_F(0, 2t) \leq \Lambda$ 其中 $t = \max\{1/s, 5\}$，且 s 如命题 8 中所述， Λ 充分大，并且 $F = Pg$ 是一个因式分解，分解为一个根全部位于 $B_1(0)$ 中的首一多项式和一个在$B_1(0)$上不消失的全纯函数。那么存在某个普适的 $C > 0$，使得 $N_g(0, t) \leq C\Lambda$。

证明。根据前面的引理， P的次数至多为 2Λ。在半径为 $2 < t/2$的球外，对于 P的任意根 a_j，有 $1 < |z - a_j|$；而在半径为 k的球内，有 $|z - a_j| \leq k + 1$。我们估计

$$2^{3\Lambda} \geq \frac{⨍_{B_{4t}(0)} |P(z)|^2 |g(z)|^2 \, dz}{⨍_{B_{t/2}(0)} |P(z)|^2 |g(z)|^2 \, dz} \tag{40}$$

$$\geq c \frac{\int_{B_{4t}(0) - B_{2t}(0)} |P(z)|^2 |g(z)|^2 \, dz}{\int_{B_t(0) - B_{t/2}(0)} |P(z)|^2 |g(z)|^2 \, dz} \tag{41}$$

$$\geq \frac{c}{(t+1)^{4\Lambda}} \frac{\int_{B_{4t}(0) - B_{2t}(0)} |g(z)|^2 \, dz}{\int_{B_t(0) - B_{t/2}(0)} |g(z)|^2 \, dz} \tag{42}$$

$$\geq \frac{c}{(t+1)^{4\Lambda}} \frac{\int_{B_{2t}(0)} |g(z)|^2 \, dz}{\int_{B_t(0)} |g(z)|^2 \, dz} \tag{43}$$

$$\geq \frac{c}{(t+1)^{4\Lambda}} 2^{N_g(0,t)} \tag{44}$$

这里，我们利用次调和性应用平均值不等式，从而可以用更大环域上的积分来控制半球上的积分。我们还利用了这样一个事实：在半径为 2 的球外，有 $|P(z)| \geq 1$；而在半径为 k 的球内，有 $|P(z)| \leq (k+1)^{2\Lambda}$。通过重新整理，并取相对于 c 足够大的 Λ，即可得到该结论。□

现在，我们已经掌握了理解多项式、非零函数的频率超水平集，以及如何将这些估计结合起来处理更一般函数的工具。我们准备在调和情形下证明定理 1。

命题 10. 设 u 是定义在半径为 $4s$ 的圆盘上的调和函数，其中 s 是某个适当大的通用常数。假设其频率满足 $N_u(0, 2s) \leq \Lambda$。则对于频率超水平集，我们有如下体积估计

$$Vol(\{x : N(x, r) > 1\} \cap B_{1/2}(0)) \leq C\Lambda^2 r^2 \tag{45}$$

其中 C 为某个通用常数。

证明。按照惯例，定义全纯函数 $F(x + iy) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$。根据我们之前的讨论， $N_F(0, 2s) \leq \Lambda$，因此只需证明满足 $N_F(z, r) > 1$ 的点集具有所需的体积估计。此外，我们可以假设 $r < c\Lambda^{-1}$，否则，由于 $B_{1/2}(0)$ 是一个具有有限测度的集合，只需取足够大的 C，体积估计便成立。将 $F(z) = P(z)g(z)$ 分解，其中 P 是一个所有根均位于单位圆盘内且次数至多为 2Λ 的多项式，而 g 在单位圆盘内处处不为零。我们有 $N_P(0, 1) \leq C\Lambda$，由引理 9 可得 $N_g(0, 1) \leq C\Lambda$。为简便起见，用 $\mathcal{C}(u)$ 仅表示 u 在单位圆盘内的临界集。命题 5 表明，如果我们选择足够小的 c

因此，如果 $r < c\Lambda^{-1}$ 足够小，那么对于半径为 $1/2$ 的圆盘中的任意 z， $N_g(z,r) < 1/2$。现在，我们将重新利用多项式情形下关于 P 的估计。对于 $B_{1/2}(0)$ 中的 z，我们有

$$2^{N_F(z,r)} = \frac{\fint_{B_{2r}(z)} |P(w)|^2 |g(w)|^2 \, dw}{\fint_{B_r(z)} |P(w)|^2 |g(w)|^2 \, dw} \tag{46}$$

$$\leq \frac{\fint_{B_{2r}(z)} |g(w)|^2 \, dw \sup_{B_{2r}(z)} |P(w)|^2}{\fint_{B_r(z)} |g(w)|^2 \, dw \inf_{B_r(z)} |P(w)|^2} \tag{47}$$

$$\leq 2^{N_g(z,r)} \frac{\sup_{B_{2r}(z)} |P(w)|^2}{\inf_{B_r(z)} |P(w)|^2}. \tag{48}$$

取对数后， g 的频率至多贡献 $1/2$；根据推论 7，我们可以看到，除去一个测度为 $C\Lambda^2 r^2$ 的集合外，多项式对频率的贡献处处至多为 $1/2$。特别地，这意味着

$$N_F(z,r) \leq 1 \tag{49}$$

在测度为 $C\Lambda^2 r^2$ 的集合之外，对所有 $z \in B_{1/2}(0)$ 都成立，由此得到所需结果。□

此外，这个关于 Λ 的估计是锐利的。考虑全纯函数 $F(z) = \exp(\Lambda z)$ 即可看出这一点；它是调和函数 $\Lambda^{-1} \exp(\Lambda x) \cos(\Lambda y)$ 的梯度。可以看出，在单位尺度上，它的频率与 Λ 可比；当 $r = C/\Lambda$ 时，经过适当选择常数，其频率覆盖整个单位球。事实上，它的频率函数与所选的点无关，只取决于尺度 r；一个简单的估计可以得到下界 $N(z,r) \geq \Lambda r/2 - C$，对任意 z 均成立。因此，当 $r \to 0$ 时，超水平集 $\{z : N(z,r) \geq 1\}$ 会经历从整个球到空集的转变，其临界值为 $r = C'/\Lambda$。由此，将其与 (12) 比较可知，体积估计中 Λ 的幂次无法改进。

6. Propagation of Smallness for Gradients of Harmonic Functions

借助前几节中建立的工具，我们可以证明调和函数的梯度所满足的所需小量传播性质。给定一个函数 f，我们将使用以下记号表示其次水平集。

$$E_a(f) = \{z : |f(z)| < e^{-a}\} \tag{50}$$

我们将需要以下关于多项式的 Cartan 定理。

引理 11（[Car28]）。设 P 是一个次数为 n 的首一多项式。那么对于任意δ、 $a > 0$，我们有一族有限的球 $\{B_j\}$，其半径为 r_j，覆盖E_a（P）$\cap B_1$（0），并且

$$\sum_j r_j^\delta \leq C e^{-a\delta/n} \tag{51}$$

特别地，对于多项式 P，其次数为 n，我们有以下直接推论

$$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{\delta}\left(E_a(P) \cap B_1(0)\right) \leq C e^{-a\delta/n}. \tag{52}$$

由此，得到小性传播相当直接。

定理 12. 设 u 是单位圆盘的双倍上的调和函数，并假设其梯度具有 $\|\nabla u\|_{L^\infty(B_1(0))} = 1$. 假设 that

$$\beta \leq \mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{\delta}(E_a(|\nabla u|) \cap B_1(0)) \tag{53}$$

对于某些 δ、$a > 0$。于是我们有

$$|\nabla u(x)| \leq Ce^{-\gamma a} \tag{54}$$

对于圆盘中所有 x（半径为 $1/2$），以及某些仅取决于 β、δ 的 γ、$C > 0$。

证明。照例，考虑全纯函数 $F(z) = u_x(x+iy) - iu_y(x+iy)$。令 $N_F(0,1) = \Lambda$。我们断言 $\Lambda \gtrsim a$；则根据假设中对 F 的归一化、频率的定义，以及 L^2 范数与 L^∞ 范数的局部等价性，定理的结论立即成立。取通常的因式分解 $F(z) = P(z)g(z)$，其中 P 是一个根位于单位圆盘内的首一多项式，而 g 在单位圆盘上不取零。我们有如下简单的包含关系

$$\begin{aligned}\{z \in B_1(0) : |F(z)| < e^{-a}\} \subset \{z \in B_1(0) : |P(z)| < e^{-a/2}\} \\ \cup \{z \in B_1(0) : |g(z)| < e^{-a/2}\}.\end{aligned}$$

取豪斯多夫内容并应用引理 11，可得

$$\beta \leq Ce^{-\delta a/n} + \mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{\delta}(\{z \in B_1(0) : |g(z)| < e^{-a/2}\}) \tag{55}$$

其中 $n \leq C\Lambda$ 是 P 的次数。若 $n \gtrsim a$，则我们就完成了，因为此时 $\Lambda \gtrsim a$ 也成立。否则，第一项至多为 $\beta/2$（对于固定的 $\beta > 0$，其中隐含常数取作适当的值），于是我们转而考虑 g 的频率，记为 ρ，其至多为 $C\Lambda$。根据引理 4，我们有

$$|g(z)| \geq e^{-c\rho}. \tag{56}$$

为了使（55）成立，我们必须有 $\rho \gtrsim a$，这反过来又根据引理 9意味着 $\Lambda \gtrsim a$，如所要求。□

7. Proofs of Theorems 1 and 2 on Surfaces

由于我们处于二维情形，等温坐标提供了一种便捷的方法，可将频率超水平集的体积界和小性传播推广至至少具有利普希茨正则性的闭黎曼曲面上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。在任意黎曼曲面上，都存在称为等温坐标的局部坐标[5]，使得拉普拉斯-贝尔特拉米算子呈现为欧几里得拉普拉斯算子的一个标量倍数。在我们的小性传播中，所得常数 C 也取决于曲面度量的椭圆性和利普希茨常数，但为使记号简洁，我们省略了这种依赖关系。思路很简单：用小坐标图覆盖曲面，使得变换到等温坐标的映射的双利普希茨常数接近 1。因此，新坐标中的频率变化不大，我们可以在每个小球上应用调和情形的结果。所需坐标图的数量由流形的椭圆性和利普希茨常数控制。由此得到频率超水平集所需的局部体积界。对于梯度的小性传播，可以利用这样一个事实来推导：当我们经过变换时，解的梯度的次水平集大小不会发生太大畸变。

[5]参见 [Che55]，以了解有关等温坐标的更多信息

转化为等温坐标，并且可以通过一种链式论证将这种小性传播到整个曲面。我们还可以使用类似的技术，获得频率超水平集大小的局部界。

在局部坐标中，我们回顾一下，对于度量 g，Laplace-Beltrami 算子是一个散度型椭圆算子，其形式为

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j u), \tag{57}$$

其中我们采用爱因斯坦求和约定，g^{ij} 表示度量张量逆矩阵的第（i，j）个分量。以下结果是关键工具：它表明，只要度量在 Lipschitz 意义下接近欧氏度量，坐标变换就能在所有方向上控制几何形状的畸变。

命题 13. 设 g 是 $B_\eta(0) \subset \mathbb{R}^2$ 上的 Lipschitz 黎曼度量，其 Lipschitz 常数由 λ 控制，且 $g(0) = I$ 是欧氏度量。假设 η 足够小（取决于 λ），并令 $F\colon B_\eta(0) \to U_\eta \subset \mathbb{R}^2$ 为等温坐标变换所给出的映射。那么，微分 DF 的特征值位于区间 $[1/2, 2]$ 内。

证明。证明将依赖这样一个事实：曲面上等温坐标的存在性可以改写为贝尔特拉米方程的可解性。证明中我们将使用 [AIM09] 中的许多结果，并且会像本文前文那样，常将 $\mathbb{R}^2$视为 $\mathbb{C}$。若度量 g 具有矩阵形式

$$g = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix},$$

那么对于

$$\mu = \frac{E - G + 2iF}{E + G + 2\sqrt{EG - F^2}}, \tag{58}$$

等温坐标的存在性等价于求得以下方程的一个同胚解

$$\partial_{\bar{z}} \omega = \mu \partial_z \omega. \tag{59}$$

这里，我们通过取一个具有相同 Lipschitz 常数和 L^∞ 范数的 Lipschitz 延拓，并在 $B_{2\eta}(0)$之外令其为 $\mu = 0$，将 μ 的定义扩展到整个 $\mathbb{C}$（注意，由于 $\mu(0) = 0$，这两件事可以同时做到，例如沿径向线段，在 $\partial B_\eta(0)$上的取值与 0 之间作线性插值）。因此，我们有

$$|\tilde{\mu}(x)| \le C(\lambda) \eta \chi_{B_{2\eta(0)}}, \tag{60}$$

其中 χ_E 表示集合 E的示性函数。关于拟共形映射在 $p = 2$条件下对勒贝格测度的畸变，结果 [AIM09，方程 5.25]表明

$$\mathcal{H}^2(B_{2\eta(0)}) \le C(\lambda) \eta^2. \tag{61}$$

特别地，请注意，由椭圆性和 μ 的定义可知，μ 的 Lipschitz 常数仅取决于 λ。[AIM09] 第 5 章对此有所讨论（具体参见定理 5.1.1、公式 (5.4) 和定理 5.2.3 的证明）：当 $|\mu| < 1$ 时，这样一个解由下式给出。

$$\omega(z) = z + \mathcal{C}[(I - \mu \mathcal{S})^{-1} \partial_z \mu] := z + \sigma(z), \tag{62}$$

其中 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的柯西变换，$\mathcal{S}$ 表示 Beurling 变换。此处不对它们作定义，因为我们只会用到它们的 L^p 有界性

将这些性质作为一个黑箱使用；更完整的论述见 [AIM09，第 4]章。可以计算出，该映射关于z、 z的导数为

$$D\omega(z) = \begin{bmatrix} e^{\sigma} & \mu e^{\sigma} \\ \overline{\mu e^{\sigma}} & \overline{e^{\sigma}} \end{bmatrix}. \tag{63}$$

该映射的特征值为 Re(e^{σ}) $\pm$ (Re(e^{σ})^2 +(|μ|^2 − 1)|$e^{2\sigma}$|)$^{1/2}$。当$\eta = c(\lambda)$足够小时，我们有 $|\mu| < c' << 1$ 非常小（这是由于该度量在此球上与欧氏度量的 Lipschitz 距离很小），接下来我们将首先证明，在这种情况下， $|\sigma|$ 也很小。

为此，注意到根据 Rademacher 定理， $|\partial_z \mu(z)| \leq C(\lambda)$几乎处处成立，并且 $\partial_z \mu$ 支撑于 $B_{2\eta}(0)$中。因此，对于 $1 < p < \infty$，我们有

$$\|\partial_z \mu\|_{L^p} \leq C(\lambda)\eta^{2/p}. \tag{64}$$

根据 Calder´on-Zygmund 算子理论（参见 [AIM09，定理 4.5.3]），Beurling 变换在 L^p 上对 $1 < p < \infty$ 有界，并且其预解式 $(I - \mu\mathcal{S})^{-1}$ 在 L^p 上也有界，其算子范数由 $C_p'(1 - |\mu|)^{-1}$ 控制（参见 [AIM09，第 5]章）；当 η 足够小时，我们可以用 λ 对其进行估计。因此，我们有

$$\|(I - \mu\mathcal{S})^{-1}\partial_z \mu\|_{L^p} \leq C_p' \eta^{2/p} C(\lambda) \tag{65}$$

对所有 $1 < p < \infty$ 都成立。然而， [AIM09，第 4.3 定理11] 证明，柯西变换将 $L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C}) \to C_0(\mathbb{C})$ 映射到共轭指数对 $1 < q < 2 < p < \infty$，并满足估计

$$\|\mathcal{C}\phi\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{\sqrt{2-q}} \sqrt{\|\phi\|_{L^p} \|\phi\|_{L^q}}. \tag{66}$$

由 $\phi = (I - \mu\mathcal{S})^{-1}\partial_z \mu$，我们推得估计式

$$\|\sigma\|_{L^\infty} \leq C_{p,q}' C(\lambda)\eta \tag{67}$$

我们可以固定 $q = 3/2$，并取 $\eta = (10C_{p,q}' C(\lambda))^{-1}$，从而得出 $|\sigma|$ 足够小。

既然这一点已经确立，我们回过头来求特征值模的下界。始终记住，根据上述论证， $|e^{\sigma}|$ 有上界和下界。我们将根据特征值是实数还是复数，以及 e^{σ} 的实部是较大还是较小来分情况讨论。

情形 1：假设特征值是复数，即】【。

$$\mathrm{Re}(e^{\sigma})^2 + (|\mu|^2 - 1)|e^{2\sigma}| < 0.$$

如果对于某个只依赖于 λ 的常数 c_λ，有 |Re(e^{σ})|$^2 > c_\lambda |e^{2\sigma}|$，那么我们就完成了，因为我们已经得到了特征值实部的下界，从而也得到了其模的下界。因此，我们可以假设对于某个小常数 c_λ，该不等式不成立。将其取为小于 $(1 - |\mu|^2)/2$（其中 $|\mu|$ 依赖于 λ），可知我们能够得到特征值虚部的下界，从而完成这一情形的证明。

情形 2：假设特征值为实数，即

$$\mathrm{Re}(e^{\sigma})^2 + (|\mu|^2 - 1)|e^{2\sigma}| \geq 0.$$

当判别式为 0 时，我们可以将 Re(e^{σ}) 写成 $|e^{\sigma}|$的倍数，从而得到所需的下界，因此可以假设判别式为正。一般而言，由式 (67) 可得

$$\mathrm{Re}(e^{\sigma})^2 \geq e^{2(1-c\eta)},$$

因此，我们只需证明由判别式产生的被加项不会与该量过于接近。如果对于 $c_\lambda < 1$，判别式小于 $c_\lambda \mathrm{Re}(e^\sigma)^2$，那么结论即得，并可得到 $(1-c_\lambda)\mathrm{Re}(e^\sigma)^2$ 的下界。固定 $c_\lambda = |\mu|^2$。于是，如果前面的判别式估计不成立，我们可以推出

$$\mathrm{Re}(e^\sigma)^2 > \frac{1-|\mu|^2}{1-c_\lambda}|e^{2\sigma}| = |e^{2\sigma}|$$

这就产生了矛盾。因此，我们总能得到特征值模的所需下界。□

既然这一点已经确立，小性传播便可直接得到。

定理 2 的证明。在算子为欧几里得拉普拉斯算子的情形下，这一点已经为人所知，因此只需将问题化归到该情形。对于每个点 $x \text{in } B_{1/2}(0)$，考虑一个椭圆盘（即椭圆上及其内部的点集），其长轴长度至多为 $\eta(2\lambda)^{-1}$，其中 η 与前一个引理中的相同；并选取该椭圆，使得将 $g(x)$变为单位矩阵的线性坐标变换，将相应的边界椭圆映射为半径为 $\eta/2$的圆。根据豪斯多夫内容的次可加性，我们可以选取其中一个椭圆盘 Θ_0，使其满足 $\mathcal{C}_H^\delta(\Theta_0 \cap E_e) \geq c(\lambda)\beta$。我们可以在 Θ_0 的边界上选取 $C(\lambda)$个点，并取相应的椭圆盘，即 $\Theta_{1、}{}_j\mathrm{s}$，使得 $(1+c(\lambda))\Theta_0$ 被 Θ_0 以及这些 $\Theta_{1、}{}_j\mathrm{s}$ 覆盖（这是椭圆性的结果）。随后我们可以反复进行这一过程，直到 $B_{1/2}(0)$被 $C(\lambda)$个椭圆盘覆盖。此外，在这一构造中，根据椭圆性，我们可以确保每个椭圆盘与前面各盘重叠的部分所占比例具有一个下界，记为 $b(\lambda)$。在 Θ_0 上，我们可以考虑其二倍，并作线性坐标变换，使该二倍集变为半径至多为 η的球。令 $\tilde{u}$ 表示通过等温坐标变换 F复合得到的调和函数。该函数满足

$$|\nabla \tilde{u}(F^{-1}(x))| \leq 2|\nabla u(x)|$$

因此可得 $E_{a-\log 2}(\tilde{u}) \supset F(E_a(u))$。对 DF 的特征值进行控制，说明我们仍有一个下界

$$\mathcal{H}^\delta(E_{a-\log 2}(\tilde{u})) \geq C\beta;$$

因此，根据定理 12，我们有

$$|\nabla \tilde{u}(x)| \leq Ce^{\gamma(-a+\log 2)}$$

对所有 $x \in B_{\eta/2}$ 均成立。我们将把 log 2 吸收到乘法常数 C 中。现在，$F^{-1}($ $B_{\eta/2})$ 对某个通用的 $c<1$ 覆盖了 $c\Theta_0$。因此，我们有

$$|\nabla u(x)| \leq C'e^{-\gamma a} \tag{68}$$

对所有 $x \in c\Theta_0$ 均成立。我们可以将这一论证逐步延伸，从而得到同一不等式在整个 Θ_0 上都成立，只是 C'、γ 的取值会变差。

现在，考虑每个 $\Theta_{1,}{}_j\mathrm{s}$ 的双重。我们得到，对于一个 δ-豪斯多夫内容下界为 $C(\lambda)$ 的集合中的所有 x，式 (68) 都成立。这是因为我们确保了各个椭球形圆盘之间的重叠有一个下界。我们可以使用与 Θ_0 相同的论证来传播小量性，但常数中会增加依赖于 λ 的因子。将此

论证迭代进行即可完成证明，因为将原始半径为 $1/2$ 的圆盘覆盖所需的步数也受 λ 控制。□

我们还可以将关于频率超水平集的体积估计推广到 Lipschitz 流形的情形。

定理 1 的证明。与之前定理 2 的证明一样，我们可以用椭圆圆盘覆盖半球，使其长轴长度至多为 $\eta(2\lambda)^{-1}$，并且将每个椭圆中心处的度量张量变为单位张量的线性坐标变换，会把相应的边界椭圆映射到半径为 $\eta/2$ 的圆。由频率函数的近似单调性，这些较小区域上的频率至多为 $C\Lambda$。应用拟共形映射后，我们得到新坐标下的函数 $\tilde{u}$ 是调和的，且频率至多为 $C\Lambda$。定理 1 的调和情形蕴含了

$$\mathrm{Vol}(\{z : N_{\tilde{u}}(z,r) > 1\} \cap B_{\eta/2}(0)) \leq C\Lambda^2 r^2 \tag{69}$$

应用拟共形映射的逆映射会使该体积产生有界常数倍的畸变；通过将定理 1 的陈述中的常数 c 取得足够小，我们可以保证其像覆盖椭球圆盘中的 $\{z\colon N(z,r) > c\}$。对每个这样的椭球圆盘重复此论证并将体积贡献相加，即完成证明。□

8. More General Elliptic Equations with Lipschitz Coefficients

本节中，我们将频率超水平集大小的估计推广到更一般的椭圆方程，代价是界略微变差。考虑算子

$$Lu := \mathrm{div}(A\nabla u) + \tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla u, \tag{70}$$

其中 A 具有一致椭圆性，椭圆常数为 λ，且其系数为 Lipschitz 连续，常数为$\tilde{}$，同样由 λ 控制。我们假设 b 的分量有界且可测，其大小由 λ控制。关键在于，对于 $Lu = 0$的解，梯度模的对数将满足一个椭圆方程，我们将利用 [Ale87], [Ale88], 和 [Zhu23a]中提出的若干结果。由于我们处于二维情形，因此可以像之前一样在局部使用等温坐标，此时方程具有以下形式

$$\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0, \tag{71}$$

在某个区域上，我们不失一般性地取该区域为一个小的欧氏球 $B_\kappa(0)$，而 b 仍具有有界、可测的分量。按照[Ale87], 的工作，若令 $\phi = \log|\nabla u|^2$，则 ϕ 在临界集之外是下列方程的弱解：

$$\Delta\phi = -\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{b}\cdot\nabla u}{|\nabla u|^2}\nabla u\right) \tag{72}$$

为方便读者，我们在附录中给出（71）在这一简化情形下的计算，其中算子是带有有界漂移项的欧氏算子。

命题 14. 设 u 是（71）的解。那么在 $B_\kappa(0) \setminus \mathcal{C}(u)$ 上，我们有，$\phi = \log|\nabla u|^2$ 是（72）的弱解

证明。详见附录。 □

与调和情形一样，我们希望将梯度分解为一个处处不为零的分量和一个可以分别进行分析的多项式分量。将临界集中的点记为 z_1、.....、 z_N，当存在重数时按需要重复记录。根据 [Zhu23a], 的工作，我们有 $N \leq C\Lambda$。我们写成

$$e^{\phi(z)} = |\nabla u(z)|^2 = \prod_{j=1}^{N} |z - z_j|^2 e^{\psi(z)} := P(z)e^{\psi(z)}$$

其中 ψ 是有界函数，我们用 P 表示分解中的多项式。现在，我们针对当前情形重新表述一个下界。

命题 15（ [Ale88]中的注 3）。在本节的假设下，对于某个普适的 $C > 0$ 以及单位圆盘中的所有 z，都有 $|\psi(z)| \leq C\Lambda$。

根据 [Ale87], 中的引理 2.2 和 2.3，我们知道 ψ 在整个区域内满足偏微分方程（72），而不仅仅是在临界集之外满足。根据 Calder´on-Zygmund 理论，我们得到估计

$$\|\nabla\psi\|_{BMO(B_{\kappa/2}(0))} \leq C(\|\psi\|_{L^\infty(B_\kappa(0))} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(B_\kappa(0))}). \tag{73}$$

事实上，这由表示公式可得

$$\psi(x) = \int_{\partial B_\kappa(0)} K_\kappa(x,y)\psi(y)\, dS(y) + \int_{B_\kappa(0)} \nabla_y G(x,y) \cdot \nabla u(y) \frac{\mathbf{b}(y) \cdot \nabla u(y)}{|\nabla u(y)|^2}\, dy$$
$$- \int_{\partial B_{\kappa(0)}} G(x,y) \frac{\mathbf{b}(y) \cdot \nabla u(y)}{|\nabla u(y)|^2} \partial_\nu u(y)\, dS(y) = (I) + (II) + (III)$$

其中， K_κ 是半径为 κ 的球的泊松核， $G(x,y) = \log |x-y|$是格林函数。对 x 取梯度时，对于 $x \in B_{\kappa/2}(0)$，(I)项和 (III)项有界，而项 (II)可识别为一个向量值 Calder´on-Zygmund 算子，已知该算子可将 L^∞ 连续地映射到 BMO。在我们的假设下，这特别意味着

$$\|\nabla\psi\|_{BMO(B_{\kappa/2}(0))} \leq C\Lambda + C', \tag{74}$$

并且通过假设 Λ 足够大，我们可以吸收 C'。有了这一替代性的利普希茨控制，我们现在可以证明，在小于 $1/\Lambda^{1+\epsilon}$的尺度上， e^ψ 的频率非常小。

命题 16。令 e^ψ 如上定义，并假设 Λ 足够大。对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个常数 c_ϵ，使得如果 $r < c_\epsilon/\Lambda^{1+\epsilon}$，那么

$$N_{\exp(\psi)}(x,r) \leq \frac{3}{4}$$

在 x 中一致成立。

证明。我们考虑 L^2 倍增指标，即

$$N(x,r) = \log_2 \left(\frac{⨍_{B_{2r}(x)} \exp(-2\psi(y))\, dy}{⨍_{B_r(x)} \exp(-2\psi(y))\, dy} \right) := \log_2 \left(⨍_{B_{2r}(x)} \exp(-2\psi(y) + 2\psi(y_0)) \right)$$

其中， y_0 是 $B_r(x)$中分母里的平均值达到的一个点。定义 $g_{y_0}(y) = \int_0^1 \nabla\psi((1-t)y_0 + ty)$，使得根据微积分基本定理， $g_{y_0}(y) \cdot (y - y_0) = \psi(y) - \psi(y_0)$。由有界平均振荡的尺度不变性可知，

$$\|g_{y_0}\|_{BMO} \leq C\|\nabla\psi\|_{BMO}. \tag{75}$$

我们将使用记号 $\langle f \rangle_U$ 表示函数（可以是向量值函数）在开集 U 上的平均值。因此，我们改写为

$$N(x,r) = \log_2 \left(\fint_{B_{2r}(x)} e^{[g_{y_0}(y) - \langle g_{y_0} \rangle_{B_{2r}(x)}] \cdot (y-y_0)} e^{\langle g_{y_0} \rangle_{B_{2r}(x)} \cdot (y-y_0)} \right). \tag{76}$$

<escape>我们将首先对 L^∞ 范数进行估计，其中涉及第二因子。回忆一下，$\|\nabla \psi\|_{L^p(B_1(0))}$</escape> $\leq C_p \Lambda$ 对所有 $1 \leq p < \infty$均成立。因此，我们有在人线

$$\frac{1}{Cr^2} \int_{B_r(x)} |\nabla \psi(y)|^2 \, dy \leq c \frac{1}{r^2} \|\nabla \psi\|_{L^p} r^{2/p'} \leq C_p \Lambda r^{2(1/p'-1)}.$$

我们可以将 $p = p(\epsilon)$ 取得足够大，使指数小于任意 $\epsilon > 0$。因此，我们有盈彩票

$$|\langle g_{y_0} \rangle_{B_{2r}(x)} \cdot (y - y_0)| \leq C_\epsilon \Lambda r^{1-\epsilon}.$$

现在，我们估计（76）式中第一个因子的 L^1 范数。我们将利用约翰–尼伦伯格不等式的以下推论。

$$\frac{1}{|B|} \int_B \exp(\gamma |f(x) - \langle f \rangle_B| / \|f\|_{BMO}) \, dx \leq 1 + \frac{4e^2 \gamma}{1 - 4e\gamma},$$

当 $\gamma < (4e)^{-1}$ 时成立，参见例如 [Gra09，推论 3.1。7] 其中给出了对立方体上的平均值的这一结果（对球的表述可用类似方法证明）。在我们的设定中，这意味着

$$\fint_{B_{2r}(x)} \exp(|g_{y_0} - \langle g_{y_0} \rangle_{B_{2r}(x)}| \cdot |y - y_0|) \, dy \leq 1 + \frac{8e^2 r \|g_{y_0}\|_{BMO}}{1 - 8re\|g_{y_0}\|_{BMO}}.$$

我们可以将此结果与估计（75）以及对 $\nabla \psi$ 的 L^∞ 归一化结合起来。因此，若选择 $r < c_\epsilon \Lambda^{-1-\epsilon}$，便可得到 $N(x,r) \leq 1/2 + 1/\Lambda$，如所需。

□

对于多项式部分，我们可以重用命题 6。现在可以估计频率的超水平集的大小。证明只需在调和情形的论证基础上重复推导，并采用命题 16 中给出的关于非消失部分的稍弱界。因此，对每个 $\epsilon > 0$，在单个等温坐标片中都有如下近似二次界：

$$\mathrm{Vol}(\{z : N(z,r) > c\} \cap B_{\kappa/2}(0)) \leq C_\epsilon \Lambda^{2+\epsilon} r^2.$$

用相互重叠的等温坐标片覆盖原始区域的内部，即可将该界推广到原始区域内部。因此，我们得到如下推广结果。

定理 17。设 u 是满足 $\mathrm{div}(A\nabla u) + \mathrm{b} \cdot \nabla u = 0$ 的解，定义在半径为 4 的欧几里得圆盘上。假设其频率满足 $N_u(0,1) \leq \Lambda$。那么，对每个 $\epsilon > 0$，都存在一个常数 C_ϵ，使得有如下体积估计

$$Vol(\{z : N(z,r) > c\} \cap B_{1/2}(0)) \leq C_\epsilon \Lambda^{2+\epsilon} r^2, \tag{77}$$

其中，C_ϵ 仅取决于 A 的利普希茨常数、b 和 A 的椭圆性常数。

Appendix: Proof of Proposition 14

为方便起见，我们在具有额外正则性的情形下证明这一点，此时我们验证它是一个强解；但在验证弱解的结果时，论证也类似。令 $v = |\nabla u|^2$。我们从计算开始。

$$\begin{aligned}\Delta(\log v) &= \frac{1}{v^2}\mathrm{div}(2D^2u\nabla u) + 2D^2u\nabla u\cdot\nabla(v^{-1})\\ &= \frac{2}{v}(|D^2u|^2 + \nabla u\cdot\nabla(\Delta u)) - 4D^2u\nabla u\cdot\frac{D^2u\nabla u}{v^2}\end{aligned}$$

我们的目标是证明这等于 $-$散度 $\left(\frac{\mathbf{b}\cdot\nabla u}{|\nabla u|^2}\right)$，我们可以将其改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\frac{\Delta u}{v^2}\right) &= 2\nabla\left(\frac{\Delta u}{v}\right)\cdot\nabla u + 2\frac{(\Delta u)^2}{v}\\ &= \frac{2}{v}\nabla(\Delta u)\cdot\nabla u - 4\Delta u\frac{(D^2u\nabla u)\cdot\nabla u}{v^2} + 2\frac{(\Delta u)^2}{v}\end{aligned}$$

我们注意到 $\frac{2}{v}\nabla u\cdot\nabla(\Delta u)$ 中的公项，因此只需验证其余各项相等即可。为方便起见，我们考虑乘以 v^2 后的相关量。此时，等式将取决于我们处于二维这一事实，因此我们用偏导数展开，并将它们记为u_x、 u_y、 u_{xx}、 u_{xy}、 u_{yy}。我们要验证的等式是

$$2v|D^2u|^2 - 4|D^2u\nabla u|^2 = -4\Delta u(D^2u\nabla u)\cdot\nabla u + 2v(\Delta u)^2 \tag{78}$$

(78) 式左侧可展开为

$$2(u_x^2+u_y^2)(u_{xx}^2+2u_{xy}^2+u_{yy}^2)-4(u_{xx}u_x+u_{xy}u_y)^2-4(u_{xy}u_x+u_{yy}u_y)^2 = (I)+(II)+(III)$$

（78）式的右侧可展开为

$$-4(u_{xx}+u_{yy})(u_{xx}u_x^2+2u_{xy}u_xu_y+u_{yy}u_y^2)+2(u_x^2+u_y^2)(u_{xx}+u_{yy})^2 = (IV)+(V)$$

注意到（V）$-$（I）$=4$（$u_x^2+u_y^2$）（$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2$）。我们可以合并

$$\begin{aligned}(II)+(III) &= -4(u_{xx}^2u_x^2+2u_{xx}u_{xy}u_xu_y+u_{xy}^2u_y^2+u_{xy}^2u_x^2+2u_{yy}u_{xy}u_xu_y+u_{yy}^2u_y^2)\\ &= -4(u_{xx}^2u_x^2+2u_{xx}u_{xy}u_xu_y+2u_{yy}u_{xy}u_xu_y+u_{yy}^2u_y^2)-4(u_x^2+u_y^2)u_{xy}^2\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}(IV)+((V)-(I)) = -4(&u_{xx}^2u_x^2+2u_{xx}u_{xy}u_xu_y+u_{xx}u_{yy}u_y^2\\ &+u_{xx}u_{yy}u_x^2+2u_{yy}u_{xy}u_xu_y+u_{yy}^2u_y^2)\\ &+4(u_x^2+u_y^2)u_{xx}u_{yy}-4(u_x^2+u_y^2)u_{xy}^2\end{aligned}$$

此时，很容易验证（II）$+$（III）中的各项与（IV）$+$（V）$-$（I）中的各项一致，从而完成证明。

References

[AIM09] Kari Astala、Tadeusz Iwaniec 和 Gaven Martin. *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane* 48 *Princeton Mathematical Series* ，体积。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。[Ale87] Giovanni Alessandrini。二维椭圆方程解的临界点。*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*，14(2):229–256，1987年。[Ale88] Giovanni Alessandrini。平面上椭圆方程解的等值线长度。 *Arch. Rational Mech. Anal.*，102(2):183–191，1988年。

[Car28] 亨利·嘉当。关于具有线性稀疏变量的全纯函数系及其应用。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 45:255–346，1928年。[Che55] 陈省身。曲面上等温参数存在性的一种初等证明。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，6:771–782，1955年。[CNV15] Jeff Cheeger、Aaron Naber 和 Daniele Valtorta。椭圆方程的临界集。*Comm. Pure Appl. Math.*，68(2):173–209，2015年。[GL86] Nicola Garofalo 和林芳华。变分积分的单调性、 A_p 权与唯一延拓。 *Indiana Univ. Math. J.*，35(2):245–268，1986年。[GL87] Nicola Garofalo 和林芳华。椭圆算子的唯一延拓：一种几何变分方法。 *Comm. Pure Appl. Math.*，40(3):347–366，1987年。[Gra09] Loukas Grafakos。 *Modern Fourier analysis* 250 *Graduate Texts in Mathe-* ，卷。施普林格出版社，纽约，第二版，。[Gra14] Loukas Grafakos。 2009 *matics* *Classical Fourier analysis* 249 *Graduate Texts in Mathe-* ，卷。施普林格出版社，纽约，第三版，。[Han94] 韩庆。椭圆方程解的奇异集。 *Indiana Univ. Math. J.*，43 3 983 1002，1994年 ( ): – 。[Han07] 韩庆。调和函数的节点集。 *Pure Appl. Math. Q.*，3(3，特刊：纪念 Leon Simon。第2部分):647–688，2007年。[HL11] 韩庆和林芳华。 2014 *Elliptic partial differential equations* 1 *Courant* ，卷。库朗数学科学研究所，纽约；美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第二版，2011年。[KZ22] Carlos Kenig 和 Zihui Zhao。 C^1-Dini 域上的边界唯一延拓与奇异集的大小。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，245(1):1–88，2022年。[Lin91] 林芳华。椭圆方程与抛物方程解的节点集。 *Comm. Pure* ，( ): – 。[*Appl. Math.* 44 3 287 308, 1991 LM18] Alexander Logunov 和 Eugenia Malinnikova。椭圆方程解的小性定量传播。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. III. Invited lectures*，第2391–2411页。World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2018年。[LM20] Alexander Logunov 和 Eugenia Malinnikova。二阶椭圆方程解的定量唯一延拓讲义。载于 *Harmonic analysis and applications* 27 *IAS/Park City Math. Ser.* 1 33 ，卷，第–页。美国数学会，[普罗维登斯], 罗得岛州， [2020] ©2020。[Log18] Alexander Logunov。拉普拉斯特征函数的节点集：Nadirashvili 猜想的证明及丘成桐猜想下界的证明。 *Ann. of Math. (2)*，187 262，2018 1 241( ): – 。[Mal04] Eugenia Malinnikova。广义柯西–黎曼系统解的小性传播。 *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*，47(1):191–204，2004年。[NV17] Aaron Naber 和 Daniele Valtorta。椭圆型偏微分方程解的临界集体积估计。 *Comm. Pure Appl. Math.*，70(10):1835–1897，2017年。[Tol23] Xavier Tolsa。 C^1 域及小常数利普希茨域中调和函数的边界唯一延拓。 *Comm. Pure Appl. Math.*，76(2):305–336，2023年。[Zhu23a] Jiuyi Zhu。平面上椭圆方程解的临界集上界。*Vietnam J. Math.*，51(4):799–810，2023年。[Zhu23b] Yuzhe Zhu。关于平面上椭圆方程解的小性传播的若干说明。arXiv 2304.09800，2023年。*Email address*: bfost@stanford.edu