arXiv:2304.11456v1 [math.AP] 22 Apr 2023

一类不连续拉格朗日量的极小化子的部分正则性

Roberto Colombo

Scuola Normale Superiore Piazza dei Cavalieri，7，56126 比萨，意大利 电子邮箱：roberto.colombo@sns.it

摘要

我们研究了一维拉格朗日问题，其中包括 Ambrosio-Baradat-Brenier 在近期工作中对离散 Monge-Ampère 引力模型所作的变分重构。该模型描述了其动力学受最优传输问题支配的相互作用粒子的运动。我们所考虑的更一般的作用量型泛函包含一个不连续势项，该势项与从 $\mathbb{R}^d$ 中的任意离散集出发的相反平方距离函数的下降斜率有关。我们利用由空间相应的 Voronoi 分解所提供的内在几何结构，得到局部极小化子在有限个激波时刻之外的 $C^{1,1}$ 正则性。

目录

1 引言 **1**

2 一般框架与动机 **3**
2.1 依赖于凸函数梯度的作用泛函.3 2.2 Monge-Ampère 引力模型.5

3 $\mathbb{R}^d$中的相反平方距离函数情形 **8**
3.1 离散情形.10 3.2 正则性结果.14

1 引言

近年来，形如

$$I_f(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 + |\nabla f(\gamma)|^2 \tag{1.1}$$

由于它们出现在数学的多个领域，因此受到许多作者的关注。例如，在梯度流理论中，它们对应于能量耗散的积分形式（见 [5]）；此外，当 f 是定义在具有有限二阶矩的概率测度空间上的对数熵的倍数时，它们还与 Wasserstein 距离的所谓熵正则化有关（见 [9]）。在所有这些情形中，阻碍标准变分法结果应用的主要因素，是拉格朗日量关于 γ 缺乏可微性，甚至连续性。

当 $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ 是定义在度量空间 (X, d) 上的 λ-凸函数时，项 $|\nabla f(x)|$ 必须解释为 f 在 x 处的下降斜率，即

$$|\nabla^- f|(x) := \limsup_{y \to x} \frac{[f(x) - f(y)]^+}{d(x, y)}, \tag{1.2}$$

并且，如果 X 是一个希尔伯特空间，那么它还与次微分$\partial f(x)$中最小选择的范数重合，后者称为 f 在 x 处的广义梯度（见 [5]）。在这一一般框架下，关于函数 f 的 Γ-收敛，泛函 I_f 的稳定性已在 [2], [3] 和 [4]中进行了研究。特别地， [2] 沿着 [8], 的思路，对一个与最优传输问题密切相关的相互作用粒子动力系统进行了严格推导，该系统称为离散 Monge- Ampère 引力（MAG）模型（见第 2.2 小节）。这项工作的结论是，MAG 的动力学可以方便地作为与式（1.1）所示类型的作用泛函相关联的欧拉-拉格朗日方程来研究，其中 $f = f_K$ 是由某个特定离散集 $K \subset \mathbb{R}^d$的相反平方距离给出的（-1）-凸函数，即

$$f_K(x) := -\frac{\mathrm{dist}_K^2(x)}{2} = -\min_{y \in K} \frac{|x - y|^2}{2}. \tag{1.3}$$

显然， f_K 一般并非处处可微，因此， ∇f_K作为f_K的广义梯度，甚至不连续，变分法的标准结果在这种情况下无法直接适用。

本文旨在系统分析泛函 I_{f_K}的局部极小化子的性质，其中 K 是 $\mathbb{R}^d$中的一般离散集 K 。我们的结果尤其适用于离散 MAG 模型的解，从而处理了 n维的一般情形；这一情形在 [2], 中尚未解决，因为其中最复杂的分析部分仅在一维情形下完成。

本文的安排如下。第 2 节介绍一般框架以及本文的研究动机。具体而言，在第 2.1 小节中，我们将问题置于一般的希尔伯特空间框架下，并着重讨论当 f 为 λ-凸函数时，(1.1) 型泛函的变分性质。本部分的主要参考文献为 [3] 和[5]。随后，在第 2.2 小节中，我们介绍平坦环面 $\mathbb{T}^n$上的 Monge-Ampère 引力模型，该模型是对经典牛顿引力的改造：以全非线性 Monge-Ampère 方程取代线性泊松方程（见 (2.7)）。沿着 [8], 的思路，我们着重指出该动力系统与最优传输问题之间耐人寻味的联系。最优传输问题的有力工具可用于推导 MAG 的一种拉格朗日重述，这在离散情形下尤具意义； [2]中的结果则为该模型提供了进一步的理论基础。接着，我们借助最小作用原理，将离散 MAG 模型的解解释为泛函I_{f_K}的局部极小化子，其中 f_K 是离散集 $K \subset \mathbb{R}^d$的相反平方距离函数，定义见 (1.3)。作为本文的核心，第 3 节将分析与 I_{f_K}相关的拉格朗日问题的局部极小化子，其中 K 是 $\mathbb{R}^d$中的有限点集：

$$K = \{p_1, \ldots, p_N\}.$$

我们关键性地考察由 K 所承载的空间的 Voronoi分区，它编码了问题的底层几何结构；并利用该分区，在命题 3.8 中证明存在某些特定方向，沿这些方向，动力学会局部守恒动量。作为推论，我们在推论 3.9 中证明，只要局部极小化者 γ 始终处于同一个沃罗诺伊单元内，它就是正则的；只有在最优性类发生变化的时刻，才可能出现奇异点。正如后文将要说明的，集合 K 也将 $\mathbb{R}^d$ 划分为若干“势区”（见命题 3.6）。一般而言，这第二种划分不如 Voronoi 分区精细；当集合 K “平衡的”时，二者便重合，例如立方晶格就是如此。接着，我们将 $S(\gamma)$ 定义为“激波时刻”集合，此时曲线 γ 从一个沃罗诺伊单元跳至另一个单元；并将 $NDS(\gamma) \subseteq S(\gamma)$ 定义为“非退化冲击时刻”集合，此时 γ 不仅改变沃罗诺伊单元，也改变势区。有鉴于此，我们的主要正则性结果——定理 3.15 和推论 3.16——可以归纳为以下一个陈述：

定理 (部分正则性)。 设 γ 是具有端点约束的 I_{f_K} 的局部极小化者。那么

i) γ 有有限个非退化冲击时刻，在这些时刻之外，它是 $C^{1,\,1}$。

ii) 在额外假设 K 是平衡的条件下， γ 有有限个激波时刻，在这些时刻之外，它是 C^{∞}。

这一结果尤其将 [2, 定理 13], 推广到了任意空间维数；该定理证明了一维 MAG 模型的一个版本的极小化子在有限个冲击时刻之外具有正则性。

致谢。我谨感谢 Luigi Ambrosio 教授将这一研究课题介绍给我，并在本文的准备过程中提供了非常有益的建议。

2 一般框架与动机

2.1 作用量函数取决于凸函数梯度的泛函

λ-凸函数。 给定一个希尔伯特空间 H，我们考虑一个函数 $f\colon H \to (-\infty, +\infty]$，并将 $\mathrm{dom}(f)$ 记作其有限性定义域。若 f是 λ-凸的，则称其为 $x \mapsto f(x) - \frac{\lambda}{2}|x|^2$是凸的。容易看出， λ-凸函数恰好是满足扰动凸性不等式的函数

$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{\lambda}{2}t(1-t)|x-y|^2, \quad t \in [0,1].$$

我们用 $\partial f(x)$ 表示 f 在 $x \in \mathrm{dom}(f)$ 处的 ***Gateaux*** 次微分，即（可能为空的）闭凸集

$$\partial f(x) := \left\{ \xi \in H : \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \ge \xi \cdot v,\ \forall v \in H \right\}.$$

我们用 $\mathrm{dom}(\partial f)$ 表示次微分的定义域。对于 λ-凸函数，可以利用差商的单调性推导出次微分的等价非渐近定义

$$\partial f(x) := \left\{ \xi \in H : f(y) \ge f(x) + \langle \xi, y-x \rangle + \frac{\lambda}{2}|y-x|^2,\ \forall y \in H \right\}.$$

只要 $x \in \mathrm{dom}(\partial f)$，就存在一个在 $\partial f(x)$ 中具有最小范数的唯一元素 ξ，该元素通过将 0 投影到 $\partial f(x)$ 上得到。这个元素称为 f 在 x 处的广义梯度，记作 $\nabla f(x)$。广义梯度的概念与 f 在 $x \in \mathrm{dom}(f)$ 处的下降斜率密切相关，即

$$|\nabla^- f|(x) := \limsup_{y \to x} \frac{[f(x) - f(y)]^+}{|x-y|}.$$

事实上，对于 λ-凸函数，可以证明，当且仅当 $\partial f(x)$非空时， $|\nabla^- f|(x) < +\infty$，并且在此情况下，以下等式成立（参见 [5]）：

$$|\nabla f(x)| = |\nabla^- f|(x) = \sup_{y \neq x} \frac{[f(x) - f(y) + \frac{\lambda}{2}|x-y|^2]^+}{|x-y|}. \tag{2.1}$$

令 $|\nabla f|$等于 $+\infty$，其中∂f之外的点属于定义域，我们可以很容易地从（2.1）推出，函数 $H \ni x \mapsto |\nabla f(x)| \in [0, +\infty]$ 是下半连续的，因为它是连续函数族的上确界。

本文讨论上述设定的以下特例。给定一个闭集$K \subseteq H$，我们考虑从 K 出发的相反平方距离函数，即

$$f_K(x) := -\frac{\mathrm{dist}_K^2(x)}{2} = -\inf_{y \in K} \frac{|x-y|^2}{2}. \tag{2.2}$$

通常来说，下确界未必能取到，除非 K 是凸的或紧的，或者 H 是有限维的。通过定义凸函数

$$g_K(x) := \sup_{y\in K}\left(\langle x,y\rangle - \frac{|y|^2}{2}\right),$$

我们由等式 $g_K(x) = f_K(x) + \frac{|x|^2}{2}$推得， f_K 是 (-1)-凸的。

一类作用泛函。 现在，在一般的希尔伯特空间框架下，我们引入本文将要研究的作用泛函类。我们固定一个函数 $h\colon [0,+\infty] \to [0,+\infty]$，表示一种“势函数形状”。于是，对于 $\delta > 0$ 和 $f\colon H \to (-\infty,+\infty]$ 真、 λ-凸且下半连续的，我们考虑由下式定义的泛函 $I_f^\delta\colon C([0,\delta],H) \to [0,+\infty]$

$$I_f^\delta(\gamma) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^\delta |\dot\gamma|^2 + h(|\nabla f|^2(\gamma)) & \text{if } \gamma \in AC([0,\delta],H), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.3}$$

与文献中迄今研究的 (1.1) 型泛函相比，这里我们考虑扩展泛函类，其中势函数形状 h 可以不同于恒等映射。在下文中，我们假设 h 连续，并且当限制在 $[0,+\infty$ 上时 C^1 。

鉴于我们打算从变分观点研究这类泛函，必须认识到 (2.3) 关于 $C([0,\delta],H)$ 拓扑是下半连续的。事实上，这可直接由经典作用量的下半连续性以及上述广义梯度 (2.1) 的刻画得出。因此，对于 x_0, $x_\delta \in H$，下确界

$$\Gamma_f^\delta(x_0,x_\delta) := \inf\left\{ I_f^\delta(\gamma) : \gamma(0) = x_0, \gamma(\delta) = x_\delta \right\}$$

在适当的强制性条件下可以取到。特别要注意的是，当 H 是有限维时，这一条件成立。

然而，由于势项不连续，即使在有限维情形下，人们对这类泛函的极小化子的正则性也知之甚少。例如，我们可以探究是否能为局部极小化子推导出某种更高阶正则性，或至少得到一种形式上类似于 欧拉-拉格朗日方程 的方程

$$\ddot\gamma = h'(|\nabla f(\gamma)|^2)\nabla^2 f(\gamma)\nabla f(\gamma) \tag{2.4}$$

在某些非常特殊的情形下，我们将证明局部极小化子是分段 $C^{1,1}$ 的；此时 f 是 $\mathbb{R}^d$ 中某个离散集的相反平方距离函数。并且除有限个奇异点外，(2.4) 两边取模并将等号替换为 $\le$ 符号后仍成立（见定理 3.15）。不过，在一般情形下，可以利用泛函 I_f^δ 是自治的这一事实，对自变量进行“水平”变分，最终为局部极小化者 γ 推导出 杜布瓦-雷蒙方程 （见 [1]）：

$$\frac{d}{dt}\left\{ |\dot\gamma|^2 - h(|\nabla f|^2(\gamma)) \right\} = 0 \tag{2.5}$$

在 $(0,\delta)$ 上以分布的意义成立。等价地，存在一个常数 $c \in \mathbb{R}$ 使得

$$|\dot\gamma|^2 = h(|\nabla f|^2(\gamma)) + c$$

在 $(0,\delta)$ 上几乎处处成立。这尤其意味着，只要 $|\nabla f|$ 在有界集上有界， I_f^δ的每个局部极小化者都是利普希茨连续的。

我们以引用 [3] 中的一个结果结束这一部分，该结果讨论了迄今所考虑的这类泛函的稳定性问题。通过添加端点约束 $x_0, x_\delta \in H$，我们定义泛函$I_{f,\,x_0,\,x_\delta}^\delta\colon C([0,\delta],H) \to [0,+\infty]$ 使得

$$I_{f,x_0,x_\delta}^\delta(\gamma) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^\delta |\dot\gamma|^2 + h(|\nabla f|^2(\gamma)) & \text{if } \gamma \in AC([0,\delta],H) \text{ and } \gamma(0) = x_0, \gamma(\delta) = x_\delta, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 2.1（稳定性，[3]）。设 f_j，f 为一致 λ-凸函数，并且 $x_{j,\,0}$，$x_{j,\,\delta}$，x_0，$x_\delta \in H$。假设

i) 关于 *Mosco* 收敛。*ii)* 极限 $\lim_{j\to\infty} x_{j,\,i} = x_i$，当 $i = 0,\ \delta$。*iii)* 上确界 $\sup_j |\nabla f_j|(x_{j,\,i}) < \infty$，当 $i = 0,\ \delta$。

于是 $I^{\delta}_{f_j,\,x_{j,\,0},\,x_{j,\,\delta}}\ \Gamma$ 收敛于 $I^{\delta}_{f,\,x_0,\,x_\delta}$，关于 $C([0,\delta],\ H)$ 拓扑。

作为推论，在附加的等强制性假设下，该定理保证最小值收敛到最小值，且极小化子收敛到极小化子。注意，定理 2.1 在 [3] 中针对 $h = \mathrm{id}$ 陈述，但不难看出，只需进行微小修改，同样的证明在一般情形下也成立。

2.2 Monge-Ampère 引力模型

在诸如平坦环面 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 这样的周期性空间区域中，我们可以用如下“参数化”的方式描述单位质量的经典牛顿引力。首先，我们选取一个由引力粒子标签构成的参考度量概率空间 $(\mathcal{A}, \lambda)$。然后，为每个粒子 $a \in \mathcal{A}$ 指定其在时刻 t 的位置 $X_t(a) \in \mathbb{T}^n$。参考空间的典型选择包括：连续情形下带有 n 维勒贝格测度的单位立方体 $[0,1]^n$，以及离散情形下带有重新归一化计数测度的有限点集。记 $\mu_t := (X_t)_{\#}\lambda$ 为 X_t 对 λ 的像测度，牛顿模型可写为

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} X_t(a) = -\nabla \phi_t(X_t(a)), \\ \Delta \phi_t = \mu_t - 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

这里，ϕ_t 是由 μ_t产生的引力势，定义在 $\mathbb{T}^n$上。注意，由于空间的周期性，泊松方程右端的平均密度 1 已被移除，以使均匀测度 $\mathscr{L}^n$ 成为该系统的平稳解。这一假设完全合理，因为根据对称性，均匀密度产生的吸引力在 $\mathbb{T}^n$上处处必须为零。

本节我们关注相关的*Monge-Ampère* 引力模型（简称 MAG）。该模型只需将泊松方程替换为完全非线性的蒙日-安培方程，即可由(2.6)得到：

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} X_t(a) = -\nabla \phi_t(X_t(a)), \\ \det(\mathbb{I} + \nabla^2 \phi_t) = \mu_t. \end{cases} \tag{2.7}$$

注意，通过展开蒙日-安培方程中的行列式并仅保留线性项，可以从(2.7)恢复(2.6)：

$$\det(\mathbb{I} + \nabla^2 \phi_t) \approx 1 + \mathrm{Tr}(\nabla^2 \phi_t) = 1 + \Delta \phi_t.$$

关于 [8] 以及其中的参考文献，可参阅更广泛的介绍，以了解这一动力系统，并将其与经典牛顿模型进行比较。

最优传输视角下的 MAG 模型。从最优传输的角度来看，系统 (2.7) 似乎具有一种引人入胜的几何解释。为了更好地说明这种联系，我们首先引用经典 Brenier-McCann 定理在平坦环面 $\mathbb{T}^n$ 上的以下特例，该定理论述了黎曼流形上最优传输映射的存在性与唯一性（见 [7], [10], [12]）。先介绍一些记号。我们用 $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$表示到商空间的投影。若向量场 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足 $\mathbb{Z}^n$-平移不变性，即对于每个 $z \in \mathbb{Z}^n$都有 $F(\cdot + z) = F(\cdot) + z$，则称其具有 $\mathbb{Z}^n$-平移不变性。此时，我们稍微滥用一下记号，也将 F 视为从 $\mathbb{T}^n$ 到其自身的向量场。给定 $\mathbb{T}^n$上的一个博雷尔概率测度 λ，我们考虑希尔伯特空间

$$H_\lambda := L^2(\mathbb{T}^n, \lambda; \mathbb{R}^n)$$

及其闭子集 K_λ，该集合由所有保持 λ不变的向量场组成

$$K_\lambda := \{Y \in H_\lambda : (\pi \circ Y)_\# \lambda = \lambda\}.$$

最后，我们回顾一下，f_{K_λ} 表示从 K_λ出发的相反平方距离函数，定义见（2.2）。

定理 2.2（最优传输映射的存在性与唯一性，见 $\mathbb{T}^n$）。设 μ 和 λ 是 $\mathbb{T}^n$上的博雷尔概率测度，并假设 $\mu \ll \mathscr{L}^n$。则

i）存在一个局部利普希茨凸函数 ψ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $\phi(x) := \psi(x) - \frac{|x|^2}{2}$ 是$\mathbb{Z}^n$-周期的（因此 $\nabla\psi(x) = x + \nabla\phi(x)$ 是 $\mathbb{Z}^n$-平移不变的），且 $T := \nabla\psi$： $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$是从 μ 到 λ的唯一最优传输映射。

ii）若 $\mu = \rho\mathscr{L}^n$ 和 $\lambda = \eta\mathscr{L}^n$ 都关于勒贝格测度绝对连续，则 ϕ在几乎处处意义下满足蒙日-安培方程

$$\det(\mathbb{I} + \nabla^2\phi)\eta(T(x)) = \rho(x) \tag{2.8}$$

。此外，若 ρ 和 η 均属于 $C^{0,\,\alpha}$类，则 ϕ 属于 $C^{2,\,\beta}$类（对于 $0 < \beta < \alpha$），并且在经典意义下满足（*2.8*）。

iii) 设 $Y \in H_\lambda$ 满足 $(\pi \circ Y)_\# \lambda = \mu$。则 $T \circ Y$ 是 Y 在 K_λ 上的唯一投影，并且

$$\|T \circ Y - Y\|_{H_\lambda} = W_2(\mu, \lambda), \tag{2.9}$$

其中 W_2 是空间 $\mathscr{P}_2(\mathbb{T}^n)$ 中的 *Wasserstein* 距离。此外，映射 f_{K_λ} 在 Y 处盖托可微，且有

$$\nabla f_{K_\lambda}(Y) = T \circ Y - Y = \nabla\phi \circ Y. \tag{2.10}$$

为了用最优传输的术语重新表述 Monge-Ampère 引力模型，我们考察连续情形，其中参考空间为 ($\mathbb{T}^n$, $\mathscr{L}^n$)。于是固定上述定理中的 $\lambda = \mathscr{L}^n$，并考虑参数化 X_t： $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$，使得 $(X_t)_\# \lambda = \mu_t$，且 $\mu_t = \rho_t\mathscr{L}^n$ 关于勒贝格测度绝对连续。若 $Y_t \in H_\lambda$ 是 X_t 的任意提升，也就是说，若它是满足 $\pi \circ Y_t = X_t$ 的映射，则定理 2.2 表明，康托罗维奇势 ϕ_t 是蒙日-安培方程的解

$$\det(\mathbb{I} + \nabla^2\phi_t) = \mu_t,$$

和 $-\nabla\phi_t = Y_t - T_t \circ Y_t$，其中 T_t 是从 μ_t 到 λ 的唯一最优传输映射。因此我们看到，(2.7) 化简为

$$\frac{d^2}{dt^2} Y_t(a) = Y_t(a) - T_t(Y_t(a)), \tag{2.11}$$

其中，T_t 等于从 $\mu_t = (X_t)_\# \lambda$ 到 λ 的唯一最优传输映射。此外，由 (2.10) 可得

$$|\nabla f_{K_\lambda}(Y)|^2 = |T \circ Y - Y|^2 = -2 f_{K_\lambda}(Y),$$

暗示将 (2.11) 解释为与该泛函相关的欧拉-拉格朗日方程

$$\int_0^\delta |\dot\gamma|^2 + |\nabla f_{K_\lambda}(\gamma)|^2, \quad \gamma : [0, \delta] \to H_\lambda. \tag{2.12}$$

这种变分重构似乎很自然，因为它试图赋予系统 (2.7) 在离散情形下也以意义，而众所周知，定理 2.2 在这种情形下并不成立。

离散 MAG 模型。如前所述，本工作的目标之一是深入分析离散版 Monge-Ampère 引力模型；该模型最初在 [8] 中提出，随后在 [2]中得到形式化。这里我们选择的参考测度是

$$\lambda = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\delta_{a_i},$$

其中，a_i 是 $\mathbb{T}^n$ 上互不相同的点（例如，可考虑逼近均匀测度的正则格点）。在这种情况下，空间 H_λ 很容易看出是有限维的，并且通过将映射 $Y \in H_\lambda$ 与 m 元组（$Y(a_1)\ldots,Y(a_m)$）$\in(\mathbb{R}^n)^m$ 对应起来，它同构于 $\mathbb{R}^{nm}$。在这种对应关系下，K_λ 表示为 $\mathbb{R}^{nm}$ 中满足 $\pi(\{b_1,\ldots,b_m\}) = \{a_1,\ldots,a_m\}$ 的所有点（$b_1,\ldots,b_m$）构成的离散集。稍有不妥地将 a_i 视为 $[0,1)^n$ 的元素后，集合 K_λ 可写为 $\mathbb{R}^{nm}$ 中 $m!$ 个立方格子的并：

$$K_\lambda = \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(m)}) + \mathbb{Z}^{nm}.$$

在这种离散情形下，MAG 模型描述了环面 $\mathbb{T}^n$ 上 m 个质量均为 $1/m$ 的粒子的运动，其动力学由如下最优传输问题支配。第 i 个粒子在时刻 t 的位置记为 $x_i(t) = X_t(a_i)$，而 $x_i(t)$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个提升记为 $y_i(t) = Y_t(a_i)$。在这种设定下，(2.11) 的对应形式至少在形式上为

$$\ddot{y}_i(t) = y_i(t) - b_i^{\mathrm{opt}}(t), \quad i\in[1:m], \tag{2.13}$$

其中，$(b_1^{\mathrm{opt}}(t)\ldots,b_m^{\mathrm{opt}}(t))$ 是 K_λ 中距离 $(y_1(t)\ldots,y_m(t))$ 最近的点。由于在 K_λ 上的投影通常不唯一，系统 (2.13) 很容易被看作是不适定的；这最终是由于离散情形下最优传输映射的不唯一性所致，这与绝对连续情形形成对比。正如 [2], 中已经指出的，为了解决这一问题，采用动力系统的变分重构是很方便的，即考虑 (2.12) 类型的作用泛函。因此，依据最小作用原理，如果 $y\in AC([0,\delta],\mathbb{R}^{nm})$ 是该泛函的局部极小化者，我们就称其为离散 MAG 模型的解

$$\int_0^\delta |\dot\gamma|^2 + |\nabla f_{K_\lambda}(\gamma)|^2$$

满足端点约束。在下一节中，我们将研究一个更一般的泛函，其中 K_λ 被 $\mathbb{R}^d$ 中的通用离散集 K 所替代。

在结束本部分之前，我们想简要提请读者注意概率测度空间（$\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ W_2）中的一个类似拉格朗日问题。该问题可通过舍弃引力物质的参数化描述而从 MAG 得到；对于第 2.1 小节的希尔伯特空间框架而言，这种参数化描述是必需的。我们直接考虑概率测度 μ_t 在 $\mathbb{T}^n$ 中的演化。

一个相关的拉格朗日问题见于 $(\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ $W_2)$。 这类泛函 (1.1) 的适用范围远不止希尔伯特空间情形；只要将 $|\nabla f(x)|$ 解释为 (1.2) 中定义的下降斜率 $|\nabla^- f|(x)$，并将 $|\dot\gamma|$ 解释为绝对连续曲线 $\gamma:[0,1]\to X$ 的度量导数，就可以在更一般的度量情形下考虑这类泛函。我们不再重复这一新情形下的所有构造（系统介绍见 [4] ），而是直接聚焦于我们关心的情形。我们取 $(X,d) = (\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ $W_2)$ 为概率测度空间，其定义在 $\mathbb{T}^n$ 上，并赋予由二次代价最优传输问题所诱导的 Wasserstein 距离。众所周知，(X,d) 是紧的、测地的且具有正曲率（见 [5]）。给定一个“参考”概率测度 $\lambda\in\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$，我们考虑从 λ 出发的相反平方距离函数，即

$$f_\lambda(\mu) = -\frac{W_2^2(\mu,\lambda)}{2}.$$

由于 (X,d) 具有正曲率，我们很容易推出 f_λ 是 (-1)-凸的（在度量情形下，凸性应理解为沿测地线的凸性）。此外，我们可以如下估计 f_λ 在 μ 处的下降斜率：

$$|\nabla^- f_\lambda|(\mu)=\limsup_{\nu\to\mu}\frac{[W_2^2(\nu,\lambda)-W_2^2(\mu,\lambda)]^+}{2W_2(\mu,\nu)}\le\limsup_{\nu\to\mu}\frac{W_2(\nu,\lambda)+W_2(\mu,\lambda)}{2}=W_2(\mu,\lambda). \tag{2.14}$$

$|\nabla^- f_\lambda|(\mu)$ 的精确刻画见 [5, 定理 10.4.12], ，其中涉及最优传输计划的重心投影的最小 L^2范数。受 MAG 模型启发，尤其是公式 (2.9) 和 (2.10)，我们可以研究与下半连续泛函 $I^\delta_{f_\lambda,\mu_0,\mu_\delta}$ 相关的拉格朗日问题：$C([0,\delta],X)\to[0,+\infty]$ 定义为

$$I^\delta_{f_\lambda,\mu_0,\mu_\delta}(\gamma)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\delta|\dot\gamma|^2+|\nabla^- f_\lambda|^2(\gamma) & \text{if } \gamma\in AC([0,\delta],X),\ \text{and } \gamma(0)=\mu_0,\ \gamma(\delta)=\mu_\delta,\\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由 X 的紧性，我们立即得到 $I^\delta_{f_\lambda,\mu_0,\mu_\delta}$ 的极小化子的存在性。此外，利用 [4, 定理17], 所给出的定理 2.1 在一般度量情形下的推广，以及下降斜率界 (2.14)，我们得到以下稳定性结果：

命题 2.3. 设 $\lambda_j,\lambda\in\mathscr{P}(\mathbb{T}^d)$ 为参考测度，且 $\mu_{j,0},\mu_{j,\delta},\mu_0,\mu_\delta\in\mathscr{P}(\mathbb{T}^d)$ 为端点。假设

i) $\lambda_j\to\lambda$ 属于 W_2。

ii) $\mu_{j,\,i}\to\mu_i$ 属于 W_2，对 $i=0,\ \delta$。

于是，$I^\delta_{f_{\lambda_j},\,\mu_{j,\,0},\,\mu_{j,\,\delta}}$ Γ收敛到 $I^\delta_{f_\lambda,\,\mu_0,\,\mu_\delta}$，在 $C([0,\delta],\ X)$ 拓扑下。此外，最小值收敛到最小值，极小化子收敛到极小化子。

3 实数空间中的相反平方距离函数情形

本节将推导本文的主要结果。我们研究式（2.1）所述类型的泛函，特别考虑 $H=\mathbb{R}^d$ 和 $f=f_K$ 为从闭子集 $K\subseteq\mathbb{R}^d$出发的相反平方距离函数的情形。受上一节推导出的离散 MAG 模型的变分重构启发，我们尤其关注 K 是实数空间 $\mathbb{R}^d$中的离散点集的情形。在这一设定下，我们将利用相关空间 Voronoi 分解所具有的几何结构，从而在有限个“激波时刻”之外，获得局部极小化子的正则性。

给定闭集 $K\subseteq\mathbb{R}^d$，我们考虑从 K 出发的相反平方距离函数，其定义为

$$f_K(x):=-\frac{\mathrm{dist}_K^2(x)}{2}=-\min_{y\in K}\frac{|x-y|^2}{2}. \tag{3.1}$$

注意，由于环境空间具有局部紧性，此处 (2.2) 中的下确界总能取到。凸函数

$$g_K(x):=\max_{y\in K}\left(x\cdot y-\frac{|y|^2}{2}\right) \tag{3.2}$$

满足 $g_K(x)=f_K(x)+\frac{|x|^2}{2}$，从而意味着 f_K 的 (-1)-凸性。我们固定一个 C^1 类的势函数形状 h：$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，并考虑由下式定义的作用泛函 $I^\delta_{f_K,\ x_0,\ x_\delta}$：$C([0,\delta],\mathbb{R}^d)\to[0,+\infty]$

$$I^\delta_{f_K,x_0,x_\delta}(\gamma):=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\delta|\dot\gamma|^2+h(|\nabla f_K|^2(\gamma)) & \text{if } \gamma\in AC([0,\delta],\mathbb{R}^d)\text{ and }\gamma(0)=x_0,\gamma(\delta)=x_\delta,\\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们强调， ∇f_K 应理解为广义梯度，因为 f_K 仅在投影到 K 唯一的点处可微。

为了得到对 ∇f_K 的有用刻画，我们需要借助凸分析中的一个著名引理。在适当假设下，该引理给出了凸函数族的最大值在 x 处的次微分的显式公式（见 [11]）。

引理 3.1（上确界函数的次微分）。设 $\{g_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是以紧致度量空间 $\mathcal{A}$ 为指标集的凸函数族，并假设对每个 $x \in \mathbb{R}^d$， $\alpha \mapsto g_\alpha(x)$ 都是上半连续的。我们考虑上确界函数

$$g := \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} g_\alpha.$$

那么，如果 $g(x)$ 的定义中上确界能够取到，则 g 在 x 处的次微分满足以下公式：

$$\partial g(x) = \operatorname{conv}\left(\bigcup\{\partial g_\alpha(x) : g_\alpha(x) = g(x)\}\right).$$

我们将 $\mathrm{opt}_K(x)$ 称为实数空间 K 的紧子集，其中包含所有使到 x 的距离最小的点：

$$\mathrm{opt}_K(x) := \{y \in K : \mathrm{dist}_K(x) = |x - y|\} = \left\{y \in K : g_K(x) = x \cdot y - \frac{|y|^2}{2}\right\}.$$

在下文中　　我们将 $\mathrm{opt}_K(x)$ 称为 x 的最优性类。应用引理 3.1，我们得　　t:

命题 3.2（相反平方距离函数的次微分）。设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个闭集，并令 f_K, g_K 如 *(3.1)* 和 *(3.2)* 中所定义。那么

i) g_K 在 x 处的次微分为

$$\partial g_K(x) = \operatorname{conv}(\mathrm{opt}_K(x)).$$

ii) f_K 在 x 处的次微分为

$$\partial f_K(x) = \operatorname{conv}(\mathrm{opt}_K(x)) - x.$$

此外，记 $\eta_K(x)$ 为 x 在闭凸集 $\operatorname{conv}(\mathrm{opt}_K(x)$ 上的唯一投影，则 f_K 在 x 处的广义梯度满足以下公式：

$$\nabla f_K(x) = \eta_K(x) - x. \tag{3.3}$$

iii) 点 $\eta_K(x)$ 仅取决于 x 的最优性类。也就是说，只要 $\mathrm{opt}_K(x) = \mathrm{opt}_K(y)$，就有 $\eta_K(x) = \eta_K(y)$。

证明。若 K 紧，则由引理 3.1 可轻易得到 i) 点。对于一般情形，只需注意到，对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 和每个半径 $R > \mathrm{dist}_K(x)$, $g_K = g_{K\cap B_R}(x)$ 都位于 x 的一个邻域内。 $\partial f_K(x)$ 的公式是由两个函数之和的次微分法则得出的，其中一个函数是光滑的。于是，根据定义， $\nabla f_K(x)$ 是 $\partial f_K(x) = \operatorname{conv}(\mathrm{opt}_K(x)) - x$ 上 0 的投影，平移 x 后即可得到公式 (3.3)。现在讨论 iii) 点。假设 x 和 y 属于相同的最优性类，即 $\mathrm{opt}_K(x) = \mathrm{opt}_K(y)$。考虑由 $\mathrm{opt}_K(x)$ 张成的仿射空间 A，以及经过 x 的正交空间 B。根据关于 x 和 y 的假设，可推出 y 也属于 B。于是，记 p 为 A 与 B 的交点，由正交性可得：

$$|x - z|^2 = |x - p|^2 + |p - z|^2, \quad |y - z|^2 = |y - p|^2 + |p - z|^2 \quad \text{for every } z \in \operatorname{conv}(\mathrm{opt}_K(x)).$$

因此，这两个距离都由点 z 取得最小值；该点是将 p 投影到 $\operatorname{conv}(\mathrm{opt}_K(x))$ 上得到的，从而$\eta_K(x) = \eta_K y$。 □

注 3.3。由（3.3）可推出，势项 $|\nabla f_K(x)|^2$ 始终小于或等于$-2f_K(x) = \mathrm{dist}_K^2(x)$，且当且仅当 x在 K上具有唯一投影时等号成立。了解这对 MAG 模型意味着什么是很有意思的。采用第 2.2 小节中的记号，构型（$y_1,\dots,y_m$） $\in \mathbb{R}^{nm}$ 的势始终小于 $W_2(\mu,\lambda)$，其中，令 $x_i = \pi(y_i)$，

$$\lambda = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\delta_{a_i}, \quad \mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\delta_{x_i}$$

且 W_2 是 $\mathscr{P}_2(\mathbb{T}^n)$ 中的 Wasserstein 距离。此外，当且仅当存在从 μ 到 λ的唯一最优传输映射时，等号成立。因此我们看到，在 MAG 模型的语境下，势项应被解释为“最优传输问题中的歧义度量”。离散情形中的典型歧义表现为两个或更多粒子发生聚合，从而在 $\mathbb{T}^n$ 中共享同一位置。另请将这一现象与定理 2.2 的连续框架进行比较，在后者中不会出现这种歧义。■

最后，我们简要回到这一特殊语境下的稳定性问题，陈述定理 2.1 的以下推论：

推论 3.4。设 K_j，K是 $\mathbb{R}^d$ 的闭子集，并设 $x_{j,\,0}$，$x_{j,\,\delta}$，x_0，$x_\delta \in \mathbb{R}^d$。假设

i) $K_j \to K$ 在每个紧集上按 *Hausdorff* 意义收敛。

ii) $x_{j,i} \to x_i$ *for* $i = 0, \delta$.

那么，$I^{\delta}_{f_{K_j},\ x_{j,\,0},\ x_{j,\,\delta}}\ \Gamma$ 收敛到 $I^{\delta}_{f_K,\ x_0,\ x_\delta}$，且收敛性是在 $C([0,\delta],\ \mathbb{R}^d)$ 拓扑下成立的。此外，最小值收敛到最小值，极小化子收敛到极小化子。

因此，与闭集 K 相关联的泛函可以用与 K_j 相关联的泛函来逼近，其中每个 K_j 都是 $\mathbb{R}^d$ 中的有限点集。以下小节将聚焦于这一更简单的情形。

3.1 离散情形

从现在起，我们将分析范围限定在这样的情形： K 由 $\mathbb{R}^d$ 中一组 N 个互异点组成：

$$K = \{p_1, \dots, p_N\}.$$

我们尤其关注研究 $I^{\delta}_{f_K,\ x_0,\ x_\delta}$ 的局部极小化子性质，因为这与离散 MAG 模型的变分重构有关（参见上文讨论）。其中，K 是一个无限离散集，但由于每条连续曲线 $\gamma\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}^d$ 的值域具有紧性，我们显然可以将分析范围限定在 K 为有限集的情形，因为我们的分析本质上是局部的。固定 K，以便省略所有涉及它的下标。于是，例如，我们将用 f、g、η、最优集合代替 f_K、g_K、η_K、最优集合$_K$。

多面体、沃罗诺伊单元和势区。如果 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个多面体，则称其为多面体；这里的多面体是指一个非空闭凸集，并且可表示为以下形式

$$P = \bigcap_{j=1}^{\ell} \left\{ x \in \mathbb{R}^d : T_j(x) \le 0 \right\}, \tag{3.4}$$

其中 $\ell \in \mathbb{N}$ 和 $T_j\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是仿射函数。有界多面体称为多胞体。

与有限点集 $K = \{p_1,\dots,p_N\}$ 相关联的*Voronoi*分区是 $\mathbb{R}^d$ 的有限分解 $\{V_H\}_{H\in\mathcal{P}(K)}$，其索引集为 K 的各部分的集合 $\mathcal{P}(K)$，并且满足

$$V_H = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \mathrm{opt}(x) = H \right\}.$$

我们将对应于最优性类 H的沃罗诺伊单元称为 V_H。关于这种非凡的空间细胞分解，以下是一些众所周知的事实（见 [6]）。

命题 3.5 (Voronoi分区的性质)。 设 $H \in \mathcal{P}(K)$ 满足沃罗诺伊单元V_H 非空。则

i) V_H 是一个凸集。此外，记 A_H 为由 H张成的仿射空间，记 B_H 为仿射空间

$$B_H := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |x - p_i| = |x - p_j|, \forall p_i, p_j \in H \right\},$$

我们有 A_H 与 B_H正交，它们在 $\mathbb{R}^d$中的维数互补，并且 V_H 在 B_H中相对开。我们称 p_H为 A_H 与 B_H的唯一交点。

ii) 闭包 $\overline{V_H}$ 是一个多面体，其在 B_H 中的相对边界恰好由所有满足 $H \subsetneq L$的沃罗诺伊单元 V_L 的不交并给出。

为了引入与 K相关的第二个基本分解，我们还需要为每个 $\eta \in \mathbb{R}^d$定义以下集合:

$$Q_\eta := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \eta(x) = \eta \right\},$$
$$P_\eta := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \eta \in \partial g(x) \right\}.$$

以下命题阐明了我们对势所作的特定选择赋予变分问题的几何结构。在推导泛函 $I^\delta_{f_K,\ x_0,\ x_\delta}$的局部极小化子的正则性结果时，它将发挥根本性的作用。

命题 3.6 （沃罗诺伊单元与势区）。 以下事实成立:

i) 映射 η 在每个沃罗诺伊单元上都是常数，因此其值域有限，记为 $\mathcal{E}$。*ii)* $\{Q_\eta\}_{\eta \in \mathcal{E}}$ 是 $\mathbb{R}^d$的一个划分，并且当且仅当 $\nabla f\ (x)\ = \eta - x$时， $x \in Q_\eta$ 。下文将把 Q_η称为势区。*iii)* 对每个 $\eta \in \mathcal{E}$， Q_η 和 P_η 均为沃罗诺伊单元的并，且成立 $Q_\eta \subseteq P_\eta$。*iv)* 对每个 $\eta \in \mathcal{E}$， P_η 是一个多面体。*v)* 设 β 为如下定义的正数常数

$$\beta := \min_{\substack{\eta \neq \bar{\eta} \\ \eta, \bar{\eta} \in \mathcal{E}}} |\eta - \bar{\eta}|^2. \tag{3.5}$$

则有

$$|\bar{\eta} - x|^2 \geq |\eta - x|^2 + \beta \quad \textit{for every distinct } \eta, \bar{\eta} \in \mathcal{E} \textit{ and } x \in Q_\eta \cap P_{\bar{\eta}}. \tag{3.6}$$

证明。第 i)、ii) 和 iii) 点是命题 3.2 的直接推论。为证明第 iv) 点，只需注意到， P_η 是一个闭凸集，可以表示为有限个多面体（包含于 P_η中的沃罗诺伊单元的闭包）的并。最后，第 v) 点可由以下事实直接得到：η 是 x 在包含 $\bar{\eta}$的闭凸集 $\partial g\ (x)$ 上的投影。 □

因此我们看到， K 承载着 $\mathbb{R}^d$的两个划分，其中一个比另一个更细：第一个划分为沃罗诺伊单元，第二个划分为势区。简单的例子表明，对于一般的 K ，二者并不重合（例如参见下文的例3.14）。如果二者重合，我们称 K 是平衡的。在这种情况下，映射 η 在沃罗诺伊单元与势区之间定义了一个双射，也就是说，

$$\eta(x) = \eta(y) \iff \mathrm{opt}(x) = \mathrm{opt}(y).$$

显然， K 为平衡的一个充分条件是

$$\mathrm{opt}(\eta(x)) = \mathrm{opt}(x) \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.7}$$

值得注意的是，在维数 $d = 1$ 中，每个 K 都是平衡的；对于立方格子，在任意维数下也同样如此。

守恒量。 本段将指出，我们的变分问题的局部极小化子具有一些守恒量。通过考察沿某些特定方向的变分，检验局部极小性，便可自然地得到这些守恒量。以下引理总结了两个关键观察，以便恰当地进行此类变分：

引理 3.7（沃罗诺伊图的局部性质）。 以下事实成立：

i) 如果对于某个 $H \subseteq K$有 $x \in V_H$，那么存在 x 的一个邻域 U，使得对于每个 $y \in U$都有 $\mathrm{opt}(y) \subseteq H$。*ii)* 如果 $x \in V_H$，那么只要向量 v与 B_H平行且 ϵ足够小，就有 $x + \epsilon v \in V_H$。

证明。 结论 i) 源于以下事实：如果 y 选取得足够接近 x，则 K 中对于 x 不是最优的点，对于 y 也不是最优的。结论 ii) 则直接由 V_H 在仿射空间 B_H 中相对开这一事实得到。 □

通过使用各 种经典的变分论证以及引理 3.7，我们得到如下

命题 3.8（守恒定律）。 设 γ 是 $I^{\delta}_{f_K}$的局部极小化者，x_0，x_δ。则

i)（能量守恒）。存在一个常数 $c \in \mathbb{R}$，使得

$$|\dot\gamma|^2 - h(|\nabla g(\gamma)|^2) = c \quad a.e.\ in\ (0,\delta).$$

特别地， γ 是利普希茨连续的。

ii)（动量的局部守恒）。设$(t_1, t_2 \subseteq [0,\delta]$ 是一个时间区间。假设存在一个最优性类 $H \subseteq K$，其中 $V_H \neq \emptyset$，使得对每个 $s \in (t_1,t_2)$，包含关系$\mathrm{opt}(\gamma(s)) \subseteq H$ 成立。设 γ_H 为将 γ 投影到仿射空间 B_H上所得的曲线。那么γ_H 是$,1$ 曲线，在(t_1,t_2) 区间内满足

$$\ddot\gamma_H = h'(|\gamma - \eta(\gamma)|^2)(\gamma_H - p_H).$$

特别地，对于每个时刻 $t \in (0,\delta)$，记$\mathrm{opt}(\gamma(t))$，存在 t的一个邻域，在该邻域内，动量在 B_H 方向上的分量 $\dot\gamma_H$ 连续。

证明。 第 i) 点指出， γ 满足杜布瓦-雷蒙方程（2.5）。对此，可通过对自变量作“水平”变分来检验局部极小性，变分形式为 $\gamma_\epsilon = \gamma \circ \rho_\epsilon^{-1}$，其中 $\rho_\epsilon = \mathrm{id} + \epsilon\varphi$, $\varphi \in C_c^\infty((0,\delta))$，且 ϵ 足够小，使得 ρ_ϵ是一个微分同胚。为证明第 ii) 点，我们则需要作形式为 $\gamma_\epsilon = \gamma + \epsilon\varphi v$的“垂直”变分，其中 $\varphi \in C_c^\infty((t_1, t_2))$，且 v 是平行于仿射空间 B_H的任意向量。然后利用引理 3.7 的第 ii) 点，得到$\eta(\gamma_\epsilon) = \eta(\gamma)$，其中 ϵ 足够小。 □

上一命题的第 ii) 点特别表明，只要 γ 始终处于同一个沃罗诺伊单元内，它就是正则的。更准确地说：

推论 3.9 (沃罗诺伊单元内的正则性)。 设 γ 是 $I^{\delta}_{f_K}$的x_0，x_δ 局部极小化者。假设$\mathrm{opt}(\gamma(s)) = H$ 在 $(t_1,\ t_2)$ 内为常数，并令 $\eta_H = \eta(V_H)$。那么，在此区间内， $\gamma = \gamma_H$、 $\eta(\gamma) = \eta_H$ 为常数，并且 γ 是 C^2 的解

$$\ddot\gamma = h'(|\gamma - \eta_H|^2)(\gamma - p_H).$$

此外，如果 h 为 C^∞，那么 $\gamma \in C^\infty((t_1,\ t_2))$。

因此，自然可以得出结论：泛函 $I^{\delta}_{f_K,\ x_0,\ x_\delta}$ 的局部极小化者只有在最优性类“发生变化”时才会出现奇异性。下一段中，我们将尝试对这一说法作出更精确的解释。

激波时刻与最小偏差。给定一条曲线 $\gamma\colon\ [0,\delta]\to\mathbb{R}^d$，以及一个时刻 $t\in[0,\delta]$，我们称

- t 是 γ 的**冲击**，如果对于 t 在 $[0,\delta]$中的每个邻域 I，opt(γ) 在 I 上都不是常数。
- t 是 γ 的**非退化冲击**，如果对于 t 在 $[0,\delta]$中的每个邻域 I，$\eta(\gamma)$ 在 I 上都不是常数。
- t 是 γ 的**有效冲击**，如果存在两个不同的势区 Q_η、$Q_{\bar\eta}$以及两个不同的沃罗诺伊单元 $V_H\subseteq Q_\eta$、$V_{\bar H}\subseteq Q_{\bar\eta}$，使得对于某个 $\epsilon>0$，以下情况之一成立：
  - $\gamma((t-\epsilon,t))\subset V_H$且 $\gamma([t,t+\epsilon))\subset V_{\bar H}$。在这种情况下，$H\subsetneq H$，我们称 t为**左有效冲击**。
  - $\gamma((t-\epsilon,t])\subset V_H$且 $\gamma((t,t+\epsilon))\subset V_{\bar H}$。在这种情况下，$H\subsetneq H$，我们称 t为**右有效冲击**。

我们分别用 $S(\gamma)$、$NDS(\gamma)$ 和 $ES(\gamma)$ 表示 γ 的冲击、非退化冲击和有效冲击集合。注意，$ES(\gamma)\subseteq NDS(\gamma)\subseteq S(\gamma)$，且 $S(\gamma)$ 和 $NDS(\gamma)$ 是紧集。根据上述定义，发生冲击时，沃罗诺伊单元必定发生变化；发生非退化冲击时，势区域也会发生变化。显然，只要 K 是平衡的，就有 $S(\gamma)=NDS(\gamma)$。最后，当轨迹从一个沃罗诺伊单元平滑地经过到相邻且势不同的单元时，就会发生有效冲击。根据能量守恒，我们预期此处动力学的动能项会出现奇异性。这正是下述命题的内容，它直接推论自命题 3.8 中陈述的守恒定律。

命题 3.10 (有效冲击期间的最小偏差)。 假设势函数形状 h 严格递增。设 γ 是 $I^\delta_{f_K,x_0,x_\delta}$ 的局部极小化者。假设 $t\in(0,\delta)$ 是 γ 的一次左有效冲击，其中 γ 从 V_H 跳变到 $V_{\bar H}$。令 $\eta_H=\eta(V_H)$ 和 $\eta_{\bar H}=\eta(V_{\bar H})$。分别定义 $\dot\gamma_-(t)$ 和$\dot\gamma_+(t)$如下：

$$\dot\gamma_-(t):=\lim_{s\to t^-}\dot\gamma(s)\qquad \dot\gamma_+(t):=\lim_{s\to t^+}\dot\gamma(s),$$

则 $\dot\gamma_+(t)$ 是 $\dot\gamma_-(t)$ 平行于 $B_{\bar H}$ 的分量。此外

$$|\dot\gamma_-(t)-\dot\gamma_+(t)|^2=|\dot\gamma_-(t)|^2-|\dot\gamma_+(t)|^2=h(|\gamma(t)-\eta_H|^2)-h(|\gamma(t)-\eta_{\bar H}|^2)>0$$

显然，对于右有效冲击，也有类似的结果。

注 3.11。 注意，在形状 h 具有超可加性的特定情形下（例如 $h=\mathrm{id}$ 时，如 MAG 模型中那样），我们可以得到有效冲击期间导数跳跃的一个一致下界：

$$|\dot\gamma_-(t)-\dot\gamma_+(t)|^2=h(|\gamma(t)-\eta_H|^2)-h(|\gamma(t)-\eta_{\bar H}|^2)\geq h(|\eta_H-\eta_{\bar H}|^2)\geq h(\beta),$$

其中 β 在 (3.5) 中定义。 ■

注 3.12。 在 MAG 动力学中，冲击通常发生在两个或更多粒子发生碰撞或分离时，从而导致最优性类瞬时改变。例如，当两个粒子碰撞并保持粘连时，就会发生有效冲击。注意，命题 3.8 告诉我们，在碰撞过程中能量和动量守恒。■

最后，通过几个简单的例子，我们说明本段中定义的三类激波时刻都可能出现在 $I^\delta_{f_K,x_0,x_\delta}$ 的一个极小化子中。

例 3.13（有效冲击与无效冲击）。 取 $h=\mathrm{id}$、$\delta=1$、$d=1$、$K=\{-1,1\}$、$x_0=-c$、$x_1=c$，其中 $c\geq 0$。我们看到，$\mathbb{R}$ 被划分为三个沃罗诺伊单元，分别为：$V_{\{-1\}}=(-\infty,0)$、$V_{\{1\}}=(0,+\infty)$ 和 $V_{\{-1,1\}}=\{0\}$。势项的形式为

$$|\nabla f(x)|^2=\begin{cases}|x+1|^2 & \text{if } x\in(-\infty,0),\\ 0 & \text{if } x=0,\\ |x-1|^2 & \text{if } x\in(0,+\infty).\end{cases}$$

容易看出，γ 是$I^\delta_{f_K,\ x_0,\ x_\delta}$ 的极小化子，因此必定是非递减的；由此，$\gamma^{-1}(0)$是一个闭区间（若 $t_0=t_1$，则可能退化），且 $S(\gamma)=NDS(\gamma)=\{t_0,t_1\}$。于是，

γ有两种在定性上不同的行为，取决于 $t_0 = t_1$ 是否成立。若 $t_0 = t_1$，则 γ 有一个非退化的非有效冲击时刻。反之，若 $t_0 \neq t_1$，则 t_0 和 t_1 分别是左有效冲击和右有效冲击。直接计算表明，例如当 $c = 1$时会出现第一种情形。另一方面，我们可以证明，若 c 取得足够小，则第二种情形必然出现。事实上，对于 $c < 1$，由 γ的单调性，泛函的最小值$\Gamma(-c, c)$可按如下方式给出下界：

$$\Gamma(-c, c) \geq (1 - t_1 + t_0)(1 - c)^2.$$

同时，由推论 3.4 可得

$$\Gamma(-c, c) \to \Gamma(0, 0) = 0, \quad \text{as } c \to 0^+.$$

因此， $t_1 > t_0$，只要我们将 c 取得足够小。

例 3.14（退化冲击）。取 $h = \mathrm{id}$、 $\delta = 1$、 $d = 2$、 $K = \{(1, 0)、(0, 1)、(-1, 0)\}$、 $x_0 = (0, -1)$、 $x_1 = (0, 0)$。这里我们注意到，两个不同的沃罗诺伊单元 $V_{\{(1,0),(0,1),(-1,0)\}} = \{(0,0)\}$和 $V_{\{(1,0),(-1,0)\}} = \{0\} \times (-\infty, 0)$ 具有相同的势区域 $Q_\eta = \{0\} \times (-\infty, 0]$，且包含 $\eta = (0,0)$。接着，通过与在 Q_η 上的投影进行比较，我们看到每个极小化子 γ of$I^\delta_{f_K,x_0,x_\delta}$ 都必须位于 Q_η 中，因此 $\gamma(t)$ 首次到达 $= (0, 0)$ 的时刻 t 必定是 γ 的一次退化冲击。

3.2 正则性结果

这里陈述并证明我们的主要正则性结果。回忆一下， $K = \{p_1, \ldots, p_N\}$ 是 $\mathbb{R}^d$中的一个有限点集，并且 h：$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是一种 C^1 势函数形状。

定理 3.15 (C^1, 1 有限个非退化冲击时刻之外的正则性。 设 γ 是$I^\delta_{f_K,\ x_0,\ x_\delta}$的一个局部极小化者。假设 h 严格递增。那么：

i) γ 的非退化冲击时刻集合 $NDS(\gamma)$ 是有限的。也就是说，存在有限个时刻 $0 \leq t_1 < \cdots < t_\ell \leq \delta$，使得 $\eta(\gamma)$ 在$[0, \delta] \setminus \{t_1, \ldots, t_\ell\}$的每个连通分支上都是常数。

ii) 令 $t_0 = 0$ 和 $t_{\ell+1} = \delta$，则 γ 在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上对每个 $i \in [0 :\ \ell]$都是 C^1, 1 正则的。此外，若令 $\eta_i \in \mathcal{E}$满足 $\gamma((t_i,\ t_{i+1})) \subseteq Q_{\eta_i}$，则我们可以估计

$$|\ddot{\gamma}(r)| \leq h'(|\gamma(r) - \eta_i|^2)|\gamma(r) - \eta_i| \quad \textit{for a.e. } r \in (t_i, t_{i+1}).$$

实际上，如果 K 是平衡的且 h 是光滑的，则定理 3.15 可改进为使任意局部极小化者 γ达到分段光滑正则性。事实上，由于 K 是平衡的，等式 $NDS(\gamma) = S(\gamma)$ 成立，而定理 3.15 的 i) 点意味着 γ 只有有限个激波时刻。另一方面，推论 3.9 结合 h 的光滑性可确保 γ 在 $[0, \delta] \setminus S(\gamma)$ 的每个连通分支上都是光滑的，其中 $\mathrm{opt}(\gamma(t))$ 显然为常数。

推论 3.16 (C^∞ 有限个激波时刻之外的正则性). 设 γ 是$I^\delta_{f_K,x_0,x_\delta}$的一个局部极小化者。假设 K 是平衡的，且 h 是 C^∞ 并且严格递增。那么：

i) $S(\gamma)$ 中 γ 的激波时刻集合是有限的。也就是说，存在有限个时刻$0 \leq t_1 < \cdots < t_\ell \leq \delta$，使得最优性类 $\mathrm{opt}(\gamma)$ 在 $[0, \delta] \setminus \{t_1, \ldots, t_\ell\}$的每个连通分支上均为常数。

ii) 令 $t_0 = 0$ 和 $t_{\ell+1} = \delta$，则对于每个 $i \in [0 :\ \ell]$， γ 在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 中是 C^∞。此外，若 $t_{i+1} > t_i$，记 H_i 为区间 $(t_i,\ t_{i+1})$ 中 γ 的最优性类，并定义 $\eta_{H_i} = \eta(V_{H_i})$，则 γ 求解

$$\ddot{\gamma} = h'(|\gamma - \eta_{H_i}|^2)(\gamma - p_{H_i})$$

在 $(t_i,\ t_{i+1})$ 中。

注记 3.17。推论 3.16 推广了 [2, 定理 13], : 在该定理中，对于离散 MAG 模型的一维版本的解，除有限个激波时刻外，均可导出光滑正则性。在他们的框架中， h 只是恒等映射，而 K 由 $\mathbb{R}^d$中所有可通过置换固定向量 $A=(a_1, \ldots\ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$的分量得到的 $m!$点组成，其中 $a_1 < \cdots < a_d$。利用 $\mathbb{R}$ 的序结构所给出的重排不等式，不难证明假设 (3.7) 在此情形下成立，从而推出 K 是平衡的。■

在深入讨论后续段落的细节之前，我们先概述定理 3.15 的证明。首先讨论如何由第 ii) 点推出第 i) 点。我们需要证明，若 $\eta(\gamma) = \eta$ 在区间 (s,t) 上为常数，则 γ 在 $C^{1,1}$ 正则。显然，我们有 $\gamma([s,t]) \subset P_\eta$。接着注意到，对于任意绝对连续曲线 $\rho\colon [s,t] \to P_\eta$，由 h的单调性及不等式 (3.6)，下列不等式成立:

$$\int_s^t |\dot\rho|^2 + h(|\nabla f|^2(\rho)) \le \int_s^t |\dot\rho|^2 + h(|\eta-\rho|^2). \tag{3.8}$$

于是，通过比较论证，已知 γ 是左侧 (3.8) 中泛函的局部极小化者，且 $\rho=\gamma$ 使该不等式取等号，可得：若将曲线限制在闭凸集 P_η内，则 γ 是右侧 (3.8) 中泛函的局部极小化者。另一方面，我们将在引理 3.18 中证明，任何这样的约束局部极小值点必然是 $C^{1,1}$ 正则。现在转而证明定理的第 i) 点。首先请注意，我们可以将证明范围限制为以下等价的局部命题:

$$\textbf{Claim}\text{: for each time } t \in (0,\delta], \text{ there exists } \epsilon>0 \text{ such that } \eta(\gamma) \text{ is constant in } (t-\epsilon, t). \tag{3.9}$$

由断言 (3.9) 以及右区间的相应结论（利用泛函的自治性即可得到），显然可知 $NDS(\gamma)$ 是离散的。于是，根据紧性，我们得到 $NDS(\gamma)$ 是有限的。断言 (3.9) 的证明将通过一系列相当复杂的竞争函数“剪切与粘贴”构造来逐步完成。我们先概述其一般的启发性思路。我们将证明分为几个步骤:

步骤 1。反设 t 是势中“跳跃”的一个聚点。那么，从左侧趋近 t 时， γ 将无穷多次访问高势区和低势区域。如果渐近地只访问一个低势区域，那么最终始终停留在那里会更为有利。因此，我们可以假设 γ 从左侧趋近 t 时，无穷多次访问至少两个不同的低势区域。此外，在不同低势区域之间交替时， γ 必然会在高势区中花费不可忽略的时间。

步骤 2。当从左侧趋近 t 时， γ 在高势区域中所花时间的比例趋于零，因此，为了使 Lipschitz 曲线 γ 能够在短时间内从一个低势区域跳到另一个，至少需要有两个不同的低势区域彼此非常接近。

步骤 3。根据引理 3.20，我们最终可以稍微偏离 γ，到达一个势更低的区域（即两者之间的界面），从而与 γ 的局部最优性相矛盾，并得到所需的矛盾。

在下一段中，我们证明引理 3.18 和引理 3.20。作为引理 3.18 的推论，我们得到，只要局部极小化者始终处于同一个势区内，它就是 $C^{1,\,1}$ 正则的（见推论 3.19），从而解决定理 3.15 的第 ii) 点。随后，在最后一段中，我们将按照上述启发式思路，严谨地证明断言 3.9，从而完成定理 3.15 的证明。

两个引理。第一个引理本身也具有独立意义，它涉及限制在给定闭凸集内取值的曲线上的作用泛函局部极小化子的正则性。由于边界效应，即使拉格朗日量是光滑的，这类受约束的极小化子一般也不是 C^2。然而，只要拉格朗日量是 C^1，它们至少必须是 $C^{1,\,1}$。

引理 3.18（带凸约束问题的正则性）。设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个闭凸集，并设 $\Psi\colon \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ 在 P 的某个邻域内属于 C^1 类。给定两点 x_0， $x_\delta \in P$，我们

考虑由下式定义的泛函 $\mathcal{G}$： $C([0,\delta],\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$

$$\mathcal{G}(\gamma) = \begin{cases} \int_0^\delta |\dot\gamma|^2 + \Psi(\gamma) & \text{if } \gamma \in AC([0,\delta],\mathbb{R}^d), \gamma(0)=x_0, \gamma(\delta)=x_\delta, \gamma([0,\delta]) \subseteq P, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么，每个 γ 的局部极小化者 $\mathcal{G}$ 都属于 $C^{1,\,1}$ 类，并且我们可以估计

$$|\ddot\gamma(r)| \le \frac{1}{2}|\nabla\Psi(\gamma(r))| \quad \text{for a.e. } r \in (0,\delta).$$

证明。 我们称 π_P 为到 P上的投影。首先，对每个点 $x \in P$，定义P 在 x处的“放大”，即由下式定义的闭凸锥 P_x：

$$P_x + x = \begin{cases} \mathbb{R}^d & \text{if } x \in \mathring{P}, \\ \bigcap\{\mathcal{H} \text{ half space} : P \subset \mathcal{H},\, x \in \partial\mathcal{H}\} & \text{if } x \in \partial P. \end{cases}$$

接着，我们称 S_x 为到 P_x上的投影。事实证明，它是正齐次且满足1-Lipschitz条件。不难看出

$$\frac{P-x}{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} P_x \tag{3.10}$$

在每个紧集上按Hausdorff意义收敛。由于包含关系（$P-x$）$/\epsilon \subseteq P_x$ 始终成立，为了证明收敛（3.10），我们只需利用分离论证验证：对任意 $\epsilon_j \to 0^+$以及任意点 $z \in P_x$，存在一个序列 $y_j \in$（$P-x$）$/\epsilon_j$ 收敛到 z。因此，当$P-x$趋于$/\epsilon$ 时，到（$P-x$）$/\epsilon$ 上的投影逐点收敛到 S_x。再利用 S_x 的齐次性，我们最终得到，对任意 $v \in \mathbb{R}^d$,

$$\pi_P(x+\epsilon v) = x + \epsilon S_x(v) + o(\epsilon), \quad \text{as } \epsilon \to 0^+. \tag{3.11}$$

现在，设 γ 是泛函 $\mathcal{G}$ 的局部极小化者。给定一个测试函数 $\varphi \in C_c^\infty((0,\delta);\mathbb{R}^d)$，我们考虑以下竞争函数:

$$\gamma_\epsilon := \pi_P(\gamma + \epsilon\varphi), \quad \text{for } \epsilon > 0.$$

由于 π_P 是 1-Lipschitz 的，我们有 $|\gamma_\epsilon'| \le |\gamma' + \epsilon\varphi'|$。于是

$$\mathcal{G}(\gamma_\epsilon) \le \mathcal{G}(\gamma) + 2\epsilon\int_0^\delta \gamma'\cdot\varphi' + \frac{\Psi(\gamma_\epsilon)-\Psi(\gamma)}{2\epsilon} + \epsilon^2\int_0^\delta |\varphi'|^2.$$

利用前面的逐点展开式 (3.11) 以及控制收敛定理，我们得到

$$\limsup_{\epsilon\to 0^+} \frac{\mathcal{G}(\gamma_\epsilon)-\mathcal{G}(\gamma)}{2\epsilon} \le \int_0^\delta \gamma'\cdot\varphi' + \frac{1}{2}\nabla\Psi(\gamma)\cdot S_\gamma(\varphi). \tag{3.12}$$

由 γ 的局部极小性可立即推出，(3.12) 中的右端是非负的。最后，我们可以利用投影 S_x 的压缩性得到不等式

$$\langle\gamma'', \varphi\rangle \le \int_0^\delta \frac{1}{2}|\nabla\Psi(\gamma)||\varphi| \quad \text{for every } \varphi \in C_c^\infty((0,\delta);\mathbb{R}^d),$$

命题得证。 □

如上所示，在伴随不等式 (3.8) 的比较论证中，由引理 3.18 可推出以下结论

推论 3.19 （势函数区域中的正则性）。 设 h 是一个非递减的势函数形状，且 γ 是 $I^\delta_{f_K,x_0,x_\delta}$ 的局部极小化者。假设存在一个 $\eta \in \mathcal{E}$，使得 $\gamma((s,t)) \subseteq Q_\eta$，其中$(s,t) \subset [0,\delta]$。那么 γ 在 $[s,t]$ 上是 $C^{1,1}$ 正则的，并且满足以下估计

$$|\ddot\gamma(r)| \le h'(|\gamma(r)-\eta|^2)|\gamma(r)-\eta| \quad \text{for a.e. } r \in (s,t).$$

由此，定理 3.15 的第 ii) 点得证。现在我们可以讨论第二个引理，它将在定理 3.15 的第 i) 点的证明中起到关键作用。

引理 3.20（相交多胞体的倒数距离）。设 A，$B \subset \mathbb{R}^d$ 为两个满足$A \cap B \neq \emptyset$的多胞体。则存在一个充分大的常数 $M > 0$，使得

$$\operatorname{dist}_{A\cap B}(x) \leq M \operatorname{dist}_B(x) \quad \textit{for every } x \in A.$$

证明。设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 为一个多胞体，并具有形式为 (3.4) 的表示。不妨设其中每个仿射函数 T_j 的 Lipschitz 常数均等于 1。考虑相应的向量值函数 $z_P\colon\ \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)^\ell$，其定义为

$$z_P(x) = \left(T_1(x)^+, \dots, T_\ell(x)^+\right). \tag{3.13}$$

首先，我们证明存在一个常数 $c_P > 0$，使得

$$T_j(x)^+ \leq \operatorname{dist}_P(x) \leq c_P |z_P(x)|_1 \quad \text{for every } j \in \{1,\dots,\ell\} \text{ and every } x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.14}$$

左侧不等式由 T_j满足 1-Lipschitz 条件可得，而右侧不等式可通过如下紧性论证得到。反设存在一个点序列 $x_n \in \mathbb{R}^d \setminus P$，使得

$$\operatorname{dist}_P(x_n) \geq n |z_P(x_n)|_1.$$

将 x_n 替换为

$$\pi_P(x_n) + \frac{x_n - \pi_P(x_n)}{\operatorname{dist}_P(x_n)},$$

我们可以假设 $\operatorname{dist}_P(x_n) = 1$。现在，若 x 是 x_n的任意一个聚点，则可得 $\operatorname{dist}_P(x) = 1$且 $z_P(x) = 0$，这显然矛盾。现在我们可以证明该引理了。设$\ell \in \mathbb{N}$ 为 B 的一个形如 (3.4) 的表示中仿射函数的数量，其中 T_j为 1-Lipschitz 仿射函数。利用 (3.14) 中的估计，对于每个 $x \in A$，我们可以估计

$$\operatorname{dist}_{A\cap B}(x) \leq c_{A\cap B} |z_{A\cap B}(x)|_1 \leq \ell c_{A\cap B} \operatorname{dist}_B(x),$$

其中 $c_{A\cap B}$ 是一个正的常数。通过选择 $M = \ell c_{A\cap B}$，即可得出该命题。 □

正则性结果的证明。 本段将遵循上文概述的启发式思路，完成主要正则性结果定理 3.15 的证明。现在只需证明 i)，而我们已将目标限定为证明断言 (3.9)。在整个证明过程中，γ 将是 $I^\delta_{f_K,x_0,x_\delta}$ 的一个固定局部极小化者，而 L 是 γ 的 Lipschitz 常数。此外，为简便起见，我们将 $I^\delta_{f_K,x_0,x_\delta}$ 记作 $\mathcal{F}$。作为初步观察，请注意，我们可以选取一个足够大的 $R > 0$，使得 $\gamma([0,\delta]) \subset B_R$；然后，根据命题 3.6 中的 v)，我们可以找到一个足够小的 $\alpha > 0$，使得

$$|\bar\eta - x| \geq |\eta - x| + \alpha \quad \text{for every } x \in B_{2R} \cap Q_\eta \cap P_{\bar\eta} \text{ and every } \eta, \bar\eta \in \mathcal{E}. \tag{3.15}$$

断言 *3.9* 的证明。首先，由平移不变性，不失一般性可假设 $\gamma(t) = 0$，从而简化后续的一些计算。接着，我们考虑渐近最低势阈值

$$a := \liminf_{s \to t^-} |\eta(\gamma(s))|.$$

我们称 $\tilde{\mathcal{E}}$ 为以下集合 $\mathcal{E}$ 为在 t 之前被无限次访问的势区的索引集合。具体而言，

$$\tilde{\mathcal{E}} := \left\{\eta \in \mathcal{E} : \gamma^{-1}(Q_\eta) \cap (0,t) \text{ accumulates in } t\right\}.$$

~ ~ ~注意到，该命题等价于 $\#\mathcal{E} = 1$。集合 $\mathcal{E}$ 可划分为两个子集 $\mathcal{E}_1$ 和$\mathcal{E}_2$，其定义如下：

$$\tilde{\mathcal{E}}_1 := \left\{\eta \in \tilde{\mathcal{E}} : |\eta| = a\right\},$$
$$\tilde{\mathcal{E}}_2 := \left\{\eta \in \tilde{\mathcal{E}} : |\eta| > a\right\}.$$

˜集合 $\mathcal{E}_1$根据 a的定义显然非空，它对应于 γ 在 t 之前无限多次访问、且共享渐近最低势阈值 a 的那些势区。我们预期曲线 γ 大部分时间都会停留在那里。

我们对常数作如下技术性选择，以简化后续论证。我们取足够小的r、 μ、 $\epsilon > 0$ ，使其满足以下要求：

R1) 对每个 $x \in B_r$ ，都有 opt(x) $\subseteq$ opt(0)。R2) $\gamma((t-\epsilon, t)) \subset B_r$。R3) 对每个 $x \in B_r$以及每个 $\eta \in \mathcal{E}$，都有 $|\eta| - \mu < |x - \eta| < |\eta| + \mu$。R4) $3\mu \le \alpha$。
R5) 对 η、 $\bar{\eta} \in \mathcal{E}$的任意选取，以下条件恰有一个成立：

$$|\eta| = |\bar{\eta}|, \quad \min\{|\eta|, |\bar{\eta}|\} \le \max\{|\eta|, |\bar{\eta}|\} - 3\mu.$$

R6) $(t-\epsilon, t) \subseteq \bigcup_{\eta \in \tilde{\mathcal{E}}} \gamma^{-1}(Q_\eta)$.

注意，由于 R1)，对每个 $x \in B_r$ ，线段 $[x, 0)$都将完全包含在沃罗诺伊单元 $V_{\mathrm{opt}(x)}$中；而 R2) 则保证曲线属于这片良好区域。条件 R3)、R4) 和 R5) 将有助于有效地区分不同的势区。最后，条件 R6) 意味着，在区间（$t-\epsilon, t$）内与 γ相交的势区，恰好就是渐近相交的那些势区。因此，特别地，我们有

$$a = \min_{s \in (t-\epsilon, t)} |\eta(\gamma(s))|.$$

根据条件 R6)，区间 $(t-\epsilon, t)$ 可以划分为以下两个集合：

$$C_1 := (t-\epsilon, t) \cap \bigcup_{\eta \in \tilde{\mathcal{E}}_1} \gamma^{-1}(Q_\eta),$$
$$C_2 := (t-\epsilon, t) \cap \bigcup_{\eta \in \tilde{\mathcal{E}}_2} \gamma^{-1}(Q_\eta).$$

我们注意到， C_1 在 $(t-\epsilon, t)$ 中是闭集。事实上，如果 $s_j \in C_1$ 且 $s_j \to s_\infty \in (t-\epsilon, t)$，那么根据广义梯度的模的下半连续性，有 $|\eta(\gamma(s_\infty))| \le a + \mu$，因此 $|\eta(\gamma(s_\infty))| \le a + 2\mu$，这意味着 $|\eta(\gamma(s_\infty))| = a$，即 $s_\infty \in C_1$。于是 C_2 是开集，并且可以表示为有限个或可数个（可能为空）开区间的并。

记得，2命题等价于#矛盾。 $\tilde{\mathcal{E}} = 1$。现在我们假设 #

˜ ˜步骤 **1**。（归约到 $\#\mathcal{E}_2 \ge 1$ 且 $\#\mathcal{E}_1 \ge 2$ 的情形）。

˜我们首先证明 $\#\mathcal{E}_2 \ge 1$。若情况并非如此，则对于每个˜ ˜$s \in (t-\epsilon, t)$ 以及 $\#\mathcal{E}_1 \ge 2$，都有 $|\eta(\gamma(s))| = a$ 。于是，我们可以找到两个不同的 η、 $\bar{\eta}$，它们都属于 $\mathcal{E}_1$，以及一个时间$s \in (t-\epsilon, t)$，使得 $x := \gamma(s) \in Q_\eta \cap P_{\bar{\eta}}$。现在，根据（3.15），这将意味着

$$|x - \eta| \le |x - \bar{\eta}| - \alpha,$$

并且通过以下不等式链得出矛盾：

$$a = |\eta| \le |x-\eta| + \mu \le |x-\bar{\eta}| - \alpha + \mu \le |\bar{\eta}| + 2\mu - \alpha = a + 2\mu - \alpha \le a - \mu < a.$$

˜ ˜现在我们证明 $\#\mathcal{E}_1 \ge 2$。反设 $\mathcal{E}_1 = \{\eta\}$。那么，我们可以通过以下方式对 γ 进行任意小的扰动，从而构造出一个更优的竞争函数 $\tilde{\gamma}$ 。我们选择$s \in (t-\epsilon, t)$，使其尽可能接近 t，并满足 $\gamma(s) \in Q_\eta$。然后，我们仅在区间 $[s, t]$内修改 γ，将其替换为它在闭凸集 P_η上的投影。也就是说，记π_η 为 P_η上的投影，我们定义

$$\tilde{\gamma}(u) = \begin{cases} \gamma(u) & \text{for } u < s \text{ or } u > t, \\ \pi_\eta(\gamma(u)) & \text{for } u \in [s, t]. \end{cases}$$

现在，由于 π_η的 1-Lipschitz 性质，显然有 $|\tilde{\gamma}| \le |\dot{\gamma}|$。另一方面，就势而言，在区间 $[s,t]$ 内有

$$\begin{aligned} |\nabla f(\gamma(u))| &= |\nabla f(\tilde{\gamma}(u))| \quad \text{if } u \in C_1, \\ |\nabla f(\gamma(u))| &> |\nabla f(\tilde{\gamma}(u))| \quad \text{if } u \in C_2. \end{aligned}$$

第二个表达式很容易由以下事实推出：若 $s \in C_2$，则 $|\eta(\gamma(s))| \ge a + 3\mu$。根据这些估计、势函数形状 h 的严格单调性以及 γ 的局部极小性，我们得到 $C_2 \cap (s,t)$ 对一维勒贝格测度而言必定是可忽略的。但这与以下事实矛盾： $C_2 \cap (s,t)$ 是开集，且在 t 中聚集。因此，步骤 1 完成。

为说明这一点，步骤 1 之后的情形如下。必定存在

- 两个元素 $\eta, \bar{\eta} \in \mathcal{E}_1$，其中 $\eta \neq \bar{\eta}$；
- 两个不同的沃罗诺伊单元 V_H和 $V_{\bar{H}}$，其中 $H \subseteq Q_\eta$和 $H \subseteq Q_{\bar{\eta}}$；
- 一个开区间序列 $(s_\ell, r_\ell) \subset (t-\epsilon, t)$，在 t 中聚集，并且对每个 ℓ，以下条件均成立：

  - $r_\ell < s_{\ell+1}$；
  - $\gamma(s_\ell) \in V_H$；
  - $\gamma(r_\ell) \in V_{\bar{H}}$；
  - $(s_\ell, r_\ell) \subset C_2$.

步骤 2。（我们有 $(r_\ell - s_\ell) = O((t-s_\ell)^2)$。）
这将再次通过与一个适当选取的竞争函数进行比较来处理。对于每个ℓ，我们定义竞争函数 γ_ℓ：它仅在区间 $[s_\ell, t]$ 内对 γ 进行修改，将 γ 替换为其在 $[\gamma(s_\ell), 0]$上的投影。也就是说，记 π_ℓ为在 $[\gamma(s_\ell), 0],$上的投影，我们令

$$\gamma_\ell(u) = \begin{cases} \gamma(u) & \text{for } u < s_\ell \text{ or } u > t, \\ \pi_\ell(\gamma(u)) & \text{for } u \in [s_\ell, t]. \end{cases}$$

然后，和之前一样，$|\dot{\gamma}_\ell| \le |\dot{\gamma}|$ 。关于势能部分，对于 $u \in (s_\ell, t)$，我们有以下估计：

$$\begin{aligned} |\nabla f(\gamma(u))|^2 &\ge |\eta(\gamma(u))|^2 - 2|\eta(\gamma(u))||\gamma(u)| - |\gamma(u)|^2 \ge |\eta(\gamma(u))|^2 - L(2S+r)(t-u), \\ |\nabla f(\gamma_\ell(u))|^2 &\le |\eta(\gamma_\ell(u))|^2 + 2|\eta(\gamma_\ell(u))||\gamma_\ell(u)| + |\gamma_\ell(u)|^2 \le |\eta(\gamma_\ell(u))|^2 + L(2S+r)(t-u), \end{aligned}$$

其中我们令 $S := \max_{\eta \in \tilde{\mathcal{E}}} |\eta|$。我们知道

$$\begin{aligned} |\eta(\gamma(u))|^2 &\ge a^2 = |\eta(\gamma_\ell(u))|^2 \quad \text{for } u \in (s_\ell, t), \\ |\eta(\gamma(u))|^2 &\ge a^2 + 9\mu^2 \ge |\eta(\gamma_\ell(u))|^2 + 9\mu^2 \quad \text{for } u \in (s_\ell, r_\ell). \end{aligned}$$

因此，将常数 $c_0 := L(2S+r)$ 重新命名后，对于充分大的 ℓ，我们得到：

$$\begin{aligned} 0 &\ge \mathcal{F}(\gamma) - \mathcal{F}(\gamma_\ell) \\ &\ge \int_{s_\ell}^{r_\ell} \left\{ h(a^2 + 9\mu^2 - c_0(t-u)) - h(a^2 + c_0(t-u)) \right\} + \int_{r_\ell}^{t} \left\{ h(a^2 - c_0(t-u)) - h(a^2 + c_0(t-u)) \right\} \\ &\ge c_1(r_\ell - s_\ell) - c_2(t-s_\ell)^2. \end{aligned}$$

这里， $c_1 := h(a^2 + 8\mu^2) - h(a^2 + \mu^2) > 0$ ，且 ℓ 足够大，使得 $c_0(t-s_\ell) \le \mu^2$。常数c_2 则定义为

$$c_2 := c_0 \operatorname{Lip}\left(h; [a^2 - \mu^2, a^2 + \mu^2]\right)$$

通过定义 $c_3 := c_2/c_1$，最终得到

$$(r_\ell - s_\ell) \le c_3 (t - s_\ell)^2 \quad \text{for } \ell \text{ large enough.}$$

注意， $\overline{V_H}$ 和 $\overline{V_{\bar{H}}}$ 是两个交集包含 0 的多面体。必要时，可将它们替换为各自与一个较大的 d 维立方体的交集，这样便可假设它们是多胞体。然后，我们可以应用引理 3.20，推得存在一个常数 $M > 0$和一个点序列$x_\ell \in \overline{V_H} \cap \overline{V_{\bar{H}}}$，使得

$$|x_\ell - \gamma(s_\ell)| \le M|\gamma(r_\ell) - \gamma(s_\ell)| \le MLc_3(t-s_\ell)^2 = c_4(t-s_\ell)^2.$$

步骤 3。（对 γ 通过 $\overline{V_H} \cap \overline{V_{\bar{H}}}$ 进行轻微偏离会降低作用量，从而与其局部极小性矛盾）。

我们称 $\epsilon_\ell := c_4(t-s_\ell)$，并假设 ℓ 足够大，使得 $\epsilon_\ell \in (0,1)$。我们关键地考虑如下竞争函数：

$$\delta_\ell(u) = \begin{cases} \gamma(u) & \text{for } u < s_\ell \text{ or } u > t, \\ \gamma(s_\ell) + \frac{x_\ell - \gamma(s_\ell)}{\epsilon_\ell(t-s_\ell)}(u-s_\ell) & \text{for } u \in [s_\ell, s_\ell + \epsilon_\ell(t-s_\ell)), \\ x_\ell + \frac{-x_\ell}{(1-\epsilon_\ell)(t-s_\ell)}(u - s_\ell - \epsilon_\ell(t-s_\ell)) & \text{for } u \in [s_\ell + \epsilon_\ell(t-s_\ell), t]. \end{cases}$$

注意，在区间 $[s_\ell, t]$ 中，曲线 δ_ℓ 只是对 γ 的分段线性修改：在时间 $\epsilon_\ell(t-s_\ell)$ 内从 $\gamma(s_\ell)$ 运行到 x_ℓ，然后在剩余时间内从 x_ℓ 运行到 0。我们将看到，当 ℓ 足够大时， δ_ℓ 的作用量严格小于 γ，从而得到所需的矛盾。我们首先需要确认， $\overline{V_H} \cap \overline{V_{\bar{H}}}$ 是一个非常低的势能区域，这样就可以通过轻微偏离经过该区域来降低 γ 的作用量。具体如下。显然， η 和 $\bar{\eta}$ 都属于 $\partial f(x_\ell)$，因此也属于 $\frac{\eta+\bar{\eta}}{2} \in \partial f(x_\ell)$。但是

$$|\eta(x_\ell)| \le |\eta(x_\ell) - x_\ell| + |x_\ell| \le \left|\frac{\eta+\bar{\eta}}{2} - x_\ell\right| + |x_\ell| \le \left|\frac{\eta+\bar{\eta}}{2}\right| + 2|x_\ell| = \left(a^2 - \left|\frac{\eta-\bar{\eta}}{2}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2|x_\ell|,$$

其中，在最后一个等号处我们用到了 $|\eta| = |\bar{\eta}| = a$。因此，当 ℓ 足够大时，我们可以假设 $x_\ell \in B_r$，且 $|\eta(x_\ell)| < a$。尤其是，后者意味着

$$|\eta(x)| \le a - 3\mu \quad \text{for every } x \in [x_\ell, 0] \text{ and } \ell \text{ large enough.}$$

我们还可以估计

$$|x_\ell|^2 \le (|\gamma(s_\ell)| + |x_\ell - \gamma(s_\ell)|)^2 \le |\gamma(s_\ell)|^2 + 2L\epsilon_\ell(t-s_\ell)^2 + \epsilon_\ell^2(t-s_\ell)^2.$$

接下来比较 δ_ℓ 的作用量与 γ 的作用量。我们从动能部分开始：

$$|\dot{\delta}_\ell(u)|^2 = \left(\frac{|x_\ell - \gamma(s_\ell)|}{\epsilon_\ell(t-s_\ell)}\right)^2 \le 1 \quad \text{for } u \in [s_\ell, s_\ell + \epsilon_\ell(t-s_\ell)),$$

$$|\dot{\delta}_\ell(u)|^2 = \left(\frac{|x_\ell|}{(1-\epsilon_\ell)(t-s_\ell)}\right)^2 \le \frac{|\gamma(s_\ell)|^2}{(1-\epsilon_\ell)^2(t-s_\ell)^2} + \frac{2L\epsilon_\ell}{(1-\epsilon_\ell)^2} + \frac{\epsilon_\ell^2}{(1-\epsilon_\ell)^2} \quad \text{for } u \in [s_\ell + \epsilon_\ell(t-s_\ell), t).$$

因此，积分可得：

$$\int_{s_\ell}^t |\dot{\gamma}|^2 \ge \frac{|\gamma(s_\ell)|^2}{t-s_\ell},$$

$$\int_{s_\ell}^t |\dot{\delta}_\ell|^2 \le \epsilon_\ell(t-s_\ell) + \frac{|\gamma(s_\ell)|^2}{(1-\epsilon_\ell)(t-s_\ell)} + \frac{2L\epsilon_\ell(t-s_\ell)}{(1-\epsilon_\ell)} + \frac{\epsilon_\ell^2(t-s_\ell)}{(1-\epsilon_\ell)} = \frac{|\gamma(s_\ell)|^2}{(1-\epsilon_\ell)(t-s_l)} + O(\epsilon_\ell^2).$$

另一方面，对于势能部分，我们有

$$|\nabla f(\gamma(u))|^2 \ge a^2 - c_0(t-u) \quad \text{for } u \in [s_\ell, t),$$
$$|\nabla f(\delta_\ell(u))|^2 \le a^2 + c_0(t-u) \quad \text{for } u \in [s_\ell, s_\ell + \epsilon_\ell(t-s_\ell)),$$
$$|\nabla f(\delta_\ell(u))|^2 \le a^2 - 9\mu^2 + c_0(t-u) \quad \text{for } u \in [s_\ell + \epsilon_\ell(t-s_\ell), t).$$

积分可得

$$\int_{s_\ell}^{t} h(|\nabla f(\gamma)|^2) \geq h(a^2)(t-s_\ell) - c_5(t-s_\ell)^2,$$
$$\int_{s_\ell}^{t} h(|\nabla f(\delta_\ell)|^2) \leq h(a^2)(t-s_\ell) + c_5(t-s_\ell)^2 - c_6(1-\epsilon_\ell)(t-s_\ell).$$

此处 ℓ 取足够大，使得 $c_0(t-s_\ell) \leq \mu^2$。此外，我们令

$$c_5 := \frac{c_0}{2}\,\mathrm{Lip}\left(h; [a^2-\mu, a^2+\mu]\right), \quad c_6 := h(a^2) - h(a^2-8\mu^2) > 0.$$

最后，汇总所有估计，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\gamma) - \mathcal{F}(\delta_\ell) &\geq \frac{|\gamma(s_\ell)|^2}{t-s_\ell}\left(\frac{-\epsilon_\ell}{(1-\epsilon_\ell)}\right) + c_6(1-\epsilon_\ell)(t-s_\ell) + O(\epsilon_\ell^2) \\ &\geq \left(-\frac{L^2}{c_4(1-\epsilon_\ell)}\epsilon_\ell + \frac{c_6}{c_4}(1-\epsilon_\ell) + O(\epsilon_\ell)\right)\epsilon_\ell.\end{aligned}$$

现在，矛盾源于这样一个事实：当 ℓ 足够大时，右端项严格为正。证明至此完成。

□

参考文献

[1] Luigi Ambrosio、Oscar Ascenzi 和 Giuseppe Buttazzo。具有高度不连续被积函数的积分泛函的极小化子的 Lipschitz 正则性。数学分析与应用杂志，142：301–316，1989。[2] Luigi Ambrosio、Aymeric Baradat 和 Yann Brenier。作为良好速率函数的 Γ-极限的 Monge-Ampère 引力。2020 年。预印本，https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.11966。[3] Luigi Ambrosio、Aymeric Baradat 和 Yann Brenier。由凸函数梯度诱导的一类作用泛函的 Γ-收敛。*Rend. Lincei. Mat. Appl.*，32：97–108，2021。[4] Luigi Ambrosio 和 Camillo Brena。依赖于凸函数的一类作用泛函的稳定性。*Disc. Cont. Dyn. Syst.*，43：993–1005，2023。[5] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savaré。度量空间及概率测度空间中的梯度流。苏黎世联邦理工学院数学讲义。Birkhäuser Verlag，巴塞尔，第 2 版，2008 年。[6] Franz Aurenhammer。沃罗诺伊图：一种基本几何数据结构的综述。*ACM Comput. Surv.*，23：345–405，1991。[7] Yann Brenier。向量值函数的极分解与单调重排。纯粹与应用数学通讯，44：375–417，1991。[8] Yann Brenier。关于 Monge-Ampère 引力的双重大偏差原理。*Bull. Inst. Math.Acad. Sin.*，11：23–41，2016。[9] Gauthier Clerc、Giovanni Conforti 和 Ivan Gentil。局部对数 Sobolev 不等式的变分解释。2020 年。预印本，https://doi.org/10.48550/arXiv.2011.05207。[10] Dario Cordero-Erausquin。关于周期测度的输运。*C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IMath*，329：199–202，1999。[11]Jean-Baptiste Hiriart-Urruty 和 Claude Lemaréchal。凸分析基础。Grundlehren Text Editions。Springer Berlin，Heidelberg，第 1 版，2001 年。[12] Robert McCann。黎曼流形上映射的极分解。*Geom. Func. Anal.*，11：589–608，2001。