arXiv:2304.11348v1 [math.MG] 22 Apr 2023

有界压缩映射的刻画

LORENZO DELLO SCHIAVO

摘要。证明了度量测度空间之间的可测映射具有有界压缩，当且仅当其通过测度代数函子得到的像关于测度代数距离是 Lipschitz 连续的。这为通过测度代数函子自然解释有界压缩/有界形变映射提供了依据，并印证了如下断言：有界形变映射是完备且可分的度量测度空间这一范畴的自然态射类。

1. 引言

设 $\varphi\colon (X_1,\ \Sigma_1,\ \mu_1) \to (X_2,\ \Sigma_2,\ \mu_2)$ 是两个测度空间之间的可测映射，并记 $\varphi_\sharp\mu_1 \coloneqq \mu_1 \circ \varphi^{-1}$ 为 μ_1 通过 φ 的推前测度。若 φ 满足逆零保持，则称其为

$$\varphi_\sharp\mu_1 \ll \mu_2\,,$$

并且，若存在常数 $C = C_\varphi \in (0,\ \infty)$ 使得，则称 φ 具有有界压缩

$$\varphi_\sharp\mu_1 \leq C\mu_2 \quad \text{on} \quad \Sigma_2\,.$$

我们将这样的最小常数称为 φ 的压缩。有界压缩映射——这种一般性下最早由 N. Gigli 在 [3] 中研究——已在度量测度空间分析中得到广泛应用，并在若干重要定义中发挥关键作用。特别是，它们是度量测度空间 [1], 上实值函数的最小弱上梯度以及赋范模的拉回定义的基础， [3], 另请参见 [4,第 3] 章。

然而，尽管有界压缩映射具有重要意义，但作为一种独立的测度论构造，即在不涉及距离的情况下，这类映射似乎尚未得到充分研究。在本文中，我们通过揭示测度代数范畴中有界压缩这一概念的含义、重要性及其自然性，填补了这一研究空白。我们的主要结果可以非正式地表述如下：

定理。一个映射具有有界压缩，当且仅当它经由测度代数函子的像关于测度代数距离是利普希茨连续的。

因此，有界压缩映射在测度代数范畴中的重要性，是测度代数函子（按非技术意义上的）自然性的结果。

关键词和短语。有界压缩映射；有界压缩映射；测度代数。作者衷心感谢奥地利科学基金（FWF）通过 ESPRIT208 项目资助其现任职位。他感谢 Enrico Pasqualetto 指出了一些有关有界压缩映射的参考文献。

现在让我们按照 [2, 第三卷]回顾必要的定义。

1.1. **一些范畴**。 我们称 C 为一个对象为 $\mathscr{O}$ 的 范畴，如果 C 的对象 ob(C) 与 $\mathscr{O}$ 一致，而 C 的态射 hom(C) 尚未指定。令

- USp 表示一致空间与一致连续映射所构成的范畴；
- Met 表示完备可分度量空间范畴，其中所有一致连续映射 均作为态射；
- Met_b 表示由完备可分度量空间构成的范畴，其中所有利普希茨连续映射 均作为态射；
- Met_1 表示由所有短[1]映射 作为态射构成的完备可分度量空间范畴；
- Meas 是一个由三元组 $\mathbb{X} := (X, \Sigma, \mu)$ 构成的范畴，其中 (X, Σ) 是一个标准博雷尔空间，且 μ 是 (X, Σ) 上的一个 σ-有限测度，态射为 $\mathscr{A} := \mathrm{hom}(\mathrm{Meas})$。我们要求每个 $\varphi \in \mathrm{hom}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ 都是一个可测映射 $\varphi\colon X_1 \to X_2$。我们用 $\mathscr{A}_{\mathrm{inp}}$ 表示 $\mathscr{A}$ 中由逆零保持映射构成的子类。

1.2. **测度代数**。 对于 $\mathbb{X} \in \mathrm{ob}(\mathrm{Meas})$，令 $(\mathfrak{A}, \bar{\mu})$ 为 (Σ, μ) 的测度代数，即 Σ 中集合模去 μ-零测集后所得等价类构成的布尔代数，并赋予商测度泛函 $\bar{\mu}$，例如 [2, 321H-I]。在不会引起混淆的情况下，我们省略记号中的 $\bar{\mu}$，仅用 $\mathfrak{A}$ 表示 $\mathbb{X}$ 的测度代数。总是可以在 $\mathfrak{A}$ 上赋予一个由伪度量 $\mathscr{U}$ 生成的一致性，从而使其成为一个一致空间，并且标准的布尔代数运算是一致连续的，例如 [2, 323A(b), 323B]。（关于一致空间和一致性，参见例如 [2, 3A4]。）

现在考虑一个态射 $\varphi \in \mathrm{hom}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$。我们用 $\varphi \in \mathrm{hom}^{\mathrm{inp}}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ 表示它还具有逆零保持性。在这种情况下，映射 φ 可下降为一个布尔同态 $\varphi^\bullet\colon \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1$，例如由 [2, 324B], 定义的映射。

$$\varphi^\bullet\colon [A]_2 \mapsto \left[\varphi^{-1}(A)\right]_1 . \tag{1.1}$$

在下一条命题中，我们总结了 Meas 上几乎广为人知的测度代数函子 Alg 的构造，该构造由定义。

$$\mathsf{Alg}\colon \mathbb{X} \longmapsto (\mathfrak{A}, \mathscr{U}) \qquad \text{and} \qquad \mathsf{Alg}\colon \varphi \longmapsto \varphi^\bullet .$$

命题1。 以下断言等价：

(i) Meas 中的每个态射都是逆零保持的（即 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\mathrm{inp}}$）；$(ii)$ Alg 是一个以 Meas 为定义域、以 USp为值域的（逆变）函子。

注记 2. 命题1中的断言是非定量的，事实上可以在完全不涉及测度的情况下重新表述。确实，我们也可以将其表述为一个对象为 $(X, \Sigma, \mathcal{N})$ 的范畴，其中 (X, Σ) 是一个标准博雷尔空间，而 $\mathcal{N}$ 是 Σ 的一个 σ-理想——它扮演着 μ-零测集的 σ-理想 $\mathcal{N}_\mu$ 的角色，这些零测集是 (X, Σ) 上具有 σ-有限测度 μ 的测度空间中的零测集。这也解释了我们为何选择逆零保持 映射这一术语，因为 $\varphi\colon \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ 是逆零保持的，当且仅当 $\varphi^{-1}(\mathcal{N}_2) \subset \mathcal{N}_1$。

在 Meas 的对象上附加一致结构这一额外数据后，命题 1 可用于通过 Alg 和到 USp 的遗忘函子来刻画一致连续的逆零理想保持映射。事实上，令 UMeas 为一个完备的范畴。

[1]如果一个映射是利普希茨连续的，且其 Lipschitz 常数小于 1，我们就称该映射为短映射。

及带有 σ-有限 Borel 测度 μ 的可分一致空间 $(X, \mathscr{U})$，并用 f 表示定义在 UMeas 上的映射，它在对象上的定义为 $\mathsf{f}: (X, \mathscr{U}, \mu) \to (X, \mathscr{U}) \in \mathsf{ob(USp)}$，并保持态射。那么，

推论 3。以下断言等价：

(i) UMeas 的每个态射都一致连续且逆零保持；(ii) Alg 和f 是从UMeas 到USp的函子。

1.3. **主要结果**。借助有界压缩映射，我们现在转向命题1的定量版本。令 $\mathfrak{A}$ 为 $\mathbb{X} \in \mathsf{ob(Meas)}$ 的测度代数。记 $\mathfrak{A}^{\mathrm{fin}}$ 为 $\mathfrak{A}$中由具有有限 $\bar{\mu}$-测度的元素组成的理想，并注意到该量量

$$\rho(a, b) \coloneqq \bar{\mu}(a \triangle b)\,, \qquad a, b \in \mathfrak{A}\,,$$

在 $\mathfrak{A}^{\mathrm{fin}}$ 上定义一个距离 ρ，例如 [2, 323A(e)]。

为了陈述我们的主要结果，我们在 Meas 上定义一个映射 alg，定义如下：

$$\mathsf{alg}: \mathbb{X} \longmapsto (\mathfrak{A}^{\mathrm{fin}}, \rho) \qquad \text{and} \qquad \mathsf{alg}: \varphi \longmapsto \varphi^{\bullet}\,.$$

定理 4。以下断言等价：

(i) 每个 Meas 的态射都具有有界压缩；(ii) Alg 是一个从 Meas 到 Met_b 的函子。

1.4. **度量测度空间的自然态射选择**。在 J.R. Isbell [5], 之后，度量空间范畴通常定义为以所有短映射作为态射（从而得到 §1.1 中的 Met_1 ）。这本质上等同于选择所有利普希茨连续映射作为态射（从而得到 Met_b），因为可以通过线性缩放距离将任意利普希茨连续映射变为短映射，而这种缩放具有良好的范畴性质。偶尔也会选择更大的统一连续映射类作为度量空间范畴的态射类（从而得到 Met），因为在讨论诸如完备性的保持时，一致连续性是最低要求。通过引入一些附加结构，可以消除度量测度空间范畴中态射选择的这种歧义。下文将证明，当每个 $(X,\ \mathsf{d}) \in \mathsf{ob(Met}_b\mathsf{)}$（这与 ob(Met) 和 $\mathsf{ob(Met}_1\mathsf{)}$ 相同）进一步赋予一个 σ-有限 Borel 测度时，所得范畴的态射存在一种自然选择，即所有具有有界压缩的利普希茨连续映射。

事实上，设 MetMeas 是一个由三元组 $\mathbb{X} \coloneqq (X, \mathsf{d}\ \mu)$ 构成的范畴，其中 (X, d) 是完备且可分的度量空间，μ 是定义在 (X, d) 上的一个 σ-有限博雷尔测度，而态射 $\mathscr{B} \coloneqq \mathsf{hom(MetMeas)}$ 满足 $\varphi \in \mathsf{hom}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ 可测且逆零保持。记 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{X} \in \mathsf{ob(MetMeas)}$ 的博雷尔 σ-代数，并注意到 $(X, \mathcal{B})$ 是标准博雷尔空间，因为 (X, d) 完备且可分。因此，$\mathsf{g}: \mathbb{X} \mapsto (X, \mathcal{B}, \mu)$ 将 ob(MetMeas) 映到 $\to \mathsf{ob(Meas)}$，并允许我们将 $\mathscr{B}$ 中的态射视为 Meas 中对象之间的态射。在这一识别下，我们因而可以比较 MetMeas 中的态射 $\mathscr{B}$ 与 Meas 中的态射 $\mathscr{A}$。若 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$，则 g 是一个（遗忘）函子 MetMeas $\to$ Meas，并且还是本质满的，因为按照标准博雷尔空间的定义，并遗忘 X 上距离 d 的赋值，每个 $(X, \Sigma, \mu) \in \mathsf{ob(Meas)}$ 都可看作由某个对象 $(X, \mathsf{d}\ \mu)$ 关联得到的标准博雷尔 σ-有限测度空间。因此，若 $\mathscr{B} = \mathscr{A}$，函子 g 就是范畴等价。接下来，我们将

因此——不失一般性地——处理一个具有与 Meas 相同态射 $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ 的范畴 MetMeas。

现在记遗忘函子 \(f\)，它将 MetMeas 映射到度量空间范畴，并将 $\mathbb{X}$ 映射为 (X, d)，同时保持态射不变。显然，\(f : ob(MetMeas) $\to$ ob(Met_b)\)，且 \(f : $\mathscr{A} \to$ hom(Met_b)\) 当且仅当 $\mathscr{A}$ 由利普希茨连续映射构成。根据 [3, Dfn. 2.4.1], ，我们称映射 $\varphi\colon \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ 具有 有界形变，如果它既是利普希茨映射，又具有有界压缩。同样，鉴于 MetMeas 与 Meas 的等价性，我们不妨将 alg 也视为 MetMeas 上的映射。因此，我们还有：

推论5. 以下断言等价：

(i) MetMeas 中的每个态射都具有有界形变；(ii) Alg 是 MetMeas 上的一个函子，并且 f 和 Alg 的取值均属于 Met_b。

我们注意到，$\varphi \in \mathscr{A}$ 具有有界压缩与 φ 满足 Lipschitz 条件相互冲突。例如，常值映射 x “尽可能地 Lipschitz”（因为它的 Lipschitz 常数为零），但其压缩却“无界到极致”（因为 $x_\sharp\mu = (\mu X)\delta_x$ 是狄拉克质量的倍数）。更准确地说——正如我们将在定理 4 的证明中展示的——映射 $\varphi\colon (X_1, \mu_1) \to (X_2, \mu_2)$ 具有压缩 C，当且仅当 $\varphi^\bullet\colon (\mathfrak{A}_2, \bar{\mu}_2) \to (\mathfrak{A}_1, \bar{\mu}_1)$ 是 C-Lipschitz 的。因此，上述冲突源于 f 是协变的，而 alg 是逆变的。

通俗地说，推论5通过指出：当范畴 MetMeas 可经由函子 alg 理解为 Met_b 的子范畴时，所有映射都具有有界压缩，从而解决了满足利普希茨连续条件与具有有界压缩之间的冲突。因此，有界形变映射是对象为 ob(MetMeas) 的范畴中一类自然的态射。

2. 证明

<escape>命题*1*的证明。$(ii) \implies (i)$ 只需注意，根据 [2, 324B], 布尔同态 $\mathrm{Alg}(\varphi) := \varphi^\bullet$ 有定义（当且仅当）φ 是逆零保持的。</escape>

$(i) \implies (ii)$ 如上所述，Alg : ob(Meas) $\to$ ob(USp)。因此，由于 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\mathrm{inp}}$根据假设成立，根据 [2, 324C(c)，324D]，Alg 是 Meas 上的一个函子。剩下需要证明的是 Alg : $\mathscr{A}_{\mathrm{inp}} \to$ hom(USp)，即对于每个 $\varphi \in \hom^{\mathrm{inp}}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$，$\varphi^\bullet\colon \mathscr{A}_2 \to \mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{U}_2/\mathscr{U}_1$-一致连续的。为此，我们作如下论证。由于每个 $\mathbb{X} \in$ob(Meas) 都是一个 σ-有限标准博雷尔空间，其测度代数满足可数链条件 [2, 316A]，这是通过结合 [2, 322 B(c) 和 322G] 得出的。鉴于可数链条件，根据 [2, 316F(d)], ，布尔同态在 $\mathfrak{A}$ 上的序列序连续性与其序连续性相一致；进而，根据 [2, 324F(a)]，也与其一致连续性相一致。因此，只需证明 $\varphi^\bullet$ 是序列序连续的，这一点将在 [2, 324B] 中证明。■

定理 *4* 的证明。我们证明，alg : ob(Meas) $\to$ ob(Met_b) 且 alg: $\mathscr{A} \to$hom(Met_b)，当且仅当每个 $\varphi \in \mathscr{A}$ 都具有有界压缩。

$(i) \implies (ii)$。对于每个 $\mathbb{X} \in$ ob(Meas)，代数 $(\mathfrak{A}^{\mathrm{fin}}, \rho)$ 由 [2, 323X(g)] 是一个完备度量空间。注意，由于 μ 是标准博雷尔空间上的 σ-有限测度，$L^1(\mu)$ 是可分的，例如 [2, 365 X(p)]。同样由 [2, 323X(g)], ，由 $\chi([A]) = [\mathbf{1}_A]_\mu$ 定义的映射 $\chi\colon \mathfrak{A}^{\mathrm{fin}} \to L^0(\mu)$ 是从 $(\mathfrak{A}^{\mathrm{fin}}, \rho)$ 到 $L^1(\mu)$ 的等距映射。因此，$(\mathfrak{A}^{\mathrm{fin}}, \rho)$ 是可分的，因为它与可分度量空间 $L^1(\mu)$ 的一个子集等距。由此可知，对于每个 $\mathbb{X} \in$ ob(Meas)，$\mathrm{alg}(\mathbb{X}) = (\mathfrak{A}^{\mathrm{fin}}, \rho) \in$ ob(Met_b)。

现在，令 $\varphi\colon \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ 具有压缩 C。那么，对所有 $A \in \Sigma_2$,

$$\bar{\mu}_1 \varphi^\bullet [A]_2 = (\mu \circ \varphi^{-1})A = \varphi_\sharp \mu_1 A \leq C\mu_2 A = C\bar{\mu}_2 [A]_2 ,$$

这表明 $\varphi^\bullet(\mathfrak{A}_2^{\mathrm{fin}}) \subset \mathfrak{A}_1^{\mathrm{fin}}$，即 $\mathsf{alg}(\varphi)\colon \mathfrak{A}_2^{\mathrm{fin}} \to \mathfrak{A}_1^{\mathrm{fin}}$ 是一个定义在正确对象之间的映射。此外，对于所有 $A,\ B \in \Sigma_2$,

$$\begin{aligned}\rho_1\big(\varphi^\bullet [A]_2 , \varphi^\bullet [B]_2\big) &= \bar{\mu}_1\big(\varphi^\bullet [A]_2 \triangle \varphi^\bullet [B]_2\big) = \mu_1\big(\varphi^{-1}(A) \triangle \varphi^{-1}(B)\big) = \varphi_\sharp \mu_1 (A \triangle B) \\ &\leq C\mu_2(A \triangle B) = C\bar{\mu}_2([A]_2 \triangle [B]_2) = C\rho_2([A]_2 , [B]_2) .\end{aligned}$$

因此，除所有其他必要验证均显而易见外，alg 确实是一个 Met_b-值函子。

$(ii) \implies (i)$。令 $\varphi \in \mathscr{A}$。由于 alg 是一个从 $\mathsf{MetMeas}$ 到 Met_b 的函子，因此 $\varphi^\bullet \in \hom(\mathfrak{A}_2^{\mathrm{fin}}, \mathfrak{A}_1^{\mathrm{fin}})$ 是一个 ρ_2/ρ_1 Lipschitz 映射。令 C 为 $\varphi^\bullet$ 的 Lipschitz 常数。那么，对于所有 $A, B \in \Sigma_2$,

$$\begin{aligned}\varphi_\sharp \mu_1 (A \triangle B) = \mu_1\big(\varphi^{-1}(A) \triangle \varphi^{-1}(B)\big) &= \bar{\mu}_1\big(\varphi^\bullet [A]_2 \triangle \varphi^\bullet [B]_2\big) = \rho_1\big(\varphi^\bullet [A]_2 , \varphi^\bullet [B]_2\big) \\ &\leq C\rho_2([A]_2 , [B]_2) = C\bar{\mu}_2([A]_2 \triangle [B]_2) = C\mu_2(A \triangle B) ,\end{aligned}$$

而选择 $B = \varnothing$ （即 $A \triangle B = A$）表明 φ 具有压缩 C。 ■

参考文献

[1] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré。《度量测度空间中的微积分与热流，以及其在具有下界 Ricci 界的空间中的应用》。*Invent. Math.*，395:289–391，2014。doi:10.1007/s00222-013-0456-1。[2] D. H. Fremlin。《测度论——第一至第四卷，第五卷第一、二部分》。Torres Fremlin（编），2000–2008。[3] N. Gigli。《非光滑微分几何——一种针对 Ricci 曲率有下界的空间的方法》。*Mem. Am. Math. Soc.*，251(1196)，2018。doi:10.1090/memo/ 1196。[4] N. Gigli 和 E. Pasqualetto。《非光滑微分几何讲义》。Springer International Publishing，2020。doi:10.1007/978-3-030-38613-9。[5] J. R. Isbell。关于单射度量空间的六个定理。*Comment. Math. Helv.*，39:65–76，1964。

奥地利科学技术研究院，Am Campus 1，3400 Klosterneuburg，奥地利电子邮件地址：lorenzo.delloschiavo@ist.ac.at