arXiv:2304.11429v1 [cs.CG] 22 Apr 2023

旋转射线Voronoi图及其在泛光灯照明中的应用

CarlosAlegría ！意大利罗马，罗马第三大学工程系

Ioannis Mantas 瑞士卢加诺，意大利语区瑞士大学信息学院

EvanthiaPapadopoulou ！
瑞士卢加诺，意大利语区瑞士大学信息学院

MarkoSavić ！
塞尔维亚诺维萨德大学理学院数学与信息学系

CarlosSeara ！
西班牙巴塞罗那加泰罗尼亚理工大学数学系

Martin Suderland
瑞士卢加诺意大利语区大学信息学院

摘要

我们研究<点样式 id='1'>旋转射线 Voronoi 图</点样式>，这是一种 Voronoi结构，其中输入站点为射线，点与站点/射线之间的距离函数是逆时针角距离。这种新颖的沃罗诺伊图源于照明或覆盖问题：必须使用统一角度的探照灯/扇形区域覆盖一个区域，目标是求出覆盖该区域所需的最小角度。我们研究平面中的该图，并给出其结构性质、组合复杂度界以及构造算法。如果这些射线由一个凸多边形诱导而来，我们将展示如何在线性时间内构造该多边形内的沃罗诺伊图。利用这些信息，我们可以在线性最优时间内求出<点样式 id='3'>布罗卡角</点样式>，即使用统一角度的探照灯照明凸多边形所需的最小角度。

2012 年 ACM 学科分类 <点样式 id='1'>分类</点样式><点样式 id='3'>计算理论</点样式> → <点样式 id='6'>计算</点样式> 几何学

<点样式 id='1'>关键词与短语</点样式><点样式 id='3'>旋转射线 Voronoi 图；有向角距离；布罗卡角；布罗卡照明；探照灯照明；覆盖问题。</点样式>

相关版本第29届欧洲算法研讨会（ESA 2021）短版

资助*Carlos Alegría*：由 MIUR 项目“AHeAD”n° 20174LF3T8 及欧盟Horizon 2020 项目 No. 734922 提供支持。
Ioannis Mantas：初期工作部分由 SNF 项目 200021E_154387 资助。
Evanthia Papadopoulou：部分由 SNF 项目 200021E_154387 和 200021E_201356 资助。*Marko Savić*：由塞尔维亚共和国教育、科学和技术发展部（资助编号 451-03-68/2022-14/200125）以及伏伊伏丁那省高等教育与科学研究省秘书处资助。

Carlos Seara：由项目 PID2019-104129GB-I00/ MCIN/ AEI/ 10.13039/501100011033 资助 and 欧盟Horizon 2020 No. 734922.
Martin Suderland：部分由 SNF 项目 200021E_201356 资助。

致谢 最初的讨论于 2018 年在西班牙巴塞罗那举行的离散、组合与计算几何强化研究项目期间展开。我们感谢组织者提供了相聚与合作的平台。我们也感谢 Hendrik Schrezenmaier 就该问题进行的早期讨论，讨论内容主要与第 3.1 节的结果有关。

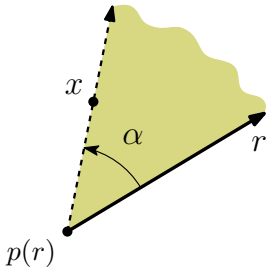


图 1 一个与射线 r 对齐的 α 泛光灯，其顶点为 $p(r)$。角 α 是从 r 到点 x的角距离。

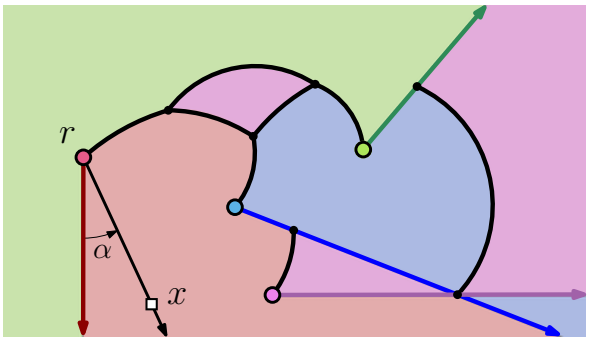


图 2 $\mathbb{R}^2$ 中 4 条射线的旋转射线 Voronoi 图。各区域中的点首先由对应颜色的射线照亮。角 α 是点 $x \in \mathbb{R}^2$ 到最近站点（射线 r）的距离。

1 引言

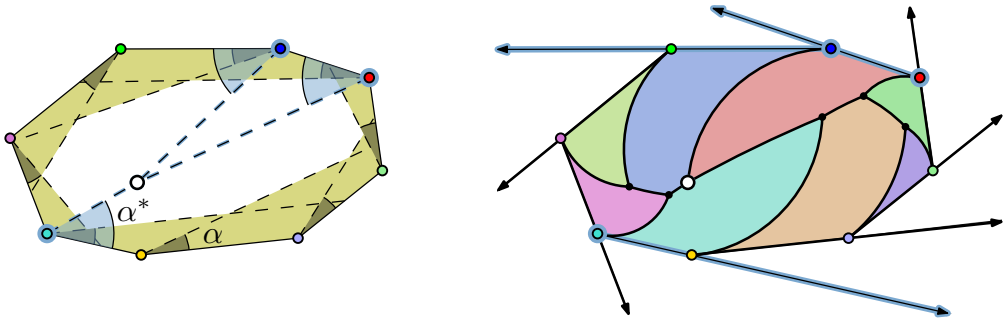
本文提出并研究了旋转射线 *Voronoi* 图。该图由平面中的一组 n 射线根据以下有向角距离函数定义。给定平面中的一点 x 和一条射线 r，从 r 到 x 的角距离 是满足以下条件的最小角度 α：将 r 绕其顶点逆时针旋转 α后，射线 r 照亮（或接触） x；见图 1。图 2 展示了一个示例图。本文定义该图，介绍其组合性质和界，设计构造算法，并利用该图解决相关的探照灯照明问题。

研究动机。 泛光灯照明问题是众所周知的美术馆类问题：给定一个区域，需用探照灯将其覆盖。探照灯是一种光源，可从圆锥顶点照亮圆锥内部。张角为 α 的探照灯称为 α-探照灯。若 α 探照灯的右侧与射线 r重合，则称其与该射线对齐；例如见图 1。

本文所考虑的角距离源于布罗卡照明问题：给定区域 $\mathcal{D}$、由 n 条射线组成的集合 $\mathcal{S}$，以及一组 n α-探照灯，其中每个探照灯都与 $\mathcal{S}$ 中的一条射线对齐，照亮 $\mathcal{D}$ 所需的最小角 α^* 是多少？角 α^* 称为 $\mathcal{D}$ 的布罗卡角。

本文表明，布罗卡照明问题可以归结为构造限制在 $\mathcal{D}$ 上的 $\mathcal{S}$ 旋转射线 Voronoi 图。该归结基于这样一个事实：布罗卡角在旋转射线 Voronoi 图的某个顶点处取得。适合用探照灯照明的典型区域包括平面、有界多边形区域，以及扇形区域和曲线等无界区域。由于在每个区域上构造相应的受限沃罗诺伊图即可得到布罗卡角，因此研究不同设置下的沃罗诺伊图具有重要意义。

背景与相关工作。 布罗卡照明问题结合了探照灯照明与一个经典几何问题的推广；该问题最初由亨利·布罗卡（1845-1922）解决。在这类问题中，输入区域由一个三角形围成，每条三角形边上都对齐一条射线，并且所有射线都沿三角形边界按顺时针或逆时针方向定向。多年来，研究人员将布罗卡问题推广到输入区域首先由



(a) 使用与每条边对齐的 α-聚光灯照亮$\mathcal{P}$与每条边。

(b) 边对齐射线的旋转射线 Voronoi 图——限制在$\mathcal{P}$内的对齐射线。

图 3 一个凸多边形$\mathcal{P}$。蓝色突出显示的是实现布罗卡角的三条射线 α^*。$\mathcal{P}$ 中实现 α^* 的内部点是一个旋转射线 Voronoi 图顶点。

凸四边形围成，后来又推广到由任意凸多边形围成；见图 3a。一个重要问题源于一类称为布洛卡多边形 [6]的特殊凸多边形：如果存在一个内部点，与$\mathcal{P}$各边上对齐的所有射线之间的角距离相等，则称多边形$\mathcal{P}$ 为布洛卡多边形。该角距离恰好是$\mathcal{P}$的布罗卡角，而该点称为布洛卡点 $\mathcal{P}$的布洛卡点。直观地说，如果从 $\alpha = 0$ 开始连续增大角度 α 的值，那么$\mathcal{P}$ 的布洛卡点就是第一个同时被所有 α 个探照灯照亮的点。

布洛卡多边形的刻画有着悠久的历史，但目前已知的布洛卡多边形仅有调和多边形（其中包括三角形和正多边形） [10]。关于布洛卡多边形的经典文献仅从几何角度研究布洛卡问题，而未从计算视角进行研究。然而，根据众所周知的几何结果，不难得出以下判定结果：给定一个具有 n 个顶点的凸多边形 $\mathcal{P}$，我们可以在 $O(n)$ 时间内判定 $\mathcal{P}$ 是否为布洛卡多边形；若判定为是，则可以在 $O(1)$ 时间内计算 $\mathcal{P}$ 的布罗卡角。

一个自然的方向是不仅考虑判定一个多边形是否为布洛卡多边形的问题，还要考虑计算任意给定多边形的布罗卡角这一更一般的问题。最近，Alegría 等人研究了计算简单多边形布罗卡角的问题 [2]。作者给出了一种 $O(n^3 \log^2 n)$ 时间算法，并以一种适用于凸多边形的 $O(n \log n)$ 时间算法补充了这一结果[1]。据我们所知，目前还没有其他研究从计算视角探讨布洛卡问题。

自探照灯照明问题提出以来，人们已在不同情境下对其进行了研究；关于部分已知结果的汇总，可参阅 Urrutia [41] 和 O'Rourke [31] 撰写的书籍章节。例如，区域可以是整个平面 [8, 13, 35]，、无界平面区域 [9, 35]，、曲线 [12, 15, 22, 39]，或多边形区域 [17, 22, 30, 38]。若要求探照灯具有统一角度（如布罗卡照明情境），已有多位作者对此进行了研究，参见例如 [11, 17, 21, 28, 32, 38, 40]。从实际应用的角度来看，旋转的 α探照灯也可用于模拟感知范围（视场）有限的设备，例如监控摄像机或定向天线；参见例如 [5, 26, 27, 37]。在此背景下，布罗卡角可解释为一组设备覆盖某个区域所需的最小覆盖范围。

Voronoi 图是《计算几何》中经过深入研究的对象，具有众多

[1] 在 [2] 中所述的凸多边形算法的 $O(n)$时间分析并不正确。

变体和应用；全面的研究成果列表请参阅 Aurenhammer 等人 [4] 和 Okabe 等人 [29]的著作。不过，就输入站点和距离函数而言，旋转射线 Voronoi 图似乎都是一种新颖的图。De Berg 等人 [14] 定义了一种稍有相关的图，用于分析足球比赛 [36]中球员的支配区域；Haverkort 和 Klein [19]最近也研究了这种图。

我们的贡献。 我们引入了旋转射线 *Voronoi* 图，并证明了一系列结果，为未来研究类似问题铺平了道路。我们定义了限制在不同区域中的旋转射线 Voronoi 图，并展示了如何将每个区域中的布罗卡照明问题归约为相应旋转射线 Voronoi 图的构造。更具体地说：

- 我们首先研究平面中一组 n 射线的图，并确定其结构性质，同时给出复杂度结果：最坏情况下的 $\Omega(n^2)$ 下界和 $O(n^{2+\epsilon})$ 上界。我们还获得了一个 $O(n^{2+\epsilon})$ 时间的构造算法，并利用该算法求出由该射线集诱导的平面的布罗卡角。受布罗卡照明问题的启发，我们研究了限制在由输入的 n 射线集界定的凸多边形区域中的图。我们给出一个在最优 $\Theta(n)$ 时间内运行的构造算法，并利用这一结果在最优 $\Theta(n)$ 时间内求出凸多边形的布罗卡角。该结果改进了此前已知的$O(n\log n)$ 时间算法。最后，我们研究限制在简单曲线上的图，并给出一种构造该图的通用方法。组合复杂度和时间复杂度界取决于各条曲线的具体性质。

论文结构。 本文其余部分的组织如下。第 2 节介绍必要的预备知识。第 3 节中，所研究的区域是整个平面。第 4 节考虑凸多边形区域，第 5 节则将所研究的区域限制为曲线。第 6 节总结全文并提出一些开放性问题。

2 预备知识

设 $\mathcal{S}$ 是平面中由 n 条射线组成的集合。给定一条射线 r，我们将其顶点记为 $p(r)$，将其支撑直线记为 $l(r)$，并将其在 S^1 中的方向记为 $\widehat{d}(r)$。给定三个点 A、B、$C \in \mathbb{R}^2$，令 $\angle(A, B, C)$ 表示从 $\overrightarrow{BA}$ 到 $\overrightarrow{BC}$的逆时针角，其中 $\overrightarrow{BA}$ 分别表示顶点为 B 且经过 A的射线，以及相应的射线。我们定义距离函数如下。

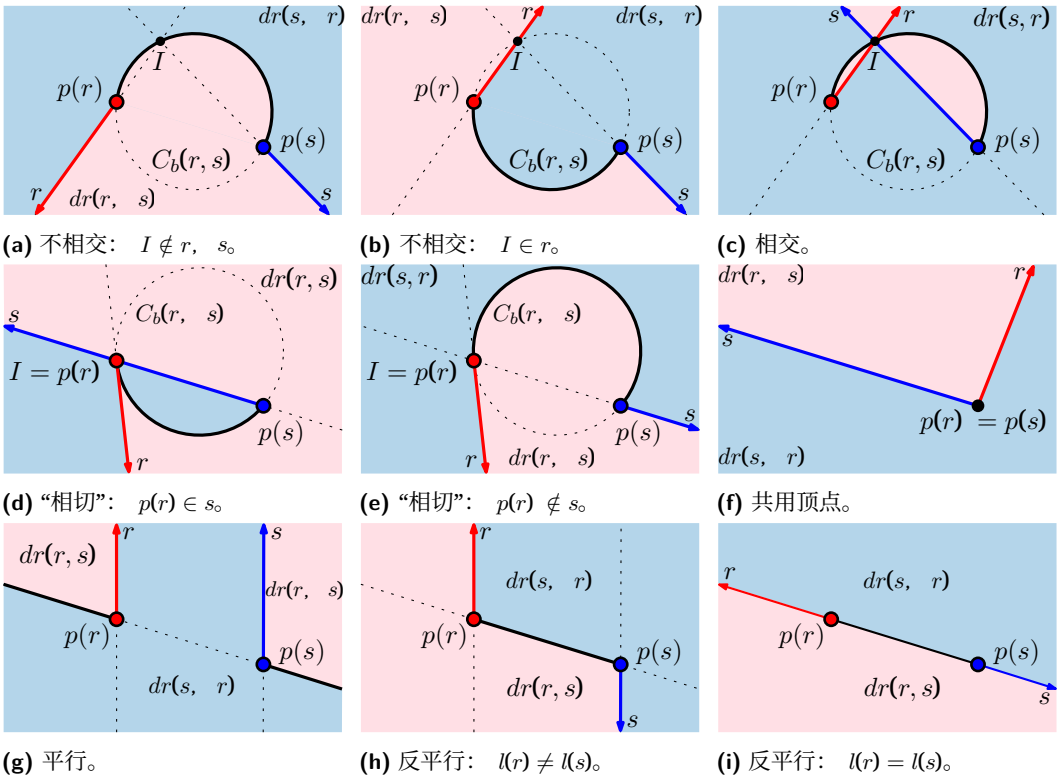
▶ **定义 1。** 给定一条射线 r 和一个点 $x \in \mathbb{R}^2$，从 x 到r的有向角距离 记为 $d_\angle(x, r)$，其定义为从 r 到一条顶点为$p(r)$ 且经过 x的射线 α 所需的最小逆时针角；见图 *1*。此外，我们定义 $d_\angle(p(r), r) = 0$。

很容易看出，有向角距离（简称角距离）不是一个度量。此外，注意到 $d_\angle(x, r)$ 的取值为 $[0, 2\pi)$，并且在 2π 处存在不连续性。利用这个距离函数，我们可以定义两条射线的平分线。

▶ **定义 2.** 给定两条射线 r 和 s，r 关于 s 的支配区域记作$dr(r, s)$，它是到 r 的角距离小于到 s 的角距离的点的轨迹，即：

$$dr(r, s) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid d_\angle(x, r) < d_\angle(x, s) \}.$$

r 和 s的角平分线记为 $b_\angle(r, s)$，是界定 $dr(r, s)$ 和$dr(s, r)$的曲线；见图*4*。



(a) 不相交： $I \notin r,\ s$。 **(b)** 不相交： $I \in r$。 **(c)** 相交。

(d) “相切”： $p(r) \in s$。 **(e)** “相切”： $p(r) \notin s$。 **(f)** 共用顶点。

(g) 平行。 **(h)** 反平行： $l(r) \neq l(s)$。 **(i)** 反平行： $l(r) = l(s)$。

图4 两条射线 r 和 s的角平分线。该平分线由 r （红色射线）、 s （蓝色射线）以及平分圆 $C_b(r, s)$的一段弧（黑色曲线）组成。

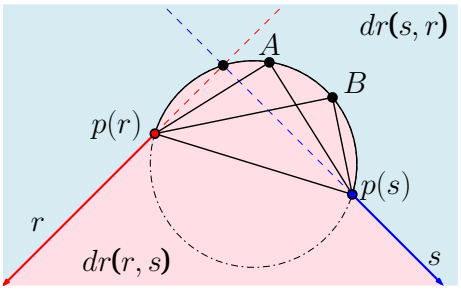
请注意，由于<style id='1'>距离函数</style>的不连续性，我们对<style id='2'>平分线</style>的定义与通常定义略有不同；通常的定义是到两个站点等距的点的轨迹。

给定两条射线 r 和 s，平分线 $b_\angle(r,\ s)$由两条射线 r 和 s以及一段连接 $p(r)$与 $p(s)$的圆弧 a 组成；见图4。令 $I := l(r) \cap l(s)$。弧 a 属于平分圆 $C_b(r,\ s)$，其定义如下：

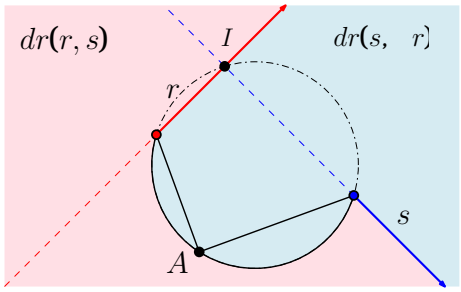
- 如果 I、 $p(r)$和 $p(s)$两两不同，那么 $C_b(r, s)$就是经过 I、 $p(r)$和$p(s)$的圆。当且仅当以下条件之一成立时，弧 a 包含 I： I 同时位于 r 和 s上，或者 I 既不位于 r 上，也不位于 s上。见图4a、图4b和图4c。如果 $I = p(r)$且 $I \neq p(s)$，那么 $C_b(r, s)$就是与 $l(r)$相切且经过 $p(r)$和 $p(s)$的圆。当且仅当 $p(r)$位于 s上时， a 和 r 位于 $l(s)$的同一侧；见图4d和图4e。如果 $I = p(s)$且 $I \neq p(r)$，我们以类似方式定义 $C_b(r, s)$。如果 $p(r) = p(s)$，那么 $C_b(r, s)$和 a 都会退化为单点；见图4f。如果 $l(r)$和 $l(s)$平行，那么 $C_b(r, s)$会退化为经过 $p(r)$和 $p(s)$的直线。如果 $\overset{\frown}{d}(r) = d(s)$，那么 a 由两条半直线组成；见图4g。反之，如果 $d(r) = -d(s)$，那么a 会退化为一条线段；见图4h和图4i。

除非另有说明，为简便起见，我们假设任意两条射线的顶点均不相同，且任意两条射线均不平行或反平行。在这些假设下，平分线的形式如图 4a–4e 所示。在下面的引理中，我们将证明上述对平分线的描述是正确的。

▶ **引理 3.** 给定两条射线 r 和 s，平分线 $b_\angle(r, s)$ 由两条射线 r, s 以及平分圆 $C_b(r, s)$的一段弧组成。



(a) 到两条射线 r 均等距的任意两个点和 s 位于同一个圆上。



(b) 交点 I 位于经过所有与 r 和 s等距的点的共圆上。

图 5 引理 3 证明的示意图。

证明。 射线 r 左侧稍许位置上任意一点到射线的距离 0 几乎为 r，而射线 r 右侧稍许位置上任意一点到射线的距离几乎为 2π。因此，射线 r 和 s都是平分线 $b_\angle(r,s)$的组成部分。

我们首先证明，任意两个同时与射线 r 和 s 等距的点 A 和 B 都位于同一个圆上；见图 5a。由于 A、B 与 r 和 s等距，这意味着$\angle(B,\ p(r)\ A) = \angle(B,\ p(s)\ A)$。我们证明 $\angle(p(r)\ A,\ p(s)) = \angle(p(r)\ B,\ p(s))$，由此可知，所有 $p(r)\ p(s)\ A$ 和 B 都位于连接 $p(r)$ 与 $p(s)$ 的一段圆弧上，这由圆周角定理可得：

$$
\begin{aligned}
&\angle(p(r), A, p(s)) \\
&= \pi - \angle(p(s), p(r), A) - \angle(A, p(s), p(r)) \\
&= \pi - (\angle(p(s), p(r), B) + \angle(B, p(r), A)) - (\angle(B, p(s), p(r)) - \angle(B, p(s), A)) \\
&= \pi - \angle(p(s), p(r), B) - \angle(B, p(s), p(r)) \\
&= \angle(p(r), B, p(s)).
\end{aligned}
$$

最后一步，我们证明 $I = l(r) \cap l(s)$ 位于经过所有等距点的共圆上。如果 I 同时位于射线 r 和 s 上（分别地，均不位于其上），那么 $d_\angle(I, r) = d_\angle(I, s) = 0$（分别地，$d_\angle(I, r) = d_\angle(I, s) = \pi$）。在这种情况下，$I$与两条射线等距，因此显然位于这个共圆上。

现在假设 I 恰好位于射线 r 和 s中的一条上；见图 5b。设 A 为到两条射线等距的一点，即 $\angle(I,\ p(r)\ A) = \pi + \angle(I,\ p(s)\ A)$。那么

$$
\begin{aligned}
\angle(p(s), A, p(r)) &= 2\pi - \angle(A, p(r), I) - \angle(p(r), I, p(s)) - \angle(I, p(s), A) \\
&= \pi - \angle(p(r), I, p(s)).
\end{aligned}
$$

因此，根据圆周角定理，A、$p(r)$、I 和 $p(s)$ 位于某个共圆的两侧，从而证明得证。◀

▶ **定义 4。** 两条射线 r 和 s之间的角度差 记为 $diff_\angle(r, s)$，指的是 s 绕其顶点逆时针旋转，使得 r 和 s 变为平行所需旋转的角度。

两条射线的角度差如图 6 所示。注意，对于任意两条不平行的射线 r 和 s，都有 $\text{diff}_\angle(r,\ s) + \text{diff}_\angle(s,\ r) = 2\pi = 0$。

▶ 备注5. 给定一对射线 r 和 s，距离函数沿其平分线的圆弧 $b_\angle(r, s)$ 单调变化；若直线 $l(r)$ 和 $l(s)$ 不

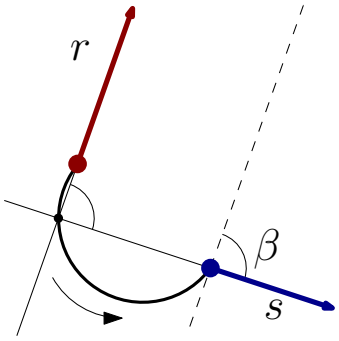


图 6 角度差 $\mathrm{diff}_\angle(r,\ s)\ =\ \beta$。沿平分线 $b_\angle(r,\ s)$，距离从 $p(r)$ 到 $p(s)$ 逐渐增大。

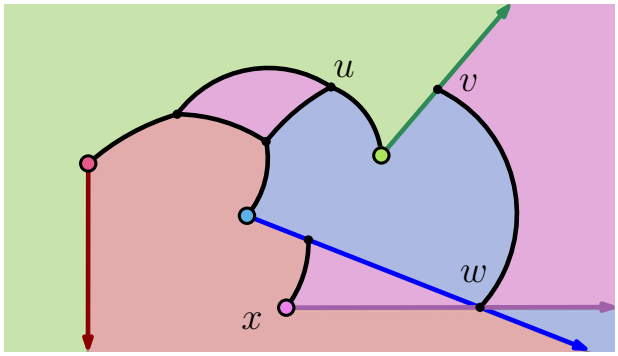


图 7 RVD($\mathcal{S}$) 上的不同特征：弧 vw 是圆弧边，线段 xw 是射线边，u 是正规顶点，v 是混合顶点，w 是交点顶点，x 是顶点。

平行，则严格单调。若直线 $l(r)$ 和 $l(s)$ 平行，则沿平分线的整个圆弧部分 $b_\angle(r,s)$，距离保持不变。

反之，若 $\mathrm{diff}_\angle(r,\ s)\ <\mathrm{diff}_\angle(s,\ r)$，或者等价地，$\mathrm{diff}_\angle(s,\ r)\ >\ \pi$，则沿平分线 $b_\angle(r,\ s)$ 从 $p(r)$ 到 $p(s)$ 的距离函数单调递增。此外，沿逆时针顺序行走于 $dreg(r,\ s)$ 的边界时，平分线 $b_\angle(r,\ s)$ 的圆弧部分上的距离函数单调递增（见图 6 中的箭头）。

现在，我们可以定义射线集合在角距离下的最近邻沃罗诺伊图。

▶**定义 6.** 射线集合 S 的旋转射线 Voronoi 图是将$\mathbb{R}^2$ 划分为Voronoi 区域的细分，定义如下：

$$vreg(r) := \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall s \in \mathcal{S} \setminus \{r\} :\ d_\angle(x,r) < d_\angle(x,s) \,\}.$$

令 $RVD(S)$：$= \left(\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{r\in\mathcal{S}}\ vreg(r)\right) \cup S$ 表示该图的图结构。

Voronoi 区域 $vreg(r)$ 也可以等价地定义为 r 的所有支配区域的交集，即 $vreg(r) = \bigcap_{s\in\mathcal{S}\setminus\{r\}} dr(r,\ s)$。一个区域可能由多个连通分量组成；每个分量称为该区域的面。

我们区分 RVD 上的以下特征($\mathcal{S}$)。图 7 展示了示意图。圆弧边 是平分线圆弧部分的子集，因此，圆弧边上的任意点到生成该边的两个站点的距离相等（见 vw，图 7）。射线边是射线的子集，因此，射线边上的任意点到生成该边的站点的距离为 0 （见 xw，图 7）。正规顶点 与三条圆弧边相接，因此，到生成这三条圆弧边的三个站点的距离相等（见 u，图 7）。混合顶点 与一条圆弧边和两条射线边相接，这两条射线边由同一条射线生成。该顶点到生成圆弧边的两个站点的距离相等，到生成射线边的站点的距离为 0 。（见 v，图 7）。交点顶点 与一条圆弧边和四条射线边相接，所有这些边均由两个站点生成。该顶点到两个站点的距离均为 0 （见 w，图 7）。顶点 与一条圆弧边和一条射线边相接，其中，生成射线边的站点是生成圆弧边的两个站点之一。该顶点到生成射线边的站点的距离为 0，到另一个站点的距离大于 0 （见 x，图 7）。

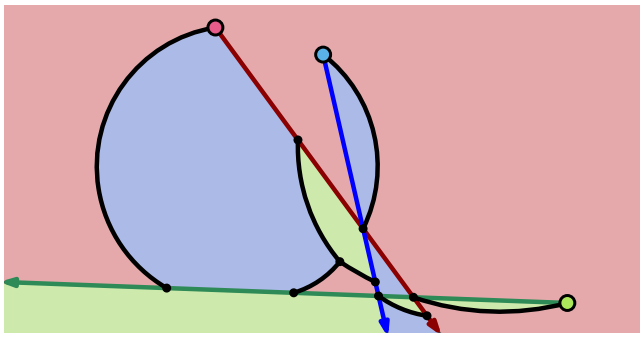


图8 由 3 条射线组成的集合$\mathcal{S}$，其 RVD($\mathcal{S}$)有 1 个普通顶点、5 个混合顶点和 3 个交集顶点 .

3 平面中的旋转射线 Voronoi 图

本节研究平面上的图 RVD($\mathcal{S}$)。我们首先考察它的一些性质及组合复杂度界。随后，我们讨论如何用一组与$\mathcal{S}$对齐的探照灯照亮整个平面。

3.1 性质、复杂度和构造算法

我们首先研究 3 条射线的沃罗诺伊图结构；图8 展示了一个示例。

▶ **引理 7.** 三条射线的沃罗诺伊图 *RVD*($\{r, s, t\}$) 至多有 1 个普通 *Voronoi* 顶点、至多有 3 个交集顶点，以及至多有 6 个混合顶点。其整体组合复杂度为 $O(1)$。

证明。一个正规 Voronoi 顶点是三个相关平分线的三条圆弧的交点。考虑两个相关平分线 $b_\angle(r, s)$ 和 $b_\angle(r, t)$，以及它们的平分圆$C_b(r, s)$ 和 $C_b(r, t)$。两个圆最多相交两次，而根据定义，圆 $C_b(r, s)$ 和 $C_b(r, t)$ 已有一个交点，即顶点 $p(r)$。因此，它们之间最多还能有一个交点 v，相应地，$b_\angle(r, s)$ 和 $b_\angle(r, t)$ 的圆弧之间也至多有一个交点。给定一个交点 v，平分线 $b_\angle(s, t)$ 也经过 v，从而在点 v 处形成 RVD($\{r, s, t\}$) 的一个正规顶点。因此，RVD($\{r, s, t\}$) 中至多存在一个正规顶点。

交点顶点定义为两条射线的交点。因此，给定三条射线，RVD($\{r,\ s,\ t\}$)中至多有3个交点顶点。混合顶点定义为平分线 $b_\angle(r,\ s)$的圆弧与射线 $t \notin \{r,\ s\}$的交点。考虑 $b_\angle(r,\ s)$的圆弧；剩余射线 t 至多可与该圆弧相交两次，因此在 $b_\angle(r,\ s)$的圆弧上至多产生两个混合顶点。给定三条射线，共有三条平分线，因此RVD($\{r,\ s,\ t\}$)中混合顶点总数不超过6个。

RVD($\{r,\ s,\ t\}$)中有 $O(1)$个顶点，因此可得其组合复杂度。 ◀

假设$\mathcal{S}$ 中的任意两条射线均不相互平行，则以下两个简单的结构性质成立。

▶**引理8。** *RVD*(S) 恰好有 n 个无界面，每条射线对应一个；每条射线都位于 nt 到其无界面。

证明。 设 C 为一个半径足够大的圆，使得 C 包围 RVD 的所有顶点($\mathcal{S}$)以及所有平分线的平分圆。为了研究 Voronoi 区域的无界面

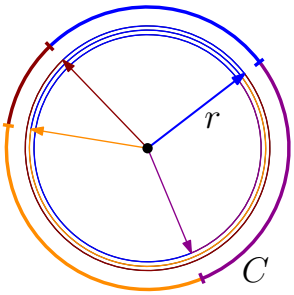


图 9 4 条射线与一个大圆的图的交集 C。支配区域是 C上的圆弧。

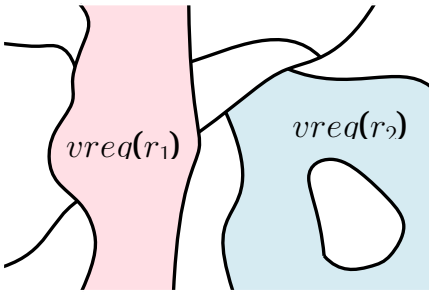


图 10 导致图不连通的两个（不可能的）情况。“走廊”（$vreg(r_1)$）和“岛屿”（$vreg(r_2)$）。

$vreg(r)$，对于一条射线 $r \in \mathcal{S}$，我们考虑 $vreg(r)$ 与 C 的交集。参见图 9 f或一幅插图。

给定一条射线 $s \in \mathcal{S} \setminus \{r\}$，支配区域 $dr(r,s)$ 与 C 的交集是 C 上的一段圆弧，沿逆时针方向从 $r \cap C$ 延伸至 $s \cap C$。由于区域 $vreg(r)$ 是 r的所有支配区域的交集，因此 $vreg(r) \cap C$ 是 $n-1$ 段圆弧的交集，这些圆弧都从 r开始。因此，$vreg(r) \cap C$ 是一段非空圆弧，与 r相邻。于是，$vreg(r)$ 恰好有一个与 r相邻的无界面。◀

▶**引理 9**。 $RVD(S)$ 是连通的。

证明。 反设 RVD($\mathcal{S}$) 不连通，如图 10 所示。于是，存在一条射线 $r \in \mathcal{S}$，其区域 $vreg(r)$ 要么有一个无界面在无穷远处有两次出现，从概念上形成一个“走廊”（如图 10 中的 $vreg(r_1)$），要么$vreg(r)$包含 RVD($\mathcal{S}$)的一个连通分量，从概念上形成一个“岛屿”（如图 10 中的$vreg(r_2)$）。

由引理8可直接得出，RVD($\mathcal{S}$) 的任何区域都不可能有“走廊”。我们证明，RVD($\mathcal{S}$) 的任何区域 $vreg(r)$ 都不包含“孤岛”，即完全被 $vreg(r)$包围的 RVD($\mathcal{S}$) 连通分量。考虑这样一个被 $vreg(r)$包围的 RVD($\mathcal{S}$) 不连通分量；该分量至少包含某个 $s \in \mathcal{S}$ 对应区域 $vreg(s)$ 的一个面。于是，在 RVD($\{r,s\}$) 中，$vreg(r)$ 内也存在一个“孤岛”，这意味着平分线 $b_\angle(r,s)$ 有一个有界连通分量。这与每条平分线都是一条简单的无界曲线这一事实矛盾。◀

现在我们研究 RVD($\mathcal{S}$) 的组合复杂度。取一组$\mathcal{S}$ 个两两相交的 n 射线，即可轻易得到 $\Omega(n^2)$ 的下界。在这种情况下，RVD($\mathcal{S}$) 有 $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$ 个顶点（位于射线的交点处），因此其复杂度为 $\Omega(n^2)$。有趣的是，即使对于不相交的射线，这一下界仍然成立，我们将在下面的定理中证明这一点。

▶**定理 10**。 即使射线两两不相交，$RVD(S)$ 的最坏情况组合复杂度仍具有$\Omega(n^2)$ 下界。

证明。 我们给出一个构造性证明；所得图如图 11 所示。最左侧顶点对应的 $n/2-1$ 条射线的 Voronoi 区域各具有 $n/2$ 个有界面。

我们设定 $n = 2m$，并令顶点 $p(r_i) = (i,\ 0)$、$i = 1$、……、$2m$。对于 $i = m+1$、……、$2m$，令 r_i的方向竖直向上。对于 $i = 1$、……、m，令 r_i的方向为$\angle d(r_i) = (\sin\ \alpha_i,\ \cos\ \alpha_i)$，其中 $\alpha_1 \in (3\pi/2,\ 2\pi)$，且 $\alpha_i = \alpha_{i-1} + \epsilon_i$，这里 $\epsilon_i > 0$适用于 $i = 2$、……、m。

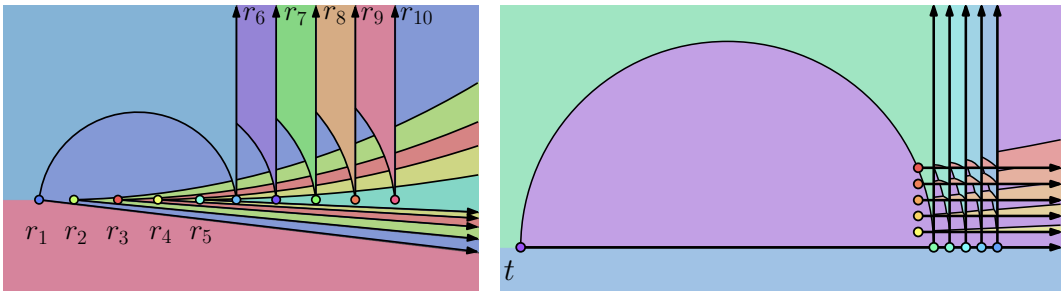


图 11 一组由 $n = 10$ 条两两不相交的**图 12**一组包含 $n = 11$ 条射线的$\mathcal{S}$，其 RVD($\mathcal{S}$) 中的射线相交，并具有 $\Theta(n^2)$ 复杂度。区域 $vreg(r_i)$、 $i = 1$、.....、4 各有 $\Theta(n)$ 个面。区域 $vreg(t)$ 有 $\Theta(n^2)$ 个面，网格的每个单元格中各有一个面；该网格由其余 10 条射线形成。

我们按照 i递增的顺序逐一选择 ϵ_i，使得 r_i 和 r_{i-1} 在任意两条相邻的向上发射的射线之间都有一个面。这始终是可行的，因为我们可以将 ϵ_i 取得足够小，使得在任意 x坐标 $x < 2m$处， $b_\angle(r_i, r_{i-1})$的圆弧部分都可以任意接近 x轴，因此位于 $b_\angle(r_{i-2}, r_{i-1})$的圆弧部分下方。◀

▶**定理 11**。 在最坏情况下，*RVD*(S) 的一个 *Voronoi* 区域具有 $\Theta(n^2)$ 复杂度。

证明。考虑一条射线 $r \in$S 及其区域 $vreg(r)$；在 $vreg(r)$ 边界上，除了至多 $O(n)$ 个顶点（可能是顶点）外，其余顶点均由 r 和另外两个站点定义。S $\setminus \{r\}$ 中有 $\Theta(n^2)$ 对站点，每一对在 $vreg(r)$ 上诱导出 $O(1)$ 个顶点（根据引理 7）；因此， $vreg(r)$ 有 $O(n^2)$ 个顶点，从而具有 $O(n^2)$ 的组合复杂度。

现在我们构造 $n = 2m + 1$ 条射线，使得单个区域的复杂度为 $\Theta(n^2)$；构造如图 12 所示。首先创建一个网格结构：对于 $i = 1, \ldots, m$，令 r_i 为一条射线，其 $p(r_i) = (i, 0)$，垂直向上发射；令 s_i 为一条射线，其 $p(s_i) = (0, i)$，水平向右发射。对于所有满足$(i, j) \in \{1, \ldots, m-1\}^2$,的情况，令 $R(i, j)$为正方形 $[i, i+1) \times [j, j+1)$。每个正方形 $R(i, j)$由 RVD($\{r_1, \ldots, r_m, s_1, \ldots, s_m\}$) 的两个面组成，其中一个属于 $vreg(r_i)$，另一个属于 $vreg(s_j)$。现在令 $\alpha(i, j) := \max\{ \min\{d_\angle(x, r_i)\ d_\angle(x, s_j)\} \mid x \in R(i, j) \}$，并令 $\alpha_{\min} := \min\{ \alpha(i, j) \mid (i, j) \in \{1, \ldots, m-1\}^2 \}$。易知 $\alpha_{\min} > \arctan\ 1/m$。

现在引入另一条射线 t，使得 $\max\{ d_\angle(x,\ t) \mid x \in [1, m]^2 \} < \alpha_{\min}$。实现这一点的一种方法是设置 $p(t) = (-m^2,\ 0)$，并使 t 水平向右发射 。这意味着，在每个 $R(i,\ j)$ 中，对于 $(i,\ j) \in \{1,\ \ldots,\ m-1\}^2$,，存在一个点，该点将先于 t 被射线访问，并且早于 r_i 或 s_j 中的任何一条射线被访问，这意味着区域 $vreg(t)$ 在每个正方形中都有一个面，总计为 $\Theta(n^2)$ 个面。◀

上述定理直接推出 RVD($\mathcal{S}$) 的复杂度为 $O(n^3)$ 上界。接下来，我们将展示如何调整角距离函数，从而可以应用 Sharir [33] 的一般上界。作为副产品，我们还获得了 RVD($\mathcal{S}$) 的构造算法。

▶ **定理 12.** 对于任意 $\epsilon > 0$，*RVD*(S) 的组合复杂度为 $O(n^{2+\epsilon})$ 。此外，*RVD*(S) 可在 $O(n^{2+\epsilon})$ 时间内构造。

证明。 每个站点 r 都会生成一个 距离函数 $d^r_\angle(x) := d_\angle(x, r)$ 它将点$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ 映射为该点到 r 的角距离。考虑这些距离函数图像在 3维空间中的下包络。RVD图($\mathcal{S}$) 可视为将

该下包络投影到平面后的结果。对于代数距离函数，Sharir [33]给出了该下包络复杂度的界，并提供了相应的算法结果。然而，角距离函数并非代数函数。我们的策略是将 [33] 的结果应用于函数d^r_{alg}，这些函数与函数 $d^r_{\angle}$ 等价，即两组函数会产生相同的下包络，但每个函数 d^r_{alg} 都由三维空间中的常数个代数曲面片构成。更准确地说，我们希望找到分段代数函数 d^r_{alg}，使其满足以下性质：

$$d^r_{\angle}(x) < d^s_{\angle}(x) \iff d^r_{\text{alg}}(x) < d^s_{\text{alg}}(x)$$

对于所有 r，$s \in \mathcal{S}$ 和 $x \in \mathbb{R}^2$。

不失一般性，假设 $p(r)$ 位于原点，且 r 朝向坐标系正 x_1 方向的右侧。令 $x \in \mathbb{R}^2$ 和 $\alpha := d^r_{\angle}(x)$。接下来，我们希望在 $0 \le \alpha \le \pi$ 时令 $d^r_{\text{alg}}(x) := 1 - \cos(\alpha)$，在 $\pi \le \alpha < 2\pi$ 时令 $d^r_{\text{alg}}(x) := 3 + \cos(\alpha)$。函数 $x \mapsto \cos(\alpha)$ 确实是代数函数，因为它先将 x 缩放至单位长度，再将其映射到第一个坐标。于是我们有

$$d^r_{\text{alg}}((x_1,x_2)) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_1 = x_2 = 0, \\ 1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{if } x_1 \neq 0,\ x_2 \ge 0, \\ 3 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

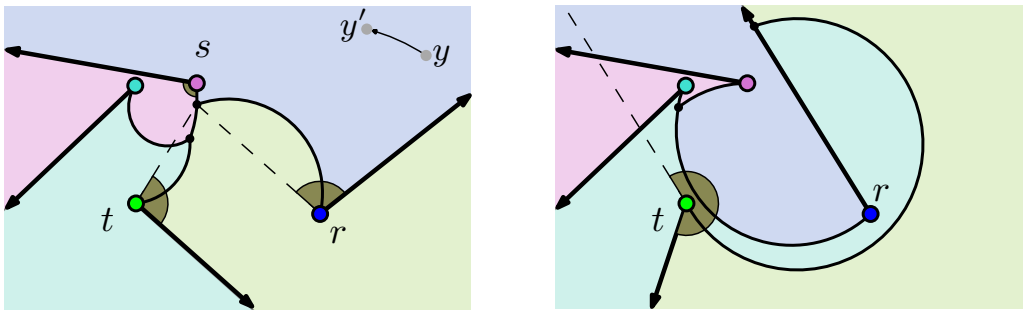
由于 d^r_{alg} 由三个片片组成，它们都是代数的，且具有简单的区域边界，因此将 [33] 应用于这些函数即可得到所述的组合结果和算法结果。◀

3.2 平面的布罗卡照明

现在我们来探讨 $\mathbb{R}^2$ 中的布罗卡照明问题。回顾一下，给定一个射线集 $\mathcal{S}$，并在每条射线上对准一个 α 探照灯，该问题旨在求出照亮目标区域所需的最小布罗卡角。$\mathbb{R}^2$ 的布罗卡角为

$$\alpha^* = \max_{x\in\mathbb{R}^2} \min_{r\in\mathcal{S}} d_{\angle}(x,r).$$

设 $x^* \in \mathbb{R}^2$ 是实现 α^* 的一个点。从概念上说，x^* 是最后一个被照亮的点；假设所有 n 探照灯起初的张角为 $\alpha = 0$，随后同时逐渐增大张角，直到整个区域都被照亮。虽然 x^* 不一定唯一，但我们证明它位于 RVD($\mathcal{S}$) 上。



(a) α^* 在 RVD($\mathcal{S}$) 的一个顶点处取得，由射线 r、s、t 确定。点 y' 到其最近射线的距离大于 y。

(b) α^* 在无穷远处的射线 r 上取得，由射线 t 确定。

图 13 集合 $\mathcal{S}$ 中 4 条射线的布罗卡角的两个示例，位于 $\mathbb{R}^2$。

12 旋转射线 Voronoi 图与泛光灯照明

▶**命题 13**。 射线集合 S 的布罗卡角在 $RVD(S)$的某个顶点处实现，或在集合 S 中某条射线上的无穷远点处实现。

证明。 我们首先证明 x^* 位于 RVD($\mathcal{S}$)上。假设，为了导出矛盾， x^*不位于 RVD($\mathcal{S}$)上，而是位于某条射线 r的 Voronoi 区域内部。那么，只需沿着以 r 为圆心、半径为 $p(r)$ 的圆沿 $d(p(r)\ x^*)$逆时针方向移动，我们总能找到一个与 y 具有更大角距离的点，从而产生矛盾；例如，参见图 13a 中的点 y' 和 。

正如备注5所指出的，沿圆弧边的距离是单调的。因此，边的某个端点处的距离至少与边内部任意点处的距离一样大。对于沿射线边的距离，该论证同样成立。因此，具有最大距离 x^* 的点要么是 RVD($\mathcal{S}$) 的顶点，要么是 $\mathcal{S}$ 的某条射线上的无穷远点，证明完毕。关于这两种情况的示意图，请参见图 13。◀

上述结果表明，我们可以通过先在$O(n^{2+\epsilon})$时间内构造 RVD($\mathcal{S}$)，然后遍历图以找到到其最近邻距离最大的顶点，从而找到 x^*，进而找到 α^*。RVD($\mathcal{S}$)是一个平面图，因此可以使用标准方法在与其规模呈线性关系的时间内完成遍历。由此得到以下结果。

▶**定理 14**。 由 n 条射线组成的集合 S 的布罗卡角可以在 $O(n^{2+\epsilon})$ 时间内求得。

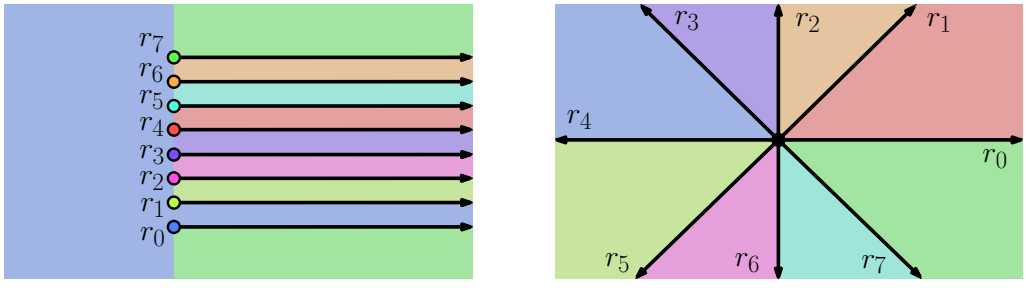
本节最后给出布罗卡角取值的紧确界。

▶**命题 15**。 给定由 n 条射线组成的集合 S，布罗卡角的取值范围为$[2\pi/n, 2\pi]$。

证明。对于上界，考虑由 n 条平行射线组成的集合 S：令 r_i 具有 $p(r_i) = (i, 0)\widehat{\ }$，并令 $d(r_i) = (1, 0)$，其中 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$；示例见图 14a。注意，最后被照亮的点是 r_0 上无穷远处的点，即点 $(0, +\infty)$；当 α 到达 2π时，该点将由 r_{n-1} 照亮。因此上界得证。

对于下界，需要注意的是，为了照亮整个 $\mathbb{R}^2$，还应照亮无穷远处的所有点。要照亮这些点，所有射线的角度之和应至少为 2π。因此，在最佳情况下，无穷远点恰好被一条射线看到，从而得到一个 $2\pi/n$ 下界。以下构造实现了该 $2\pi/n$ 下界。令$\mathcal{S}$ 为一组 n 条射线，它们的顶点位于 (0,0)，且任意两条相邻射线之间的角度差为 $2\pi/n$；示例见图 14b。

最后被照亮的点将是每条射线 r_i右侧的所有点。这些点会在 α 到达 $2\pi/n$时由 r_{i-1} 同时照亮。此外，通过扩大由两条相邻射线构成的扇形，并相应缩小其余所有扇形，上述构造可以轻松调整，以取得 $(2\pi/n,\ 2\pi)$ 中的任意值。◀



(a) $\alpha^* = 2\pi$。 **(b)** $\alpha^* = 2\pi/n$。

图 14 在 $\mathbb{R}^2$中实现布罗卡角下界的 8 条射线集合。

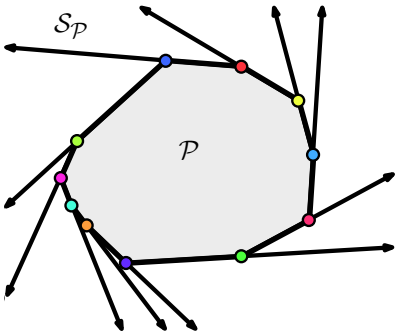


图 15 一个凸多边形 $\mathcal{P}$和射线集 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$。

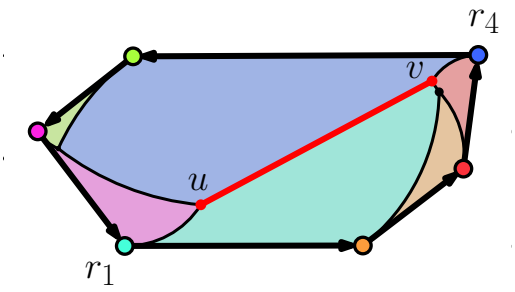


图 16 一个具有两条反向平行边 r_1, r_4 的凸多边形 $\mathcal{P}$ 。PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 的边 uv 上所有点都实现 α^*。

4 凸多边形中的旋转射线 Voronoi 图

本节介绍一种线性时间算法，用于构造限制在凸多边形区域内部的旋转射线 Voronoi 图。我们还将说明如何使用该算法以最优线性时间计算凸多边形的布罗卡角。

本节中，我们始终使用以下记号。用 $\mathcal{P}$ 表示一个具有 n 个顶点的凸多边形，用 $v_1, \dots, v_n$ 表示沿着 $\mathcal{P}$ 的边界按逆时针方向遍历时遇到的各顶点，且这些顶点按出现顺序标记。为简便起见，我们假设对下标进行算术运算时均以 n 为模。用 $\mathcal{S}_\mathcal{P} = \{r_1, \dots, r_n\}$ 表示由 n 条射线组成的集合，其中射线 r_i 从顶点 v_i 出发并经过顶点 v_{i+1}，见图 15。最后，用 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) := RVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) $\cap\, \mathcal{P}$ 表示将 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 的旋转射线 Voronoi 图限制在$\mathcal{P}$的内部所得的图。图 3b 和图 16 展示了该图的示例。

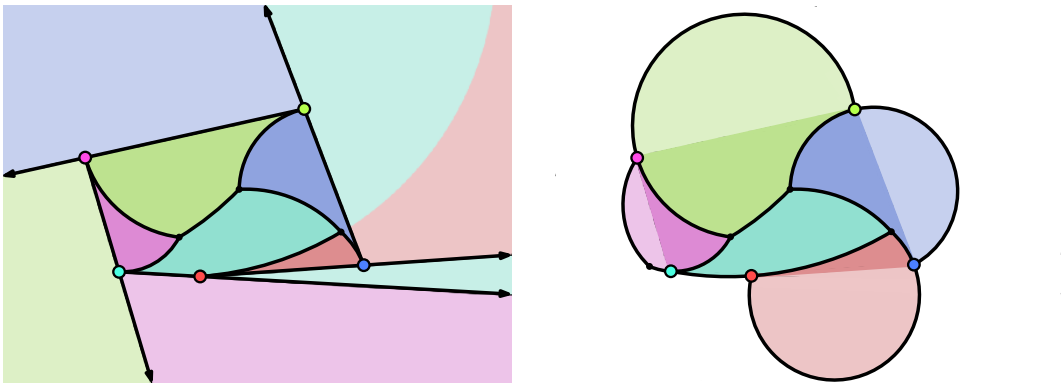
本节安排如下。第4.1节介绍 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 的一组基本性质。第4.2节说明，PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 可以在 $O(n \log n)$ 时间和 $O(n)$ 空间内计算。我们的主要结果将在第4.3–4.5节给出，证明图 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 可以在 $\Theta(n)$ 时间和 $O(n)$ 空间内计算。最后，在第4.6节，我们将讨论这一结果对于计算$\mathcal{P}$的布罗卡角以及相关照明问题的意义。

4.1 图的性质

为简明起见，本节中我们作如下假设。首先，$\mathcal{P}$ 中任意三个顶点都不共线。其次，$\mathcal{P}$ 的边界或内部没有任何点到$\mathcal{S}_\mathcal{P}$中的四条射线等距；这意味着 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 的所有顶点最多关联三条边。最后，我们假设$\mathcal{P}$中不存在平行边，也就是说，$\mathcal{S}_\mathcal{P}$中不存在反平行射线。最后这一假设保证布罗卡角在唯一点处取得，该点是 RVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 的一个顶点。回顾第2节，两条反向平行边 r 和 s 的平分线包含连接 $p(r)$ 与 $p(s)$ 的线段。因此，若存在反平行射线，布罗卡角可能在 Voronoi 边上的任意一点处取得；该边是两条反向平行边的平分线的一部分。参见图16中的边 uv 。

下面介绍 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 的一些有用性质。

圆盘图。 我们首先定义一种辅助沃罗诺伊图，即圆盘图（*DD*），其平分线系统仅由平分圆组成。研究这种图更为简单



(a) 突出显示的图 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)。淡化显示了 $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$ 中的图 RVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)。

(b) 图 DD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)。$\mathcal{P}$ 内的图突出显示。

图 17 一个具有五个顶点的凸多边形 $\mathcal{P}$，以及 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 和 DD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)。

并且与 t 重合　　旋转射线 Voronoi 图中的 co　　凸多边形$\mathcal{P}$。

形式化地，给定两条射线 r 和 s，我们将 r 和 s 的*DD* 平分线 定义为整个平分圆 $C_b(r, s)$。r 相对于 s的*DD* 支配区域 记为 $dr_D(r, s)$，根据两条射线的角度差，它是该圆的内部或外部。如果 $\text{diff}_\angle(r, s) < \pi$，则 $dr_D(s, r)$ 是 $C_b(r, s)$ 的内部，而 $dr_D(r, s)$ 是外部；如果 $\text{diff}_\angle(r, s) \geq \pi$，则反之。

射线 $r \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ 的 DD 区域是 $dreg(r) := \bigcap_{s \in \mathcal{S}_\mathcal{P} \setminus \{r\}} dr_D(r, s)$。圆盘图为 DD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) $= \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{r \in \mathcal{S}_\mathcal{P}} dreg(r)$；参见图 17b。

圆盘图不一定覆盖 $\mathbb{R}^2$，因为 $n \geq 3$。这是由于某些站点之间存在循环支配关系的区域；例如图 17b 中的白色/未着色区域。

根据此定义，RVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 中圆弧边附近的每个点，在 RVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 和 DD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 中都与同一条射线相关联。由于在$\mathcal{P}$内，旋转射线沃罗诺伊图仅由圆弧边组成，因此 RVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 和 DD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 在 $\mathcal{P}$ 内完全相同；见图 17。

▶**引理 16.** *DD*(S) 的每个区域 $dreg(r)$ 都是连通的，且其边界上包含 $p(r)$.

证明。 根据定义，区域 $dreg(r)$ 由 $n-1$ 个圆盘或其对应物的交集构成。这些圆盘的边界均为 $C_b(r, s)$，其中某个 s，并且根据定义，顶点 $p(r)$ 位于 $C_b(r, s)$上，因此它也位于所有这些 $C_b(r, s)$ 圆盘交集的边界上。

为了证明区域 $dreg(r)$ 是连通的，我们以$p(r)$ 为反演中心，对平面进行反演，并任取一个半径作为反演圆。此反演会将经过反演中心的圆映射为经过反演中心的直线，因此每个支配区域 $dr_D(r, s)$ 都会映射为一个半平面。半平面的交集是连通的，而反演保持连通性，因此区域 $dreg(r)$ 也是连通的。◀

▶ **推论 17。** 图 *DD*（$S_\mathcal{P}$）在 *P* 内的截断部分具有树结构，其复杂度为 $\Theta(n)$。它与 *PRVD*（$S_\mathcal{P}$）重合。

现在我们将注意力转回 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)；我们将使用第 4.5 节中的圆盘图。

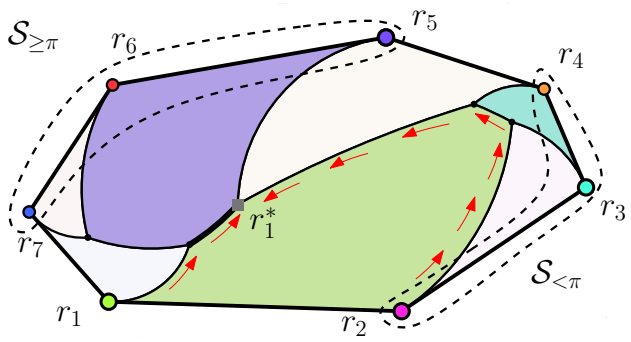


图18 区域 $vreg(r_1)$ 的性质示意图。沿边界 $\partial vreg(r_1)$ 的距离朝最大值 r_1^* 递增。$\mathcal{S}_\mathcal{P}\setminus r_1$ 中的站点分成两组：$\{r_2, r_3, r_4\}$和$\{r_5, r_6, r_7\}$。 r_1 和 r_5 的区域将$\mathcal{P}\setminus\{vreg(r_5)\cup vreg(r_1)\}$ 分成两个连通分量。

▶ **引理 18**。 在 $PRVD(S_\mathcal{P})$ 中，站点 r_i 的 *Voronoi* 区域是连通的，与多边形边 $p(r_i)$ $p(r_{i+1})$ 相接，并具有以下形式：它由一个与多边形边 $p(r_i)p(r_{i+1})$ 相接的单一面组成。边界上的距离从 r_i 起，以及从 r_{i+1} 起，均朝着位于 r_i^* 的全局最大值单调递增。见图*18*。

证明。 考虑其面与 r_i 的面相邻的站点序列，顺时针顺序如下。我们证明：**(i)** 该序列实际上是 $(r_{i+1}, r_{i+2},...,r_n, r_1, ..., r_{i-1})$的一个子序列；以及 **(ii)** 沿该序列的距离单调递增，直至达到最大值 r_i^*。参见图18（其中 $r_i = r_1$）。

(i)设 r_j 为一条射线，使得 $vreg(r_i)$ 与 $vreg(r_j)$ 相邻。根据引理 16，每个区域都是连通的，并且与其对应的射线相接，因此 $vreg(r_i)$ 与 $vreg(r_j)$ 的并集将凸多边形分割成两个单连通分量（见图18中的 $vreg(r_1) \cup vreg(r_5)$）。给定第二条射线 r_k，其区域与区域 $vreg(r_i)$ 相邻，由此可知， r_k 与 $vreg(r_i)$ 和 $vreg(r_k)$ 之间的边必须位于同一个连通分量中，因为 $vreg(r_k)$ 也是连通的（见图18中的 $vreg(r_3)$）。因此，沿多边形边界的 r_j 和 r_k 的顺序，与 r_i 的面上的顺序相同。

(ii) 我们根据与 p_i 的角度差将集合 $\mathcal{S}_\mathcal{P} \setminus p_i$ 划分为两部分。角度差 $\text{diff}_\angle(r_j, r_i) \geq \pi$ 的射线集合 $\mathcal{S}_{\geq\pi}$，以及角度差 $\text{diff}_\angle(r_j, r_i) < \pi$ 的射线集合 $\mathcal{S}_{<\pi}$（参见图18中的虚线曲线）。沿着射线链 $\mathcal{S}_{<\pi}$（分别为 $\mathcal{S}_{\geq\pi}$），距离从 r_{i+1}（分别为 r_i）向实现 r_i^* 的点递增。

我们沿链 $S_{<\pi}$ 对单调性进行归纳论证：起初仅考虑两条射线 r_i 和 r_{i+1} 的沃罗诺伊图，然后按照逆时针顺序逐步添加集合 $S_{<\pi}$ 中的更多射线。基础情形可由平分线的性质直接得出，参见备注5。假设现在要将站点 r_k添加到 RVD($\{r_i, \ldots, r_{j-1}\}$)中。根据性质 (i)，如果 r_i和 r_j之间有一条边，那么它与 $p(r_i)$相邻，也就是说，它是面 $vreg(r_i)$的边链上的最后一条边。令 v 为 r_i 和 r_j之间这条边的另一个端点。由于 $r_j \in S_{<\pi}$，沿边 r_i 和 r_j 的距离从 v 到 $p(r_i)$单调递增。此外，根据归纳假设，在 RVD($\{r_i, \ldots, r_{j-1}\}$)中，沿着 r_i 与围成 $vreg(r_i)$的所有站点之间的边链，距离按照逆时针顺序从 r_{i+1} 到 v单调递增。对于 $S_{\geq\pi}$ 的证明与此类似，但距离是在顺时针顺序下递增。◀

▶ **推论 19.** 对于任意顶点 $u \in PRVD(P)$，至少有两条关联边的距离朝向 u递增。

证明. 反设存在一个顶点 u，它有两条关联边的距离朝向 u递减。这两条边是围成区域的一条边链的一部分 $vreg(r_i)$。但这与引理 18 矛盾。◀

▶**引理 20。** 给定一个角 c，P 的内部中所有满足以下条件的点 at 到其最近站点的距离 c 最小，构成一个凸多边形 B。

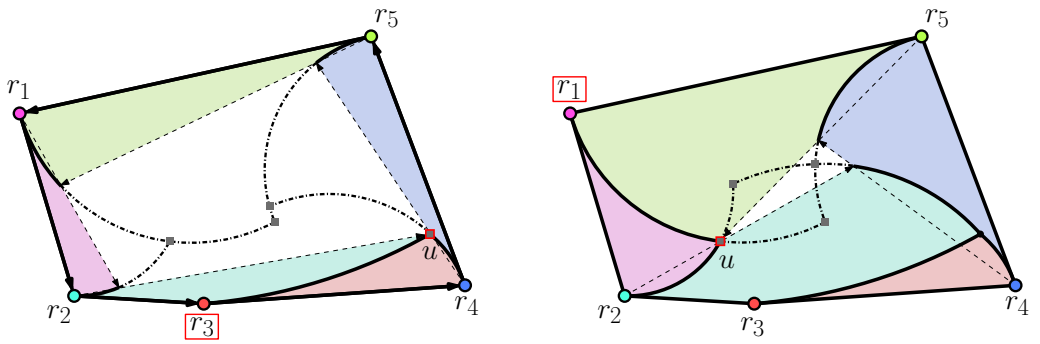
证明。 注意，与射线 c 的距离为 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 的所有点构成一条半直线。因此，B 是一个凸多边形，因为它是由$\mathcal{S}_\mathcal{P}$中的所有射线经 c旋转后所定义的半平面的交集。◀

4.2 一个简单的 $O(n\log\ n)$ 时间算法

我们首先描述一种简单的 $O(n\log\ n)$ 时间算法，用于构造 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)，该算法采用所谓的“坍缩”策略：从区域的边界开始（此处所有点到其最近站点的距离均为零），算法逐步构造该图，按距离递增的顺序添加边和顶点，直到到达距离最大的顶点。采用类似策略的算法还包括点 [34] 和线段 [3]的最远点 Voronoi 图。我们注意到，$O(n\log\ n)$ 时间算法 [2]以类似方式求出布罗卡角，而无需构造 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)。

我们对该算法进行高层次描述；图 19 展示了示意图。算法从$\mathcal{P}$的顶点开始，这些顶点都是 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 中各边的起点。对于循环顺序中相邻的每一对边，计算它们的下一个交点（如果存在）。在这些交点中，与其最近站点距离最小的那个就是图的下一个顶点。

此塌缩 事件的处理方式是：构造顶点以及通向该顶点的边，然后将这些边移出后续考量，并开始构造一条新边。在构造出的顶点处，一个面塌缩，因为它已完全构造完成，之后不再纳入考量。新边属于塌缩面相邻两个面的平分线。重复执行这一过程，即计算并处理新的塌缩 事件，直到所有剩余的边交于单点。这个最后的点是 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 中距离最大的顶点，并实现了$\mathcal{P}$的布罗卡角。



(a) 第一个事件：顶点 u 由这些射线产生：(r_2, r_3, r_4)，而 r_3 的区域“塌缩”。

(b) 第二个事件：顶点 u 由这些射线产生：(r_5, r_1, r_2)，而 r_1的区域 “塌缩”。

图 19 $O(n\log\ n)$ 时间算法前两个事件的示意图。在每个事件中，都标出了所有候选顶点；在第三个事件（未示出）中，由射线 r_2、r_4、r_5 确定的候选顶点只有一个。

算法的正确性。该算法按照与最近站点的距离递增的顺序构造图的特征（顶点和边）。首先注意，由于引理 20，与其最近站点距离相同的点集构成一个单一环（见图 19 中的虚线多边形）。因此，要跟踪将要添加到图中的“活动”候选项边，只需使用循环链表即可。

我们证明，在所有距离较小的顶点均已构造的前提下，该算法能够正确找到下一个顶点。根据推论 19，每个顶点至少有两条距离朝向该顶点递增的边，因此，下一个顶点是当前圆弧序列中一对边的交点。这样的边对必须相邻，否则就会违反引理 20 的循环性。由于我们按距离递增的顺序构造该图，算法会选取距离最小的候选顶点。

最后，我们说明该算法不会遗漏任何候选边。这是因为算法会在每个顶点事件处考虑一条新的候选边，而且边只能从顶点开始，因为距离函数沿边不会出现局部极小值；参见备注5中的单调性。

▶ **命题 21.** “收缩”算法可在 $O(n \log n)$ 时间内构造 $PRVD(S_P)$。

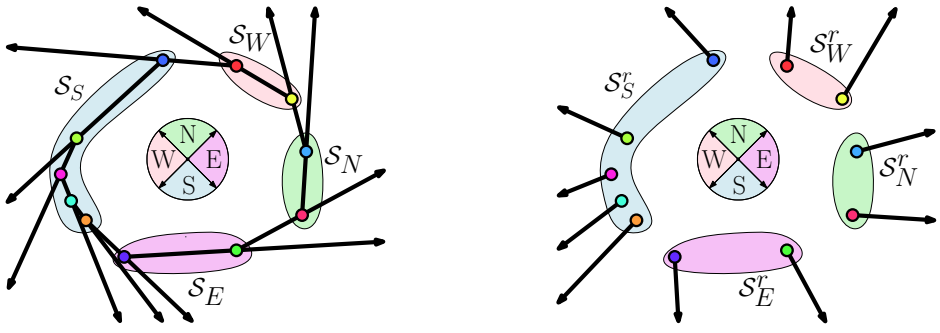
证明。 时间复杂度分析很直接。算法需要 $O(n\log n)$ 时间对最初的 n 个事件排序。随后会有 $n-2$ 个事件，并且若使用最小优先队列，每个事件需要 $O(\log n)$ 时间处理。因此，算法的总运行时间为 $O(n\log n)$。 ◀

4.3 一个最优的 Θ(n)时间算法

现在我们描述如何以最优的 Θ(n) 时间构造 PRVD($\mathcal{S}_P$)。我们已经证明，PRVD($\mathcal{S}_P$) 具有树结构，并且每个沃罗诺伊区域都是连通的。然而，尽管 PRVD($\mathcal{S}_P$) 的结构简单，它并不是抽象 *Voronoi* 图 [23, 25]的一个实例，后文将对此进行说明。因此，我们无法直接使用这一框架下现有的方法。相反，我们将问题拆分为若干子问题，其中每个子问题都属于抽象Voronoi图框架。

我们的算法可简要描述如下，另请参见算法 1 中的伪代码。第一步，我们将$\mathcal{S}_P$划分为四个由连续射线组成的集合$\mathcal{S}_N$、$\mathcal{S}_W$、$\mathcal{S}_S$和$\mathcal{S}_E$，具体取决于射线所朝向的方向北、西、南或东；图20a给出了一个示例。

第二步，我们将每个集合$\mathcal{S}_d$, $d \in \{N,W,S,E\}$转换为一个集合$\mathcal{S}_d^r$，其中 $\mathcal{S}_d$ 中的每条射线都顺时针旋转 $\pi/2$ 角；见图20b。然后，我们将每个图 RVD($\mathcal{S}_d^r$) 独立构造为抽象Voronoi图的一个特殊实例；见



(a) 射线集$\mathcal{S}_N$、$\mathcal{S}_W$、$\mathcal{S}_S$、$\mathcal{S}_E$。 **(b)** 射线集$\mathcal{S}_N^r$、$\mathcal{S}_W^r$、$\mathcal{S}_S^r$、$\mathcal{S}_E^r$。

图20 旋转前后$\mathcal{S}_P$ 中射线集的划分。

算法 1 $\Theta(n)$-时间算法，用于构造 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)。

输入：一个有 $n \geq 3$ 个顶点的凸多边形 P。输出：图 PRVD($\mathrm{S}_\mathcal{P}$)。1 $\{\mathrm{S}_N, \mathrm{S}_W, \mathrm{S}_S, \mathrm{S}_E\} \leftarrow$ 拆分 $\mathrm{S}_\mathcal{P}$；2 对每个 $d \in \{N, W, S, E\}$ 执行 3 $\mathrm{S}_d^r \leftarrow$ 旋转 S_d；4 构造 RVD(S_d^r)；5 RVD($\mathrm{S}_W^r \cup \mathrm{S}_S^r$) $\leftarrow$ 合并 RVD(S_W^r) 和 RVD(S_S^r)；6 RVD($\mathrm{S}_N^r \cup \mathrm{S}_E^r$) $\leftarrow$ 合并 RVD(S_N^r) 和 RVD(S_E^r)；7 PRVD($\mathrm{S}_\mathcal{P}$) $\leftarrow$ 合并 RVD($\mathrm{S}_W^r \cup \mathrm{S}_S^r$) 和 RVD($\mathrm{S}_N^r \cup \mathrm{S}_E^r$)；8 返回 PRVD($\mathrm{S}_\mathcal{P}$)；

图21。最后，我们合并四个图，得到 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)。合并分为两个阶段进行；参见图24和图25。

我们在第4.4节详细介绍四个图的构造，并在第 4.5 节介绍合并阶段。因此，我们得出以下定理。

▶ **定理 22。** 给定一个凸多边形 P，我们可以在确定性最优 $\Theta(n)$时间内构造 $PRVD(\mathcal{S}_\mathcal{P})$ 。

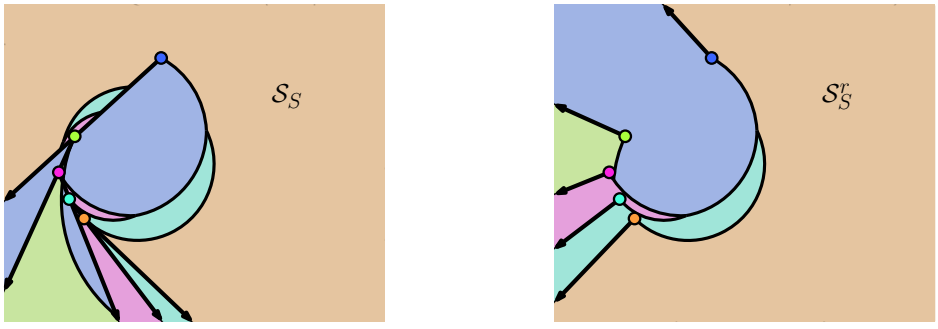
4.4 $\Theta(n)$-时间算法：构造四个图

我们采用抽象*Voronoi*图 [23, 24]的框架。为符合这一框架，角平分线系统必须满足以下三条公理：

- **(A1)** 平分线 $b_\angle(r,\ s)$，$\forall r,\ s \in \mathcal{S}$ 是一条与直线同胚的无界简单曲线。**(A2)** RVD($\mathcal{S}'$) 中的区域 $vreg(r)$，$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ 和 $\forall r \in \mathcal{S}'$，是连通的。**(A3)** RVD($\mathcal{S}'$) 中所有区域的并集的闭包，$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$，覆盖 $\mathbb{R}^2$。

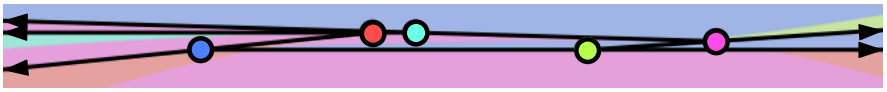
注意，子集 $\mathcal{S}_d$ （因此集合 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$）不一定满足公理 (A2)；参见图21a 中不连通的 Voronoi 区域。

考虑射线集 $\mathcal{S}_d^r$、$d \in \{\mathrm{N}、\mathrm{W}、\mathrm{S}、\mathrm{E}\}$ 的每个变换子集，其中每条射线均顺时针旋转 $\pi/2$ 的角。我们将证明每个集合 $\mathcal{S}_d^r$ 都满足上述公理。采用顺时针旋转的直观依据在于，只有圆形

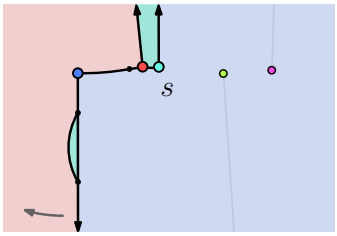


(a) RVD($\mathcal{S}_S$) 图。 **(b)** RVD($\mathcal{S}_S^r$) 图。

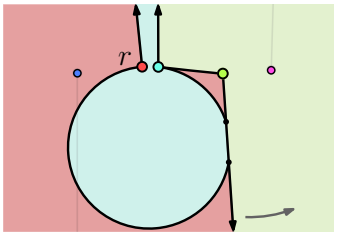
图21 集合 $\mathcal{S}_S$ 和集合 $\mathcal{S}_S^r$ 的 Voronoi 图（顺时针旋转 $\pi/2$ 后）。



(a) 未经过旋转的完整射线集的沃罗诺伊图（放大显示）。



(b) 由3条射线组成的子集按顺时针方向旋转了 $\pi/2$ 。$vreg(s)$ 有 2 个面；要使其连通，需要进一步旋转。



(c) 由3条射线组成的子集按顺时针方向旋转了 $\pi/2$. $vreg(r)$ 有 2 个面；要使其连通，需要减少旋转量。

图 22 一个有 5 个顶点的（细长）多边形示例，用以说明注释 23。

平分线的部分会出现在 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 中，而这些平分圆在均匀旋转下保持不变。图 21b 展示了一个在顺时针（$\pi/2$）旋转后满足公理 (A2) 的图。

不过请注意，仅顺时针旋转 ($\pi/2$) 并不总能使整个集合 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 满足公理 (A2)，图 22 中的示例说明了这一点：给定图 22a 中由 5 条射线组成的集合$\mathcal{S}_\mathcal{P}$，其中存在一个由 3 条射线组成的子集，需要进一步旋转才能使所有区域连通，见图 22b 中的 $vreg(s)$；也存在一个由 3 条射线组成的子集，需要减少旋转，见图 22c 中的 $vreg(r)$；因此，需要适当地划分 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 。

▶ 注释 23. 存在一些射线集合 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$，对于这些集合，不存在一个唯一的角度可以用来旋转射线并使公理 (A2) 得以满足。

请注意，我们对 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 进行了划分，使得集合 $\mathcal{S}_d^r$ 中的任意两条射线 r 和 s 之间的角度差至多为 $\pi/2$，即 $\min\{\text{diff}_\angle(r,s),\text{diff}_\angle(s,r)\} \leq \pi/2$。这是证明以下引理的一个关键性质。

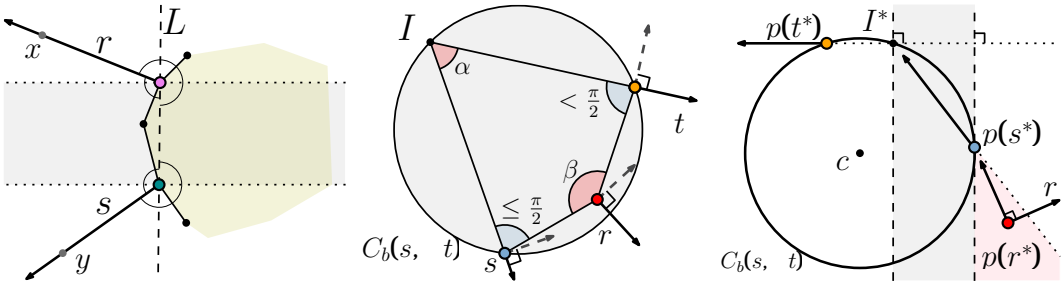
▶**引理 24.** *S_d^r 的平分线系统满足公理 (A1)-(A3)。*

证明. 我们分别证明这三个公理。

(A1): 设 r,s 是 $\mathcal{S}_d^r$ 中的一对射线。我们证明 r 和 s 不相交。于是，根据引理 3，两条不相交射线的平分线是一条无界简单曲线。

令 $x \in r \setminus \{p(r)\}$（分别地，$y \in s \setminus \{p(s)\}$）表示位于 r（分别地，s）上的一点，并令L 为经过 p（r）和 p（s）的直线；见图 23a。由多边形的凸性可知，$\angle$（x,p（r） p（s））和 $\angle$（p（s） p（r） x）均大于或等于 $\pi/2$；因此，r 位于与 L 正交且经过 p（r）的闭半平面内，该半平面不包含p（s）。同理，s 位于与 L 正交且经过 p（s）的闭半平面内，该半平面不包含 p（r）。因此，由这两个半平面确定的水平带（图 23a 中以阴影表示）将 r 和 s 分隔开，所以它们不相交。

(A2): 只需证明该性质对于 $\mathcal{S}_d^r$ 中任意大小为三个的子集 [24] 成立即可。根据引理8，每个 Voronoi 区域恰好有一个无界面，因此，如果一个区域不连通，则它必须至少包含一个有界面。正如引理 7 所示，三条射线的图至多有一个适当的 Voronoi 顶点。因此，图中的有界面不可能仅由与适当顶点关联的边围成，所以，这样的有界面必然与某条射线关联。于是，只需证明不存在某条射线两次与另外两条射线的平分圆相交。



(a) (A1)：射线 r 和 s 被阴影走廊分隔。**(b)** (A2)： $p(r)$ 位于 $p(s)$ 和 $p(t)$ 之间，因此它位于 $C_b(s,t)$ 中。**(c)** (A2)：竖直条带（以阴影表示）将 c 和 r 分隔开。

图 23 引理 24 证明的示意图。

设 $\{r,s,t\}$ 是由 S_d^r 中的 3 条射线组成的子集。我们将证明，$\{r,s,t\}$ 中没有射线会与由 $\{r,s,t\}$ 中另外两条射线定义的平分圆相交两次。我们对 r 证明这一点，即 r不会与 $C_b(s,t)$ 相交两次； s、 t 的情形类似。不失一般性，假设 $\mathrm{diff}_\angle(t,s) < \mathrm{diff}_\angle(s,t)$。我们根据 $p(r)$ 的相对位置，将证明分为三种情形。

(1) 如果 $p(r)$ 位于 $C_b(s,t)$ 的内部，那么 r 与 $C_b(s,t)$ 恰好相交一次，结论即得。

(2) 假设 $p(r)$ 沿凸多边形链位于 $p(s)$ 和 $p(t)$ 之间，并令 I 为支撑直线 $l(s)$ 与 $l(t)$ 的交集；见图 23b。由于射线的旋转，我们有 $\angle(p(r)\ p(s)\ I) \le \pi/2$ 和 $\angle(I, p(t)\ p(r)) < \pi/2$。因此，根据圆内接四边形的性质[2]， $p(r)$ 位于 $C_b(s,t)$ 的内部；通过 $p(s)$、$p(t)$ 和 I 的圆可见， $\alpha+\beta>\pi$ 位于图 23b 中。因此， r 与 $C_b(s,t)$ 相交一次。

(3) 还需研究 $p(r)$ 位于 $C_b(s,\ t)$ 外部，且按逆时针顺序， $p(r)$ 同时出现在 $p(s)$ 和 $p(t)$ 之前或之后的情形。我们考虑 $p(r)$ 出现在 $p(s)$ 和 $p(t)$ 之前的情形。另一种情形可类似处理。

令 c 表示 $C_b(s,t)$ 的中心，令 r^* （分别为 s^*、 t^*）表示绕其顶点逆时针旋转 $\pi/2$ 后得到的射线 r （分别为 s、 t），并令 I^* 表示支撑直线 $l(s^*)$ 与 $l(t^*)$ 的交点。不失一般性，假设 t^* 是一条水平向左的射线；参见图 23c。如果 r 与 $C_b(s,t)$ 相交两次，则 c 位于有向直线 $l(r^*)$ 的右侧，因此只需证明 c 位于 $l(r^*)$ 的左侧。为此，注意到 $p(r^*)$ 位于经过 $p(s^*)$ 的竖直线右侧（因为 $\mathrm{diff}_\angle(t^*,r^*) \le \pi/2$），且位于 $l(s^*)$ 左侧（因为 r^* 和 s^* 由一个凸多边形诱导）；见图 23c 中的红色区域。另一方面，经过 I^* 的竖直线将 C 与 $p(r^*)$ 分隔开。因此， c 位于 r^* 的左侧，命题得证。

(A3)： RVD图($\mathcal{S}_d^r$)由距离函数定义，每个站点对应一个距离函数，其区域为整个平面。因此，平面中的任意点都必须属于 RVD($\mathcal{S}_d^r$)中某个区域的闭包。◀

由于每个 Voronoi 区域都是连通且无界的，并且 RVD($\mathcal{S}$)是连通的（引理 9），我们可以得出以下结论。

▶ **推论 25。** *RVD*(S_d^r) 是一个复杂度为 $\Theta(S_d^r)$ 的树。

[2] 圆内接四边形是指顶点位于同一个圆上的四边形，因此，其四条边的垂直平分线共点。此外，凸四边形是圆内接四边形，当且仅当其对角互补（即它们的和为 π）。

关于抽象Voronoi图的结果 [23] 直接推出了一种随机化算法，可在 $O(n\log n)$ 时间内构造 RVD($\mathcal{S}_d^r$)。我们还可以进一步降低这一时间复杂度，通过证明 $\mathcal{S}_d^r$ 的平分线系统属于限制性更强的哈密顿抽象 *Voronoi* 图 框架 [25]，将其改进为 $O(n)$ 时间。除满足公理 (A1)-(A3) 外，还必须满足以下公理：

- **(A4)** 存在一条复杂度为常数的简单曲线 $\mathcal{H}$，使得 $\mathcal{H}$ 恰好一次经过 RVD($\mathcal{S}'$) 中的每个区域$vreg(r)$，$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ 和 $\forall r \in \mathcal{S}'$。$\mathcal{H}$ 可以是闭合的，也可以是无界的。

如果 $\mathcal{S}$ 的平分线系统满足公理 (A1)-(A4)，并且已知 RVD($\mathcal{S}'$) 中各区域沿 $\mathcal{H}$ 的排列顺序 $\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$，那么可以在 $\Theta(n)$ 时间内计算出 RVD($\mathcal{S}$) [25]。因此，对于我们的问题，只需] 找到一条满足这些性质的曲线 $\mathcal{H}$ 。

▶ **引理 26.** *RVD*(S_d^r) 可以在确定性的 $\Theta(|S_d|)$ 时间内构造。

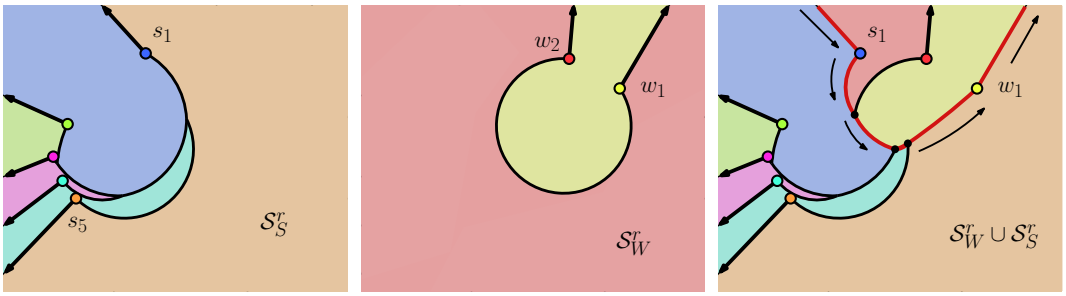
证明。 我们证明 $\mathcal{S}_d^r$ 满足上文定义的公理 (A4)；由此可直接根据已有结果推出线性时间算法 [25]。

设$\mathcal{H}$ 为一个半径足够大的圆，使所有平分圆都完全位于$\mathcal{H}$的内部。对于任意$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}_d^r$, RVD($\mathcal{S}'$)是树（推论 25），因此其各面都是无界的。根据定义，$\mathcal{H}$ 不与任何平分圆相交，因此$\mathcal{H}$ 必定恰好经过RVD($\mathcal{S}'$)的每个区域一次；当$\mathcal{H}$ 与一条射线相交时，经过的区域便会发生变化。

RVD($\mathcal{S}_d^r$)的无界面的排列顺序对应于多边形$\mathcal{P}$上相应顶点的排列顺序，而对于任意$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}_d^r$，这一顺序都保持不变。此外，$\mathcal{P}$ 的顶点排列顺序是输入的一部分，证明完毕。◀

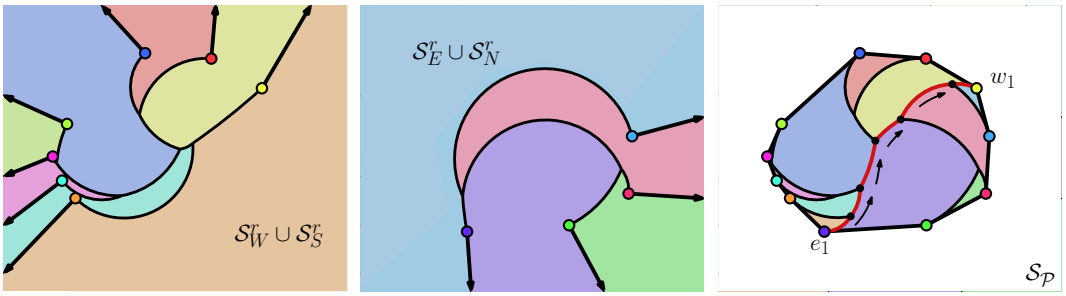
4.5 Θ(n)时间算法：合并四个图

现在，我们合并全部四个图，得到 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)。合并过程分为两个阶段。在第一阶段，我们合并 RVD($\mathcal{S}_W^r$) 和 RVD($\mathcal{S}_S^r$)，得到 RVD($\mathcal{S}_W^r \cup \mathcal{S}_S^r$)；同理，合并后得到 RVD($\mathcal{S}_E^r \cup \mathcal{S}_N^r$)；见图24。在第二阶段，我们将图 RVD($\mathcal{S}_W^r \cup \mathcal{S}_S^r$) 和 RVD($\mathcal{S}_E^r \cup \mathcal{S}_N^r$) 限定在$\mathcal{P}$的内部后进行合并，得到 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)；见图25。我们先概述合并过程，再分别深入介绍各个步骤的细节。这个过程需要特别注意，因为所得图不属于抽象Voronoi图的框架。最终，我们将证明以下结论。



(a) RVD图 （$\mathcal{S}_S^r$）。 **(b)** RVD图($\mathcal{S}_W^r$). **(c)** RVD图($\mathcal{S}_W^r \cup \mathcal{S}_S^r$)。

图24 第一合并阶段：合并RVD($\mathcal{S}_W^r$)和RVD($\mathcal{S}_S^r$)。高亮的红色边对应于合并曲线，黑色箭头示意了从无穷远处沿射线 s_1 开始、并在射线 w_1结束的追踪过程。



(a) RVD图($\mathcal{S}_W^r \cup \mathcal{S}_S^r$)。 **(b)** RVD图($\mathcal{S}_E^r \cup \mathcal{S}_N^r$)。 **(c)** PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)。

图25 第二个合并阶段：将限制在$\mathcal{P}$上的RVD($\mathcal{S}_W^r \cup \mathcal{S}_S^r$)和RVD($\mathcal{S}_E^r \cup \mathcal{S}_N^r$)合并。

▶ **引理 27。** 给定所有 $d \in$ {N,W,S,E} 的 $RVD(S_d)$，我们可以在 $\Theta(n)$ 时间内合并四个图，得到 $PRVD(S_\mathcal{P})$。

合并过程概要。 我们说明如何将 RVD($\mathcal{S}_W^r$) 与 RVD($\mathcal{S}_S^r$) 合并；将 RVD($\mathcal{S}_E^r$) 与 RVD($\mathcal{S}_N^r$) 合并的方法与此类似。设 $w_1, \ldots, w_k$ 为$\mathcal{S}_W^r$中的射线，$s_1, \ldots, s_l$ 为$\mathcal{S}_S^r$中的射线，它们沿$\mathcal{P}$的边界按逆时针顺序排列。按相同顺序排列的$\mathcal{S}_E^r$和$\mathcal{S}_N^r$中的射线分别记作 $e_1, \ldots, e_p$ 和 $n_1, \ldots, n_q$。

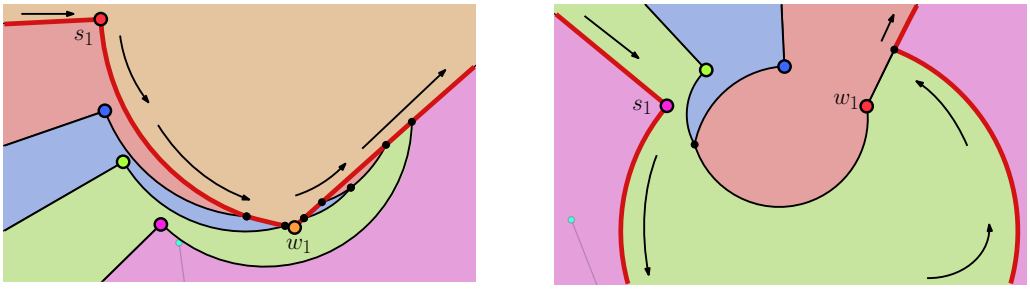
我们需要构造两个图的合并曲线，它将 $\mathbb{R}^2$ 划分为两部分；一侧保留图 RVD($\mathcal{S}_W^r$)，另一侧保留 RVD($\mathcal{S}_S^r$)；参见图24c，其中红色边表示合并曲线。在第一阶段，合并曲线由两条射线 s_1 和 w_1，以及 RVD($\mathcal{S}_W^r \cup \mathcal{S}_S^r$)中与站点 $w \in \mathcal{S}_W^r$ 和 $s \in \mathcal{S}_S^r$等距的圆弧边构成。这些圆弧边形成一条由 $p(s_1)$和 w_1界定的单一连通链。我们用 E_C表示合并曲线中的圆弧边集合。

在第二阶段，我们只在多边形$\mathcal{P}$内进行合并，即将限制在$\mathcal{P}$内的 RVD($\mathcal{S}_W^r \cup \mathcal{S}_S^r$)与 RVD($\mathcal{S}_E^r \cup \mathcal{S}_N^r$)合并。由于计算范围限制在$\mathcal{P}$内，合并曲线仅由 E_C中的圆弧边构成；这些圆弧边形成一条由$p(e_1)$和 $p(w_1)$界定的单一连通链；参见图25c。

接下来，我们将详细描述合并过程，并证明所述结论的正确性。构造合并曲线的基础是找到合并曲线上的一个起点，然后像标准沃罗诺伊图（例如，参见 [4]）那样沿其追踪。

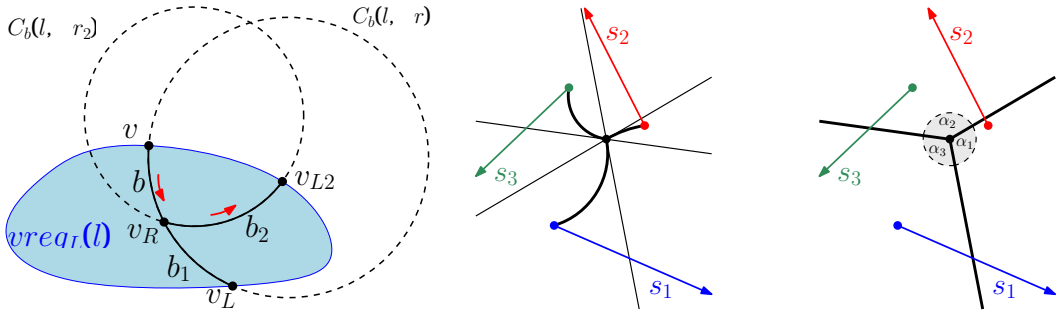
沿射线追踪（第一个合并阶段）。 如前所述，第一个合并阶段的合并曲线由两条射线 s_1 和 w_1 以及圆弧边集合 E_C组成。我们从无穷远处射线 s_1 上的一点开始追踪合并曲线。沿 s_1 追踪非常简单，因为该射线完全位于 $vreg(w_k)$中。为此，考虑集合 $\mathcal{S}_W$（旋转前），并将所有射线连续顺时针旋转角度 $\pi/2$。在此过程中，w_k 不与 $\mathcal{S}_W$中的任何射线相交，因此 $s_1 \in vreg(w_k)$。

沿射线 s_1之后，追踪会沿着圆弧边 E_C（下一段将对此进行描述）继续进行，最终到达射线 w_1。沿射线 w_1 进行追踪的方式则有所不同。与 s_1不同，射线 w_1 可能与 RVD($\mathcal{S}_S^r$)的许多圆弧边相交，每个交点都会在 w_1上形成一个顶点；例如参见图 26a。为确定这些顶点，我们将 w_1 与 RVD($\mathcal{S}_S^r$) 求交。由于已证明 RVD($\mathcal{S}_S^r$) 是一棵树（见推论 25），因此可以在 $O(|\mathcal{S}_S|)$ 时间内轻松完成此操作。此外，曲线 E_C 可能会在 $p(w_1)$以外的某个点与 w_1 相交；例如参见图 26b。在这种情况下，上述搜索应从该点开始。



(a) 射线 w_1 与 RVD($\mathcal{S}_S^r$)相交。 **(b)** 序列 E_C 并未终止于 p（w_1）。

图 26 合并两个图 RVD($\mathcal{S}_W^r$) 和 RVD($\mathcal{S}_S^r$) 的两个特殊情况。



(a) 追踪合并曲线（用箭头表示），位于区域 $vreg_L(l)$ 内（以阴影显示）。 **(b)** 与正规顶点相邻的圆弧边的切线，以及相应的曲线角。

图 27 合并 E_C 时追踪过程的示意图，以及无需回溯的说明。

追踪圆弧边序列 E_C（两个合并阶段）。现在，我们说明如何通过调整沃罗诺伊图中追踪合并曲线的标准过程，在 $\Theta(|E_C|)$时间内追踪 E_C；例如，对于点的平分线 [4], 到角平分线，就采用了这种方法。不过，为了证明正确性，我们仍需证明合并过程中无需进行回溯，也就是说，在追踪过程中，沃罗诺伊区域的任何部分至多扫描一次；我们将在引理 28 中证明这一点。

假设我们正在合并两个射线沃罗诺伊图，沿着一条合并曲线进行追踪，其主要的圆弧边部分记为 E_C。令 L 为定义曲线 E_C 左侧图的射线集，令 R 为右侧的射线集。不失一般性，假设我们正从上到下追踪 E_C；参见图27a。令 $vreg_L(l)$ 表示站点 $l \in L$ 在 RVD(L) 中的沃罗诺伊区域；对于 $vreg_R(r)$，$r \in R$ 同理。假设 b 的当前边 E_C 刚刚在点 v 处进入区域 $vreg_L(l)$。令 r 为右侧图中的站点，使得边 b 位于区域 $vreg_R(r)$ 内。我们确定 b 离开区域 $vreg_L(l)$（分别为 $vreg_R(r)$）的点 v_L（分别为 v_R）。通过从 v 开始沿顺时针方向扫描 $vreg_L(l)$ 的边界，可以找到点 v_L。通过从 v 开始沿逆时针方向扫描 $vreg_R(r)$ 的边界，可以找到点 v_R。不失一般性，假设首先到达顶点 v_R，该顶点随后确定边 b 的端点。

E_C 从 v_R 沿着平分线 $b_\angle$继续延伸出另一条边 b_2 (l, r_2)，其中 r_2 是 R中的另一个站点。为确定 v_{L2}，我们从 v_L 出发，沿顺时针方向扫描 $vreg_L(l)$的边界。以下引理证明了这一做法的正确性： v_{L2}不可能位于已经扫描过的 $vreg_L(l)$的边界上。对于 v_{R2}，情况类似。

►**引理 28**。沿着圆弧边序列 E_C进行追踪时，无需回溯 .

证明。 设 v， v_L 和 v_{L2} 为上述追踪 E_C的说明中定义的点。要证明无需回溯，只需证明点 v， v_L 和v_{L2} 沿着面 $vreg_L(l)$的边界按逆时针顺序出现；见图27a。

两条相交曲线之间的曲线角 是它们在交点处两条切线之间的角。图中的每个正规顶点度数为 3，因此，与一个顶点关联的三条边会形成三个曲线角；见图27b。每个这样的曲线角都可以看作两个半平面的交集处的角。因此，每个这样的角都小于 π。

点 v_R 是合并图中的一个正规顶点。因此，边 b_2 和 b 之间的曲线角$\angle(v_{L2},\ v_R,\ v)$小于 π。另一方面，边 b_1 和 b_2 之间的角$\angle(v_L,\ v_R,\ v)$恰好为 π ，因为两条边都位于同一条平分线上。在多边形内部，两条相关的平分线至多相交一次。因此，边 b_2 必须沿逆时针方向，在 v_L 之后、 v 之前与 $vreg_L(l)$的边界相交。◄

由于追踪 E_C不需要回溯，因此追踪耗时为 $\Theta(|E_C|)$。

构造的正确性 E_C。 接下来，我们证明前文使用但未证明的若干结论的正确性。具体而言，我们证明：(i) 链 E_C 与w_1关联，并且在第一阶段与 $p(s_1)$关联，在第二阶段与 $p(e_1)$关联；(ii) 所构造的链是完整曲线 E_C，即不存在其他尚未识别的连通分量；

(i) 在第一合并阶段，考虑从 $p(s_1)$开始追踪链 E_C 。在 $p(s_1)$处的距离恰好为 $\pi/2$，且单调递增。进一步考虑由线段 $p(w_1)p(w_2)$ $p(w_2)p(w_3)\ldots, p(w_k)p(s_1), p(s_1)p(s_2)\ldots, p(s_{l-1})p(s_l)$构成的折线链 P^* 以及射线 s_l。P* 上任意一点到其最近射线的距离为 $\pi/2$。因此，随着沿链 E_C 的距离不断增大，这条链最终只能到达 w_1。同理，在第二合并阶段，完整多边形 P 上任意一点到其最近射线的距离为 $\pi/2$，因此 E_C 由 $p(e_1)$和 $p(w_1)$界定。

(ii) 为证明该结论，我们使用第4.1节中定义的圆盘图。根据引理8，每个区域恰好有一个无界面，因此，如果E_C中存在另一个连通分量，则它必定是有界的。第二个无界分量将意味着某个 Voronoi 区域具有两个无界面。假设合并曲线还有另一个有界连通分量。这样的分量完全由圆弧边围成，而这些圆弧边由相应平分线的平分圆诱导。由于圆盘图中的平分圆是 RVD($\mathcal{S}_W^r \cup \mathcal{S}_S^r$)、RVD($\mathcal{S}_E^r \cup \mathcal{S}_N^r$) 和 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 中出现的圆弧边的超集，因此，这样的有界分量也会出现在相应的圆盘图中，这与引理 16 矛盾。

现在假设合并曲线有一个分量，其一侧由射线界定。在最终合并步骤中这是不可能的，因为在 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 中，$\mathcal{P}$ 的某条边/射线上的所有点都属于相应射线的区域。在初始合并步骤中（假设我们将 RVD($\mathcal{S}_W^r$) 与 RVD($\mathcal{S}_S^r$) 合并），对于每条射线 $s_i \in \mathcal{S}_S^r$（ w_1除外），该射线的整个右侧都与 $vreg(s_{i-1})$相邻。利用用于证明 $s_1 \in vreg(w_k)$的相同论证即可证明这一点（其中， s_1 分别是$\mathcal{S}_S^r$的第一条射线， w_k 是$\mathcal{S}_W^r$的最后一条射线）。因此， E_C 的任何有界分量都不可能与射线相邻。于是，E_C 是一条单一的无界链。

根据上述讨论，我们可以推断，除了第一次合并阶段中的射线 w_1 之外，合并曲线不会在所得图中形成有界面。因此，在

第一个合并图 RVD($\mathcal{S}_W^r \cup \mathcal{S}_S^r$) 中，每条射线 $s_i \in \mathcal{S}_S^r$ 最多有两个面（无界面和与 w_1 相邻的面），并且对于任意 $w_i \in \mathcal{S}_W^r$，$vreg(w_i)$ 都是连通的。相反，在 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 中，对于任意 $r_i \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$，$vreg(r_i)$ 都是连通的。

总体时间复杂度。 在第一步中，追踪射线 s_1 和 n_1 需要 $\Theta(1)$ 时间，追踪射线 w_1 和 e_1 分别需要 $\Theta(|\mathcal{S}_S|)$ 时间和 $\Theta(|\mathcal{S}_N|)$ 时间。追踪曲线 E_C 分别需要 $O(|\mathcal{S}_W| + |\mathcal{S}_S|)$ 时间和 $O(|\mathcal{S}_E| + |\mathcal{S}_N|)$ 时间；因此，第一步总共需要 $O(n)$ 时间。最后一步需要 $O(n)$ 时间来追踪 E_C，并需要 $\Theta(n)$ 时间将图限制到 $\mathcal{P}$ 中。因此，四个图的总体合并需要 $\Theta(n)$ 时间。

综合以上内容，我们可以在 $\Theta(n)$ 时间内将 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 平凡地划分为四个集合，可以在 $\Theta(n)$ 时间内构造四个图（引理 26），并可以在 $\Theta(n)$ 时间内将它们合并（引理 27）。因此，我们可以将本节的主要结果总结（并重新表述）如下。

▶ **定理 22.** 给定一个凸多边形 P，我们可以在确定性的最优 $\Theta(n)$时间内构造 $PRVD(S_\mathcal{P})$ 。

4.6 凸多边形的布罗卡照明

现在我们转而讨论凸多边形 $\mathcal{P}$ 的布罗卡照明问题。我们的目标是求出$\mathcal{P}$ 的布罗卡角，即

$$\alpha^* = \max_{x \in \mathcal{P}} \min_{r \in \mathcal{S}_\mathcal{P}} d_\angle(x, r).$$

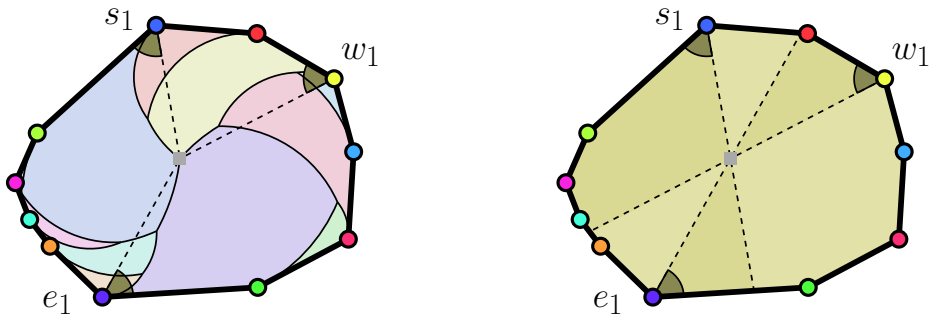
注意，图 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 是 RVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 的子集，因此命题 13 也适用于这种情形，于是 α^* 可在 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 上实现。然而，由于该图严格限制在$\mathcal{P}$内部，实现布罗卡角的点只能位于一个与 3 条射线等距的顶点上；示例见图 28a。

与 $\mathbb{R}^2$ 中的情形类似，要找到 α^*，我们可以先构造 PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$)，然后遍历该图以找到距离最大的顶点。这两个步骤都可以在 $\Theta(n)$ 时间内完成，由此得到以下结果。

▶**定理 29。** 凸多边形 P 的布罗卡角可在 $\Theta(n)$ 时间内求得。

接下来，我们给出布罗卡角取值的紧确界。

▶**命题 30。** 给定凸多边形 P，布罗卡角的取值范围为$(0, \pi/2 - \pi/n]$。



(a) PRVD($\mathcal{S}_\mathcal{P}$) 以及实现 α^* 的射线。 **(b)** 照亮$\mathcal{P}$的三个 α^* 探照灯。

图28 由（e_1、w_1、s_1）实现的多边形 $\mathcal{P}$ 的布罗卡角 α^* 。

证明。 $\pi/2-\pi/n$ 布罗卡角的一个上界见 [7, 16]。正多边形可实现这样的角。最后一个被照亮的点是多边形的中心，所有探照灯同时以 $\pi/2-\pi/n$角照亮该点。

为证明下界，注意到在保持凸性的同时，我们可以将正多边形平滑地变换为一个包围盒宽度为 w、高度为 h、纵横比为 h/w 且任意接近于零的多边形，使得 α^* 也任意接近于零。因此，可以得到范围为 $(0,\ \pi/2-\pi/n]$ 的任意布罗卡角。◀

用 3 个探照灯照亮一个凸多边形。请注意，实现 α^* 的这三个探照灯足以照亮 $\mathcal{P}$，由此可得以下结论；参见图 28b 中的示例。

▶ 注 31. 凸多边形$\mathcal{P}$ 可以完全由三个 α^* 探照灯照亮。

最后，我们讨论我们的结果的一个推论。考虑以下问题 [32]: 给定一个有 n 个顶点的凸多边形 $\mathcal{P}$，三个顶点 β^* 探照灯（不一定与边对齐）照亮 $\mathcal{P}$ 所需的最小角度 β^* 是多少? 针对 $n=3$ 的一个$\beta^*=\pi/6$ 解，以及针对 $n=4$ 的一个 $\beta^*=\pi/4$ 解，见 [11]。此外，针对任意 n 的一个$\beta^*=\pi/3$ 解见 [41]。我们的结果给出了针对任意 n 的一个 $\beta^*=\alpha^*$ 解；并且，如命题 30 所证，$\alpha^*\le\pi/2-\pi/n$。因此，我们的结果涵盖了上述针对 $n=3$，4，6 的解，并将 $n=5$ 的情况改进为 $\beta^*=3\pi/10$。

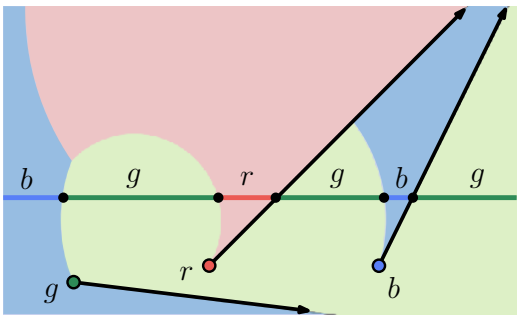
5 限制在曲线上的射线 Voronoi 图

探照灯照明问题也曾在限制于曲线的情形下得到研究，参见例如 [12, 17, 22, 39]。受此类问题启发，设 $\mathcal{S}$ 为二维空间中的 n 条射线集合，并设感兴趣的区域为一条简单曲线 $\mathcal{C}$。我们将限制在 $\mathcal{C}$ 上的 $\mathcal{S}$ 的旋转射线 Voronoi 图记作 $\mathrm{RVD}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$。我们证明，$\mathrm{RVD}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 可视为二维空间中距离函数的下包络。

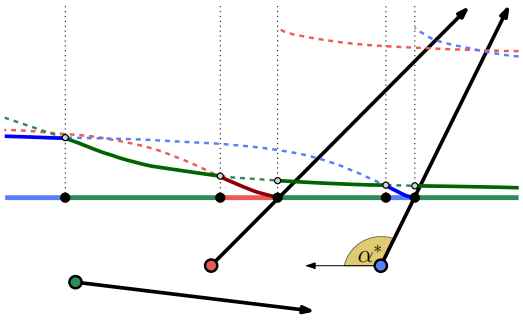
5.1 直线的布罗卡照明

我们首先考虑曲线$\mathcal{C}$ 为一条直线的情形；见图29。我们证明如下结论。

▶**定理 32.** 给定一条直线 C，$RVD_{\mathcal{C}}(S)$ 的复杂度为 $O(n2^{\alpha(n)})$，且可在 $O(n\alpha(n)\log n)$ 时间内构造。



(a) $\mathrm{RVD}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 是 $\mathrm{RVD}(\mathcal{S})$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的交集与$\mathcal{C}$。



(b) $\mathrm{RVD}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 作为以下距离函数的下包络（高亮显示）：距离函数（虚线）。

图29 曲线$\mathcal{C}$是水平线 $x_2=0$，而$\mathcal{S}$是由3条射线组成的集合$\{r,b,g\}$。

证明。不失一般性，设 C 为水平线 $x_2 = 0$；参见图29。每个站点 $r \in S$ 都会在二维空间中诱导一个距离函数，将点 $x = (x_1, 0) \in C$ 映射到点$x_{map} = (x_1, d_\angle(x, r))$（图29b中的虚线曲线）。注意，如果一条射线 r 与 C 相交于点 $(i, 0)$，则该处存在一个不连续点，距离函数被拆分为两个部分定义的函数：一个定义域延伸至 i，另一个定义域从 i 开始。图 $\mathrm{RVD}_{\mathcal{C}}(S)$ 是所有这些距离函数投影到 C 上所得的下包络。n 个部分定义函数的下包络中，任意一对函数至多相交 s 次，其复杂度为 $O(\lambda_{s+2}(n))$ [18]，且可在 $O(\lambda_{s+1}(n) \log n)$ 时间内构造 [20],，其中 $\lambda_s(n)$ 是最长的 (n, s) Davenport-Schinzel 序列的长度。

注意，两个距离函数的交集数量与其平分圆和$\mathcal{C}$的交集数量相同。在我们的情况下，一对函数至多相交两次，因为$\mathcal{C}$ 可能与对应两条射线的平分圆相交两次，因此 $s = 2$。此外，至多有 $2n$ 个部分定义的函数。因此，$\mathrm{RVD}_{\mathcal{C}}(S)$ 的复杂度为 $O(n2^{\alpha(n)})$，并且可以在 $O(n\alpha(n) \log n)$ 时间内构造，其中 $\alpha(n)$ 是阿克曼函数的逆函数。◀

考虑给定$\mathcal{S}$时直线$\mathcal{C}$的照明，布罗卡角 α^* 在 $\mathrm{RVD}_{\mathcal{C}}(S)$ 的一个顶点处，或在无穷远处的$\mathcal{C}$ 上的某一点处实现；例如，见图29b，其中点 $(-\infty, 0)$ 首先被射线 b 照明。因此，简单遍历 $\mathrm{RVD}_{\mathcal{C}}(S)$ 即可在线性额外时间内揭示 α^*。

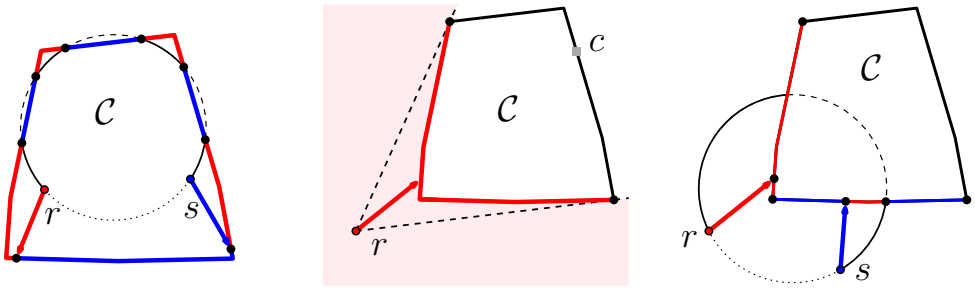
5.2 闭曲线的布罗卡照明

上述方法可以推广到任意有界或无界的简单曲线。首先考虑$\mathcal{C}$ 为闭凸曲线，旨在照亮$\mathcal{C}$的内部，即射线的顶点位于$\mathcal{C}$内部。

▶**定理 33.** 设 C 为闭凸曲线，且 S 中射线的顶点位于 C 的内部。那么，$RVD_{\mathcal{C}}(S)$ 的复杂度为 $O(\lambda_{s+2}(n))$，并且可以在 $O(\lambda_{s+1}(n)\log n)$ 时间内构造，其中 s 是 C 与一个（二等分）圆相交的最大次数。

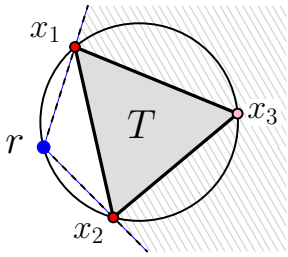
证明。 假设曲线 $\mathcal{C}$ 按如下形式参数化，$\mathcal{C}: [0, 1] \to \mathbb{R}^2$其中 $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(1)$。与定理 32 的方法类似，每个站点 r 在曲线 $\mathcal{C}$上诱导一个距离函数，将值 $t \in [0, 1]$ 映射到点 $(t, d_\angle(\mathcal{C}(t)\ r))$，结论可直接由文献中关于距离函数包络的结果得出

二维空间 [18, 20]。◀



(a) $\mathcal{C}$内的两条射线。 **(b)** 射线的可见部分。 **(c)** $\mathcal{C}$外的两条射线。

图 30 $\mathcal{C}$ 是一个凸多边形。沿$\mathcal{C}$ 的射线的支配区域已突出显示。



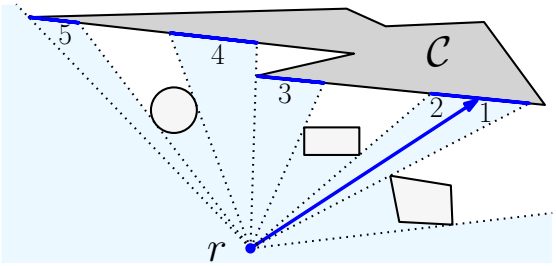


图 31 证明的示意图 **图 32** 对$\mathcal{C}$ 的照明及参数 k。定理 34 的。点 x_3 不可见，射线 r 的距离函数被分割为来自射线 r的 5 个部分函数。三角形 T 是$\mathcal{C}$的子集。（k=5）由不同类型的断点划分。

作为推论，若$\mathcal{C}$ 是一个圆，则 RVD$_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 的复杂度为 $O(n2^{\alpha(n)})$，并且可在 $O(n\alpha(n)\log\ n)$ 时间内构造，因为$\mathcal{C}$ 与一个平分圆至多相交两次；因此，$s=2$。相反，若$\mathcal{C}$ 是一个有 m 条边的凸多边形，则 RVD$_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ 的复杂度为$O(\lambda_{2m+2}(n))$，并且可在 $O(\lambda_{2m+1}(n)\log\ n)$ 时间内构造，因为$\mathcal{C}$ 与一个平分圆至多相交 $2m$ 次，因此 $s=2m$；例如，参见图 30a 中的多边形。

如果考虑照明闭凸曲线$\mathcal{C}$外部的情况，即射线位于$\mathcal{C}$外部，我们可以得到更好的结果。在这种情况下，每条输入射线只能看到曲线$\mathcal{C}$ 的一部分：如果开线段 $p(r)x$不与$\mathcal{C}$相交，则点 $x\in\mathcal{C}$ 可被射线 r 看到；参见例如图 30b，其中射线 r 的可见部分（点 c 无法被 r看到）。如果点 x 无法被射线 $r\in\mathcal{S}$看到，则令 $d_{\angle}(x,r)=+\infty$。

▶**定理 34.** 设 C 为一条闭凸曲线，且 S 中射线的顶点位于 C 外部。那么，带有可见性限制的 $RVD_{\mathcal{C}}(S)$ 的复杂度为 $O(n2^{\alpha(n)})$，并且可以在 $O(n\alpha(n)\log\ n)$ 时间内构造出来。

证明. 我们采用定理 32 和定理 33 中使用的相同方法。为了得到所述结果，我们证明任意两条射线可见的曲线部分与平分圆至多相交两次（$s=2$）。参见图 30c。

给定一条射线 $r\in\mathcal{S}$，考虑$\mathcal{C}$ 中 r可见的部分。反设，由 r 定义的平分圆与$\mathcal{C}$ 的可见部分至少有 3 个交点 x_1,x_2,x_3; 另见图 31。根据定义，$p(r)$ 位于平分圆上，因此$p(r)$ 位于圆弧 x_1x_2、x_2x_3 或 x_3x_1 之一上；不失一般性，设$p(r)\in x_1x_2$。根据假设，$p(r)$ 位于$\mathcal{C}$外部，因此显然点 $x_1,x_2\in C$ 阻挡了 r的可见性，而 x_3 对 r不可见。但 x_3 是平分圆与$\mathcal{C}$可见部分的交点，矛盾。

由两条射线可见的$\mathcal{C}$ 部分是分别由每条射线单独可见部分的子集，因此它与平分圆至多相交两次。因此，$s=2$ 并且如定理 32 和定理 33所示，组合和算法结果随之得到。◀

扩展到其他类别的曲线。我们的方法可以扩展到这样的曲线类别：它们会对射线/站点施加可见性限制。作为示例，请参见图 32，并考虑在存在其他曲线（障碍物）的情况下对非凸多边形$\mathcal{C}$ 进行照明。给定一条射线 r，由 r 可见的$\mathcal{C}$ 部分可能由于可见性约束而被分割成许多极大连通分量；分割可能由曲线$\mathcal{C}$ 自身引起（图 32 中的断点 (3-4)）；也可能由其他曲线引起（图 32 中的断点 (2-3)）；或者由射线 r 自身引起（图 32 中的断点 (1-2)）。

如果射线 r_i 可见的曲线$\mathcal{C}$ 部分被分割成 k_i 个连通分量，这意味着相应的 r_i 距离函数被分割成 k_i 个部分定义函数。令 $K = \sum_{i \in n} k_i$ 表示部分定义函数的总数。利用关于二维空间 [18, 20], 中距离函数下包络的结果，我们可以推导出 RVD$_{\mathcal{C}}$($\mathcal{S}$)的复杂度为 $O(\lambda_{s+2}(K))$，并且可以在 $O(\lambda_{s+1}(K) \log K)$时间内构建。

6 总结性评论

在这项工作中，我们研究了一种新的 Voronoi结构，即旋转射线 Voronoi 图。我们研究该图的动机源于多边形中的布罗卡照明问题。我们提出了一种解决不同区域中布罗卡照明问题的通用方法：给定一个区域 D 和一个射线集 $\mathcal{S}$，通过构造限制在 D上的 RVD($\mathcal{S}$)，我们可以找到使用与 $\mathcal{S}$对齐的 α^* 个探照灯照明 D 所需的最小角α^* 。

有许多有趣的问题值得研究，这些问题既与将 RVD($\mathcal{S}$) 作为 Voronoi结构进行研究有关，也与探照灯照明问题有关。关于 $\mathbb{R}^2$中的 RVD($\mathcal{S}$)，我们希望确定最坏情况下的组合复杂度是否为$\Theta(n^2)$，以及是否可以在 $o(n^{2+\epsilon})$ 时间内构造它。关于多边形的布罗卡照明，我们希望了解我们的方法如何扩展到其他类别的（非凸）多边形。由于可见性约束，我们预计会遇到困难，但我们相信，我们算法的主要概念可以经过调整，以适用于这类情形。

参考文献

1 Carlos Alegría、Ioannis Mantas、Evanthia Papadopoulou、Marko Savić、Hendrik Schrezenmaier、Carlos Seara 和 Martin Suderland。旋转射线 Voronoi 图及其在泛光灯照明中的应用。载于第 29 届欧洲算法研讨会年会（ESA 2021）。Schloss Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，2021年。2 Carlos Alegría-Galicia、David Orden、Carlos Seara 和 Jorge Urrutia。用与边对齐的统一角度探照灯照亮多边形（布罗卡照明）。载于第 33 届欧洲计算几何研讨会论文集（EuroCG 2017），第 281–284 页，2017年。3 Franz Aurenhammer、Robert L Scot Drysdale 和 Hannes Krasser。最远线段 Voronoi 图。Information Processing Letters，100(6):220–225，2006年。 doi:10.1016/j.ipl.2006.07.008。4 Franz Aurenhammer、Rolf Klein 和 Der-Tsai Lee。Voronoi 图与德劳内三角剖分。World Scientific，2013年。5 Piotr Berman、Jieun Jeong、Shiva P. Kasiviswanathan 和 Bhuvan Urgaonkar。角度与扇区装箱。载于第 19 届 ACM 算法与体系结构并行性研讨会论文集（SPAA'07），第 171–180 页，2007年。 doi:10.1145/1248377.1248405。6 Arthur Bernhart。追逐多边形。Scripta Mathematica，24(1):23–50，1959年。7 Ádám Besenyei。布罗卡角与 Dmitriev 和 Dynkin 的几何瑰宝。The American Mathematical Monthly，122(5):495–499，2015年。 doi:10.4169/amer.math.monthly.122.5.495。8 Prosenjit Bose、Leonidas J. Guibas、Anna Lubiw、Mark Overmars、Diane Souvaine 和 Jorge Urrutia。探照灯问题。International Journal of Computational Geometry & Applications，7(1-2):153–163，1997年。 doi:10.1142/S0218195997000090。9 Matthew Cary、Atri Rudra、Ashish Sabharwal 和 Erik Vee。无限扇形区域的探照灯照明。《计算几何》，43(1):23–34，2010年。 doi:10.1016/j.comgeo.2007.01.004。10 John Casey。《欧几里得几何原本》前六卷续篇。Dublin University Press，1888年。

11 Felipe Contreras、Jurek Czyzowicz、Nicolas Fraiji 和 Jorge Urrutia。用顶点泛光灯照亮三角形和四边形。载于第 10 届加拿大计算几何会议论文集（CCCG'98），1998年。12 Felipe Contreras、Jurek Czyzowicz、Eduardo Rivera-Campo 和 Jorge Urrutia。舞台的最优探照灯照明。载于第 14 届计算几何研讨会年会论文集（SoCG 1998），第 409–410 页，1998年。13 Jurek Czyzowicz、Stefan Dobrev、Benson Joeris、Evangelos Kranakis、Danny Krizanc、Jan Maňuch、Oscar Morales-Ponce、Jaroslav Opatrny、Ladislav Stacho 和 Jorge Urrutia。用旋转雷达监测平面。Graphs and Combinatorics，31(2):393–405，2015年。doi:10.1007/s00373-015-1543-4。14 Mark de Berg、Joachim Gudmundsson、Herman Haverkort 和 Michael Horton。具有旋转距离代价的 Voronoi 图。载于计算几何周：青年研究人员论坛（CG:YRF）摘要集，2017年。15 Jana Dietel、Hans-Dietrich Hecker 和 Andreas Spillner。关于舞台最优探照灯照明的一则注记。Information Processing Letters，105(4):121–123，2008年。doi:10.1016/j.ipl.2007.08.009。16 Nikolai A Dmitriev 和 E. Dynkin。关于随机矩阵的特征根。Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya，10(2):167–184，1946年。17 Vladimir Estivill-Castro、Joseph O'Rourke、Jorge Urrutia 和 Dianna Xu。用顶点灯照亮多边形。Information Processing Letters，56(1):9–13，1995年。 doi:10.1016/0020-0190(95)00129-Z。18 Sergiu Hart 和 Micha Sharir。Davenport–Schinzel 序列及广义路径压缩方案的非线性。Combinatorica，6(2):151–177，1986年。 doi:10.1007/BF02579170。19 Herman Haverkort 和 Rolf Klein。双曲线是恒定角差轨迹。arXiv 预印本 arXiv:2112.00454，2021年。20 John Hershberger。在线段数为 n 的情况下，以 $O(n \log n)$ 时间求上包络。Information Processing Letters，33(4):169–174，1989年。 doi:10.1016/0020-0190(89)90136-1。21 Dan P I smailescu。用顶点灯照亮凸多边形。Periodica Mathematica Hungarica，57(2):177–184，2008年。 doi:10.1007/s10998-008-8177-3。22 Hiro Ito、Hideyuki Uehara 和 Mitsuo Yokoyama。舞台照明问题的 NP 完全性。载于第 2 届日本离散与计算几何会议论文集（JCDCG'98:），第 158–165 页。Springer，1998年。23 Rolf Klein。具体与抽象 Voronoi 图，第 400 卷。Springer Science & Business Media，1989年。24 Rolf Klein、Elmar Langetepe 和 Zahra Nilforoushan。抽象 Voronoi 图再探。《计算几何：理论与应用》，42(9):885–902，2009年。doi:10.1016/j.comgeo.2009.03.002。25 Rolf Klein 和 Andrzej Lingas。线性时间内构造哈密顿抽象 Voronoi 图。载于第 5 届国际算法与计算研讨会论文集（ISAAC 1994），第 11–19 页。Springer，1994年。 doi:10.1007/3-540-58325-4_161。26 Evangelos Kranakis、Danny Krizanc 和 Oscar Morales。利用定向天线维持传感器网络的连通性。载于《传感器网络分布式计算的理论方面》，第 59–84 页。Springer，2011年。 doi:10.1007/978-3-642-14849-1_3。27 Azin Neishaboori、Ahmed Saeed、Khaled A. Harras 和 Amr Mohamed。移动视觉传感器网络中的目标覆盖。载于第 12 届 ACM 移动性管理与无线接入国际研讨会论文集（MobiWac'15），第 39–46 页，2014年。 doi:10.1145/2642668.2642671。28 Bengt J. Nilsson、David Orden、Leonidas Palios、Carlos Seara 和 Paweł Żyliński。用 α-探照灯照亮 x 轴。载于 Hee-Kap Ahn 和 Kunihiko Sadakane 编，第 32 届国际算法与计算研讨会（ ISAAC 2021 ），《 Leibniz 国际信息学会议录》（LIPIcs）第 212 卷，第 11:1–11:12 页。Schloss Dagstuhl – Leibniz 信息学中心，2021年。 doi:10.4230/LIPIcs.ISAAC.2021.11。

29 Atsuyuki Okabe、Barry Boots、Kokichi Sugihara 和 Sung Nok Chiu。《空间镶嵌：沃罗诺伊图的概念与应用》，第501卷。John Wiley & Sons，2009年。30 Joseph O'Rourke。《艺术画廊定理与算法》，第57卷。牛津大学出版社，牛津，1987年。31 Joseph O'Rourke。《可见性》。载于《离散与计算几何手册》，第875–896页。CRC出版社，2017年。32 Joseph O'Rourke、Thomas Shermer 和 Ileana Streinu。使用顶点泛光灯照明凸多边形。载于《第七届加拿大计算几何会议论文集》（CCCG'95），第151–156页，1995年。33 Micha Sharir。高维下包络的几乎紧上界。《离散与计算几何》，12(3)：327–345，1994年。 doi:10.1007/BF02574384。34 Sven Skyum。计算最小包围圆的简单算法。《Information Processing Letters》，37(3)：121–125，1991年。 doi:10.1016/0020-0190(91)90030-L。35 William Steiger 和 Ileana Streinu。泛光灯照明。《计算几何》，10(1)：57–70，1998年。 doi:10.1016/S0925-7721(97)00027-8。36 Tsuyoshi Taki、Jun-ichi Hasegawa 和 Teruo Fukumura。开发用于定量评估足球比赛中团队协作的运动分析系统。载于《第三届IEEE国际图像处理会议论文集》，第3卷，第815–818页。IEEE，1996年。 doi:10.1109/ICIP.1996.560865。37 Dan Tao 和 Tin-Yu Wu。定向传感器网络中的屏障覆盖问题综述。《IEEE传感器期刊》，15(2)：876–885，2015年。 doi:10.1109/JSEN.2014.2310180。38 Csaba D. Tóth。具有统一视野范围守卫的艺术画廊。《计算几何》，21(3)：185–192，2002年。 doi:10.1016/S0925-7721(01)00024-4。39 Csaba D Tóth。在平面中照明不相交线段。《离散与计算几何》，30(3)：489–505，2003年。40 Csaba D. Tóth。使用45度泛光灯照明多边形。《离散数学》，265(1)：251–260，2003年。 doi:10.1016/S0012-365X(02)00583-6。41 Jorge Urrutia。艺术画廊与照明问题。载于《计算几何手册》，第973–1027页。爱思唯尔，2000年。