arXiv:2304.11390v1 [physics.ed-ph] 22 Apr 2023

坡尔摆阻尼振荡的视频分析

IVANZ.STEFANOV[1],NIKOLAYDENEV[2],SAVA DONKOV[3]索非亚技术大学应用物理系，保加利亚索非亚市圣克利门特·奥赫里德斯基大道8号，邮编1000，电子邮箱：*izhivkov@tu-sofia.bg*[2]索非亚技术大学应用物理系，保加利亚索非亚市圣克利门特·奥赫里德斯基大道8号，邮编1000，电子邮箱：*ndenevtph@tu-sofia.bg*[3]保加利亚科学院天文研究所及国家天文台，保加利亚索非亚市察里格勒大道72号，邮编1784，电子邮箱：*sddonkov@astro.bas.bg*编译于*2023*年*4*月*25*日

本文指出了新冠疫情期间索非亚技术大学在物理学远程教学中引入实验练习视频录制后出现的问题。研究发现，与标准数据采集方式相比，“阻尼机械振荡”实验的视频提供了充足的信息，可对所研究的现象进行更细致、深入的分析。研究使用视频编辑器程序逐帧查看视频，并对录制的数据进行了统计处理——非线性回归。实验结果与理论函数进行了比较，该函数的参数通过上述处理进行优化。本文介绍了阻尼振荡的理论模型，并从理论上研究了阻尼系数与流经电磁制动器的电流之间的关系。

关键词：坡尔摆、阻尼振荡、磁制动器、非线性回归、COVID-19。

PACS：01.50.Fr, 01.50.Pa, 01.40.-d, 01.55.+b, 01.50.ht

1. 引言

新冠肺炎疫情给我们的生活带来了诸多变化和限制。这种情况不可避免地波及中等教育和高等教育领域。由于需要居家工作，Moodle、Discord、Microsoft Teams 等平台不得不被用于促进远程学习。同时，还必须采取其他措施，以提高这些条件下的教学质量。索非亚技术大学（TU - Sofia）应用数学与信息学学院应用物理系在疫情初期决定制作物理实验练习的视频演示

以及简要说明。这些视频供学生使用，以便他们更好地了解实验练习及所使用的设备。正如 [1–6], 中所示，例如，实验练习的视频分析近年来越来越受到欢迎。

后来我们发现，有些视频包含有关测量数据的详细信息。由此我们想到，可以利用其中一个练习的视频片段来改进该练习，借助一款专用程序采集实验室数据。这款程序是 Windows 10 内置的“视频编辑器”。借助它，可以逐帧查看视频，并记录随时间变化的过程数据。这里的时间步长为 0.033 s。我们研究的运动是阻尼振荡，周期约为 1.8 s。我们使用的视频片段时长为 4.5 s，即包含 2.5 个周期和约 130 帧的数据。大量数据使统计处理成为可能；在我们的案例中，我们采用非线性回归。

2. 实验装置

我们重点研究的实验名称是“阻尼机械振荡”。实验装置由 Leybold Didactic* 生产，是坡尔摆，如图 1 所示。此外，实验中还使用了若干 PHYWE 模块。

坡尔摆是一种扭摆，由连接在螺旋弹簧上的黄铜圆盘组成。当圆盘偏离平衡位置并释放后，会绕着一条穿过其中心的水平轴振荡。振荡受到阻尼，且阻尼因子可以调节。圆盘下部穿过电磁铁的磁极之间，在其中感应出涡流。涡流与电磁铁的磁场相互作用，从而对圆盘产生回复力矩；因此，该系统可作为增加阻尼系数的附加装置，即电磁制动器。通过改变流经电磁铁的电流，可以改变阻尼因子。为测量圆盘偏离平衡位置的程度，在圆盘上缘安装了一个指针。圆盘周围还同心地设置了一条带有相对刻度的金属条。实验开始时，将圆盘转动至指针指示所需的初始偏移量，然后按住圆盘，并在启动计时器的同时将其释放。圆盘进行阻尼振荡，即其最大偏移量（振幅）随时间按指数规律减小。该实验的标准方法是：从某一时刻的给定初始偏移量开始，在每个周期结束时测量摆的振荡振幅，然后绘制振幅随时间变化的曲线。

*PHYWE 也提供几乎完全相同的装置。

http://www.infim.ro/rrp 投稿至《罗马尼亚物理学报告》 国际标准连续出版物号：1221-1451

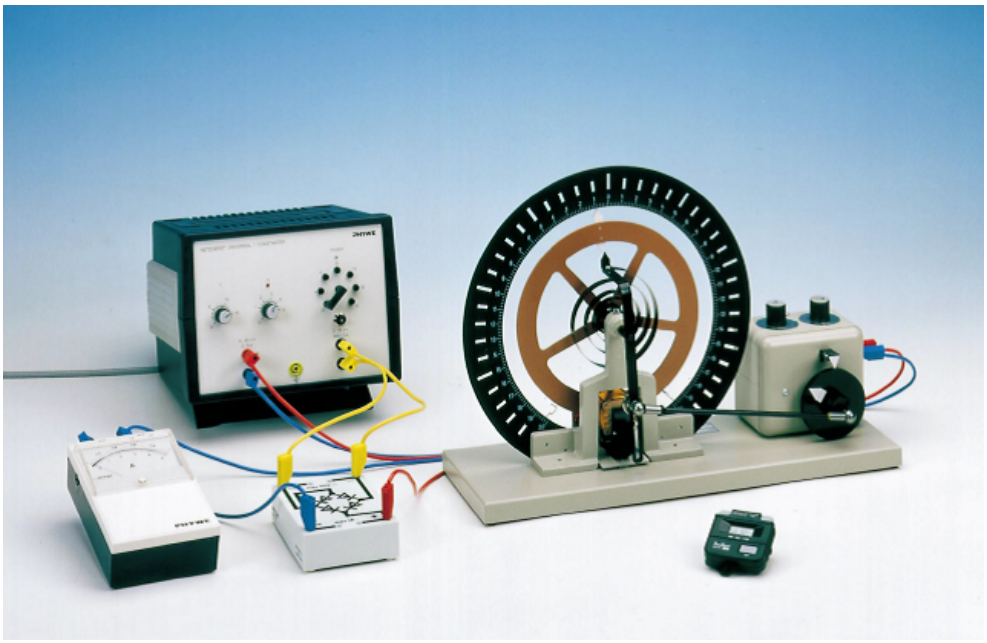


图1——实验装置照片。（取自 PHYWE 的原始说明手册 [7]。）

3. 模型

根据 [7] 以下微分方程描述坡尔摆的阻尼振荡

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \tag{1}$$

其中 φ 为角位移。决定运动的两个参数是固有角频率 ω_0^2 和阻尼常数 γ。前者表征无阻尼系统，其值由下式确定：

$$\omega_0^2 = \frac{D^0}{I},$$

其中， D^0 描述弹簧单位角度所产生的力矩， I 为圆盘的转动惯量。对于后一个参数，给出如下公式：

$$\gamma = \frac{C}{2I},$$

其中， C 是由涡流制动器产生的力矩 $M = -C\dot{\varphi}$ 方程中的比例因子（其中，$\dot{\varphi}$ 是摆的角速度）。正如 [7] 中所述，因子 C 取决于通过涡流制动器的电流 I_{B}。让我们评估一下这种依赖关系的具体表现。

我们知道，力矩 M 源于电磁铁的磁场与圆盘在电磁铁两极之间通过时由感应产生的涡流所形成的磁场之间的相互作用。让我们设想，在圆盘的体积元中（平行于圆盘表面流动）产生一个涡流，在该体积元穿过电磁铁磁场的瞬间。设该体积元的特征尺寸为 Δl。感应涡流可等效为一个磁偶极子，其磁偶极矩为 $m \sim I_{\mathrm{i}} S$，其中 I_{i} 是涡流的强度，$S \sim \Delta l^2$ 是该电流的面积。根据法拉第定律 $I_{\mathrm{i}} = -(1/r)\Delta\Phi_{\mathrm{B}}/\Delta t$，其中 r 是电流回路的电阻率，$\Delta\Phi_{\mathrm{B}} \sim BS$ 是穿过回路的磁通量变化（$B \sim I_{\mathrm{B}}$ 是电磁铁的磁场），而 $\Delta t \sim (\Delta l/R)\,\dot{\varphi}^{-1}$ 是与该过程相关的一小段时间（R 是所考虑体积元所在位置的半径）。从力学角度看，当磁偶极子越过电磁铁磁场 B 的边界时，力矩 M 源于其势能ΔU 的变化。因此有 $M \sim R\Delta U/\Delta l$，其中 $\Delta U/\Delta l$ 是势能梯度，且 $\Delta U \sim mB \sim I_{\mathrm{i}} SB$。最后，结合上述所有关系，可得:

$$M \sim R\frac{\Delta U}{\Delta l} \sim R\frac{I_{\mathrm{i}} SB}{\Delta l} \sim \frac{R}{r}\frac{S^2 B^2}{\Delta l \Delta t} \sim \frac{1}{r}\left(\frac{RS}{\Delta l}\right)^2 B^2\dot{\varphi} \sim I_{\mathrm{B}}^2\dot{\varphi}\,.$$

因此，我们得到阻尼指标 γ 与 I_{B}^2 成正比，误差范围为一个几何因子以及表征圆盘材料电学和磁学性质的常数。

方程 (1) 的解为 [7]

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha), \tag{2}$$

其中，α 为初相位，ω 为振荡的角频率

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}.$$

4. 阻尼振荡的视频分析

这里的思路是通过逐帧分析视频，以 0.033 s† 为间隔测量摆偏离平衡位置的程度，从而追踪约 5 s 内的运动。如上所述，阻尼振荡的周期约为 1.8 s，因此视频提供了约 2.5 个周期的信息，共包含 126 帧。

为了逐帧分析视频，我们使用 Windows 10 内置的

†有几次，相邻的两帧完全相同。遇到这种情况，我们只保留其中一帧，舍弃另一帧。

http://www .infim .ro/rrp 提交至《罗马尼亚物理学报告》 国际标准连续出版物号: 1221-1451

在视频编辑器中。要对视频进行操作，必须先用程序打开它，然后使用图 2 中蓝框标出的按钮将其放入分镜中。要逐帧浏览，可以使用图 3 所示的界面按钮，也可以按键盘上的字母“L”作为快捷键。

将从视频中获得的数据输入 Excel，并进行统计处理。结果可得到振荡的振幅、阻尼系数、角频率和初相位等信息。此外，还可以计算对数衰减率和周期。

这种通过视频记录进行分析的方法的优点在于，所获得的信息比常规实验方法丰富得多，也准确得多。

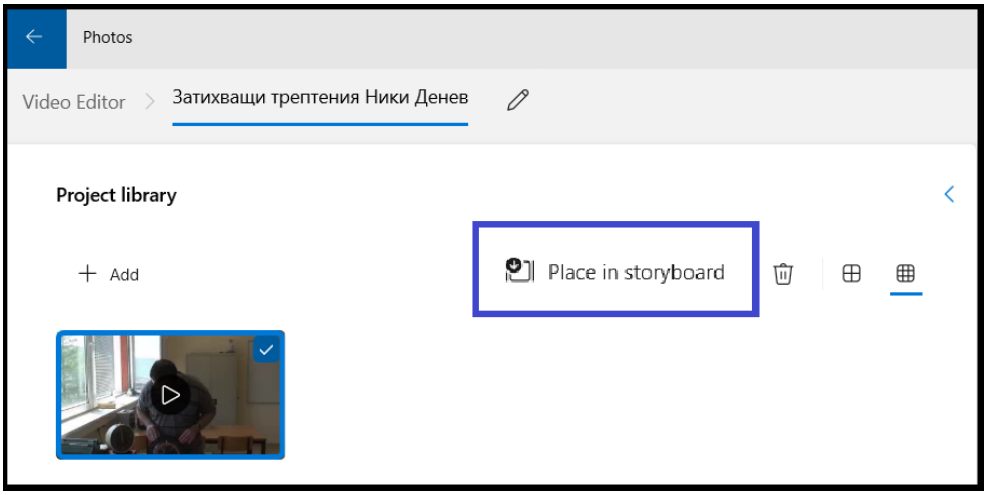


图 2 – 视频编辑器界面照片。

5. 数据处理

我们使用 Microsoft Excel 处理实验数据。数据排列在图 4 所示的表格中。第一列包含时间值，步长为 0.033 秒；第二列显示摆偏离平衡位置的读数，单位为任意单位。图 5 中用圆圈标出了实验点。借助模型函数 (2) 得到的数值记录在 Excel 表格的第三列中。第四列包含测量值与模型计算值之差的平方。它们的总和位于单元格 D11 中，如图 4 所示。

模型函数有四个自由参数：振幅、阻尼指标、圆

http://www.infim.ro/rrp 提交至《罗马尼亚物理学报告》 国际标准连续出版物号：1221-1451



图 3 – 视频编辑器中用于逐帧滚动的按钮照片。

	A	B	C	D	E
1	A	15,33413552			
2	gamma	0,26657349			
3	omega	3,450172818		period=	1,821121909
4	alpha	0			
5					
6	standard error, a.u. =	1			
7					
8				dof=	122
9				SWSD=	125,669327
10				SWSD/dof=	1,030076451
11			SSD=	125,669327	
12				0,091887157	
13					
14	time, s	displacement, a.u.	model	squared deviation	weighted squared deviation
15	0	14,8	15,33414	0,285300758	0,285300758
16	0,06	14,6	14,76863	0,028437198	0,028437198
17	0,1	14,2	14,05089	0,0222331	0,0222331
18	0,16	13,8	12,51128	1,660808013	1,660808013
19	0,2	12,8	11,21206	2,521541261	2,521541261

图 4 – 包含数据、模型参数和评价函数 SSD 的 Excel 表格（上半部分）

角频率和初相位。它们的值分别输入单元格 B1、B2、B3 和 B4。在构建以橙色标示的模型曲线时

http://www.infim.ro/rrp 提交至《罗马尼亚物理学报告》 国际标准连续出版物号：1221-1451

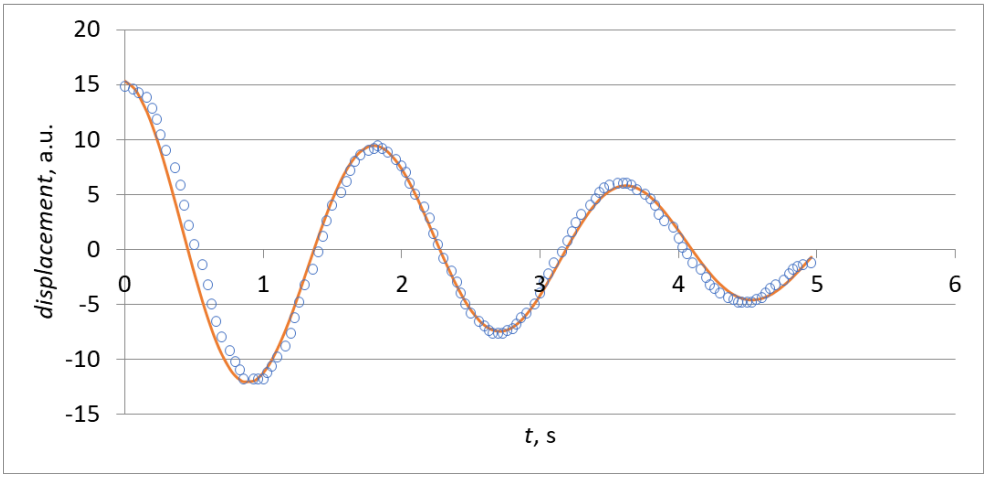


图 5——圆圈表示实验数据，模型曲线以实线表示。

在图 5 中，我们输入通过粗略估算得到的这些参数的近似值。（例如，参见表 6 中蓝色圈出的数值。）可以通过非线性回归方法估算模型参数的最优值。有关如何在 Microsoft Excel 中应用非线性回归方法的讲解视频，可在 YouTube 频道 ENGR 313 - Circuits and Instrumentation [8] 上观看。

简言之，该方法旨在求出目标函数的最小值，即在各个时刻 t_i测得的数值与使用模型计算出的摆相对于其平衡位置的偏差值之间的平方差之和‡ （SSD）。

为使目标函数 SSD 达到最小值，即存储在单元格 D11 中的值，我们使用“规划求解”功能，该功能位于“数据”菜单中。如果未显示此功能，则必须在“属性”菜单中启用它。选中要优化其值的单元格，然后从“数据”菜单中调用“规划求解”。此时会出现图 6 所示的对话框。在该对话框中，我们需要选择将指定单元格的值设为最小值，指定该单元格的位置，并指定要调整值的单元格。这些单元格在图 6 中以蓝色标出。

‡SSD 是 [9] 和 YouTube 上的教学视频中用于指代在 Microsoft Excel [8] 中应用非线性回归方法的术语。这个量也称为 SSE，即误差平方和 [10]。

http://www.infim.ro/rrp 提交至《罗马尼亚物理学报告》 国际标准连续出版物号：1221-1451

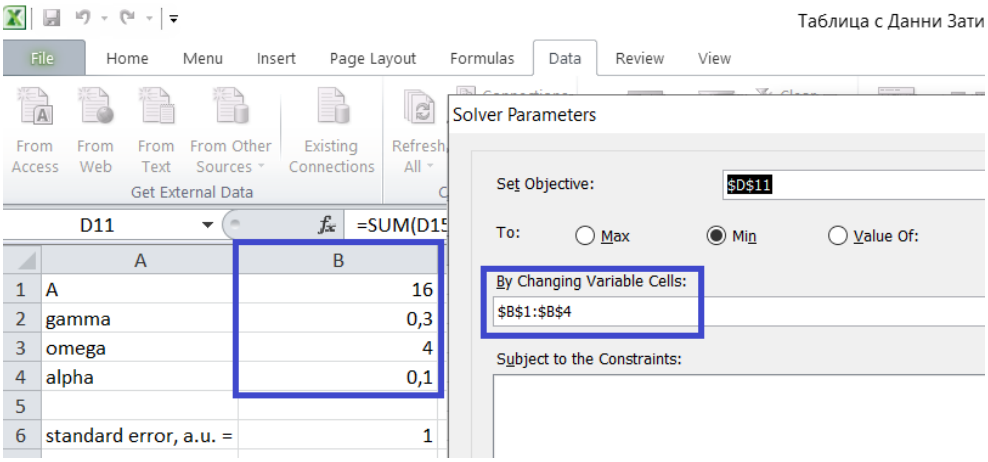


图 6 – Solver 的对话框。

我们得到的参数最优值如下（另见图 4）：

$$A = 15.3 \tag{3}$$

$$\gamma = 0.27 \tag{4}$$

$$\omega = 3.45\ \mathrm{s}^{-1} \tag{5}$$

$$\alpha = 0\ \mathrm{rad}. \tag{6}$$

随后得到的周期为 $T = 1.82\mathrm{s}$，这与 [7] 中引用的数值一致。

作为近似质量的估计，我们可以使用卡方检验 [11–13]。卡方变量与 SSD 的不同之处在于，测量值与使用模型计算出的值之间的平方差会根据实验误差 $w_\mathrm{i} = 1/\sigma_\mathrm{i}^2$ 进行加权，或者

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\varphi(t_\mathrm{i}) - \varphi_\mathrm{i})^2}{\sigma_\mathrm{i}^2}, \tag{7}$$

其中，φ_i 为测得的圆盘偏差，而 $\varphi(t_\mathrm{i})$为使用模型（2）计算得到的值。偏差加权平方和根据图4中的表格输入单元格 E9。自由度（dof）通过实验数据点数量减去参数数量得到。如果约化卡方，即卡方除以自由度，接近于 1，则可认为近似效果良好。如图1所示，通常可以将圆弧上的一个小刻度估计为实验误差。然而，采用这种选择时，得到的约化卡方值较大，即近似质量较差。因此，模型与实验数据之间并不

http://www.infim.ro/rrp 投稿至《罗马尼亚物理学报告》 国际标准连续出版物号：1221-1451

吻合良好。如果增大对实验误差的估计值，可以更好地评估近似质量。例如，如果选择将实验误差设为刻度尺上的一个大刻度，那么图4中 E10 给出的约化卡方为 1.03——显然可以接受。

6. 结论

在这项工作中，我们使用视频编辑器程序对练习“阻尼机械振荡”视频进行逐帧分析。我们通过非线性回归对采集的数据进行统计处理。我们将实验结果与模型振荡曲线进行比较，并据此优化了过程参数。文中提出了阻尼振荡的理论模型，并从理论上研究了阻尼系数与流经电磁制动器的电流之间的关系。我们希望这项工作能够辅助阻尼机械振荡相关内容的教学，加深学生对这一现象的理解，同时提高他们对练习实施过程中涉及的一些物理过程的关注。

致谢。 作者谨向副教授 Stefan Nitsolov 致谢，感谢他提供高清摄像机；并向副教授 Chavdar Hardalov 致谢，感谢他拍摄视频。

参考文献

1. S. Rodrigues, J. Pearce & M. Livett, “在大学一年级物理实践中使用视频分析或数据记录仪”,《教育研究》27 (1), 31 (2001). 2. M. J. Ruiz, “从 *YouTube* 视频中测量运动学参数”,《物理教师》47, 200 (2009). 3. M. R. Gallis, “用于视频分析的人工视频”,《物理教师》48, 32 (2010). 4. R. Moreno, A. Page, J. Riera, and J. L. Hueso, “滑动链条的视频分析：基于变质量系统的动力学模型”,《美国物理学杂志》83, 500–505 (2015). 5. B. Chiriacescu, F. S. Chiriacescu, C. Miron, C. Berlic, V. Barna, “*Arduino* 和 *Tracker* 视频——研究卡特摆物理实验的教学工具”,《罗马尼亚物理报告》72, 901 (2020). 6. A. Radu, M. V. Popescu, C. Berlic, C. Miron, V. Barna, “将 *IMAGEJ* 软件用作教学实验室光学实验的测量工具”,《罗马尼亚物理报告》73, 907 (2021). 7. “受迫振荡——坡尔摆”, PHYWE 公司实验练习说明手册, `https://is.gd/hBGcdK`, （缩短后的链接由 is.gd 网站生成。）。8. “使用 *Excel* 进行非线性模型拟合”, ENGR 313 - 电路与仪器，YouTube，`https://is.gd/HZz3DK`, （缩短后的链接由is.gd 网站生成。）。9. R. Russell Rhinehart, “面向工程应用的非线性回归建模”,（John Wiley & Sons, 2016）。

http://www.infim.ro/rrp 已提交至《罗马尼亚物理学报告》 国际标准连续出版物号：1221-1451

10. H. J. C. Berendsen, “学生数据与误差分析指南”,（剑桥大学出版社，2011）。11. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, “数值计算：科学计算艺术”,第 3 版（剑桥大学出版社，2007）。12. P. Bevington, D. K. Robinson, “物理科学中的数据约简与误差分析”,第 3 版（麦格劳-希尔，2003）。13. Peter Scott, “物理学*133*实验手册”, http://scott.physics.ucsc.edu/。

http://www.infim.ro/rrp 投稿至《罗马尼亚物理报告》

国际标准连续出版物号：1221-1451