arXiv:2304.11469v1 [math.DS] 22 Apr 2023

关于同胚乘积极小性的注记

J. P. BOROŃSKI、MAGDALENA FORYŚ-KRAWIEC 和 PIOTR OPROCHA

摘要。若对任意极小系统（X，T），紧空间 Y 均存在一个同胚 $S\colon\ Y \to Y$，使得乘积系统（$X \times Y$，$T \times S$）是极小的，则称其为同胚乘积极小的。我们证明，一大类共边界具有同胚乘积极小性。该类包含 R. H. Bing 的伪圆，从而回答了 Dirbák、Snoha 和 Špitalský 在 [极小直积，《美国数学会汇刊》第375卷（2022年）]中提出的问题。

1. 引言

本文讨论同胚乘积极小性的概念。该概念最近由 Dirbák、Snoha 和 Špitalský 在 [9]中引入。若对任意极小的、度量的但不一定紧的系统（X，T），紧空间 Y 均存在一个同胚乘积极小的 同胚 $S\colon\ Y \to Y$，使得乘积系统（$X\times Y$，$T\times S$）是极小的，则称其为同胚乘积极小的。上述作者证明（[9, 定理B]）以下空间具有同胚乘积极小性：

(1) 每个紧致连通可度量阿贝尔群，(2) 每个形如 $Y \times Z$ 的空间，其中 Y 是非退化的同胚乘积极小空间，且 Z 是一个允许弧连通拓扑群的极小作用的紧致可度量空间，(3) 每个商空间 $(\Gamma \times Z)/\Lambda$，它由 $\Gamma \times Z$ 通过施加 Λ 的对角作用得到，其中 Γ 是一个无限紧致连通可度量阿贝尔群，Λ 是 Γ 的一个有限子群，而 Z 是一个紧致连通（不一定是阿贝尔的）可度量群，群 Λ 通过自同构作用于该群，(4) 克莱因瓶，(5) 康托尔空间，(6) 二维环面上的谢尔宾斯基曲线以及克莱因瓶上的谢尔宾斯基曲线，(7) 每个允许极小连续流的紧致可度量空间 Y，其在 Y 的同胚群中的中心化子在代数意义上于 Y 上传递作用，(8) 每个无边界且允许非平凡紧致连通李群自由作用的紧致连通流形 Y，(9) 所有奇数维球面和紧致连通李群，(10) 每个康托尔类空间。

同胚乘积极小性这一概念的提出，源于这样一个事实：存在一些极小空间，其笛卡尔幂不允许存在极小同胚 [5]。

作者在 [9]，中提出的开放问题之一是：R. H. Bing 的伪圆是否是同胚积极小的 [9, 问题 4]。伪圆是一种类分形对象，既出现在拓扑学中，也出现在动力系统中。例如，$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 可连续分解为伪圆，其分解空间与 $\mathbb{R}$ [7] 同胚（另见 [2]）。在动力系统中，它出现在旋转理论 [3]，以及光滑动力系统 [13], [14], [15], [11]，和复动力系统中。

[8]。关于伪圆的同胚乘积极小性这一问题似乎有充分的研究动机，因为伪圆存在极小同胚 [11] 以及极小非可逆映射 [6]。它还具有许多与圆相似的性质，例如存在可由环带上的刚性旋转良好逼近的同胚。然而，它的同胚群与圆的同胚群相去甚远。例如，该群在伪圆上的作用具有不可数多个轨道 [12], ，其中包含弱混合的极小同胚 [11] （这与圆的情形不同），并且不包含任何连通非退化紧子集[16]。尽管如此，在本文中，我们证明伪圆确实具有同胚乘积极小性，这也是一类平面共前沿（即所谓的 HAK吸引子）所具有的性质 [4]。在下一节中，我们将回顾这些对象的构造，并在第 3 节中利用这一构造回答上述问题。正如 Handel 在 [11], 中指出的那样，这一构造具有足够的灵活性，可以引入曲折性，从而保证所得的 HAK吸引子是一个伪圆，由此得到以下结果，进而对上述 [9, 问题 4] 给出了肯定的回答。

定理 1.1。伪圆是同胚积极小的。

2. 预备知识

一个动力系统是一个有序对 (X,T)，其中 X 是可度量化的，且 $T\colon X\to X$ 是连续映射。特别地，我们不要求通常假设的 X 是紧空间。我们采用 [9] 提出的这一更一般的方法，因为同胚乘积极小性的定义要求如此。若不存在真非空、闭且 T- 不变的子集 $M\subset X$，则称动力系统是极小的，此时映射 T 称为极小映射。注意，当且仅当对所有 $x\in X$， ω-极限集$x\in X$（记作 $\omega_T(x)$）都是整个空间 X 时，系统才是极小的；其中 $\omega_T(x)$ 是轨道 $\{T^n(x)\}_{n\geq 0}$的所有极限点构成的集合。回顾一下，若一个紧空间 Y满足：对于任意极小、度量但不一定紧的系统 (X,T)，Y都存在一个同胚 $S\colon Y\to Y$，使得乘积系统 $(X\times Y, T\times S)$ 是极小的，则称其为同胚乘积极小的。

我们将 连续统定义为紧致连通度量空间，而连续统的任何本身也是连续统的子集均称为子连续统。如果一个连续统不能表示为两个真子连续统的并，则称其为不可分解的；如果连续统的每个紧致连通子集都是不可分解的，则称其为遗传不可分解的。我们主要研究的对象是 Bing 在 [1], 中构造的伪圆，它是一个遗传不可分解连续统。

令 $\mathbb{S}^1$ 表示单位圆。对于任意 $\theta\in\mathbb{R}$ 和圆 $\mathbb{S}^1$，我们用 R_θ：$\mathbb{S}^1\ni x\mapsto x+\theta \mod 1\in\mathbb{S}^1$ 表示旋转映射。显然，如果我们固定某个 $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，并取一个收敛于 α 的序列 $\{q_k\}_{k\geq 0}\subset\mathbb{Q}$，那么旋转序列 $\{R_{q_k}\}_{k\geq 0}$ 将在圆的自同胚空间中收敛于 R_α。

取环带 $\mathbb{A}=[0,1]\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，并令 $\pi_i, i=1,2$ 表示将 $\mathbb{A}$投影到其第 i 个因子的投影；也就是说，对任意 $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{A}$，我们有 $\pi_1(t)=t_1\in[0,1]$ 以及$\pi_2(t)=t_2\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。

对于任意紧致度量空间 (X,d) 以及连续映射 $F,G\colon X\to X$，我们定义如下度量：

$$\rho(F,G)=\sup_{x\in X} d(F(x),G(x)).$$

我们的主要定理 3.5 的证明受到环带$\mathbb{A}$的所谓 HAK 同胚（Handel-Anosov-Katok 同胚）构造的启发。我们称同胚 $H\colon\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 为 *HAK* 同胚，如果 H 是关于度量 ρ的一列特定环带的.....的一致极限

同胚 $\{H_n\}_{n\geq 0}$。下面我们回顾序列 $\{H_n\}_{n\geq 0}$ 构造的主要思想，依据 [4] 的作者。有关更多细节，请参阅[11] 和 [4]。

HAK 同胚的构造：

(1) 从一列递减的闭环带 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 开始，假设 $A_0 =\mathbb{A}$，使得 $A_1 \subset \operatorname{Int}\mathbb{A}$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $f_n\colon\ A_n \to \mathbb{A}$ 是一个同胚映射，具有如下性质：对于 $c \in A_n$ 且 ε_n 足够小时，$\pi_1(f(c)) \leq \frac{\varepsilon_n}{2}$。事实上，我们以这样的方式选取 ε_n（其中 $n \in \mathbb{N}$），使得 $\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_i$ 收敛（参见 [4] 中的第 2.1.1 节）。

(2)对于每个 n，我们取有理旋转 $R_n\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{A}$，其周期为 p_n，使得存在一个矩形 $D_n = [0,1]\times[0,\alpha_n]$，满足$R_n^i(D_n)$ $R_n^j(D_n)$ 要么相等，要么内部不相交，$\mathbb{A} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} R_n^i(D_n)$ 和 $\alpha_n < \delta_n$，其中 δ_n 根据 f_n^{-1}对于$\frac{\varepsilon_n}{4}$ 的一致连续性选取。我们假设对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$p_{n+1} < p_n$。

(3) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义一个同胚 $g_n\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{A}$，它与恒等映射的距离小于 ε_n，并且：

$$g_n|_{A_n} = f_n^{-1} \circ R_n \circ f_n,$$

当 $g_n|_{\mathbb{A}\setminus A_{n-1}} =$恒等时。

(4) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们将同胚 $H_n\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 定义如下：

$$H_n = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1.$$

[4] 中提出的逼近方案还保证了 $H_n(A_{n+1}) \subset \operatorname{Int} A_{n+1}$，并且对于某个 $m \geq 1$，有 $\rho(H_n^i, H_{n+1}^i) < \varepsilon_n$，其中 $i = 1\ldots, mp_n$。因此，作者得到 $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个柯西序列，故其收敛到某个同胚H，同时每个 A_n. 都具有 H-不变性。记 $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$，则我们还有 $\mathcal{C}$是闭的且具有 H-不变性。事实上，它是 H 的一个吸引集，我们将其称为*HAK*吸引子，对应于*HAK* 同胚 H。

3. 同胚乘积极小性

在本节中，我们始终假设 (X,T) 是一个极小动力系统，其中 X 是度量，但不一定是紧致的。

下面的引理 3.1 是标准结果。我们不加证明地陈述它。

引理 3.1. 设 $F\colon\ Z \to Z$ 是紧致度量空间 Z 上的连续映射。那么，对于任意连续映射 $G\colon\ Z \to Z$，以及 $K > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\gamma > 0$，使得若 $\rho(F,G) < \gamma$，则对于 $j = 0, \ldots K$，有 $\rho(F^j, G^j) < \varepsilon$。

注 3.2. 根据韦尔定理（例如参见 [18]），对于任意由互不相同的整数组成的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，序列 $\{\alpha x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 对几乎所有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都是模 1 均匀分布的。利用这一结果，并重复 [17, 命题 1] 证明中的推理可知，使 $T\times R_\alpha$ 为极小的 $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 的集合具有满勒贝格测度，其中(X,T) 是一个极小动力系统，而 $R_\alpha\colon\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是圆上的无理旋转。

以下事实是极小性的标准推论。为求完整起见，我们给出其证明。

引理 3.3。任取 $x_0 \in X$。设 $R_\alpha\colon\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是圆 $\mathbb{S}^1$上的一个旋转，其中 $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 使得 $T \times R_\alpha$ 是极小的。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $K > 0$，使得对每个 t，$s \in \mathbb{S}^1$ 都存在 $j < K$，满足：

$$d\left((x_0,t),(T\times R_\alpha)^j(x_0,s)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

证明。固定 $\varepsilon > 0$，并任取 $t, s \in \mathbb{S}^1$。设 $\{V_i\}_{i=1}^N$ 是 $\mathbb{S}^1$ 的一个有限开覆盖，其集合的直径均小于 $\frac{\varepsilon}{2}$；再设 W 是 x_0 的一个邻域，且 $\operatorname{diam} W < \frac{\varepsilon}{2}$（为简便起见，假设在 $X \times \mathbb{S}^1$ 中取最大值度量）。记作 $U_i = W \times V_i$。由 $T \times R_\alpha$ 的极小性，对于每个 $i = 1, \ldots, N$，都存在 K_i 和某个 $j_i < K_i$，使得 $(T \times R_\alpha)^{j_i}(x_0, s) \in U_i$。令 $K = \max\{K_i \colon i = 1, \ldots, N\}$，并用 $U \in \{U_i\}_{i=1}^N$ 表示包含 (x_0, t) 的集合。那么对某个 $j \in \{j_1, \ldots, j_N\}$，有 $d\left((x_0, t), (T \times R_\alpha)^j(x_0, s)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$。□

引理 3.4. 固定任意 $x_0 \in X$。对于所有 $\varepsilon > 0$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$，任意满足 $\delta < \frac{1}{m}$ 的 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$，存在一个有理数 $\frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q} \cap [1 - \delta, 1 + \delta]$，使得 $q' > m$，以及一个整数 $K > 0$，具有如下性质：

$$d\left((x_0, t), (T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'}})^j(x_0, s)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于每个 t, $s \in X \times \mathbb{S}^1$ 以及某个 $j = j(s,\ t) < K$。

证明。固定 $\varepsilon > 0$、$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$、某个任意大的 $m \in \mathbb{N}$ 和 $0 < \delta < \frac{1}{m}$。选取某个无理数 $\alpha \in (1 - \delta, 1 + \delta)$（根据注记 3.2，这样的 α 存在），使得 $T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \alpha}$：$X \times \mathbb{S}^1 \to X \times \mathbb{S}^1$ 是极小的。根据引理 3.3，针对 $\frac{\varepsilon}{3}$ 和映射 $T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \alpha}$，可得 K。根据引理 3.1，对于 $T \times R_{\frac{p}{q}}$、所选的 K 和 $\frac{\varepsilon}{3}$，存在 $\gamma > 0$，使得对于 $\beta \in (1 - \delta, 1 + \delta)$，我们有 $\rho((T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \alpha})^j, (T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \beta})^j) < \frac{\varepsilon}{3}$，其中 $j = 0, \ldots, K$，只要 $\rho((T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \alpha}), (T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \beta})) < \gamma$。现在选取 $\delta' < \delta$，使得对于任意 $\beta \in (\alpha - \delta', \alpha + \delta')$，我们都有 $\rho((T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \alpha}), (T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \beta})) < \gamma$，且 $(\alpha - \delta', \alpha + \delta') \subset (1 - \delta, 1 + \delta)$.

取任意一个有理数 $\frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$，使其满足：

$$\left| \frac{p'}{q'} - \alpha \right| < \delta'.$$

注意到 $\frac{p'}{q'} \in (1 - \delta, 1 + \delta)$，显然

$$\frac{1}{q'} \leq \left| \frac{p'}{q'} - 1 \right| < \delta < \frac{1}{m},$$

因此 $q' > m$。此外，我们有：

$$\begin{aligned} d\left((x_0, t), (T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'}})^j(x_0, s)\right) &\leq d\left((x_0, t), (T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \alpha})^j(x_0, s),)\right) \\ &\quad + d\left((T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \alpha})^j(x_0, s), (T \times R_{\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'}})^j(x_0, s)\right) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

证明完毕。 □

在下文定理的证明中，我们将使用基于第 2 节所述方案的 HAK 同胚 H 的逼近方案：$\mathbb{A} \to \mathbb{A}$

定理 3.5。任取 $x_0 \in X$。存在一个嵌套的环带序列 $\{A_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{A}$ 和一个同胚 H：$\mathbb{A} \to \mathbb{A}$，使得 $\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 0} A_n \subset$ 内 $\mathbb{A}$ 是一个吸引伪圆，并且对于任意 $n > 0$，都存在 $K_n > 0$，使得对每个 t, $s \in \mathbb{A}$，都存在 $j_n < K_n$，使得：

$$d\left((x_0, t), (T \times H)^{j_n}(x_0, s)\right) < \frac{1}{n}.$$

证明。任意选取足够大的 $m_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $\xi_1 = \frac{1}{m_1} < \frac{1}{4}$，取任意 $p \in \mathbb{N}$ 并定义环带 $\hat{}\mathbb{A} = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{A}$。对于任意 $i = 1, \ldots, m_1$，令 $P_i^1 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \times \left[\frac{i-1}{m_1}, \frac{i}{m_1}\right]$ 和 $\mathcal{P}_1 = \{P_1^1, \ldots, P_{m_1}^1\}$。取一个环带 $A_1 \subset \mathbb{A}$

以及一个同胚 $f_1\colon \mathbb{A}\to\mathbb{A}$ with $f(A_1)=\hat{}\mathbb{A}$，使得若记 $D_i^1=f_1^{-1}(P_i^1)$，则 A_1 足够薄，从而对 $i=1,\ldots,m_1$，有 $\operatorname{diam}(D_i^1)<\frac{1}{4}$。

固定 $\varepsilon_1<\frac{1}{4}$。令 $\frac{p_1'}{q_1'}$、K_1 和 $j_1<K_1$ 由 m_1、ε_1、$\frac{p}{m_1}$及某个 $\delta_1<\frac{1}{m_1}$通过引理 3.4 得到。取 $\frac{p_1}{q_1}=\frac{pp_1'}{m_1q_1'}$。

定义环带同胚 $g_1\colon\ \mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 如下：

$$g_1=f_1^{-1}\circ\left(\mathrm{id}_{[0,1]}\times R_{\frac{p_1}{q_1}}\right)\circ f_1.$$

令 $H_1=g_1$。注意，对于任意 $j\geq 0$ 和 $s\in A_1$，我们有：

$$f_1(H_1^j(s))=\left(\mathrm{id}_{[0,1]}\times R_{\frac{p_1}{q_1}}\right)^j(f_1(s)).$$

固定 $t,s\in A_1$。记作 $\hat{}\,t=f_1(t)$ 和 $\hat{s}=f_1(s)$。存在一个 $i\in\{1,\ldots,m_1\}$ 使得 $\hat{s},\left(\frac{1}{4},\pi_2(\hat{s})\right)\in P_i^1$，并且对于 $j_1<K_1$，我们有：

$$d\left((x_0,\pi_2(\hat{t})),\left(T\times R_{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{j_1}(x_0,\pi_2(\hat{s}))\right)<\frac{\varepsilon_1}{2}.$$

由此可知，$\left(\frac{1}{4},\pi_2(\hat{}\,t)\right)$ 和 $\left(\frac{1}{4},R_{\frac{p_1}{q_1}}^{j_1}(\pi_2(\hat{s}))\right)$ 位于分割 $\mathcal{P}_1$ 的同一区域或相邻区域中，这意味着 $\hat{}\,t$ 和 $f_1((H_1^{j_1})(s))$ 也位于分割 $\mathcal{P}_1$ 的同一区域或相邻区域中。因此，$d(t,H_1^{j_1}(s))<\frac{1}{2}$。于是：

$$d\left((x_0,t),(T\times H_1)^{j_1}(x_0,s)\right)<\frac{1}{2}+\varepsilon_1<\frac{3}{4}.$$

根据引理 3.1，取由 H_1 和 $\frac{\varepsilon_1}{2}$ 确定的 γ_1。取 $\eta_1\leq\frac{\gamma_1}{4}$。

对于任意 $n>1$，我们按以下方式归纳地进行构造。假设我们已经定义了 A_{n-1}, f_{n-1}, g_{n-1}, H_{n-1}, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, m_{n-1}, ε_{n-1}。令 $\xi_n>0$ 满足：若 $\operatorname{diam}(Z)<\xi_n$，则对任意 $Z\subset A_{n-1}$，$\operatorname{diam}\left(f_{n-1}^{-1}(Z)\right)<\frac{1}{4n}$。考虑前一步得到的 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$。取环带 $A_n\subset\operatorname{Int}A_{n-1}$：在 A_{n-1} 中取一条在 $\left(\mathrm{id}_{[0,1]}\times R_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right)$ 作用下不变的曲线，并将其加厚成环带 A_n，使其在 $\left(\mathrm{id}_{[0,1]}\times R_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right)$ 作用下也保持不变。定义同胚 $\hat{}\,\varphi_n\colon\ \mathbb{A}\to\mathbb{A}$，从满足以下条件的同胚 $\varphi_n\colon A_n\to\mathbb{A}$ 开始

$$\varphi_n\circ\left(\mathrm{id}_{[0,1]}\times R_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right)\Big|_{A_n}=\left(\mathrm{id}_{[0,1]}\times R_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right)\circ\varphi_n|_{A_n}$$

并将其扩展到整个 $\mathbb{A}$。令 $f_n\colon\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 如下：

$$f_n=\varphi_n\circ f_{n-1}.$$

这样，f_n 与 $_{[0,1]}\times R_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}$ 在 A_n 上交换。我们还要求环带 A_n 足够薄，从而存在某个 $\beta_n>0$，使得如果我们取一个区域 $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times[x,x+\beta_n]\subset\hat{}\,\mathbb{A}$，那么：

$$\operatorname{diam}\left(\varphi_n^{-1}\left(\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times[x,x+\beta_n]\right)\right)<\xi_n$$

对于任意 $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。

固定某个 $\varepsilon_n<\frac{1}{4n}$。取一个充分大的 $\alpha_n\in\mathbb{N}$，使得对于 $m_n=m_{n-1}\alpha_n>m_{n-1}q_{n-1}'$，我们有 $\frac{1}{m_n}<\beta_n$。现在取由引理 3.4 针对 ε_n, m_n、某个 $\delta_n<\frac{1}{m_n}$ 和 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 得到的 K_n, $j_n<K_n$, $\frac{p_n'}{q_n'}$。取 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\cdot\frac{p_n'}{q_n'}$，令 $p_n=p_{n-1}p_n'$ 且 $q_n=q_{n-1}q_n'$，并记为 $\nu_n=\frac{p_n'-q_n'}{q_n'}\cdot\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$。令 $P_i^n=\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times\left[\frac{i-1}{q_n},\frac{i}{q_n}\right]$，

那么 $\mathcal{P}_n = \{P_1^n, \dots, P_{q_n}^n\}$ 是将 $\mathbb{A}$ 分割为 q_n 个矩形的分割，这些矩形的短边长度为 $\frac{1}{q_n} < \frac{1}{m_n} < \beta_n$。令 $D_i^n = f_n^{-1}(P_i^n)$。

特别地，对于任意 s、$t \in A_n$，存在 $j < K_n$，由引理 3.4 可得：

$$d\left((x_0, \pi_2(t)), (T \times R_{\frac{p_n}{q_n}})^j (x_0, \pi_2(s))\right) < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

令 $g_n\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 为如下定义的同胚。首先：

$$g_n|_{A_n} = f_n^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\nu_n}\right) \circ f_n$$

并将其扩展为整个 $\mathbb{A}$ 上的一个同胚，该同胚在边界上为恒等映射。令 $H_n = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1$。特别地，$H_n|_{A_n} = g_n \circ H_{n-1}|_{A_n}$。

对于任意 $1 \le j \le K_n$ 和 $s \in A_n$，根据 g_n 的定义以及关于 $n-1$ 的归纳假设，我们有：

$$\begin{aligned}
f_n(H_n^j(s)) &= f_n \circ (g_n \circ H_{n-1})^j(s) = \left(\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\nu_n}\right) \circ f_n \circ H_{n-1} \circ (g_n \circ H_{n-1})^{j-1}(s) \\
&= (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\nu_n}) \circ f_n \circ f_{n-1}^{-1} \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}) \circ f_{n-1} \circ (g_n \circ H_{n-1})^{j-1}(s) \\
&= (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\nu_n}) \circ \varphi_n \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}) \circ f_{n-1} \circ (g_n \circ H_{n-1})^{j-1}(s) \\
&= (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\nu_n}) \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}) \circ \varphi_n \circ f_{n-1} \circ (g_n \circ H_{n-1})^{j-1}(s) \\
&= (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_n}{q_n}}) \circ \varphi_n \circ f_{n-1} \circ (g_n \circ H_{n-1})^{j-1}(s) \\
&= (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_n}{q_n}}) \circ f_n \circ (g_n \circ H_{n-1})^{j-1}(s) \\
&= (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_n}{q_n}}) \circ f_n \circ f_{n-1}^{-1} \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}) \circ f_{n-1} \circ (g_n \circ H_{n-1})^{j-2}(s) \\
&= \cdots = (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_n}{q_n}})^j \circ f_n(s) = (\mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_n}{q_n}})^j (f_n(s)).
\end{aligned}$$

固定 s、$t \in A_n$。记 $\hat{t} = f_n(t)$ 和 $\hat{s} = f_n(s)$。那么 $\hat{s}$ 和 $(1/4, \pi_2(\hat{s}))$ 都属于 $f_n^{-1}(\hat{\mathbb{A}})$ 的同一个 q_n 区域。对于 $j_n < K_n$，我们有：

$$d\left((x_0, \pi_2(\hat{t})), (T \times R_{\frac{p_n}{q_n}})^{j_n} (x_0, \pi_2(\hat{s}))\right) < \frac{\varepsilon_n}{2},$$

因此，$(1/4, \pi_2(\hat{t}))$ 和 $(T \times R_{\frac{p_n}{q_n}})^{j_n}(y, \pi_2(\hat{s}))$ 位于分割 $\mathcal{P}_n$ 的同一区域或相邻区域中，这意味着 $\hat{t}$ 和 $f_n(H_n^{j_n}(s))$ 也位于分割 $\mathcal{P}_n$ 的相邻区域中。因此，我们有 $d(t, H_n^{j_n}(s)) < \frac{1}{2n}$，由此可得：

$$d((x_0, t), (T \times H_n)^{j_n}(x_0, s)) < \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{2} < \frac{1}{2n} + \varepsilon_n < \frac{3}{4n}.$$

取由引理 3.1 给出的 γ_n，使得每当 $\rho(H_n, \mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_n}{q_n}}) \le \gamma_n$ 时，对于 $i = 0, \dots, K_0$，都有 $\rho(H_n^i, \mathrm{id}_{[0,1]} \times R_{\frac{p_n}{q_n}}^i) \le \frac{\varepsilon_n}{2}$。取 $\eta_n \le \frac{\text{最小值}\{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\}}{2^{n+1}}$。

注意，$\{H_n\}_{n \ge 1}$ 是一个柯西序列，因为对于任意 $n \ge 1$ 和 $s > n$，我们都有：

$$\rho(H_n^i, H_{n+s}^i) \le \sum_{j=n}^{n+s-1} \rho(H_j^i, H_{j+1}^i) \le 2^{-n}.$$

类似地，可以证明序列 $\{H_n^{-1}\}_{n \ge 1}$ 也是柯西序列。因此，映射 $H = \lim_{n \to \infty} H_n$ 是 $\mathbb{A}$ 上良定义的同胚。注意，伪圆 $\mathcal{C} = \bigcap_{n \ge 1} A_n \subset \mathbb{A}$ 是 H 不变的。根据 Handel 在 [11] 中的结果可知，H 是极小且一致刚性的。由于 $\rho(H_n, H_{n+1}) < \frac{\gamma_n}{2^{n+1}}$，我们得到对每个 $n \ge 1$ 都成立的如下估计：

$$\rho(H_n, H) < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\gamma_n}{2^{j+1}} \le \frac{\gamma_n}{2^n} < \gamma_n,$$

并且由引理 3.1，对于 $i = 0, \dots, K_n$，我们有：

$$\rho(H_n^i, H^i) < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

最后，任取 $t, s \in \mathbb{A}$，并注意到：

$$\begin{aligned} d((x_0,t),(T\times H)^{j_n}(x_0,s)) &\le d((x_0,t),(T\times H_n)^{j_n}(x_0,s)) \\ &\quad + \rho((T\times H_n)^{j_n}(x_0,s),(T\times H)^{j_n}(x_0,s)) \\ &\le \frac{3}{4n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

证明完成。 □

推论 3.6. 对于每个极小系统 (X,T)，都存在伪圆 $\mathcal{C}$ 到环带 $\mathbb{A}$ 的嵌入，以及同胚 $H\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$，使得 $H(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$,$(\mathcal{C}, H|_{\mathcal{C}})$ 是极小的，并且 $(X\times\mathcal{C}, T\times H|_{\mathcal{C}})$ 是极小的。

现在，定理 1.1 可立即由下文所示的结果推得。

定理 *1.1* 的证明。 证明是定理 3.5 和伪圆在拓扑意义下唯一这一事实的推论（见 [10]）。具体来说，只需重复一个关于不相交性的标准论证（见 [17, 命题 1]）。任取 $x_0 \in X$。那么定理 3.5 表明，存在一个作用于伪圆上的映射 $H\,\mathcal{C}$，使得对于每个 $y \in \mathcal{C}$，都有 $\omega_{T\times H}(x_0, y) \supset \{x_0\} \times \mathcal{C}$。但是，$\omega_{T\times H}(x_0, y)$ 是闭的、不变的，并且在 X 中于 T 作用下有稠密轨道 x_0，因此对于任意 $y \in \mathcal{C}$，都有 $\omega_{T\times H}(x_0, y) = X \times \mathcal{C}$。为完成证明，注意到由 T 的极小性，对于任意 $(x,t) \in X \times \mathcal{C}$，存在 $s \in \mathcal{C}$ 使得 $(x_0, s) \in \omega_{T\times H}(x,t)$，这意味着 $X \times \mathcal{C} = \omega_{T\times H}(x_0, s) \subset \omega_{T\times H}(x,t)$。□

请注意，所有实数是否都能实现为极小伪圆同胚的旋转数，仍是一个悬而未决的问题；此外，除同一数的整数倍之外，两个这样的数能否在同一个嵌入上实现，也仍未解决（更多详情见 [4] ）。这引出了以下问题。

问题 3.7. 是否存在一个将伪圆嵌入环带的嵌入 $\mathcal{C}$，使得对于任意极小系统 (X,T)，都存在一个同胚 $H\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$，满足 $H(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$，且 $(\mathcal{C}, H)$ 是极小系统，$(X\times\mathcal{C}, T\times H|_{\mathcal{C}})$ 也是极小系统?

还请注意，若将定理 3.5 证明中的构造所得到的每个环带 A_n 的边界圆记作 C_n，那么 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在豪斯多夫度量下收敛到伪圆 $\mathcal{C}$。特别地，每个 C_n 都是同胚乘积极小的，因此其极限 $\mathcal{C}$ 也是如此。另一方面，在平面中，很容易得到弧作为一个收敛圆序列的极限。这引出了以下问题：

问题 3.8. 取任意 $m \in \mathbb{N}$ 以及一个由 homeo-product-极小空间构成的序列 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $Y_n \subset \mathbb{R}^m$ 对于 $n \in \mathbb{N}$成立。设 Y 为 Y_n 在豪斯多夫度量下的极限。在什么条件下，Y 是一个 homeo-product-极小空间?

致谢

J. P. Boroński 和 M. Foryś-Krawiec 获得了波兰国家科学中心（NCN）项目资助，项目编号为 2019/34/E/ST1/00237。P. Oprocha 获得了波兰国家科学中心（NCN）项目资助，项目编号为 2019/35/B/ST1/02239。

参考文献

1. R. H. Bing，关于遗传不可分解连续统，《太平洋数学杂志》*1*（*1951*年），*43–51*。*2. F. Béguin*、*S. Crovisier*、*T. Jäger*，将环面动力系统分解为伪圆。载于：《动力系统现代理论：纪念德米特里·维克托罗维奇·阿诺索夫》，《当代数学》第*692*卷，美国数学会，普罗维登斯，*2017*年，第*39*页。*3. Boroński, J. P.*；*Oprocha, P.*，二维环面上的旋转混沌与奇异吸引子，《数学杂志》*279*（*2015*年），*689–702*。*4. J. Boroński*、*A. Clark*、*P. Oprocha*，由康托尔系统的伪悬挂构造新的奇异极小集，《动力系统与微分方程杂志》，数字对象唯一标识符：*https://doi.org/10.1007/s10884-021-10069-3*。*5. J. Boroński*、*A. Clark*、*P. Oprocha*，一个紧致极小空间 *Y*，其平方 *Y*×*Y* 并非极小，《数学进展》*335*（*2018*年），*261–275*。*6. J. P. Boroński*、*J. Kennedy*、*X-C. Liu*、*P. Oprocha*，伪圆上的极小非可逆映射，《动力系统与微分方程杂志》*33*卷第*4*期（*2021*年），*1897–1916*。*7. M. Brown*，高维遗传不可分解连续统的连续族，博士论文——威斯康星大学麦迪逊分校。*1958*年。*40*页。*8. A. Chéritat*，边界非局部连通的相对紧西格尔圆盘，《数学年刊》*349*（*2011*年），*529–542*。*9. M. Dirbák*、*L. Snoha*、*V. Špitalský*，极小直积，《美国数学会汇刊》第*375*卷（*2022*年），*6453–6506*。*10. L. Fearnley*，伪圆是唯一的，《美国数学会汇刊》*149*（*1970*年），*45–64*。*11. M. Handel*，平面上一个病态的保面积微分同胚，《美国数学会会刊》*86*（*1982*年），*163–168*。*12. J. Kennedy*、*J. T. Rogers*，伪圆的轨道，《美国数学会汇刊》*296*卷第*1*期（*1986*年），*327–340*。*13. J. Kennedy*、*J. A. Yorke*，动力系统中的伪圆，《美国数学会汇刊》*343*（*1994*年），*349–366*。*14. J. Kennedy*、*J. A. Yorke*，奇异拓扑在动力系统中是自然的，《美国数学会通报》*32*（*1995*年），*309–316*。*15. J. Kennedy*、*J. A. Yorke*，伪圆、微分同胚与可扰动动力系统，《遍历理论与动力系统》*16*（*1996*年），*1031–1057*。*16. W. Lewis*，伪弧与同胚群的连通性，《美国数学会会刊》*142*（*1983*年），*745–748*。*17. S. Kolyada*、*L. Snoha*、*S. Trofimchuk*，图丛中保纤维映射的极小集，《数学杂志》*278*（*2014*年），*575–614*。*18. L. Kuipers*、*H. Niederreiter*，序列的均匀分布（*1974*年），*Wiley*，纽约。

（*J. P. Boroński*）*IT4Innovations*国家超级计算中心，俄斯特拉发大学，*IRAFM*，*30. dubna 22*，*70103* 俄斯特拉发，捷克。电子邮件地址：*jan.boronski@osu.cz*（*M. Foryś-Krawiec*）*AGH*科技大学，应用数学学院，*al. Mickiewicza 30*，*30-059* 克拉科夫，波兰。电子邮件地址：*maforys@agh.edu.pl*（*P. Oprocha*）*AGH*科技大学，应用数学学院，*al. Mickiewicza 30*，*30-059* 克拉科夫，波兰——以及——*IT4Innovations*国家超级计算中心，俄斯特拉发大学，*IRAFM*，*30. dubna 22*，*70103* 俄斯特拉发，捷克
电子邮件地址：oprocha@agh.edu.pl