arXiv:2304.11462v1 [math.GN] 22 Apr 2023

Assouad 嵌入定理能够扩展到何种程度?

FILIP TUROBOŚ波兰罗兹，罗兹工业大学数学研究所，
电子邮箱：
filip.turobos@p.lodz.pl

OLEKSIY DOVGOSHEY乌克兰斯洛维扬斯克，乌克兰国家科学院应用数学与力学研究所；德国吕贝克，吕贝克大学数学研究所，电子邮箱：
oleksiy.dovgoshey@gmail.com

摘要。 著名的 Assouad 嵌入定理已有 40 多年的历史。该定理指出，对于任意倍增度量空间（其倍增常数为 C_0），存在一个整数 N，使得对于任意 $\alpha \in (0.5, 1)$，都存在一个正数 $C(\alpha, C_0)$ 和一个单射函数F： $X \to \mathbb{R}^N$，使得

$$\forall x, y \in X \quad C^{-1} d(x,y)^\alpha \leq \|F(x) - F(y)\| \leq C d(x,y)^\alpha$$

本文利用重新度量技术，将上述定理扩展到半度量空间的一个广泛子类。我们还介绍了这一扩展的局限性——特别地，我们证明，在任何满足 Assouad 定理结论的半度量空间中，松弛三角条件同样成立，这意味着存在 $K \geq 1$，使得

$$\forall x, y, z \in X \quad d(x,z) \leq K \left(d(x,y) + d(y,z) \right).$$

1. 引言。三角不等式的早期概念可追溯至欧几里得《几何原本》 [14], ，该书成书于公元前300年。尽管如此，数学家们还是花了二十多个世纪才由 Fréchet [12] 将度量空间的概念形式化。随后

2020 数学主题分类：主要分类号 54E25、54E35。关键词和短语：重新度量技术、Frink定理、Assouad 定理、半度量、拟度量、嵌入、倍增空间；

进一步探讨并推广距离概念的成果，也见于 Chittenden [4] 和 Wilson [20] 等人的著作。还应指出，半度量空间最早由 Fréchet 在 [12], 中加以研究，他将其称为“E类”。如果从距离的形式定义中去掉三角不等式，便得到半度量空间的概念。半度量空间本身就是非常有趣的对象——其内在的混沌特性颇具吸引力，尤其是考虑到它们似乎与优雅的度量空间极为相近。

由于此类空间的行为不稳定性，开始出现了更弱版本的三角不等式。这些概念同样可以追溯到 Chittenden [4], [5] 和 Wilson [20], , 但直到如今仍在持续发展。为了将半度量空间的分析降至众所周知的度量基础上，数学家们开始探索对这类空间进行重新度量化的可能性，或是在对初始距离概念进行轻微调整后，将其嵌入一个广为人知的度量空间中。关于第一种可能性，1937 年，Frink [13] 延续 Chittenden [5], 的研究，证明了给定拟度量[1] （带有松弛常数 $K = 2$）存在一个 Lipschitz等价度量。这一结果随后在 Schroeder [17] 的论文中得到探讨，并在 Chrząszcz 等人 [7]的论文中得到全面改进。类似的结果虽立足点略有不同，但也可在 Fagin 等人 [11]较早的论文中找到。

讨论的第二条路径由 Assouad 开辟。 [1, 9], 他证明，对于倍增度量空间，[2] 通过将初始距离提升到某个幂次，可以将其嵌入某个维数足够高的欧几里得空间。$0 < \alpha < 1$这一著名结果发展出了一整套关于倍增空间的理论，并使人们得以进一步探索它们与所谓倍增测度之间的关系（关于这一主题的更多内容，例如可参见 Heinonen 的精彩讲义，见 [15, 第1,10,13]章）。本文篇幅虽短，却探讨了如何借助 Frink 的度量化技术，将这一结果推广到范围更广的半度量空间。我们还证明，超过某个界限后，这种推广便失去了意义，因为定理的表述使我们能够据此判断所研究空间的类型。

本文结构如下：下一节将介绍基本定义以及以往论文中的已知结果。随后，我们进入文章的第一个主要部分，重点讨论 Assouad 定理的推广。第四节讨论此类推广的局限性，最后一部分提出若干开放问题，并指出该领域未来研究的方向。

2. 预备知识。 本文用 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示实数集和正整数集。我们从半度量空间的定义开始。

设 $X \neq \emptyset$ 和 $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ 是一个满足以下条件的函数，对所有 $x, y \in X$ 均成立：

(S1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

[1]据我们所知，这种放宽概念最早由 Bourbaki 在其著作中正式引入 [3], , 不过“b-度量空间”这一名称通常与 Czerwik 联系在一起 [8]。[2]也就是说，对于任意正半径 r ，每个球都能被固定有限个半径为 $\frac{r}{2}$ 的球覆盖。正式定义将在下一节给出。

(S2) $d(x,y) = d(y,x)$.

则称这对 (X,d) 为一个 **半度量空间** （并称 d 为一个 **半度量**）。此外，若存在 $K \geqslant 1$ 使得 d 满足

(B) $d(x,z) \leqslant K(d(x,y) + d(y,z))$ for all $x,y,z \in X$

那么，(X,d)称为具有松弛常数 K的 b-**度量空间**。如果可以取$K=1$，就得到**度量空间**的定义。

在半度量的范畴中，序列收敛、开球/闭球、完备性等经典概念与度量空间中的对应概念相同。不过，它们的性质往往略欠规则。关于这一主题的更多内容，可参见例如 [6]。我们引用 Frink定理的两个改进版本 [7]。第一个版本与 [13, 17] 中的版本不同之处在于，它对原始距离d给出了更紧的界。

定理2.1（**Frink定理（再探）**）。设(X,d) 是松弛常数为 $K \leqslant 2$的 b-度量。则存在一个度量 D，使得

$$\forall x,y \in X \quad D(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant K^2 D(x,y).$$

第二个版本通过在原始距离与其对应的度量之间引入 Hölder型关系，使我们能够省去对 K 的要求。

定理 2.2 (**Frink度量化技术适用于 b-度量空间**). 设(X,d)是一个松弛常数为 $K \geqslant 1$的 b-度量空间。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在$p \in (0,1]$ 以及一个度量 D，使得

$$\forall x,y \in X \quad D(x,y) \leqslant d^p(x,y) \leqslant (1+\varepsilon) D(x,y).$$

半度量空间中的倍增性质（其旨在对应于赋范空间的有限维性）总体而言尚未得到充分研究。我们首先介绍两种倍增性质的概念（而非像度量空间情形那样只介绍一种），并在下文说明这种差异的由来。先从**直径**的概念开始。对于半度量空间（X,d）中的子集 $A \subset X$，其定义为 $\operatorname{diam} A := \sup_{x,\ y \in A} d(x,y)$。对于半度量空间（$X,d$），可以说它是:

- **弱倍增**，如果存在一个常数 $C \in \mathbb{N}$，使得任意有界集 D（其直径为 $l < \infty$）都能被至多 C 个直径不超过 $\frac{l}{2}$ 的集合覆盖。
- **倍增**，如果存在一个常数 $C \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $x \in X$ 和正半径 r，开球 $B(x, r)$ 都能被开球 $B\left(x_i, \frac{r}{2}\right)$ 覆盖，其中 $x_i \in X$，对于 $i \in \{1,\dots,C\}$。

这些概念在度量空间的范围内显然是一致的（因为每个有界集都可以包含在一个半径等于其直径的球中；此外，每个球都是有界集）。但在半度量的范围内，情况并非如此，因此需要加以区分。下一节开头会给出一个恰当的例子。我们以引用著名的 Assouad 定理结束本部分，这正是我们将要探讨的定理。

定理 2.3（**Assouad 嵌入定理**）。设（X，d）是一个倍增度量空间，其倍增常数为 $C_0 \geq 1$。存在一个整数 $N \in \mathbb{N}$，使得对于 $\alpha \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$，存在一个常数 C（仅取决于 C_0 和 α）以及一个单射函数 $F\colon\ X \to \mathbb{R}^N$，使得下列不等式成立：

$$\forall x, y \in X \quad C^{-1} d^{\alpha}(x,y) \leqslant \|F(x) - F(y)\| \leqslant C d^{\alpha}(x,y) \tag{1}$$

3. 倍增半度量空间与 Assouad 定理。我们以所承诺的例子开始本文的这一部分：该例展示了一个弱倍增但并非倍增的半度量空间。

例 3.1。设 $\mathbb{Z}$ 为所有整数的集合，且设 (X, d) 为一个满足 $X = \mathbb{Z}$ 且满足以下条件的半度量空间：

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = 0 \text{ and } y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ |x - y|, & \text{if } x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{if } x = y = 0. \end{cases} \tag{2}$$

考虑半径为 $r \in (1, 2)$、中心为 $B(0, r)$ 的开球。由于对于任意非零整数 z，$d(0, z) = 1 < r$，因此 $B(0, r) = \mathbb{Z}$。考虑以 $x \in X$ 为中心、半径为 $r' = \frac{r}{2}$ 的开球。由于 $r' \in (\frac{1}{2}, 1)$，所以 $B(x, r')$ 除 x 自身外不能包含任何其他元素（$\mathbb{Z}$ 中任意两个元素之间的距离至少为 1）。因此，无法用半径至多为 r' 的有限个球覆盖 $B(0, r)$，故该空间不是倍增的。

现在，我们可以证明空间 (X, d) 是弱倍增的。显然，该空间中的每个有界集都是有限集，因为 X 本质上是配备了欧几里得距离的 $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 的一个等距副本，只是多了一个点。因此，任何有限直径的集合都可以用若干个直径更小的集合覆盖，这一点相当明显。为符合形式化表述，我们断言 $C \leqslant 3$，这证明了它的有限性。

设 $A \subset X$ 是任意一个有限直径的集合。如果 A 至多包含 3 个元素，那么覆盖集的选取显而易见（因为可以使用直径为零的单点集）。否则，A 至少包含 $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 中两个不同的数。

因此，设 m、M 分别为 $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 中的最小元素和最大元素。由于对 $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，$d(0, z) = 1$，于是很容易注意到 $\operatorname{diam} A = M - m$。考虑集合

- $A_1 := \{0\}$;
- $A_2 := \overline{B}\left(M, \frac{M-m}{2}\right) \cap \{m, m+1, \ldots, M\}$;
- $A_3 := \overline{B}\left(m, \frac{M-m}{2}\right) \cap \{m, m+1, \ldots, M\}$.

其中，$\overline{B}\left(M、\frac{M-m}{2}\right)$ 和 $\overline{B}\left(m、\frac{M-m}{2}\right)$ 分别是半径为 $\frac{M-m}{2}$、中心分别为 M和 m 的闭球。

可以看出，$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$，因为第一个集合涵盖了 $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 之外可能存在的点，而后面的集合包含了我们集合的整数部分。因此，$C \leqslant 3$。

显然，只要某个假设将有界性的概念与这样一种可能性联系起来：能够将有界集包含在半径足够大的球中，就足以证明弱倍增性质与倍增性质等价。类似三角不等式的条件

在 b-度量空间的定义中所假设的条件就是此类前提的一个例子。由此自然引出以下问题，作为后续探讨：倍增性质是否意味着半度量空间也具有弱倍增性质？如果不是，还需要哪些额外假设？

一只老鼠 她的简单观察可能会给出一些答案。它可以表述如下：

观察： 设 (X,d) 是一个半度量空间。对于每个非空有界集 A，都存在一个有限半径为 $r>0$、中心为 $x\in A$ 的开球，使得 $B(x,r)\supset A$（例如，可以取 $r:=\operatorname{diam}(A)+1$）。

我们成功找到了一个有趣的空间示例：它具有倍增性质，却不是弱倍增的。

例 3.2。设 (X,d) 是一个不具备倍增性质的度量空间，并令 $X\cap\mathbb{N}=\emptyset$。我们在 $Y=X\cup\mathbb{N}$ 上定义一个半度量 ρ，使得

$$\rho(x,y)=\begin{cases} d(x,y), & \text{if } x,y\in X\\ \max\{\frac{1}{x},\frac{1}{y}\}, & \text{if } x,y\in\mathbb{N} \text{ and } x\neq y\\ \frac{1}{x}, & \text{if } x\in\mathbb{N} \text{ and } y\in X. \end{cases}$$

那么 (Y,ρ) 是倍增的，其倍增常数为 $C=1$（因为以 X 中的点为中心的每个球都包含一些自然数，因此很容易用以足够大的 $n\in\mathbb{N}$ 为中心的球覆盖），但它不是弱倍增的，因为弱倍增半度量空间的任何子空间也都是弱倍增的，而 X 显然不满足这一条件。

如果认为有必要，可以考虑一个无限维的巴拿赫空间，并以范数诱导的度量充当 X，这样得到的例子会更具体一些。

现在我们将证明，定理 2.3 的适用范围可以扩展到 b-度量空间这一类。这将借助 Frink 定理所提供的重新度量技术来实现。我们需要确定的是，这些技术是否保留倍增性质（或许常数会有所不同）。由此引出以下两个引理：

引理 3.3（**保留倍增条件的度量变换**）。设（X，d）是一个倍增常数为 C 的半度量空间，并设 $p>0$。那么（X，d^p）也是一个倍增半度量空间，其倍增常数为 $C'=C^n$，其中 $n=\lceil r\rceil$。

证明。我们首先指出显然的等价关系

$$d(x,y)<r \iff d^p(x,y)<r^p \tag{3}$$

对于任意 x、$y\in X$ 和 $r>0$。令 $n\in\mathbb{N}$ 足够大，使得 $2^{np}\geqslant 2$（对于我们的任务，取 $n=\lceil\frac{1}{p}\rceil$ 即可）。反复使用倍增性质可得到倍增空间的另一个相当明显的性质，即：

$$B_d(x,r)\subset\bigcup_{i=1}^{C^n}B_d(x_i,\frac{r}{2^n})$$

对某个 $(x_i)_{i=1}^{C^n}$，$x_1,\dots x_{C^n}\in X$。现在，为证明 (X,d^p) 是倍增的，任取 $s>0$，并令 $r:=s^{\frac{1}{p}}$。

$$B_{d^p}(x,s)=B_d(x,r)\subset\bigcup_{i=1}^{C^n}B_d(x_i,\frac{r}{2^n})=\bigcup_{i=1}^{C^n}B_{d^p}(x_i,\frac{s}{2^{np}})\subset\bigcup_{i=1}^{C^n}B_{d^p}(x_i,\frac{s}{2}).$$

由于 s 是任意选取的，因此 $C' := C^n$ 是 (X, d^p) 的倍增常数。 ∎

第二个引理将使我们能够使用定理 2.2 作为重新度量技术，同时保持拓扑结构和倍增性质。

引理3.4（**通过有界半度量保持倍增性质**）。设（X，d）为一个倍增半度量空间。若半度量 D 与 d 双 *Lipschitz* 等价，即存在一个正实常数 $\alpha \geqslant 1$，使得

$$\forall x, y \in X \quad D(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant \alpha D(x,y) \tag{4}$$

成立，则（X，D）也是一个倍增半度量空间。

证明。设 $B_D(x,r)$ 是半度量空间（X, D）中的任意一个开球。根据不等式 (4) 的右侧，我们可知

$$D(z,y) < s \implies d(z,y) < \alpha s$$

对任意两点 y、$z \in X$ 以及任意正实数 s，均有此结论。因此，以下包含关系成立：

$$B_D(x,r) \subset B_d(x, \alpha r).$$

现在我们将倍增性质应用 N 次（其中 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $\alpha < 2^{N-1}$），从而用有限个开球 $B_d\left(x_i、\ \frac{r}{2}\right)$、$i = 1$、2、.....、$C_0^N$ 覆盖后一个球，其中 C_0 是 d 的倍增常数。

现在， (4) 的第一部分给出如下包含关系，对任意 $z \in X$ 和 $s >$ 均成立 0:

$$B_d(z,s) \subset B_D(z,s).$$

综上可得

$$B_D(x,r) \subset B_d(x, \alpha r) \subset \bigcup_{i=1}^{C_0^N} B_d\left(x_i, \frac{r}{2}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{C_0^N} B_D\left(x_i, \frac{r}{2}\right).$$

因此，(X, D) 具有倍增性质。 ∎

有了上述所有引理，我们可以给出 Assouad 定理的一个扩展版本。

定理 3.5（**关于 b-度量空间的 Assouad 定理**）。设 (X,d) 是一个具有倍增性质的 b-度量空间。存在一个整数 $N \in \mathbb{N}$，使得对于 $\alpha \in (0,1)$，存在常数 C 和单射函数 F：$X \to \mathbb{R}^N$，使得对于任意 $x, y \in X$，以下不等式成立：

$$C^{-1} d^{\alpha}(x,y) \leqslant \|F(x) - F(y)\| \leqslant C d^{\alpha}(x,y). \tag{5}$$

证明。由定理 2.2 可知，对于 $\varepsilon = 1$，存在度量 D 和幂$p \in (0,1]$，使得对所有 x, $y \in X$

$$D(x,y) \leqslant d^p(x,y) \leqslant 2D(x,y). \tag{6}$$

由引理 3.3 可得，d^p 是一个倍增半度量（因为 d 是倍增的）。进而，由引理 3.4 可知，d^p 的倍增性质保证了 D也具有相同的性质。应用定理 2.3，可得存在实常数 $C > 0$、$\alpha \in \left(\frac{1}{2}、\ 1\right)$ 以及一个嵌入 F： $X \to \mathbb{R}^N$，使得

$$C^{-1} \cdot D^{\alpha}(x,y) \leqslant \|F(x) - F(y)\| \leqslant C \cdot D^{\alpha}(x,y)$$

注意，由（6）中的界可得

$$C^{-1}\cdot D^{\alpha}(x,y)\geqslant C^{-1}\cdot\left(\frac{d(x,y)^{p}}{2}\right)^{\alpha}=(2^{\alpha}C)^{-1}\cdot d^{p\alpha}(x,y),$$

以及

$$C\cdot D^{\alpha}(x,y)\leqslant C\cdot d(x,y)^{p\alpha}\leqslant(2^{\alpha}C)\cdot d^{p\alpha}(x,y).$$

由这两个不等式可得，若将常数分别代入 $\alpha':=p\alpha$ 和 $C':=2^{\alpha}\cdot C$，则所需的不等式 (5) 成立。 ∎

因此，我们将 Assouad 定理的适用范围扩展到了具有倍增性质的 b-度量空间。

4. 局限性。我们可能会想，是否存在某个更广泛的倍增半度量空间类，在将所讨论的距离函数提升到某个幂次后，能够双Lipschitz嵌入到 $\mathbb{R}^{N}$ 中。事实证明，成为 b-度量空间是一个空间能够双Lipschitz嵌入到任意度量空间（而不仅仅是 $\mathbb{R}^{N}$）的必要条件。下面将以正式定理陈述这一结论

定理 4.1（**半度量空间嵌入度量空间**）。设 (X,d) 是一个半度量空间，并假设对于某个幂次 $\alpha\in(0,1]$，，存在一个映射$F\colon X\to Y$，它是将 (X,d^{α}) 双*Lipschitz*嵌入到度量空间 (Y,d_{Y})的映射。那么，(X,d) 是一个 b-度量空间。

证明。令 C 为嵌入 F 的双Lipschitz常数，即

$$C^{-1}\cdot d^{\alpha}(x,y)\leqslant d_{Y}\left(F(x),F(y)\right)\leqslant C\cdot d^{\alpha}(x,y)$$

任取三点 x、y、$z\in X$。我们有

$$\begin{aligned}d^{\alpha}(x,z)&\leqslant C\cdot d_{Y}\left(F(x),F(z)\right)\\&\leqslant C\cdot\left(d_{Y}\left(F(x),F(y)\right)+d_{Y}\left(F(y),F(z)\right)\right)\\&\leqslant C^{2}\cdot\left(d^{\alpha}(x,y)+d^{\alpha}(y,z)\right)\\&\leqslant 2C^{2}\cdot\max\left\{d^{\alpha}(x,y),d^{\alpha}(y,z)\right\},\end{aligned}$$

最后一个不等式源于这样一个事实：两个数之和不超过它们中的较大值的两倍。因此我们得到

$$d^{\alpha}(x,z)\leqslant 2C^{2}\cdot\max\left\{d^{\alpha}(x,y),d^{\alpha}(y,z)\right\}.$$

若将两边提升至 $\frac{1}{\alpha}$ 次幂，就得到所需结论 n

$$d(x,z)\leqslant 2^{\frac{1}{\alpha}}C^{\frac{2}{\alpha}}\cdot\max\left\{d(x,y),d(y,z)\right\}\leqslant 2^{\frac{1}{\alpha}}C^{\frac{2}{\alpha}}\cdot\left(d(x,y)+d(y,z)\right).$$

∎

注 4.2. 将度量提升至 $\alpha\in$ 次幂（0, 1）的过程有时称为雪花化（见 [9, 18]），这是利用超度量保持函数变换度量的一种特殊情形（见 [2, 10, 16, 19]）。

定理 4.1 与以下由 Fagin 等人提出的定理非常相似[11, 定理4.4]:

定理 4.3（**Fagin 等人的度量有界性条件**）。半度量空间（X， d）满足某个 $c \geqslant 1$ 对应的 c-松弛多边形不等式，即：

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in X \quad d(x_1, x_n) \leqslant c \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1});$$

当且仅当存在一个定义在 X 上的度量 D，使得

$$\forall x, y \in X \quad D(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant cD(x, y).$$

5. 总结性评论与开放问题。 据我们所知，倍增和弱倍增半度量空间的测度论方面仍未得到探索。或许对这一领域开展更多研究能够取得有趣的成果，让我们更深入地了解这类对象的本质。然而，关于 Assouad 定理在度量的其余两条公理下的推广，目前所知甚少。这也可能带来引人入胜的研究机会。

关于弱倍增性质与倍增性质之间的区别，重新审视例 3.1 下方的评论后，我们可以提出以下问题：

开放问题： 在最弱的哪些假设下，弱倍增半度量空间与倍增半度量空间这两个概念会重合?

猜想 5.1（证明或证伪）。 设（X， d）是一个半度量空间。则以下命题等价：

(i) 每个球都是(X, d)的有界子集。(ii) 空间(X, d) 是倍增的，

当且仅当它是弱倍增的。

6. 补充说明。 Oleksiy Dovgoshey 获得了大众汽车基金会项目“从建模与分析到逼近”的部分资助。

Filip Turoboś 获得了波兰国家学术交流署通过 NAWA 紧急资助计划提供的资助。

参考文献

[1] Assouad,P.: 与嵌入到 R^n相关的度量维数研究。巴黎科学院院刊 Sér. A-B 288, no. 15, A731-A734 (1979)[2] Bilet, V., Dovgoshey, O., Shanin, R.: 超度量保持函数与超度量空间的弱相似。p 进数与超度量分析 13, 186–203 (2021)[3] Bourbaki, N.: 数学原本。一般拓扑学。第二部分。Addison-Wesley Pub- lishing Co., 雷丁, Mass. - 伦敦 – 唐米尔斯, Ont., (1966)[4] Chittenden, E. W.: 关于 *ècart* 与邻域的等价性。美国数学会会刊 18, 161–166 (1917)[5] Chittenden, E. W.: 关于可度量化问题及抽象集合理论中的相关问题。美国数学会通报 33, 13–34 (1927)[6] Chrząszcz, K., Jachymski, J., Turoboś, F.: 正则半度量空间的刻画与拓扑。德布勒森数学出版物 93, 87–105 (2018)

[7] Chrząszcz, K.,Jachymski, J., Turoboś, F.: *Frink*度量化定理的两种改进，以及拟度量空间上*Lipschitz*映射的不动点结果。Aequat. Math. 93, 277–297 (2018)[8] Czerwik, S.: *b*-度量空间中的压缩映射。Acta Math. Inform. Univ. Os- traviensis 1, 5–11 (1993)[9] David, G., Snipes, M.: *Assouad* 嵌入定理的非概率证明及维数界。Anal. Geom. Metr. Spaces 1, 36–41 (2013)[10] Dovgoshey, O.: 关于超度量保持函数。Math. Slovaca 70, 1–11 (2020)[11] Fagin, R., Kumar, R., Sivakumar, D.: 比较前*k*个列表。SIAM J. Discrete Math. 17, 134–160 (2003) [12] Fréchet, M.: 关于泛函演算的若干问题。Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 22, 1–74 (1906)[13] Frink, A. H.: 距离函数与可度量化问题。Bull. Am. Math. Soc. 43, 133–142 (1937) [14] Heath, T. L. (Ed.): 欧几里得《几何原本》十三卷。Courier Corporation, New York (1956)[15] Heinonen, J.: 度量空间分析讲义。Universitext, Springer New York, (2001)[16] Pongsriiam, P., Termwuttipong, I.: 关于超度量与度量保持函数的备注。Abs. Appl. Anal. 2014, 1–9 (2014)[17] Schroeder, V.: 拟度量与度量空间。Conform. Geom. Dyn. 10(18), 355–361 (2006)[18] Tyson, J. T., Wu, J.-M.: 雪花度量空间的刻画。Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 30, 313–336 (2005)[19] Vallin, R. V., Dovgoshey, O.: *p*进度量保持函数及其类似函数。Math. Slovaca 71, 391–408 (2021)[20] Wilson, W. A.: 关于半度量空间。Amer. J. Math. 53, 361–373 (1931)