带有强一致性算子的次协调性证明论方面

Victoria Arce Pistone*和 Mart´ín Figallo †

Departamento de Matemática and Instituto de Matemática (INMABB). Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina

arXiv:2304.11481v1 [math.LO] 22 Apr 2023

摘要

为了开发用于不一致性自动推理的高效工具（定理证明器），并最终使形式不一致逻辑（LFI）成为更具吸引力的不确定性推理形式体系，开发此类形式不一致逻辑一阶版本的证明论至关重要。我们的工作旨在朝这一方向迈出第一步。另一方面，Ciore 的发展旨在从形式不一致逻辑的角度，为研究不一致数据库提供新的逻辑系统。Ciore 的一个有趣特点是，它具有 *strong* 一致性算子，即一种能够（正向/反向）传播不一致性的强一致性算子。此外，它还是一种可代数化逻辑（按照 Blok and Pigozzi 的意义），可通过三值逻辑矩阵来刻画。最近，在保留 Ciore 精神的前提下，定义了 Ciore 的一阶版本 QCiore，也就是说，没有引入量词之间意料之外的关系。此外，还为这一逻辑取得了一些重要的模型论结果。

本文分别研究 Ciore 和 QCiore 的一些证明论方面。首先，我们为 Ciore 引入一个双边序列系统。随后，我们证明该系统具有切消性质，并用它推导出一些有趣的性质。之后，我们将上述系统扩展到一阶语言，并利用著名的 Sh¨utte 技巧证明完备性和切消性质。

2010年数学主题分类：主要分类 03B53，次要分类 03F 99.

关键词：次协调逻辑、一阶逻辑、Gentzen 风格系统、切消性质。

1 引言

次协调逻辑是一种形式系统，它允许人们对不一致信息进行推理，而不会陷入荒谬。在非次协调的框架下，不一致性会引发爆炸，即一旦出现矛盾，任何命题都可以推出。da Costa 首次系统地研究了次协调逻辑，并在 [11] 其著名的系统层级中提出了这一研究（针对 $n \geq 1$）。他对次协调性的研究路径如今被称为巴西次协调逻辑学派，W. Carnielli 和 J. Marcos 在 [9] 中通过形式不一致逻辑（简称 LFIs）的概念自然地推广了这一研究。这类次协调逻辑在对象语言层面将一致性和不一致性这两个概念内化。在 [9], 中，研究者探讨了 LFIs 的一个重要子类，称为 C-系统。与 LFIs 类似，C-系统建立在某种给定一致逻辑的正基础之上，并引入一个特殊联结词 $\circ$（原始的或定义的），以便在对象语言内部表达句子的一致性概念。

正如 [4], 中所指出的，自20世纪60年代以希尔伯特式系统的形式引入以来，高效使用 C-系统的主要障碍一直是缺乏适用于它们的解析演算。在同一篇论文中，作者为系统地生成一大类次协调逻辑的无割序列演算，提供了一种统一且模块化的方法。他们研究的所有系统都具有如下形式的语义

*第一作者感谢 CONICET 为本研究提供经费支持。

†第二作者获得了由 FAPESP 项目 2022/03862-2 部分资助的支持。

非确定性矩阵（Nmatrices）。这种矩阵是标准多值矩阵的自然推广，其做法是将计算机科学中的非确定性计算概念引入逻辑联结词的真值表中。他们采用了 [2] 中的一种方法，为具有特征性有限值非确定性矩阵（Nmatrices）且其语言在某种意义上足够丰富的逻辑，构造无切割的 Gentzen 型系统。

另一方面，Carnielli、Marcos 和 de Amo 在研究形式不一致逻辑（LFIs）视角下的不一致数据库时，提出了名为 LFI2 的三值次协调逻辑 Ciore。他们研究这一逻辑时，采用原始不一致联结词 $\bullet$ 而非一致性联结词 $\circ$。正如 [9], 中所观察到的，与 C_1 和 C_1^+不同，Ciore 在 Blok and Pigozzi 的意义上是可代数化的。不仅如此，由于一致性联结词具有强性质
$\circ$ 且次协调否定也具有强性质，因此可以用三值逻辑矩阵刻画它。

需要指出的是，Ciore 不属于 C中研究的 [4]-系统家族。事实上，Ciore 的次协调否定并不验证德摩根律，但会验证以下非常特殊的定律（见 [10, 定理 2.2 (xii)]）

$$((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta)) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$$

在 [4] 研究的任何 C-系统都未考虑这种情况；一致性算子 $\circ$（强一致性算子）所验证的传播和逆传播极限规律也同样如此。Carnielli 和 Marcos 还引入了 Ciore 的一阶版本，称为 LFI2*。正如 [10], 中指出的，LFI2* 满足一个颇为违反直觉的性质：全称量词和存在量词可以借助相容矛盾逻辑否定相互定义，就像经典一阶逻辑中全称量词和存在量词相对于经典否定的情形一样。鉴于 LFI2* 中两个量词都具有经典含义，并且该逻辑相对于其相容矛盾逻辑否定不满足德摩根律，这一特征似乎并不自然。因此，[10] 引入了 Ciore 的一个一阶版本，命名为 QCiore，以保留 Ciore 的精神，即不在量词之间引入意料之外的关系。经典模型论的一些重要结果可以在该逻辑中获得，例如 Robinson 联合一致性定理、合并定理和插值定理。[4] 的主要目的在于开发用于处理不一致性的高效自动推理工具，最终使 LFI 更适合作为不确定性推理的形式体系。然而，显然，就为现实应用构建基于 LFI 的定理证明器而言，发展此类 LFI 一阶版本的证明论十分重要。在我们的工作中，我们拟朝这一方向迈出第一步。

本文分别研究 Ciore 和 QCiore 的若干证明论方面。第 2 节回顾有关 Ciore 和 QCiore 的所有已知概念与结果，并说明本文所用的记号。第 3 节受 [2], 中所述方法的启发，给出一个 Ciore 的序列式系统；由于未详细展示这一漫长过程的各个阶段，我们在第 4 节通过语义方法证明切消性质，并在第 5 节展示若干应用。第 6 节将上述系统扩展到一阶语言，并运用众所周知的 Sh¨utte 技巧，证明完备性定理和切消定理。最后，第 7 节总结全文并介绍未来的研究工作。

2 预备知识

令 $\mathscr{L}$ 为一种命题语言，并令 $\mathfrak{Fm}$ 为由某个可数无穷命题变量集合生成的、以 $\mathscr{L}$ 为基础的绝对自由代数，其底层集合（即公式集合）为 Fm；设 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}、\mathcal{D}、\mathcal{O} \rangle$ 为 $\mathscr{L}$的一个逻辑矩阵，也就是说，$\mathcal{T}$是一个有限的非空真值集合，$\mathcal{D}$是 $\mathcal{T}$的一个非空真子集，并且 $\mathcal{O}$对每个 k元联结词 f都包含一个 k元函数 $\hat{} f$: $\mathcal{T}^k \rightarrow \mathcal{T}$。回顾一下，$\mathcal{M}$ 中的一个赋值是一个函数 v: $Fm \rightarrow \mathcal{T}$，满足

$$v(f(\psi_1, \ldots, \psi_k)) = \hat{f}(v(\psi_1), \ldots, v(\psi_k))$$

对于每个 k-元联结词 f以及所有 ψ_1、.....、$\psi_k \in Fm$。如果给定的赋值 v满足公式 $\alpha \in Fm$，记作 $v \models \alpha$，则 $v(\alpha) \in \mathcal{D}$。如果赋值 v满足序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，记作 $v \models \Gamma \Rightarrow \Delta$，则 v 不满足 Γ 中的某个公式，或者 v 满足 Δ中的某个公式。若一个序列对于矩阵 $\mathcal{M}$而言被所有赋值满足，则称其有效。我们用 $\vdash_{\mathcal{M}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ 表示序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 $\mathcal{M}$中有效。

现在，设 $\mathcal{T}=\{t_0,\ldots,t_{n-1}\}$，其中 $n\geq 2$，且 $\mathcal{D}=\{t_d,\ldots,t_{n-1}\}$，其中 $1\leq d\leq n-1$。在 $\mathscr{L}$ 上的一个 n–序列（[3]）是如下表达式

$$\Gamma_0 \mid \cdots \mid \Gamma_{n-1}$$

其中，对每个 i， Γ_i 都是一个有限的公式集合。赋值 v 满足 n–序列 $\Gamma_0 \mid \cdots \mid \Gamma_{n-1}$，当且仅当存在 i、 $0\leq i\leq n-1$ 和 $\psi\in\Gamma_i$，使得 $v(\psi)=t_i$。如果每个赋值 v 都满足某个 n–序列，那么该序列就是有效的。显然，赋值 v 满足普通序列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$，当且仅当 v 满足 n–序列 $\Gamma_1 \mid \cdots \mid \Gamma_{n-1}$，其中 $\Gamma_i=\Gamma$ 对所有 $0\leq i\leq d-1$ 都成立，且 $\Gamma_j=\Delta$ 对所有 $d\leq j\leq n-1$ 都成立。

n-序列的另一种表示方式是使用带符号公式集合。语言 $\mathscr{L}$ 和 $\mathcal{T}$ 上的带符号公式，是形如以下形式的表达式

$$t_i:\psi$$

其中 $t_i\in\mathcal{T}$ 以及 $\psi\in Fm$。赋值 v 满足带符号公式 $t_i:\psi$，当且仅当 $v(\psi)=t_i$。如果 $\Omega\subseteq\mathcal{T}$ 一个 d $\Gamma\subseteq Fm$，我们 用 $\Omega:\Gamma$ 表示集合

$$\Omega:\Gamma=\{t:\alpha\mid t\in\Omega,\alpha\in\Gamma\}$$

若 $\Omega=\{t\}$，我们记作 $t:\Gamma$，而不记作 $\{t\}:\Gamma$。赋值满足带符号公式集合 $\Omega:\Gamma$，当且仅当它满足 $\Omega:\Gamma$ 中的某个带符号公式；若每个赋值 $v\in\mathcal{V}$ 都满足 $\Omega:\Gamma$，则称 $\Omega:\Gamma$ 有效。显然， n–序列 $\Gamma_0 \mid \cdots \mid \Gamma_{n-1}$ 有效，当且仅当带符号公式集合 $\bigcup_{i=0} t_i:\Gamma_i$ 有效。

设 $\mathcal{L}$ 为定义在命题签名 $\Sigma=\{\wedge,\vee,\rightarrow,\neg,\circ\}$上的命题语言。在 [10],中，命题逻辑 Ciore 是在语言 $\mathcal{L}$ 上通过以下希尔伯特式系统给出的（通常， $\alpha\leftrightarrow\beta$ 表示公式 $(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)$， $\alpha,\beta\in Fm$）：

公理模式:

$$\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha) \tag{$\mathbf{Ax}1$}$$
$$\big(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)\big)\rightarrow\big((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)\big) \tag{$\mathbf{Ax}2$}$$
$$\alpha\rightarrow\big(\beta\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\big) \tag{$\mathbf{Ax}3$}$$
$$(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\alpha \tag{$\mathbf{Ax}4$}$$
$$(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\beta \tag{$\mathbf{Ax}5$}$$
$$\alpha\rightarrow(\alpha\vee\beta) \tag{$\mathbf{Ax}6$}$$
$$\beta\rightarrow(\alpha\vee\beta) \tag{$\mathbf{Ax}7$}$$
$$\big(\alpha\rightarrow\gamma\big)\rightarrow\big((\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow((\alpha\vee\beta)\rightarrow\gamma)\big) \tag{$\mathbf{Ax}8$}$$
$$(\alpha\rightarrow\beta)\vee\alpha \tag{$\mathbf{Ax}9$}$$
$$\alpha\vee\neg\alpha \tag{$\mathbf{Ax}10$}$$
$$\circ\,\alpha\rightarrow\big(\alpha\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\beta)\big) \tag{$\mathbf{bc1}$}$$
$$\neg\circ\alpha\rightarrow(\alpha\wedge\neg\alpha) \tag{$\mathbf{ci}$}$$
$$\neg\neg\alpha\leftrightarrow\alpha \tag{$\mathbf{cef}$}$$
$$(\circ\alpha\vee\circ\beta)\leftrightarrow\circ(\alpha\wedge\beta) \tag{$\mathbf{cor}_1$}$$
$$(\circ\alpha\vee\circ\beta)\leftrightarrow\circ(\alpha\vee\beta) \tag{$\mathbf{cor}_2$}$$
$$(\circ\alpha\vee\circ\beta)\leftrightarrow\circ(\alpha\rightarrow\beta) \tag{$\mathbf{cor}_3$}$$

推理规则:

(MP)
$$\frac{\alpha\qquad\alpha\rightarrow\beta}{\beta}$$

由 Ciore 的希尔伯特演算得到的（塔尔斯基式）后承关系记为 $\vdash_{\mathbf{Ciore}}$。注意，公理 (Ax1)-(Ax9) 加上 (MP) 构成了正经典逻辑（CPL$^+$）的希尔伯特演算。如上所述，Ciore 在 Blok and Pigozzi 的意义下是可代数化的。此外，它可以用一个三值逻辑矩阵来刻画。

定理 2.1 系统 Ciore 相对于以下三值矩阵$\mathcal{M}_e = \langle \mathcal{T}, \mathcal{D}, \{\hat{\wedge}, \hat{\vee}, \hat{\rightarrow}, \hat{\neg}, \hat{\circ}\}\rangle$是可靠且完备的，其签名为 Σ，定义域为 $\mathcal{T} = \{\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{0}\}$，指定值集合为 $\mathcal{D} = \{\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\}$，各联结词对应的真值表如下：

$\hat{\wedge}$	$\mathbf{1}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

$\hat{\vee}$	$\mathbf{1}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{1}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\hat{\rightarrow}$	$\mathbf{1}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{1}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

	$\hat{\neg}$	$\hat{\circ}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

在 [4], 中，提出了一种为 C系统构造无割序列演算的一般方法。该方法适用于一大类 C系统，涵盖了文献中研究的许多 C系统。然而，该方法不适用于 Ciore。事实上，在 [4], 中，作者考察了 C系统，这些系统是 BK 的扩展；而 BK 则是在经典命题逻辑正片段（即 $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$片段）的标准希尔伯特式系统中加入以下公理而得到的

$$\alpha \vee \neg\alpha \tag{\textbf{t}}$$

$$\circ\alpha \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta) \tag{\textbf{b}}$$

$$\circ\alpha \vee (\alpha \wedge \neg\alpha) \tag{\textbf{k}}$$

如上所述，Ciore 的否定不满足德摩根律。然而，它满足一个非常特殊的定律（见 [10, 定理 2.2 (xii)]）

$$((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta)) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$$

[4] 中研究的扩展都未考虑这种情况；它们也未考虑由算子 $\circ$ 验证的极端传播律和逆传播律，而这些定律由公理 (cor_1)–(cor_3) 所确立。

在 [10], 中，QCiore 逻辑被引入为 Ciore 的一种自然的一阶版本，其语义基于三元组（或部分关系）的概念。回想一下，一阶签名 $\Theta = \langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ 由以下部分组成：一个集合 $\mathcal{P} = \bigcup P_n$，使得对于每个 $n \geq 1$，$\mathcal{P}_n$ 都是一个元数为 n的谓词符号集合；一个集合$_{n\in\mathbb{N}}$
$\mathcal{F} = \bigcup F_n$ 使得，对于每个 $n \geq 1$，$\mathcal{F}_n$ 都是元数为 n 的函数符号集合；以及一个由个体$_{n\in\mathbb{N}}$常量组成的集合 $\mathcal{C}$。

令 $\mathscr{L}(\Theta)$（或简称为 $\mathscr{L}$）表示通常由联结词 $\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\neg$、$\circ$，量词 $\forall$、$\exists$，一个可数的自由变元符号集合 $\mathcal{V}_f = \{a_1, a_2, \dots\}$，一个可数的约束变量符号集合：$\mathcal{V}_b = \{x_1, x_2, \dots\}$ 以及给定的一阶签名 Θ 所定义的一阶语言。我们分别用 WFF($\mathscr{L}(\Theta)$) 和 SENT($\mathscr{L}(\Theta)$) 表示签名 Θ 上的良构公式集合和句子集合（不含自由变元的公式）。语言 $\mathscr{L}$ 中的任意有限符号序列都是 $\mathscr{L}$ 的一个表达式。回忆一下，如果 A 是一个表达式，τ_1、.....、τ_n 是互不相同的原始符号，而 σ_1、.....、σ_n 是任意符号，那么根据

$$\left(A\,\frac{\tau_1, \dots, \tau_n}{\sigma_1, \dots, \sigma_n}\right)$$

我们指的是这样得到的表达式：在 $\tau_1, \dots, \tau_n$ 的每次出现处，分别用 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ 替换 A 中的 $\tau_1, \dots, \tau_n$，并且这些符号是同时替换的。另请回想，如果 A 是一个公式，$t_1, \dots, t_n$ 是项，并且存在公式 B 和自由变元符号 $b_1, \dots, b_n$，使得 A 是 $(B^{\,b_1,\dots,b_n}_{t_1\dots t_n,,})$，那么我们将 B 记作 $B(b_1, \dots, b_n)$，将 A 记作 $B(t_1, \dots, t_n)$；并称对于每个 $i, 1 \leq i \leq n$，项 t_i 的出现都在 A 中有所标示。如果 t 的每次出现都是通过这种替换得到的，那么项 t 就在 A 中得到完全标示（见 [24]）。下文中，Θ 是一个一阶签名。

定义 2.2（*[10]*）。语言 $\mathscr{L}(\Theta)$ 上的逻辑 QCiore 定义为以下列内容扩展 Ciore（以语言 $\mathscr{L}(\Theta)$ 表示）所得的希尔伯特演算：

公理模式:

$$\varphi(t)\to\exists x\varphi(x), \tag{\textbf{Ax}11}$$

$$\forall x\varphi(x)\to\varphi(t), \tag{\textbf{Ax}12}$$

$$\circ\exists x\varphi\leftrightarrow\exists x\circ\varphi, \tag{\textbf{Ax}13}$$

$$\circ\forall x\varphi\leftrightarrow\exists x\circ\varphi, \tag{\textbf{Ax}14}$$

其中， t 是任意项； $\varphi(t)$和 $\varphi(x)$分别是 $\left(\varphi(a)\,\frac{a}{t}\right)$ 和 $\left(\varphi(a)\,\frac{a}{x}\right)$。

推理规则

$$(\forall\text{-}\mathbf{In})\ \frac{\phi\to\psi(a)}{\phi\to\forall x\psi(x)} \qquad \text{如果 } a \text{ 不出现在 } \phi\text{中}$$

$$(\exists\text{-}\mathbf{In})\ \frac{\phi(a)\to\psi}{\exists x\phi(x)\to\psi} \qquad \text{如果 } a \text{ 不出现在 } \psi\text{中}$$

并且其中 $\varphi(x)$是 $\left(\varphi(a)\,\frac{a}{x}\right)$。

在 [10], 中，通过使用以三元组定义的部分关系，引入了QCiore的一个语义版本。事实证明，使用三元组非常有用，因为它能够写出更简单的证明。

令 $\mathbf{3}=\{\mathbf{0},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{1}\}$ 并考虑代数结构 $3=\langle\mathbf{3};\ \vee,\wedge,\to,\neg,\circ\rangle$ 是三值逻辑矩阵 $\mathcal{M}_e$的底层结构，其中运算的定义见定理 2.1。令 X 为一个非空集合。回顾一下， X 上的三元组是一个映射 $r\colon X\longrightarrow\mathbf{3}$。若 r 是 X 上的三元组，我们记作 $r=\langle r_\oplus,r_\ominus,r_\odot\rangle$，其中 $r_\oplus=r^{-1}(\mathbf{1})$， $r_\odot=r^{-1}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$， $r_\ominus=r^{-1}(\mathbf{0})$。按照惯例，我们用 $\mathbf{3}^X$表示所有 X上的三元组构成的集合。显然，三元组集合 $\mathbf{3}^X$继承了 3 的代数结构，其中运算按点定义。从某种意义上说， $\mathbf{3}^X$推广了幂集 $\mathbf{2}^X$（视为布尔代数），因此 $\mathbf{3}^X$ 是一种三值幂集，带有继承自 Ciore 三值矩阵的 $\{\wedge,\vee,\to,\neg,\circ\}$ 上的三值代数结构。

命题 2.3 (*[10]*) 设 $r=(r_\oplus,r_\ominus,r_\odot)$ 和 $u=(u_\oplus,u_\ominus,u_\odot)$ 是 X 上的两个三元组。那么:
(i) $r\wedge u=((r_\oplus\cap u_\oplus)\cup(r_\oplus\cap u_\odot)\cup(r_\odot\cap u_\oplus)\ r_\ominus\cup u_\ominus,r_\odot\cap u_\odot)$,
(ii) $r\vee u=(r_\oplus\cup u_\oplus\cup(r_\odot\cap u_\ominus)\cup(r_\ominus\cap u_\odot)\ r_\ominus\cap u_\ominus,r_\odot\cap u_\odot)$,
(iii) $r\to u=(r_\ominus\cup u_\oplus\cup(r_\oplus\cap u_\odot),(r_\oplus\cup r_\odot)\cap u_\ominus,r_\odot\cap u_\odot)$,
(iv) $\neg r=(r_\ominus,r_\oplus,r_\odot)$, (v) $\circ r=(r_\oplus\cup r_\ominus,r_\odot,\emptyset)$。

不难看出，如果 $r\in\mathbf{3}^X$，那么：(1) $r_\oplus\cup r_\ominus\cup r_\odot=X$；以及 (2) $r_\oplus\cap r_\ominus=r_\oplus\cap r_\odot=r_\ominus\cap r_\odot=\emptyset$。反之，如果 r_1、 r_2 和 r_3 是 $X\neq\emptyset$ 的子集，并且 (1) $r_1\cup r_2\cup r_3=X$ 以及 (2) $r_1\cap r_2=r_1\cap r_3=r_2\cap r_3=\emptyset$，那么存在唯一的 $r\in\mathbf{3}^X$，使得 $r=(r_1,r_2,r_3)$。
在签名 Θ 上，QCiore 的一个部分（或实用）结构是一个有序对 $\mathfrak{A}=\langle A,\ (\cdot)^{\mathfrak{A}}\rangle$，其中 $A\neq\emptyset$，并且 $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ 是满足以下条件的函数

- for all $R\in\mathcal{P}_n$, $R^{\mathfrak{A}}=\langle R^{\mathfrak{A}}_\oplus,R^{\mathfrak{A}}_\ominus,R^{\mathfrak{A}}_\odot\rangle$ is a triple over A^n,

- $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ 在 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{C}$上按通常方式定义。

设 A 是一个非空集合。到 A 的赋值是任意映射 $s\colon\mathcal{V}=\mathcal{V}_f\cup\mathcal{V}_b\to A$。我们用 $S(A)$ 表示所有到 A 的赋值组成的集合，即 $S(A)=A^{\mathcal{V}}$。若 $\mathfrak{A}$ 是定义在 Θ 上、论域为 A 的部分结构，则到 $\mathfrak{A}$ 的赋值就是任意到 A 的赋值。所有到 $\mathfrak{A}$ 的赋值组成的集合记作 $S(\mathfrak{A})$，即 $S(\mathfrak{A})=S(A)=A^{\mathcal{V}}$。

定义 2.4 设 $s \in S(\mathfrak{A})$。项 t 在 $\mathfrak{A}$ 中关于赋值 s 的值，记作 $t^{\mathfrak{A}}[s]$，归纳定义如下：

- 若 t 是 v，对于 $v \in \mathcal{V}$，则 $t^{\mathfrak{A}}[s] := s(v)$；- 若 t 是 c，对于 $c \in \mathcal{C}$，则 $t^{\mathfrak{A}}[s] := c^{\mathfrak{A}}$；- 若 t是 $f(t_1, \ldots\ldots, t_n)$，对于 $f \in \mathcal{F}_n$和项 t_i，则 $t^{\mathfrak{A}}[s] := f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots\ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[s])$。

定义 2.5（*[10]*）设 A 为一个非空集合。给定集合 Z，令 $\wp(Z)_+$ 表示 Z 的非空子集的集合。对于 $a \in \mathcal{V}_f$，定义 $\forall a: \wp(S(A)) \to \wp(S(A))$ 以及 $\exists a: \wp(S(A)) \to \wp(S(A))$ 如下，对于每个 $Y \subseteq S(A)$：

$$\widehat{\forall a}(Y) := \{s \in S(A) : s_a^m \in Y \text{ for all } m \in A\},$$

$$\widehat{\exists a}(Y) := \{s \in S(A) : s_a^m \in Y \text{ for some } m \in A\}.$$

~函数 $\forall: \wp(\mathbf{3})_+ \to \mathbf{3}$ 和 $\exists: \wp(\mathbf{3})_+ \to \mathbf{3}$ 定义如下，对于每个 $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbf{3}$：

$$\widetilde{\forall}(Y) := \begin{cases} \mathbf{1} & \text{if } \mathbf{1} \in Y,\ \mathbf{0} \notin Y \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \text{if } Y = \{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\} \\ \mathbf{0} & \text{if } \mathbf{0} \in Y \end{cases} \qquad \widetilde{\exists}(Y) := \begin{cases} \mathbf{1} & \text{if } Y \neq \{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\},\ Y \neq \{\mathbf{0}\} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \text{if } Y = \{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\} \\ \mathbf{0} & \text{if } Y = \{\mathbf{0}\} \end{cases}$$

定义 2.6 (*[10]*) 在 Θ 上的 QCiore-结构是一个二元组 $\langle \mathfrak{A}, \|\cdot\|^{\mathfrak{A}} \rangle$，满足 $\mathfrak{A}$ 是 QCiore 的部分结构，并且 $\|\cdot\|^{\mathfrak{A}}$: $\mathscr{L}(\Theta) \to \mathbf{3}^{S(\mathfrak{A})}$是一个映射，按如下方式递归定义，对于每个 $s \in S(\mathfrak{A})$:

1. 如果 $P(t_1, \ldots, t_n)$ 是原子的，则 $\|P(t_1, \ldots, t_n)\|^{\mathfrak{A}}(s) = P^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[s])$；
2. $\|\varphi \wedge \psi\|^{\mathfrak{A}} = \|\varphi\|^{\mathfrak{A}} \wedge \|\psi\|^{\mathfrak{A}}$；
3. $\|\varphi \vee \psi\|^{\mathfrak{A}} = \|\varphi\|^{\mathfrak{A}} \vee \|\psi\|^{\mathfrak{A}}$；
4. $\|\varphi \to \psi\|^{\mathfrak{A}} = \|\varphi\|^{\mathfrak{A}} \to \|\psi\|^{\mathfrak{A}}$；
5. $\|\neg\varphi\|^{\mathfrak{A}} = \neg\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}$；
6. $\|\circ\varphi\|^{\mathfrak{A}} = \circ\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}$；
7. $\|\forall x\varphi(x)\|^{\mathfrak{A}}(s) = \widetilde{\forall}(\{\|\varphi(a)\|^{\mathfrak{A}}(s_a^m) : m \in A\})$，其中 $\varphi(x)$ 是 $\left(\varphi(a)\ \frac{a}{x}\right)$；
8. $\|\exists x\varphi(x)\|^{\mathfrak{A}}(s) = \widetilde{\exists}(\{\|\varphi(a)\|^{\mathfrak{A}}(s_a^m) : m \in A\})$，其中 $\varphi(x)$ 是 $\left(\varphi(a)\ \frac{a}{x}\right)$。

命题 2.7（*[10]*）设 $\langle \mathfrak{A}, \|\cdot\|^{\mathfrak{A}} \rangle$ 是基于签名 Θ 的 QCiore-结构。将 $\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}$ 记作 $\langle \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}, \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}, \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \rangle$，则有：

若 $P(t_1, \ldots, t_n)$ 是原子的，则对于每个 $\# \in \{\oplus, \ominus, \odot\}$ 和 $s \in S(\mathfrak{A})$:

$$s \in \|P(t_1, \ldots, t_n)\|^{\mathfrak{A}}_{\#} \quad \textit{iif} \quad (t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[s]) \in P^{\mathfrak{A}}_{\#},$$

$\|\varphi \wedge \psi\|^{\mathfrak{A}} := \langle (\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}) \cup (\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}) \cup (\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}),$
$\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} \cup \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}, \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \rangle,$

$\|\varphi \vee \psi\|^{\mathfrak{A}} := \langle \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup (\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}) \cup (\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}),$
$\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}, \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \rangle,$

$\|\varphi \to \psi\|^{\mathfrak{A}} := \langle \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} \cup \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup (\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}),\ (\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}) \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus},\ \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \rangle,$

$\|\neg\varphi\|^{\mathfrak{A}} := \langle \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}, \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}, \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \rangle,$

$\|\circ\varphi\|^{\mathfrak{A}} := \langle \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}, \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}, \emptyset \rangle$,

$\|\forall x\varphi(x)\|^{\mathfrak{A}} := \left\langle \widehat{\exists a}(\|\varphi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}) - \widehat{\exists a}(\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}(a)), \widehat{\exists a}(\|\varphi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}), \widehat{\forall a}(\|\varphi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}) \right\rangle$, *where* $\varphi(x)$ *is* $\left(\varphi(a)\,\frac{a}{x}\right)$,
$\|\exists x\varphi(x)\|^{\mathfrak{A}} := \left\langle S(\mathfrak{A}) - (\widehat{\forall a}(\|\varphi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}) \cup \widehat{\forall a}(\|\varphi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot})), \widehat{\forall a}(\|\varphi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}) \ \widehat{\forall a}(\|\varphi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}) \right\rangle$，其中 $\varphi(x)$ 是$\left(\varphi(a)\,\frac{a}{x}\right)$。

注意，QCiore 在 Θ 上的部分结构决定了 Θ 上唯一的 QCiore-结构。因此，今后将这两个结构视为相同。

定义 2.8（*[10]*）设 $\langle \mathfrak{A}, \|\cdot\|^{\mathfrak{A}} \rangle$ 是一个 QCiore-结构，设 φ 是一个公式，且设 $s \in S(\mathfrak{A})$。如果 $s \in \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，则称 s 在 $\mathfrak{A}$ 中满足 φ，记作 $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$。此外，如果 $\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = S(\mathfrak{A})$，则称 φ 在 $\mathfrak{A}$ 中有效（或称 $\mathfrak{A}$ 验证了 φ），记作 $\mathfrak{A} \models_{\mathbf{QCiore}} \varphi$（或简记为 $\mathfrak{A} \models \varphi$）。如果对每个 $\varphi \in \Gamma$，$\mathfrak{A} \models_{\mathbf{QCiore}} \varphi$ 成立，则称 QCiore-结构$\mathfrak{A}$ 是公式集合 Γ 的一个模型。此外，给定公式集合 $\Gamma \cup \{\varphi\}$，如果对于每个 QCiore- 结构 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A} \models_{\mathbf{QCiore}} \psi$ 成立，那么就称 φ 是 Γ 的一个 QCiore-推论，记作 $\Gamma \models_{\mathbf{QCiore}} \varphi$：对于每个 $\psi \in \Gamma$，$\mathfrak{A} \models_{\mathbf{QCiore}} \varphi$。

定理 2.9（*[10]*） */*可靠性与完备性*/* 设 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 是 Γ上的公式集合。

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{QCiore}} \varphi \ \textit{iff}\ \Gamma \models_{\mathbf{QCiore}} \varphi$$

3 Ciore 的 Gentzen 风格证明系统

本节介绍 Ciore 的无切割序列演算。这里，我们主要依赖 [2], 中描述的通用方法，以获得具有矩阵语义的逻辑的无切割系统。然而，我们不描述为获得此类系统而执行的完整过程（该过程已在 [17] 和 [6]中描述）。相反，我们给出一个序列演算，并证明其可靠性、完备性和切消定理。

在 [3], 中，为任何基于 n值（非确定性）矩阵的逻辑，构造了一个通用的 n-序列系统。下面给出的是一个具有切消性质的 Ciore 3-序列系统。

定义 3.1 Ciore 的 3-序列演算 $\mathbf{3} - \mathcal{S}$是按如下方式定义的系统：对于 α、$\beta \in Fm$、Ω 和 Ω' 任意的带符号公式集合

- 公理：$\{\mathbf{0}: \alpha, \mathbf{1}_{\mathbf{2}}: \alpha, \mathbf{1}: \alpha\}$。
- 结构规则：弱化：$\Omega\ \Omega'$ 在 $\Omega \subseteq \Omega'$ 的情况下。
- 逻辑规则：对于 $i, j \in \mathcal{T}$

$$(\vee_{ij})\ \frac{\Omega, i:\alpha \quad \Omega, j:\beta}{\Omega, 1:\alpha \vee \beta}\ \textit{for}\ i = j = \mathbf{1}\ \textit{or}\ i \neq j \qquad (\vee_{\mathbf{00}})\ \frac{\Omega, \mathbf{0}:\alpha \quad \Omega, \mathbf{0}:\beta}{\Omega, \mathbf{0}:\alpha \vee \beta}$$

$$(\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}})\ \frac{\Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\alpha \quad \Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\beta}{\Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\alpha \vee \beta}$$

$$(\wedge_{ij})\ \frac{\Omega, i:\alpha \quad \Omega, j:\beta}{\Omega, \mathbf{1}:\alpha \wedge \beta}\ \textit{for}\ i = \mathbf{1}, j \neq \mathbf{0}\ \textit{or}\ j = \mathbf{1}, i \neq \mathbf{0}$$

$$(\wedge_{ij})\ \frac{\Omega, i:\alpha \quad \Omega, j:\beta}{\Omega, \mathbf{0}:\alpha \wedge \beta}\ \textit{for}\ i = \mathbf{0}\ \textit{or}\ j = \mathbf{0} \qquad (\wedge_{ij})\ \frac{\Omega, i:\alpha \quad \Omega, j:\beta}{\Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\alpha \wedge \beta}\ \textit{for}\ i = j = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$(\rightarrow_{ij})\ \frac{\Omega, i:\alpha \quad \Omega, j:\beta}{\Omega, \mathbf{1}:\alpha \rightarrow \beta}\ \textit{for}\ i = \mathbf{0}\ \textit{or}\ j = \mathbf{1}\ \textit{or}\ (i = \mathbf{1}, j = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$$

$$(\rightarrow_{i\mathbf{0}}) \quad \frac{\Omega, i:\alpha \quad \Omega, \mathbf{0}:\beta}{\Omega, \mathbf{0}:\alpha\rightarrow\beta} \ for\ i\neq \mathbf{0} \qquad (\rightarrow_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}) \quad \frac{\Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\alpha \quad \Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\beta}{\Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\alpha\rightarrow\beta} \ for\ i=j=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$(\neg_{\mathbf{0}}) \quad \frac{\Omega, \mathbf{0}:\alpha}{\Omega, \mathbf{1}:\neg\alpha} \qquad (\neg_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}) \quad \frac{\Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\alpha}{\Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\neg\alpha} \qquad (\neg_{\mathbf{1}}) \quad \frac{\Omega, \mathbf{1}:\alpha}{\Omega, \mathbf{0}:\neg\alpha}$$

$$(\circ_{\mathbf{0}}) \quad \frac{\Omega, \mathbf{0}:\alpha}{\Omega, \mathbf{1}:\circ\alpha} \qquad (\circ_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}) \quad \frac{\Omega, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\alpha}{\Omega, \mathbf{0}:\circ\alpha} \qquad (\circ_{\mathbf{1}}) \quad \frac{\Omega, \mathbf{1}:\alpha}{\Omega, \mathbf{1}:\circ\alpha}$$

命题 3.2

(i) $\mathbf{3}-\mathcal{S}$Ciore 关于矩阵 $\mathcal{M}_e$ 是可靠且完备的,

(ii) 切规则在 $\mathbf{3}-\mathcal{S}$Ciore 中是可容许的。

证明。根据构造（见 [3]）。 ■

只要 Ciore 的语言足够丰富，上述系统就可以转换为普通双边序列系统（参见 [2]）。回顾一下：对于具有真值集合 $\mathcal{T}=\{t_1,\ldots,t_n\}$ 的矩阵$\mathcal{M}$，若语言 $\mathscr{L}$ 对该矩阵足够丰富，当且仅当对于任意 i，$0\leq i\leq n-1$，都存在自然数 l_i, m_i 和公式 α^i_j, β^i_k，使得对于 $1\leq j\leq l_i$ 和 $1\leq k\leq m_i$，它们仅以 p 为命题变量，并且对于任意赋值 v，以下条件成立：

(i) $\alpha^i_1=p$ 当且仅当 $t_i\in\mathcal{N}$，且 $\beta^i_1=p$ 当且仅当 $t_i\in\mathcal{D}$,

(ii) 对任意 $\varphi\in Fm$ 和 $t_i\in\mathcal{T}$

$$v(\varphi)=t_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} v(\alpha^i_1[p/\varphi]),\ldots,v(\alpha^i_{l_i}[p/\varphi])\in\mathcal{N} \text{ and} \\ v(\beta^i_1[p/\varphi]),\ldots,v(\alpha^i_{m_i}[p/\varphi])\in\mathcal{D} \end{array}$$

其中，$\alpha^i_j[p/\varphi]$ ($\beta^i_k[p/\varphi]$) 是通过将 p 代换为 φ，在 α^i_j (β^i_k) 中得到的公式；并且 $\mathcal{N}=\mathcal{T}\setminus\mathcal{D}$。

Ciore 的语言对于由矩阵 $\mathcal{M}_e$ 所确定的语义具有足够的表达能力。事实上，若 $v\colon Fm\to M_e$ 是一个赋值，且 $\alpha\in Fm$ 是任意公式，则有

$$v(\alpha)=0\Longleftrightarrow v(\alpha)\in\mathcal{N}.$$

$$v(\alpha)=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow v(\alpha)\in\mathcal{D} \text{ and } v(\neg\alpha)\in\mathcal{D}.$$

$$v(\alpha)=1\Longleftrightarrow v(\neg\alpha)\in\mathcal{N}\in\mathcal{D} \text{ and } v(\alpha)\in\mathcal{D}.$$

转换后得到的系统通常需要经过精简，以将其化为更紧凑的形式。此处略去将 $\mathbf{3}-\mathcal{S}$Ciore 转换为普通双边序列系统的转换过程的细节。不过，我们将提及 [3] 中的三条一般精简原则，因为接下来会用到它们。

这三条原则中，第一条和第三条减少规则的数量（这是我们衡量复杂度的主要指标），而第二条通过减少前提的数量来简化一条规则（由于第三条规则会增加前提数量，因此应用它之后通常会接着应用前两条规则）。

回顾一下，如果在任何情况下，只要 $\dfrac{\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1\ \ldots\ \Gamma_k\Rightarrow\Delta_k}{\Gamma\Rightarrow\Delta}$ 是规则 (r) 的一个有效应用，且 Γ' 和 Δ' 是公式集，那么规则 (r) 就是上下文无关的：

$$\frac{\Gamma_1,\Gamma'\Rightarrow\Delta_1,\Delta'\ \ldots\ \Gamma_k,\Gamma'\Rightarrow\Delta_k,\Delta'}{\Gamma,\Gamma'\Rightarrow\Delta,\Delta'}$$

也是规则 (r) 的一个有效应用。上述三条精简原则如下：

原则 1。如果某条规则可由其他规则推导，则可以将其删除。

原则 2。如果 $\frac{S}{\Sigma}$（其中 S 是一个前提集）是一条规则，S' 是 S 的子集，且 $\frac{S'}{\Sigma}$ 可推导（或许需要使用切规则），那么 $\frac{S}{\Sigma}$ 可以替换为 $\frac{S'}{\Sigma}$。特别是：如果 $\frac{S}{\Sigma}$ 是一条规则，$\Gamma \Rightarrow \Delta \in S$，且 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 可由 $S \setminus \{\Gamma \Rightarrow \Delta\}$ 推导，那么 $\frac{S}{\Sigma}$ 可以替换为 $\frac{S \setminus \{\Gamma \Rightarrow \Delta\}}{\Sigma}$。有两种非常简单但相当实用的情况：$\Gamma \Rightarrow \Delta$ 被某个公理或 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 中的某个序列所包含。

原则 3. 如果在给定的序列系统 G 中，我们有规则 $\dfrac{\{\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i\}_{1\leq i\leq n}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$、$\dfrac{\{\Pi_j \Rightarrow \Theta_j\}_{1\leq j\leq k}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$，且二者都是无上下文的，那么可以用新规则替换这两条规则

$$\frac{\{\Gamma_i, \Pi_j \Rightarrow \Delta_i, \Theta_j\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq k}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

注释 3.3 值得一提的是，如果切规则在给定的普通相继式系统中是可容许的，那么对于通过使用上述精简原则而从该系统得到的系统，同样如此，即使在原则 *2 [2,* 第 *47]* 页的应用中使用了切规则。

以下是所得到的序列系统，我们称之为 GCiore。

Axioms

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

Structural rules

$$(\mathrm{w}\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\mathrm{w})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}$$

Logical rules

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$(\neg\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$(\neg\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta \quad \Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg\wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \rightarrow \beta}$$

$$(\neg \rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma, \alpha, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg \rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \rightarrow \beta)}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha} \qquad (\neg\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg\neg)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\neg\alpha}$$

$$(\circ \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}{\Gamma, \circ\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \circ)\ \frac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\alpha}$$

$$(\neg\circ \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg \circ \alpha \Rightarrow \Delta}$$

按照惯例，我们写作 $\vdash_{\mathbf{QCiore}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ ，表示在 GCiore 中存在一个关于 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的证明。接下来，我们展示 [10] 中所陈述的 Ciore 重要定理的一些无切证明。按照惯例，我们将 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 作为 $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ 的缩写。

定理 3.4 下列序列式在 QCiore 中可（无切割地）证明。

(i) $\Rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha) \leftrightarrow \neg \circ \alpha$, (ii) $\Rightarrow \circ \circ \alpha$, (iii) $\Rightarrow \circ\alpha \leftrightarrow \circ\neg\alpha$, (iv) $\Rightarrow ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta))$, (v) $\Rightarrow ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \vee \beta))$, (vi) $\Rightarrow ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta)) \leftrightarrow ((\alpha \to \beta) \wedge \neg(\alpha \to \beta))$, (vii) $\Rightarrow (\circ\alpha \vee \circ\beta) \leftrightarrow \circ(\alpha \wedge \beta)$, (viii) $\Rightarrow (\circ\alpha \vee \circ\beta) \leftrightarrow \circ(\alpha \vee \beta)$, (ix) $\Rightarrow (\circ\alpha \vee \circ\beta) \leftrightarrow \circ(\alpha \to \beta)$.

证明。我们只证明 (i)、(ii)、(iii) 和 (vi)。其余部分类似。(i) 这是以下证明的结果。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\neg\alpha, \alpha \Rightarrow \alpha}\,(\mathrm{w}\Rightarrow) \quad \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}{\neg\alpha, \alpha \Rightarrow \neg\alpha}\,(\mathrm{w}\Rightarrow)}{\neg\alpha, \alpha, \circ\alpha \Rightarrow}\,(\circ \Rightarrow)}{\neg\alpha, \alpha \Rightarrow \neg \circ \alpha}\,(\Rightarrow \neg)}{\neg\alpha \wedge \alpha \Rightarrow \neg \circ \alpha}\,(\wedge \Rightarrow)}{\Rightarrow (\neg\alpha \wedge \alpha) \to \neg \circ \alpha}\,(\Rightarrow\to) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\neg\alpha, \alpha \Rightarrow \alpha}\,(\mathrm{w}\Rightarrow) \quad \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}{\neg\alpha, \alpha \Rightarrow \neg\alpha}\,(\mathrm{w}\Rightarrow)}{\neg \circ \alpha \Rightarrow \alpha}\,(\neg\circ \Rightarrow) \quad \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}{\neg \circ \alpha \Rightarrow \neg\alpha}\,(\neg\circ \Rightarrow)}{\neg \circ \alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)}\,(\wedge \Rightarrow)}{\Rightarrow \neg \circ \alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)}\,(\Rightarrow\to)$$

(ii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\neg\alpha, \alpha \Rightarrow \alpha}\,(\mathrm{w}\Rightarrow) \quad \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}{\neg\alpha, \alpha \Rightarrow \neg\alpha}\,(\mathrm{w}\Rightarrow)}{\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow}\,(\circ \Rightarrow)}{\circ\alpha, \neg \circ \alpha \Rightarrow}\,(\neg\circ \Rightarrow)}{\Rightarrow \circ \circ \alpha}\,(\Rightarrow \circ)$$

(iii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha}\,(\neg\neg \Rightarrow)}{\neg\neg\alpha, \neg\alpha \Rightarrow \alpha}\,(\mathrm{w}\Rightarrow) \quad \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}{\neg\neg\alpha, \neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}\,(\mathrm{w}\Rightarrow)}{\Rightarrow \alpha, \circ\neg\alpha}\,(\Rightarrow \circ) \quad \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}{\neg\neg\alpha, \neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}\,(\Rightarrow \circ)}{\Rightarrow \neg\alpha, \circ\neg\alpha}}{\circ\alpha \Rightarrow \circ\neg\alpha}\,(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow \circ\alpha \to \circ\neg\alpha}\,(\circ \Rightarrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\circ\neg\alpha, \alpha \Rightarrow}\,(\mathrm{w}\Rightarrow) \quad \dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha}\,(\Rightarrow \neg\neg)}{\circ\neg\alpha, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow}\,(\Rightarrow \circ)}{\circ\neg\alpha \Rightarrow \circ\alpha}\,(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow \circ\neg\alpha \to \circ\alpha}\,(\circ \Rightarrow)$$

（vi）可以很容易地找到 $((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta)) \to (\alpha \to \beta)$ 的推导。另一方面，$(((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta)) \to \neg(\alpha \to \beta))$ 的推导如下：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\neg\alpha, \alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow \alpha} \quad \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}{\neg\alpha, \alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha} \quad \dfrac{\beta \Rightarrow \beta}{\neg\alpha, \alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow \alpha} \quad \dfrac{\neg\beta \Rightarrow \neg\beta}{\neg\alpha, \alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow \neg\beta}}{\neg\alpha, \alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \to \beta)}\,(\wedge \Rightarrow\text{'s})}{\alpha \wedge \neg\alpha, \beta \wedge \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \to \beta)}\,(\wedge \Rightarrow)}{(\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta) \Rightarrow \neg(\alpha \to \beta)}\,(\Rightarrow \neg \to)$$

然后，利用（$\Rightarrow \wedge$），我们得到以下推导

$$\Rightarrow ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg(\alpha \rightarrow \beta)).$$

以类似的方式，我们证明

$$\Rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta))$$

是可推导的。 ■

注3.5 条目 (iv)、(v) 和 (vi) 表明，与一致性的情形类似，矛盾性也会在 Ciore 中传播。

4 可靠性、完备性与切消去

本节将证明，上一节给出的演绎系统相对于矩阵 $\mathcal{M}_e$ 是可靠且完备的。此外，我们还将证明，该序列演算具有切消性质。

定理 4.1（可靠性）如果 $\vdash_{\mathbf{GCiore}} \Gamma \Rightarrow \Delta$，那么 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma \Rightarrow \Delta$。

证明。只需验证公理有效，并且每条（结构和逻辑）规则都保持有效性。根据有效性的定义，公理显然有效。接下来，我们将看到 $(\Rightarrow \neg\wedge)$ 有效；其余规则的证明类似。

$$(\Rightarrow \neg\wedge) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)}$$

假设 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha$, $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha$, $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta$ 和 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta$。我们来证明 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)$。设 v 为一个赋值。由于 v 满足 $\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha$, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha$, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \beta$ 和 $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta$，我们需要分析以下几种情况：

情况 1：存在 $\gamma \in \Gamma$，使得 $v(\gamma) \in \mathcal{N}$，或者存在 $\delta \in \Delta$，使得 $v(\delta) \in \mathcal{D}$。在这种情况下，显然 v 满足 $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)$。
情况 2：$v(\alpha) \in \mathcal{D}$, $v(\neg\alpha) \in \mathcal{D}$, $v(\beta) \in \mathcal{D}$ 和 $v(\neg\beta) \in \mathcal{D}$ 那么必然有 $v(\alpha) = \frac{1}{2}$ 和 $v(\beta) = \frac{1}{2}$。因此，根据 $\hat{\wedge}$ 的表，$v(\alpha \wedge \beta) = \frac{1}{2}$，进而 $v(\neg(\alpha \wedge \beta)) \in \mathcal{D}$。所以，$v$ 满足 $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)$。■

下面给出一个辅助结果。

命题 4.2 以下规则可在 GCiore 中导出。

$$\text{(i)} \quad (\Rightarrow \neg\vee)' \quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \vee \beta)} \qquad \text{(ii)} \quad (\Rightarrow \neg\wedge)' \quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)}$$

$$\text{(iii)} \quad (\Rightarrow \neg\rightarrow)' \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \rightarrow \beta)} \qquad \text{(iv)} \quad (\Rightarrow \neg)' \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}$$

Proof.

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{l}(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \neg)\ \dfrac{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \vee \beta)}\end{array} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{array}{l}(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \neg)\ \dfrac{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)}\end{array}$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{array}{l}(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \neg)\ \dfrac{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta\neg(\alpha \rightarrow \beta)}\end{array} \qquad \text{(iv)} \quad \text{Immediate.}$$

■

让我们考虑由 GCiore 添加规则 $(\Rightarrow \neg\vee)'$, $(\Rightarrow \neg\wedge)'$, $(\Rightarrow \neg\rightarrow)'$ and $(\Rightarrow \neg)'$ 得到的序列演算（按照惯例，我们将该系统记为 GCiore $+(\Rightarrow \neg\vee)' + (\Rightarrow \neg\wedge)' + (\Rightarrow \neg\rightarrow)' +$

$(\Rightarrow \neg\vee)'$）。显然（见命题 4.2），序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GCiore 中可证，当且仅当它在 GCiore $+(\Rightarrow \neg\vee)' +(\Rightarrow \neg\wedge)' +(\Rightarrow \neg \rightarrow)' +(\Rightarrow \neg)'$ 中可证。接着，我们仅使用原则 3 按照以下方式修改这个新系统：由 $(\Rightarrow \neg\vee)$, $(\Rightarrow \neg\vee)'$ 和原则 3，我们得到

$$(\Rightarrow \neg\vee)'' \quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \neg\beta \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \vee \beta)}$$

由 $(\Rightarrow \neg\wedge)$、$(\Rightarrow \neg\wedge)'$ 和原则 3，我们得到

$$(\Rightarrow \neg\wedge)'' \quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)}$$

由 $(\Rightarrow \neg \rightarrow)$、$(\Rightarrow \neg \rightarrow)'$ 和原则 3，我们得到

$$(\Rightarrow \neg \rightarrow)'' \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \rightarrow \beta)}$$

最后，由 $(\Rightarrow \neg)$、$(\Rightarrow \neg)'$ 和原则 3，我们得到 $(\Rightarrow \neg)''$ Γ、$\alpha \Rightarrow \Delta$、$\Gamma \Rightarrow \Delta \ \neg\alpha$ 。

定义 4.3 令 GCiore′ 为通过执行以下替换而从 GCiore 获得的序列演算。

- 将 $(\Rightarrow \neg\vee)$ 替换为 $(\Rightarrow \neg\vee)''$。
- 将 $(\Rightarrow \neg\wedge)$ 替换为 $(\Rightarrow \neg\wedge)''$。
- $(\Rightarrow \neg \rightarrow)$ 根据 $(\Rightarrow \neg \rightarrow)''$。
- $(\Rightarrow \neg)$ 根据 $(\Rightarrow \neg)''$。

于是，以下命题显然成立。

Pro命题 4.4 设 Γ 和 Δ 是有限公式集，则下列条件等价：

(i) $\vdash_{\mathbf{GCiore}} \Gamma \Rightarrow \Delta$

(ii) $\vdash_{\mathbf{GCiore}'} \Gamma \Rightarrow \Delta$

此外， $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 可在 GCiore 中不使用切规则证明，当且仅当 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 可在 GCiore′ 中不使用切规则证明。

证明。根据备注3.3以及 GCiore 的构造′。 ■

通常，如果验证了以下条件，则规则 $\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \ldots \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$ 在（ $\mathcal{M}_e$）中是可逆的：若 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma \Rightarrow \Delta$，则对所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ 。

引理 4.5（逆演原理）GCiore 的所有逻辑规则′ 都是可逆的。

证明。我们只检查（$\Rightarrow \neg\vee$）″，因为其余 GCiore 的逻辑规则′的证明类似。设 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma \Rightarrow \Delta$、$\neg(\alpha \vee \beta)$，并令 v 为一个 $\mathcal{M}_e$-赋值。由于 v 满足 $\Gamma \Rightarrow \Delta$、$\neg(\alpha \vee \beta)$，因此$v(\neg(\alpha \vee \beta)) \in \mathcal{D}_\circ$ 分以下几种情况：

情况 1： $v(\alpha \vee \beta) = \mathbf{0}_\circ$ 根据 $\vee$ 的定义，我们有 $v(\alpha) = \mathbf{0}$ 且 $v(\beta) = \mathbf{0}_\circ$ 由 $v(\alpha) = 0$，我们有$\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma$、$\alpha \Rightarrow \Delta$、$\neg\alpha$、$\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma$、$\alpha \Rightarrow \Delta$、$\beta$以及 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma$、$\alpha \Rightarrow \Delta$、$\neg\beta_\circ$ 另一方面，由 $v(\beta) = \mathbf{0}$，我们有$\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma$、$\beta \Rightarrow \Delta$、$\alpha$、$\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma$、$\beta \Rightarrow \Delta$、$\neg\alpha$ 以及 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma$、$\beta \Rightarrow \Delta$、$\neg\beta_\circ$

情况 2： $v(\alpha \vee \beta) = \frac{1}{2}_\circ$ 那么， $v(\alpha) = \frac{1}{2}$和 $v(\beta) = \frac{1}{2}_\circ$ 由 $v(\alpha) = \frac{1}{2}$可得 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \alpha_\circ$ 并且由 $v(\neg\alpha) = \frac{1}{2}$可得 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\alpha$和 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \neg\alpha_\circ$ 另一方面，由 $v(\beta) = \frac{1}{2}$可得$\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \beta_\circ$ 由于 $v(\neg\beta) = \frac{1}{2}$，可得 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \neg\beta$和 $\models_{\mathcal{M}_e} \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\beta_\circ$ ■

回顾一下，文字是这样的公式：它是一个命题变量或一个被否定的命题变量，也就是说，如果存在一个命题变量 p，使得 α 是 p 或 α 是 $\neg p$，那么 α就是一个文字。现在，我们按如下方式为 Ciore 语言中的每个公式 α 赋予一个非负整数。

Axioms

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

Structural Rules

$$(\mathrm{w}\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \mathrm{w})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}$$

Logical Rules

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$(\neg\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg\vee)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \neg\beta \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$(\neg\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta \quad \Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg\wedge)\ \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \rightarrow \beta}$$

$$(\neg\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \beta \quad \Gamma, \alpha, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg\rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \rightarrow \beta)}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha} \qquad (\neg\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg\neg)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\neg\alpha}$$

$$(\circ \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}{\Gamma, \circ\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \circ)\ \frac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\alpha} \qquad (\neg\circ \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\circ\alpha \Rightarrow \Delta}$$

表1: $\mathcal{G}Ciore'$ 演算

定义 4.6（公式的权重）设 α 是一个公式， $w(\alpha)$ 是按如下方式得到的非负整数:

（i）如果 α 是一个文字，则 $w(\alpha)=0$（ii）如果 α 是 $\beta\sharp\gamma$，对于 $\sharp=\{\vee,\wedge,\rightarrow\}$， $w(\alpha)=w(\beta\sharp\gamma)=w(\beta)+w(\gamma)+1$。（iii）如果 α 是 $\circ\beta$，则 $w(\alpha)=w(\circ\beta)=w(\beta)+w(\neg\beta)+1$。（iv）如果 α 是 $\neg\neg\beta$，则 $w(\alpha)=w(\neg\neg\beta)=w(\neg\beta)+1$。（v）如果 α 是 $\neg\circ\beta$，则 $w(\alpha)=w(\neg\circ\beta)=w(\circ\beta)+1$。（vi）如果 α 是 $\neg(\beta\sharp\gamma)$，对于 $\sharp\in\{\vee,\wedge,\rightarrow\}$， $w(\alpha)=w(\neg(\beta\sharp\gamma))=w(\beta)+w(\neg\beta)+w(\gamma)+w(\neg\gamma)+2$。

不难检查，权重的概念定义良好。如果 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是一个（有限）序列，我们将 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 的权重（记作 $w(\Gamma\Rightarrow\Delta)$）称为

$$w(\Gamma\Rightarrow\Delta)=\sum_{\gamma\in\Gamma}w(\gamma)+\sum_{\delta\in\Delta}w(\delta).$$

定理 4.7（关于 $\mathcal{M}_e$ 的 GCiore′ 完备性）
如果$\models_{\mathcal{M}_e}\Gamma\Rightarrow\Delta$，则在 GCiore′ 中存在序列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 的无切证明。

证明。设 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 在 $\mathcal{M}_e$ 中有效。我们对序列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 的权重进行归纳。基础步骤： $w(\Gamma\Rightarrow\Delta)=0$。因此， $\Gamma\cup\Delta$ 的所有公式都是文字。由于该序列有效，必然有 $\Gamma\cap\Delta\neq\emptyset$。否则，我们总能找到一个否证 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 的赋值。设 $p\in\Gamma\cap\Delta$ 或 $\neg p\in\Gamma\cap\Delta$，则

$$(\text{w's})\ \frac{p\Rightarrow p}{\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad(\text{w's})\ \frac{\neg p\Rightarrow\neg p}{\Gamma\Rightarrow\Delta},$$

并且在这两种情况下， $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 都是可证的。
（I.H）假设每个有效序列 $\Gamma'\Rightarrow\Delta'$，满足 $w(\Gamma'\Rightarrow\Delta')<k$、 $k>0$，都能在 GCiore′中证明，且无需使用切规则。

现在，设 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是一个满足 $w(\Gamma\Rightarrow\Delta)=k\geq 1$的有效序列。那么，存在一个公式 $\gamma\in\Gamma$ 或（$\gamma\in\Delta$），使得 $w(\gamma)\geq 1$。于是， γ 具有以下形式之一：（a） $\beta\vee\delta$；（b） $\beta\wedge\delta$；（c） $\beta\rightarrow\delta$；（d）$\neg(\beta\vee\delta)$；（e） $\neg(\beta\wedge\delta)$；（f） $\neg(\beta\rightarrow\delta)$；（g） $\neg\neg\beta$；（h） $\neg\circ\beta$；或（i） $\circ\beta$。我们仅分析情形（f），其余情形类似。

假设 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是 $\Gamma',\neg(\beta\rightarrow\delta)\Rightarrow\Delta$。由于 $\Gamma',\neg(\beta\rightarrow\delta)\Rightarrow\Delta$ 是有效的，且规则 $(\neg\rightarrow\Rightarrow)$

$$\frac{\Gamma',\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta,\delta\qquad\Gamma',\beta,\neg\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta}{\Gamma',\neg(\beta\rightarrow\delta)\Rightarrow\Delta}$$

是可逆的，我们得到 $\Gamma',\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta,\delta$ 以及 $\Gamma',\beta,\neg\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta$ 是有效的。但是 $w(\Gamma',\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta,\delta)<w(\Gamma',\neg(\beta\rightarrow\delta)\Rightarrow\Delta)$，且 $w(\Gamma',\beta,\neg\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta)<w(\Gamma',\neg(\beta\rightarrow\delta)\Rightarrow\Delta)$，因此，根据 (I.H)， $\Gamma',\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta,\delta$ 以及$\Gamma',\beta,\neg\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta$ 可在 GCiore′ 中得到证明，且无需使用切规则。于是，我们可以构造无切证明

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma',\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta,\delta\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma',\beta,\neg\beta,\neg\delta\Rightarrow\Delta\end{array}}{\Gamma',\neg(\beta\rightarrow\delta)\Rightarrow\Delta}$$

序列 Γ'、 $\neg(\beta\rightarrow\delta)\Rightarrow\Delta$ ■

推论 4.8 GCiore′ 具有切消去性质。

证明。由前述定理可立即得出。 ■

推论 4.9 GCiore 具有切消去性质。

证明。由推论 4.8 和命题 4.4 可得。 ■

5 Ciore 切消的一些推论

在本节中，我们展示 Ciore 的切消定理所带来的一些推论。首先，我们引入广义子公式的概念，以证明 Ciore 存在一种句法判定过程。

定义 5.1（Ciore 的广义子公式）给定公式γ的广义子公式集合 gsub(γ)，定义为满足以下条件的最小公式集合：

(1) $\alpha \in$gsub(α)。

(2) gsub(α) $\subseteq$gsub($\neg\alpha$)。

(3) gsub(α) $\cup$ gsub(β) $\subseteq$ gsub($\alpha\#\beta$)，其中 # $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。(4) gsub($\neg\alpha$) $\cup$ gsub($\neg\beta$) $\subseteq$ gsub($\neg(\alpha\#\beta)$)，其中 # $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。
(5) gsub($\neg\alpha$) $\subseteq$gsub($\circ\alpha$)。

Re标记 5.2 根据上述定义，我们可以得出，对于每个公式 α，都有

(i) α 和 $\neg\alpha$ 是 $\circ\alpha$的广义子公式，(ii) α 和 $\neg\alpha$ 是 $\neg\circ\alpha$的广义子公式，

(iii) α 是 $\neg\neg\alpha$的广义子公式。

命题 5.3（广义子公式性质）设 $\mathcal{D}$ 是GCio中的 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的无切割推导 re。对于其中出现的每个序 $\mathcal{D}$：

$$\Pi \cup \Lambda \subseteq \mathbf{gsub}(\Gamma \Rightarrow \Delta)$$

证明。该证明采用对 $\mathcal{D}$ 中规则应用次数的归纳法，并结合定义 5.1、备注 5.2 以及对 GCiore 规则的考察。■

显然，对于任意序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，gsub($\Gamma \Rightarrow \Delta$) 是一个有限集合。因此，通过调整 Gentzen 为 PK（其著名 LK 的命题版本）给出的过程，不难为 GCiore 陈述一个判定过程。因此，

定理 5.4 Ciore 具有一种能够保证自底向上证明搜索的判定过程。

接下来我们将看到，尽管 Ciore 是一种次协调逻辑，但它并不蕴含矛盾。更准确地说，我们证明在 GCiore 中无法证明任何矛盾。

引理 5.5 设 α 为一个公式。以下条件等价：

（i） $\Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha$ 是可证明的。
（ii）空序列 $\Rightarrow$ 是可证明的。

证明。(i)⇒ (ii)：我们按照 α 的复杂度 $c(\alpha)$ 进行归纳法：如果 $c(\alpha)$ $= 0$, α 是一个命题变量。假设存在一个无切证明 $\mathcal{D}$，其 $\Rightarrow p \wedge \neg p$ 如下 ws

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\vdots}{p \wedge \neg p}$$

那么， $\mathcal{D}$ 中出现的最后一个推理必须是（$\Rightarrow \wedge$）（因为 $\mathcal{D}$ 是一个无切证明）。因此， $\mathcal{D}$ 具有如下形式

$$\frac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow p} \quad (\mathrm{r})\ \dfrac{\vdots}{\Rightarrow \neg p}}{\Rightarrow p \wedge \neg p}$$

然后，（r）必须是（$\Rightarrow \neg$）。因此，我们有一个关于 $p \Rightarrow$ 的无切证明，并且可以构造出以下空序列的证明。

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow p} \quad \dfrac{\vdots}{p \Rightarrow}}{\Rightarrow}$$

（归纳假设）假设若 γ 满足 $c(\gamma) < k$，那么如果 $\Rightarrow \gamma \wedge \neg\gamma$ 可证明，空序列也可证明。

现在，令 α 满足 $c(\alpha) = k > 0$。根据假设，存在一个 $\Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha$ 的无切证明 $\mathcal{D}$。由于 $\mathcal{D}$ 是无切的，最后一条规则必定是 $(\Rightarrow \wedge)$，因此 $\mathcal{D}$ 的形式为

$$(\Rightarrow \wedge)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \alpha} \quad (r)\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \neg\alpha}}{\Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha}$$

那么，(r) 可以是以下规则之一：$(\Rightarrow \quad \neg)$、$(\Rightarrow \quad \neg\neg)$、$(\Rightarrow \quad \neg\vee)$、$(\Rightarrow \quad \neg\wedge)$ 或 $(\Rightarrow \neg \rightarrow)$。(r) 为 $(\Rightarrow \neg)$ 的情形与基本情形类似。如果 (r) 是 $(\Rightarrow \neg\neg)$，那么 $\mathcal{D}$ 的形式为

$$(\Rightarrow \wedge)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \neg\beta} \quad (\Rightarrow \neg\neg)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \beta}}{\Rightarrow \neg\neg\beta}}{\Rightarrow \neg\beta \wedge \neg\neg\beta}$$

那么，我们有 $\Rightarrow \beta$ 和 $\Rightarrow \neg\beta$ 的（无切割）证明，并且使用 $(\Rightarrow \wedge)$，我们得到序列 $\Rightarrow \beta \wedge \neg\beta$ 的证明。由于 $c(\beta) < c(\alpha) = k$，根据（归纳假设），我们可证明 $\Rightarrow$。如果 (

$r)$ is $(\Rightarrow \neg\vee)$, $\mathcal{D}$ is of the form:

$$(\Rightarrow \wedge)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \alpha \vee \beta} \quad (\Rightarrow \neg\vee)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \alpha} \quad \dfrac{\vdots}{\Rightarrow \neg\alpha} \quad \dfrac{\vdots}{\Rightarrow \beta} \quad \dfrac{\vdots}{\Rightarrow \neg\beta}}{\Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}}{\Rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \vee \beta)}$$

于是，我们有 $\Rightarrow \beta$ 和 $\Rightarrow \neg\beta$ 的无切证明，并利用（$\Rightarrow \wedge$）可知 $\Rightarrow \beta \wedge \neg\beta$ 是可证明的。由于c（β）$< c$（α）$= k$，根据（归纳假设），$\Rightarrow$ 是可证明的。当（r）为（$\Rightarrow \neg\wedge$）或（$\Rightarrow \neg \rightarrow$）时，情形类似。

（ii）$\Rightarrow$（i）：显然。 ■

推论 5.6 Ciore 不蕴涵矛盾。

证明。假设存在 α，使得 $\Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha$ 是可证明的。那么根据引理 5.5，空序列是可证明的。根据推论 4.9，存在一个空序列的无切证明；这是不可能的。■

推论 5.7 对于 Ciore 的每个定理 α，以及每个 $\mathcal{M}_e$-赋值 v，v（α）$= \mathbf{1}$。

6 一阶情形

在本节中，我们为 Ciore 的一阶版本 QCiore 提出一个可靠且完备的序列系统。随后，我们证明该系统具有切消性质。

定义 6.1 设 GQCiore 为由 GCiore 的规则和公理的一阶版本，以及以下规则构成的序列系统:

$$(\forall \Rightarrow)\ \frac{\phi(b), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\phi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \forall)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\phi(x)}$$

其中， b 是任意自由变元，而特征变元 a 不出现在下方序列中。此外，在（$\Rightarrow \forall$）中， ϕ（a）中的所有 a 出现位置均已标明。

$$(\exists \Rightarrow)\ \frac{\phi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\phi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \exists)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi(b)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\phi(x)}$$

*wher*其中，特征变元 a 不出现在下方序列中，而 b 是任意自由变元。

$$(\circ\exists \Rightarrow)\ \frac{\circ\phi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\circ\exists x\phi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \circ\exists)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\phi(b)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\exists x\phi(x)}$$

*wher*其中，特征变元 a 不出现在下方序列中，而 b 是任意自由变元。

$$(\circ\forall \Rightarrow)\ \frac{\circ\phi(b), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\circ\forall x\phi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \circ\forall)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\phi(b)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\forall x\phi(x)}$$

其中， b是任意自由变元。

命题 6.2 以下序列式可在 GQCiore 中证明。

(i) $\Rightarrow \phi(b) \rightarrow \exists x\phi(x)$,
(ii) $\Rightarrow \forall x\phi(x) \rightarrow \phi(b)$,
(iii) $\Rightarrow \circ\exists x\phi(x) \leftrightarrow \exists x \circ \phi(x)$,
(iv) $\Rightarrow \circ\forall x\phi(x) \leftrightarrow \exists x \circ \phi(x)$。

证明。（i）

$$\dfrac{(\Rightarrow \exists)\ \dfrac{\phi(b) \Rightarrow \phi(b)}{\phi(b) \Rightarrow \exists x\phi(b)}}{(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{}{\Rightarrow \phi(b) \rightarrow \exists x\phi(x)}}$$

(ii)

$$\dfrac{(\forall \Rightarrow)\ \dfrac{\phi(b) \Rightarrow \phi(b)}{\forall x\phi(x) \Rightarrow \phi(b)}}{(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{}{\Rightarrow \forall x\phi(x) \rightarrow \phi(b)}}$$

(iii)

$$\dfrac{\dfrac{(\Rightarrow \exists)\ \dfrac{\circ\phi(a) \Rightarrow \circ\phi(a)}{\circ\phi(a) \Rightarrow \exists x \circ \phi(x)}}{(\circ\exists \Rightarrow)\ \dfrac{}{\circ\exists x\phi(x) \Rightarrow \exists x \circ \phi(x)}}}{(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{}{\Rightarrow \circ\exists x\phi(x) \rightarrow \exists x \circ \phi(x)}} \qquad \dfrac{\dfrac{(\Rightarrow \circ\exists)\ \dfrac{\circ\phi(a) \Rightarrow \circ\phi(a)}{\circ\phi(a) \Rightarrow \circ\exists x\phi(x)}}{(\exists \Rightarrow)\ \dfrac{}{\exists x \circ \phi(x) \Rightarrow \circ\exists x\phi(x)}}}{(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{}{\Rightarrow \exists x \circ \phi(x) \rightarrow \circ\exists x\phi(x)}}$$

(iv)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\circ\phi(b) \Rightarrow \circ\phi(b)}{\circ\forall x\phi(x) \Rightarrow \circ\phi(b)}(\circ\forall \Rightarrow)}{\circ\forall x\phi(x) \Rightarrow \exists x \circ \phi(x)}(\Rightarrow \exists)}{\Rightarrow \circ\forall x\phi(x) \to \exists x \circ \phi(x)}(\Rightarrow\to) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\circ\phi(b) \Rightarrow \circ\phi(b)}{\circ\phi(b) \Rightarrow \circ\forall x\phi(x)}(\Rightarrow \circ\forall)}{\exists x \circ \phi(x) \Rightarrow \circ\forall x\phi(x)}(\exists \Rightarrow)}{\Rightarrow \exists x \circ \phi(x) \to \circ\forall x\phi(x)}(\Rightarrow\to)$$

■

命题 6.3 以下规则可在 GQCiore 中推导。

(i) $\dfrac{\Rightarrow \phi \to \psi(a)}{\Rightarrow \phi \to \forall x\psi(x)}$ *where a does not occur in ϕ,*

(ii) $\dfrac{\Rightarrow \phi(a) \to \psi}{\Rightarrow \exists x\phi(x) \to \psi}$ *where a does not occur in ψ.*

证明。
(i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\text{hyp})\ \overline{\Rightarrow \phi \to \psi(a)}}{\phi \Rightarrow \phi \to \psi(a)}(\text{w}\Rightarrow)}{\phi \Rightarrow \phi \to \psi(a), \psi(a)}(\Rightarrow \text{w}) \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi}{\phi \Rightarrow \phi, \psi(a)}(\Rightarrow \text{w}) \qquad \dfrac{\psi(a) \Rightarrow \psi(a)}{\phi, \psi(a) \Rightarrow \psi(a)}(\text{w}\Rightarrow)}{\phi, \phi \to \psi(a) \Rightarrow \psi(a)}(\to\Rightarrow)}(cut)}{\phi \Rightarrow \psi(a)}(\Rightarrow \forall)}{\phi \Rightarrow \forall x\psi(x)}(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow \phi \to \forall x\psi(x)}$$

(ii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\text{hyp})\ \overline{\Rightarrow \phi(a) \to \psi}}{\phi(a) \Rightarrow \phi(a) \to \psi}(\text{w}\Rightarrow)}{\phi(a) \Rightarrow \phi(a) \to \psi, \psi}(\Rightarrow \text{w}) \qquad \dfrac{\dfrac{\phi(a) \Rightarrow \phi(a)}{\phi(a) \Rightarrow \phi(a), \psi}(\Rightarrow \text{w}) \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\phi(a), \psi \Rightarrow \psi}(\text{w}\Rightarrow)}{\phi(a), \phi(a) \to \psi \Rightarrow \psi}(\to\Rightarrow)}(cut)}{\phi(a) \Rightarrow \psi}(\exists \Rightarrow)}{\exists x\phi(x) \Rightarrow \psi}(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow \exists x\phi(x) \to \psi}$$

■

定义 6.4 设 $\langle \mathfrak{A}, \|\cdot\|^{\mathfrak{A}} \rangle$ 是一个 QCiore-结构，并设 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是一个 GQCiore-序列。我们称 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 $\mathfrak{A}$ 中由赋值 s 满足，当且仅当 Γ 中有某个公式未被 s 满足（在 $\mathfrak{A}$ 中），或 Δ 中有某个公式被 s 满足（在 $\mathfrak{A}$ 中）。若一个序列在 $\mathfrak{A}$ 中被其中的每个赋值 s 满足，则称它在 $\mathfrak{A}$ 中有效。最后，若一个序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 被所有 QCiore-结构满足，则称它有效；在这种情况下，我们记作 $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$。

定理 6.5（可靠性）设 Γ, Δ 是一个公式集合。

$$\textit{If } \Gamma \Rightarrow \Delta \textit{ is provable } \mathbf{GQCiore}\textit{, then } \models_{\mathbf{QCiore}} \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

证明。照例，对 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的推导中规则应用次数进行归纳法即可完成证明。因此，我们只需检查 GQCiore 的所有规则是否保有效性。接下来，我们只检查 $(\neg\vee \Rightarrow)$、$(\circ\forall \Rightarrow)$ 和 $(\Rightarrow \circ\exists)$；其余规则也可用类似的方法分析。下面证明

$$(\neg\vee \Rightarrow)\dfrac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \Delta}$$

保有效性。假设 Γ、α、$\neg\alpha$、β、$\neg\beta \Rightarrow \Delta$ 和 Γ、$\neg\alpha$、$\neg\beta \Rightarrow \Delta$、$\alpha$、$\beta$ 均有效。那么，对于每个结构 $\mathfrak{A}$ 和每个赋值 s，s 满足 Γ、α、$\neg\alpha$、β、$\neg\beta \Rightarrow \Delta$ 和 Γ、$\neg\alpha$、$\neg\beta \Rightarrow \Delta$、$\alpha$、$\beta$。如果 s 不满足 Γ 中的某个公式，或者 s 满足 Δ 中的所有公式，证明便告完成。否则，s 满足 Γ 中的所有公式，且不满足 Δ 中的任何公式。下面来看在这种情况下，s 不满足 $\neg(\alpha \vee \beta)$。假设 s 满足 $\neg(\alpha \vee \beta)$。那么 $s \in \|\neg(\alpha \vee \beta)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\neg(\alpha \vee \beta)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，于是有以下几种情况:

- 若 $s \in \|\neg(\alpha \vee \beta)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$，则有 $s \in \|\alpha \vee \beta\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$，进而得到 $s \in \|\alpha\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} \cap \|\beta\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。因此，$s \in \|\alpha\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$ 且 $s \in \|\beta\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$，也就是说，$s$ 不满足 α，而 s 不满足 β。这与 s 满足Γ、$\neg\alpha$、$\neg\beta \Rightarrow \Delta$、$\alpha$、$\beta$矛盾。

- 若 $s \in \|\neg(\alpha \vee \beta)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，则 $s \in \|\alpha \vee \beta\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，也就是说 $s \in \|\alpha\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \cap \|\beta\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。因此，$s \in \|\alpha\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$ 且 $s \in \|\beta\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，并且有 s 满足 α 和 $\neg\alpha$；s 满足 β 和 $\neg\beta$。这与 s 满足Γ、α、$\neg\alpha$、β、$\neg\beta \Rightarrow \Delta$矛盾。

因此，s 不满足 $\neg(\alpha \vee \beta)$，于是 s 满足 $\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \Delta$。

为了说明$(\circ\forall \Rightarrow) \dfrac{\circ\phi\ a,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\circ\forall x\phi\ x\ \ \Gamma \Rightarrow \Delta}$ ( ) ( ) 保持有效性，假设 $\circ\phi(a)$ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 有效。那么，对于每个结构 $\mathfrak{A}$ 和每个赋值 s，s 满足 $\circ\phi(a)$ $\Gamma \Rightarrow \Delta$。如果 s 不满足 Γ 中的某个公式，或者 s 满足 Δ中的任意公式，证明便完成了。否则，s 不满足
$\circ\phi(a)$。那么 $\|\circ\phi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} = S(\mathfrak{A})$，也就是说，$\|\phi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = S(\mathfrak{A})$。如果 s 满足 $\circ\forall x\phi(x)$，那么 $s \in \|\circ\forall x\phi(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\circ\forall x\phi(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。由于对所有 ψ都有 $\|\circ\psi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = \emptyset$，我们有 $s \in \|\circ\forall x\phi(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。也就是说，$s \in \|\forall x\phi(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\forall x\phi(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$，因此，

- 若 $s \in \|\forall x\phi(A\ m = s\ a$ x a a a $m \in$ a $)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$
则 $s \in \widehat{\exists a}(\|\phi(\ )\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus})\ -\ \widehat{\exists a}(\|\phi(\ )\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus})$。也就是说，$s = s^m_a \in \|\phi(\ )\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$ 对于某个 (( ))，这与 $\|\phi(\ )\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} = \emptyset$ 矛盾;
- 若 $s \in \|\forall x\phi(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$ 则 $s \in \widehat{\exists a}(\|\phi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus})$，进而 $s = s^m_a \in \|\phi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$ 对于某个 $m \in A(m = s(a))$，这与 $\|\phi\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} = \emptyset$ 矛盾。

因此 s 不满足 $\circ\forall x\phi(x)$，进而 s 满足 $\circ\forall x\phi(x)$ $\Gamma \Rightarrow \Delta$。

要证明 $(\Rightarrow \circ\exists)$ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\phi(a)$ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\exists x\phi(x)$ 保持有效性，假设 $\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\phi(a)$ 是有效的。那么，对于每个结构 $\mathfrak{A}$ 以及每个赋值 s，s 满足 $\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\phi(a)$。如果 s 不满足 Γ中的某个公式，或者 s 满足 Δ中的任意每个公式，则证明完成。否则，s 满足 $\circ\phi(a)$。

于是 $\|\circ\phi\ a\ \|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\circ\phi\ a\ \|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = S\ \mathfrak{A}$ $\|\circ\phi\ a\ \|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = \emptyset$ $\|\circ\phi\ a\ \|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} = S\ \mathfrak{A}$ $\|\phi\ a\ \|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\phi\ a\ \|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} =$
$S\ \mathfrak{A}$ $\|\phi\ a\ \|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = \emptyset$ s $\circ\exists x\phi\ x$ $s \in \|\circ\exists x\phi\ x\ \|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$
( ) ( ) ( )，由于 ( )，因此 ( ) ( )，即 ( ) ( ) ( )，然后 ( )。假设 不满足 ( )，那么 ( )，即$s \in \|\exists x\phi(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$ 然后 $s \in \widehat{\forall}(a)$ $(\|\phi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot})$。也就是说 $s = s^m_a \in \|\phi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$ 对于 $m = s(a)$，这是一个矛盾，因为 $\|\phi(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = \emptyset$。■

接下来，我们将使用著名的 Sch¨utte 方法（参见 [24]）证明 GQCiore 的完备性和切消定理。

回顾一下，如果表达式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 满足 Γ 和 Δ 是无限（可数）的公式集，则称其为无限序列。如果一个无限序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的某个有限部分 $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 是可证明的，即 $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 和 $\Delta' \subseteq \Delta$ 是有限的，则称该无限序列是可证明的。

对于每个序列 S，我们定义一棵（可能是无限的）树，称为 S的约化树。由此，我们可以获得 S 的无切证明，或者获得一个不满足 S的 QCiore-结构。这一方法归功于 Sch¨utte（参见 [24]）。记为 T(S) 的 S 的约化树在每个节点上都包含一个序列。

定义 6.6（ S的约化树）它按以下阶段构造。
阶段 0：将 S 写在树的底部。阶段 k ($k > 0$)：按以下情况定义：情况 I：每个最顶端的序列都包含一个同时属于其前件和后件的公式。此时停止。情况 II：不属于情况 I。此时，本阶段的定义取决于

$$k \equiv 0, 1, \ldots, 26\ (mod\ 27).$$

为简化起见，我们假设不存在个体常元或函数常元。在阶段 k 或之前得到的任何序列中出现的所有自由变量，在阶段 k 都可用。

如果没有自由变量，就任选一个自由变量，并称其为可用。

(1) $k \equiv 0$。($\circ \Rightarrow$)归约。设 $\Pi \Rightarrow \Lambda$ 是截至第 $k-1$ 阶段定义的树中的任一最顶层序列式。设 $\circ\alpha_1$、...、$\circ\alpha_n$ 是 Π 中最外层逻辑符号为 $\circ$ 且此前各阶段尚未对其应用归约的所有公式。然后写下所有形如

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, \gamma_1, \ldots, \gamma_n,$$

其中 γ_i 是 α_i 或 $\neg\alpha_i$，位于 $\Pi \Rightarrow \Lambda$ 上方的序列式。因此，$\Pi \Rightarrow \Lambda$ 上方有 2^n 个这样的序列式。

(2) $k \equiv 1$。($\Rightarrow \circ$)归约。设 $\circ\alpha_1$、.....、$\circ\alpha_n$ 是 Λ 中最外层逻辑符号为 $\circ$ 且此前各阶段尚未对其应用归约的所有公式。然后写下序列式

$$\Pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\alpha_1, \ldots, \neg\alpha_n \Rightarrow \Lambda$$

位于 $\Pi \Rightarrow \Lambda$ 上方。

(3) $k \equiv 2$。($\Rightarrow \neg$)归约。设 $\neg\alpha_1$、.....、$\neg\alpha_n$ 是 Λ 中最外层逻辑符号为 $\neg$ 且尚未应用归约的所有公式。然后写下

$$\Pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \Lambda$$

上面的 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

（4） $k \equiv 3$。（$\neg\circ \Rightarrow$）归约。设 $\neg\circ\alpha_1$，.....，$\neg\circ\alpha_n$ 是 Π 中所有最外层逻辑符号为 $\neg\circ$ 且尚未进行归约的公式。然后写下

$$\Pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\alpha_1, \ldots, \neg\alpha_n \Rightarrow \Lambda$$

上面的 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

（5） $k \equiv 4$。（$\wedge \Rightarrow$）归约。设 $\alpha_1 \wedge \beta_1$，.....，$\alpha_n \wedge \beta_n$ 是 Π 中所有最外层逻辑符号为 $\wedge$ 且在前面阶段尚未进行归约的公式。然后写下

$$\Pi, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n \Rightarrow \Lambda$$

上面的 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

（6） $k \equiv 5$。（$\Rightarrow \wedge$）归约。设 $\alpha_1 \wedge \beta_1$，.....，$\alpha_n \wedge \beta_n$ 是 Λ 中所有最外层逻辑符号为 $\wedge$ 且在前面阶段尚未进行归约的公式。然后写下所有形式为下列形式的序列式

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, \gamma_1, \ldots, \gamma_n,$$

其中，γ_i 或者是 α_i，或者是 β_i，位于 $\Pi \Rightarrow \Lambda$之上。$\Pi \Rightarrow \Lambda$之上有 2^n 个这样的序列式。

(7) $k \equiv 6$。（$\vee \Rightarrow$）-归约。其定义方式与(6)对称。

(8) $k \equiv 7$。（$\Rightarrow \vee$）-归约。其定义方式与(5)对称。

(9) $k \equiv 8$。（$\rightarrow\Rightarrow$）-归约。设 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$、.....、$\alpha_n \rightarrow \beta_n$ 是 Π 中最外层逻辑符号为 $\rightarrow$，且在之前各阶段尚未进行归约的所有公式。然后在 $\Pi \Rightarrow \Lambda$之上写出以下序列式

$$\Pi, \beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_k} \Rightarrow \Lambda, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_{n-k}},$$

其中，$i_1 < \ldots < i_k$、$j_1 < \ldots < j_{n-k}$ 以及（i_1、.....、i_k、j_1、.....、j_{n-k}）是(1, 2, ..., n)的一个排列。在 $\Pi \Rightarrow \Lambda$之上有 2^n 个这样的序列式。

(10) $k \equiv 9$。（$\Rightarrow\rightarrow$）-归约。设 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$、.....、$\alpha_n \rightarrow \beta_n$ 是 Λ 中所有最外层逻辑符号为 $\rightarrow$ 且在前面阶段尚未进行归约的公式。然后写下

$$\Pi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \Lambda, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

上述 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

（11） $k \equiv 10$。（$\neg\vee \Rightarrow$）-归约。设 Π 中所有最外层逻辑符号为 $\neg\vee$ 且在前面的阶段中尚未应用归约的公式为 $\neg(\alpha_1 \vee \beta_1)$....., $\neg(\alpha_n \vee \beta_n)$。然后写下

$$\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_k}, \neg\beta_{i_1}, \ldots, \neg\beta_{i_k}, \neg\alpha_1, \ldots, \neg\alpha_n, \Pi \Rightarrow \Lambda, \alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_{n-k}}, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_{n-k}}$$

其中， $i_1 < \ldots < i_k$、 $j_1 < \ldots < j_{n-k}$ 以及（i_1， ...， i_k、 j_1， ...， j_{n-k}）是（1， 2， ...， n）的一个排列。在 $\Pi \Rightarrow \Lambda$之上有 2^n 个这样的序列式。

（12） $k \equiv 11$。（$\Rightarrow \neg\vee$）-归约。令 $\neg$（$\alpha_1 \vee \beta_1$）...、 $\neg$（$\alpha_n \vee \beta_n$）为 Λ 中最外层逻辑符号为 $\neg\vee$、且在前面的阶段中尚未进行归约的所有公式。然后写出所有序列式

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$$

其中， γ_i 是公式 α_i、 $\neg\alpha_i$、 β_i 或 $\neg\beta_i$ （ $1 \leq i \leq n$）中的一个。取这些公式的所有可能组合，可在 $\Pi \Rightarrow \Lambda$之上得到 4^n 个这样的序列式。

（13） $k \equiv 12$。（$\neg\wedge \Rightarrow$）-归约。令 $\neg$（$\alpha_1 \wedge \beta_1$）...、 $\neg$（$\alpha_n \wedge \beta_n$）为 Π 中最外层逻辑符号为 $\neg\wedge$、且在前面的阶段中尚未进行归约的所有公式。然后写出所有序列式

$$S', \Pi \Rightarrow \Lambda, S$$

上述 $\Pi \Rightarrow \Lambda$，其中，给定集合 $F_{AB} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n\}$、 $S \subseteq F_{AB}$和 $S' = \{\gamma_i\colon\ \gamma_i = \neg\alpha_i$ 若 $\beta_i \notin S$ 或若 $\gamma_i = \neg\beta_i$ 。显然， $|F_{AB}| = 2n$，因此，上述有$|\mathcal{P}(F_{AB})| = 2^{|F_{AB}|} = 2^{2n} = 4^n$ 个这样的序列式 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

(14) $k \equiv 13$。（$\Rightarrow \neg\wedge$）归约。设 $\neg(\alpha_1 \wedge \beta_1) \ldots, \neg(\alpha_n \wedge \beta_n)$ 是 Λ 中所有最外层逻辑符号为 $\neg\wedge$，且在之前各阶段尚未应用（$\Rightarrow \neg\wedge$）归约的公式。然后写下所有序列式

$$\Pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \Rightarrow \Lambda, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$$

其中， γ_i 是公式 $\neg\alpha_i$之一，或者是 $\neg\beta_i$ （ $1 \leq i \leq n$）。取所有可能的组合，可得到上述 $\Pi \Rightarrow \Lambda$之上的 2^n 个序列式。

（15） $k \equiv 14$。(¬ →⇒)-归约。设 $\neg(\alpha_1 \to \beta_1) \ldots, \neg(\alpha_n \to \beta_n)$是 Π中所有最外层逻辑符号为 ¬ →且此前各阶段尚未进行归约的公式。然后写下这些序列式

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_n, \neg\alpha_{i_1}, \ldots, \neg\alpha_{i_k}, \Pi \Rightarrow \Lambda, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_{n-k}}$$

其中， $i_1 < \ldots < i_k$、 $j_1 < \ldots < j_{n-k}$和（i_1、 . . . 、 i_k、 j_1、 . . . 、 j_{n-k}）是（1, 2, . . . , n）的一个排列。上述 $\Pi \Rightarrow \Lambda$之上有 2^n 个这样的序列式。

（16） $k \equiv 15$。(⇒ ¬ →)-归约。设 $\neg(\alpha_1 \to \beta_1)$ .. ., $\neg(\alpha_n \to \beta_n)$是 Λ 中所有最外层逻辑符号为 ¬ →且此前各阶段尚未进行(⇒ ¬ →)-归约的公式。然后写下所有序列式

$$S_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}, \Pi \ldots, \beta_n \Rightarrow \Lambda, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$$

其中， γ_i是公式 α_i、 $\neg\alpha_i$或 $\neg\beta_i$ （ $1 \leq i \leq n$）中的一个； $S_{\gamma_1,\ .....,\ \gamma_n} \subseteq \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$满足：如果$\gamma_i = \alpha_i$, 那么 $\beta_i \notin S_{\gamma_1,\ .....,\ \gamma_n}$。在 $\Pi \Rightarrow \Lambda$上方有 3^n 个这样的序列式。

（17） $k \equiv 16$。（$\neg\neg \Rightarrow$）-归约。设 $\neg\neg\alpha_1$、.....、 $\neg\neg\alpha_n$ 是 Π 中所有最外层逻辑符号为 $\neg\neg$ 且在前面各阶段中尚未进行归约的公式。然后写出

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \Pi \Rightarrow \Lambda$$

在 $\Pi \Rightarrow \Lambda$上方。

（18） $k \equiv 17$。（$\Rightarrow \neg\neg$）-归约。设 $\neg\neg\alpha_1$、.....、 $\neg\neg\alpha_n$ 是 Λ 中所有最外层逻辑符号为 $\neg\neg$ 且在前面各阶段中尚未进行归约的公式。然后写出

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

上述 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

（19） $k \equiv 18$。（$\forall \Rightarrow$）归约。设 Π 中所有最外层逻辑符号为 $\forall$ 的公式为 $\forall x_1\alpha_1(x_1), \ldots, \forall x_n\alpha_n(x_n)$。设 a_i 是此阶段可用的第一个变量，且尚未用于对 $1 \leq i \leq n$ 的 $\forall x_i\alpha_i(x_i)$ 进行归约。然后写下

$$\alpha_1(a_1), \ldots, \alpha_n(a_n), \Pi \Rightarrow \Lambda$$

上述 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

（20） $k \equiv 19$。（$\Rightarrow \forall$）-归约。设 Λ 中最外层逻辑符号为 $\forall$ 且迄今尚未应用归约的所有公式为 $\forall x_1\alpha_1(x_1)$.....、$\forall x_n\alpha_n(x_n)$。设 a_1、.....、a_n 是此时尚不可用的前 n 个自由变元（按变量列表中的顺序）。然后写下

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, \alpha_1(a_1), \ldots, \alpha_n(a_n)$$

上述 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。注意，a_1、.....、a_n 是新的可用自由变元。

（21） $k \equiv 20$。（$\exists \Rightarrow$）-归约。其定义方式与（20）对称。

（22） $k \equiv 21$。（$\Rightarrow \exists$）-归约。其定义方式与（19）对称。

（23） $k \equiv 22$。（$\circ\forall \Rightarrow$）-归约。与（19）类似。

(24) $k \equiv 23$。$\Rightarrow \circ\forall$归约。设 $\circ\forall x_1\alpha_1(x_1)$.....，$\circ\forall x_n\alpha_n(x_n)$ 是 Λ 中最外层逻辑符号为 $\circ\forall$ 的所有公式。设 a_i 是在此阶段可用、且尚未用于对 $\circ\forall x_i\alpha_i(x_i)$ 进行归约的第一个变量，适用于 $1 \leq i \leq n$。然后写下

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, \circ\alpha_1(a_1), \ldots, \circ\alpha_n(a_n)$$

上述 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

(25) $k \equiv 24$。$\circ\exists \Rightarrow$归约。设 $\circ\exists x_1\alpha_1(x_1)$.....，$\circ\exists x_n\alpha_n(x_n)$ 是 Π 中最外层逻辑符号为 $\circ\exists$ 的所有公式。设 a_1，.....，a_n 是（在变量列表中）最先出现的、在此阶段不可用的 n 个自由变元。然后写下

$$\circ\alpha_1(a_1), \ldots, \circ\alpha_n(a_n), \Pi \Rightarrow \Lambda$$

上述 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

(26) $k \equiv 25$。$\Rightarrow \circ\exists$归约。设 $\circ\exists x_1\alpha_1(x_1)$.....，$\circ\exists x_n\alpha_n(x_n)$ 是 Λ 中最外层逻辑符号为 $\circ\exists$ 的所有公式。设 a_i 是在此阶段可用、且尚未用于对 $\circ\exists x_1\alpha_1(x_1)$.....，$\circ\exists x_n\alpha_n(x_n)$，$1 \leq i \leq n$ 进行归约的第一个变量。然后写下

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, \circ\alpha_1(a_1), \ldots, \circ\alpha_n(a_n)$$

在上方 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

（27） $k \equiv 26$。如果 Π 和 Λ 有任何共同公式，则在 $\Pi \Rightarrow \Lambda$ 上方不写任何内容（这样它仍然是一个最上层序列）。如果 Π 和 Λ 没有共同公式，且（1）至（26）中所述的归约均不适用，则在其上方再次写下同一个序列 $\Pi \Rightarrow \Lambda$。

因此，由上述归约过程得到的所有序列，以及通过该过程得到的偏序，构成了（对于 S的）归约树，记作 T(S)。

通常，T(S)中的序列 S_0、S_1、.....（有限或无限）个序列式称为一条分支，当且仅当：（1） S_0 是 S；（2） S_{i+1} 紧邻在 S_i上方；（3）如果该序列是有限的，即 S_1、.....、S_n，则 S_n的前件和后件中至少存在一个共同公式。

引理 6.7 设 S 是一个序列。那么，要么存在一个 S 的无切证明，要么存在一个反驳 S 的 QCiore-结构。

证明。令 T(S) 为 S 的约化树。如果 T(S) 的每个分支都是有限的，并且以一个前件和后件中含有共同公式的序列结束，那么为 S 写出一个无切证明是例行工作。否则，T(S) 中存在一条无限分支。根据 K¨onig 引理，我们在 T(S) 中得到一条无限分支，该分支由

$$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \ldots, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, \ldots$$

∞ ∞令 $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$ 和 $\Delta = \bigcup \Delta_i$ （此处，S 是 $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$）。考虑如下定义的 QCiore-结构 $\mathfrak{A} = \langle A, \|\cdot\|^{\mathfrak{A}}\rangle_{,i=0}$ $_{i=0}$:

- A 是 $\Gamma \cup \Delta$ 中出现的所有自由变量的集合。

- 若 $R \in \mathcal{P}_n$，则

$$R^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{if } R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma, \neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & \text{if } R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma, \neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma \\ \mathbf{0} & \text{if } R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma \end{cases}$$

并令 s： $\mathcal{V}_f \cup \mathcal{V}_b \longrightarrow A$ 为由 $s(a) = a$ 定义的赋值：若 a 是自由变量，则取该值；若 x 是约束变量，则 $s(x)$任意。为了证明 S 在 $\mathfrak{A}$ 中不成立，我们证明 s 满足 Γ中的每个公式，而不满足 Δ中的任何公式。令 α 为 $\Gamma \cup \Delta$中的一个公式。我们对 α的复杂度使用归纳法。

基本情形:

- α是某个谓词符号 R的 $R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$。– 若 $\alpha \in \Gamma$，则 $R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma$且 $R^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \{\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\}$。因此 s满足 α。– 若 $\alpha \in \Delta$，则 $R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Delta$且 $R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma$，那么 $R^{\mathfrak{A}}(s(a_{i_1}) \ldots, s(a_{i_n})) = \mathbf{0}$。因此 s 不满足 α。

- 若 α是 $\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$，其中 R是某个谓词符号。– 若 $\alpha \in \Gamma$，则 $\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma$情形 I: $R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma$。于是 $R^{\mathfrak{A}}(s(a_{i_1}) \ldots, s(a_{i_n})) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，因此 $s \in \|R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。也就是说，$s \in \|\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，且 s满足 $\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$。因此，$s$满足 α。情形 II: $R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma$。于是 $R^{\mathfrak{A}}(s(a_{i_1}) \ldots, s(a_{i_n})) = \mathbf{0}$，进而 $s \in \|R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。因此 $s \in \|\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$，且 s 满足 $\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$。因此，$s$满足 α。– 若 $\alpha \in \Delta$。则 $\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Delta$，且 $\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma$。情形 I: $R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma$。于是 $R^{\mathfrak{A}}(s(a_{i_1}) \ldots, s(a_{i_n})) = \mathbf{1}$，进而 $s \in \|R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。因此 $s \in \|\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$，且 s不满足 $\neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$。因此，$s$不满足$\alpha$。情形 II: 根据定义 6.6 的归约步骤 3，舍弃情形 $R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma$。

归纳步骤。设 $\alpha \in \Gamma \cup \Delta$ 的复杂度为 $c(\alpha) = k > 1$。我们分析几种情况，其余情况留给读者。

- α 是 $\alpha_1 \wedge \alpha_2$

  – 若 $\alpha \in \Gamma$。则 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Gamma$。令 $i < \omega$ 为满足 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Gamma_i$的最小自然数。根据定义 6.6 的归约步骤 5，存在 $j > i$ 使得 α_1、$\alpha_2 \in \Gamma_j$，进而 α_1、$\alpha_2 \in \Gamma$。根据归纳假设，s 同时满足 α_1 和 α_2。也就是说，$s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$ 且 $s \in \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。情形 I: $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$ 且 $s \in \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。则 $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \wedge \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$，因此 $s \in \|\alpha_1 \wedge \alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。也就是说，$s$满足 $\alpha_1 \wedge \alpha_2$。情形 II: $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$ 且 $s \in \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。则 $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \wedge \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，因此 $s \in \|\alpha_1 \wedge \alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。也就是说，$s$满足 $\alpha_1 \wedge \alpha_2$。情形 III: $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$且 $s \in \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。也就是说，$s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \wedge \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$，进而 $s \in \|\alpha_1 \wedge \alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。于是$s$ 满足 $\alpha_1 \wedge \alpha_2$。情形 IV: $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$ 且 $s \in \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。则 $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \wedge \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。因此 $s \in \|\alpha_1 \wedge \alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，且 s满足 $\alpha_1 \wedge \alpha_2$。

– 若 $\alpha \in \Delta$。则 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Delta$。令 $i < \omega$ 为满足 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Delta_i$的最小自然数。根据定义 6.6 的归约步骤 6，存在 $j > i$ 使得 $\alpha_1 \in \Delta_j$ 或 $\alpha_2 \in \Delta_j$。假设 $\alpha_1 \in \Delta_j$，则 $\alpha_1 \in \Delta$。根据归纳假设，s 不满足 α_1，也就是说 $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$，即 $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} \cup \|\alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。于是 $s \in \|\alpha_1 \wedge \alpha_2\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$，也就是说 s 不满足 $\alpha_1 \wedge \alpha_2$。

- α是 $\neg\circ\alpha_1$。

  – 若 $\alpha \in \Gamma$。则 $\neg\circ\alpha_1 \in \Gamma$。令 $i < \omega$ 为满足 $\neg\circ\alpha_1 \in \Gamma_i$的最小自然数。根据定义 6.6 的归约步骤 4，存在 $j > i$ 使得 α_1、$\neg\alpha_1 \in \Gamma_j$，于是 α_1、$\neg\alpha_1 \in \Gamma$。根据归纳假设，s 同时满足 α_1 和 $\neg\alpha_1$。也就是说，$s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$ 和$s \in \|\neg\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\neg\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$；也就是说 $s \in \|\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。于是 $s \in \|\circ\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$，因此 $s \in \|\neg\circ\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。所以 s满足 $\neg\circ\alpha_1$。

  – 若 $\alpha \in \Delta$。则 $\neg\circ\alpha_1 \in \Delta$。令 $i < \omega$ 为满足 $\neg\circ\alpha_1 \in \Delta_i$的最小自然数。根据定义 6.6 的归约步骤 3，存在 $j > i$ 使得 $\circ\alpha_1 \in \Gamma_j$，于是 $\circ\alpha_1 \in \Gamma$。根据归纳假设，s 满足 $\circ\alpha_1$。于是 $s \in \|\circ\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\circ\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，并且由于 $\|\circ\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = \emptyset$，$s \in \|\circ\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。因此，$s \in \|\neg\circ\alpha_1\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$，即 s 不满足 $\neg\circ\alpha_1$。

- 若 α 是 $\circ\exists x\alpha_1(x)$

  – 若 $\alpha \in \Gamma$。则 $\circ\exists x\alpha_1(x) \in \Gamma$。令 $i < \omega$ 为满足 $\circ\exists x\alpha_1(x) \in \Gamma_i$的最小自然数。根据定义 6.6 的归约步骤 25，存在 $j > i$ 和一个自由变元符号 a（在形成 $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$的阶段不可用）使得 $\circ\alpha_1(a) \in \Gamma_j$。然后

  $\circ\alpha_1(a) \in \Gamma$。根据归纳假设，$s$ 满足 $\circ\alpha_1(a)$。于是 $s \in \|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。但是 $\|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = \emptyset$，因此 $s \in \|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。于是 $s \in \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。假设 s 不满足 $\circ\exists x\alpha_1(x)$，那么 $s \in \|\circ\exists x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$，因此 $s \in \|\exists x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。于是 $s \in \widehat{\forall a}(\|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot})$，因此对于每个自由变元 b，都有 $s^b_a \in \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$；特别地，$s \in \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。这与 $s \in \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$ 矛盾。因此 s 满足 $\circ\exists x\alpha_1(x)$。

  – 若 $\alpha \in \Delta$。则 $\circ\exists x\alpha_1(x) \in \Delta$。令 $i < \omega$ 为满足 $\circ\exists x\alpha_1(x) \in \Delta_i$的最小自然数。根据定义 6.6 的归约步骤 26，存在 $j > i$ 使得 $\circ\alpha_1(a) \in \Delta_j$，于是
  $\circ\alpha_1(a) \in \Delta$ 对 A中的任意自由变元 a 都成立。根据归纳假设，s 不满足 $\circ\alpha_1(a)$，也就是说，对于任意自由变元 a，$s \in \|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} = \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。于是 $s \in \widehat{\forall a}(\|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot})$，因此$s \in \|\exists x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$ 且 $s \in \|\circ\exists x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。因此，$s$ 不满足 $\circ\exists x\alpha_1(x)$。

- 若 α 是 $\circ\forall x\alpha_1(x)$

  – 若 $\alpha \in \Gamma$。则 $\circ\forall x\alpha_1(x) \in \Gamma$。令 $i < \omega$ 为满足 $\circ\forall x\alpha_1(x) \in \Gamma_i$的最小自然数。根据定义 6.6 的归约步骤 23，存在 $j > i$，使得对于 A中的任意自由变元 a，$\circ\alpha_1(a) \in \Gamma_j$。于是 $\circ\alpha_1(a) \in \Gamma$。根据归纳假设，$s$ 满足 $\circ\alpha_1(a)$，因此 $s \notin \|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。但是 $\|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} = \emptyset$，因此 $s \in \|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。于是 $s \in \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。

  * 若 $s \in \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$。则 $s \notin \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，然后 $s \notin \widehat{\forall a}\|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。也就是说，$s \notin \|\forall x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，因此 $s \in \|\forall x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\forall x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。所以，$s \in \|\circ\forall x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$，且 s 满足 $\circ\forall x\alpha_1(x)$。
  * 若 $s \in \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。则 $s = s^a_a \in \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。也就是说，$s \in \widehat{\exists a}(\|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus})$，因此 $s \in \|\forall x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。于是 $s \in \|\circ\forall x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus}$，所以 s 满足 $\circ\forall x\alpha_1(x)$。

  – 若 $\alpha \in \Delta$。则 $\circ\forall x\alpha_1(x) \in \Delta$。令 $i < \omega$ 为满足 $\circ\forall x\alpha_1(x) \in \Delta_i$的最小自然数。根据定义 6.6 的归约步骤 24，存在 $j > i$，使得对于 A中的任意自由变元 a，都有 $\circ\alpha_1(a) \in \Delta_j$。于是，对于 A中的任意自由变元 a，都有 $\circ\alpha_1(a) \in \Delta$。根据归纳假设，$s$不满足 $\circ\alpha_1(a)$，因此对于任意自由变元 a，都有 $s \in \|\circ\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus} = \|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$。于是$s \in \widehat{\forall a}(\|\alpha_1(a)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot})$，所以 $s \in \|\forall x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$，即 $s \in \|\circ\forall x\alpha_1(x)\|^{\mathfrak{A}}_{\ominus}$。也就是说，$s$ 不满足

  $\circ\forall x\alpha_1(x)$。

其余情形也可用类似的方法分析。 ■

推论 6.8（完备性定理）当且仅当序列 S 有效时，它才可在 GQCiore 中证明。

证明。“若”部分由定理 6.5 得出。对于“仅若”部分，由于 S 有效，S 的 S 约化树是有限的，因此我们可以轻易地为 S 构造一个（无切割的）证明（在 GQCiore 中）。■

推论 6.9（割消去性质）GQCiore 具有割消去性质。

7 结语

为了构建适用于实际应用的基于 LFI 的定理证明器，开发此类 LFI 的一阶版本的证明论至关重要。我们认为，我们的工作朝这一方向迈出了第一步。此次，我们从证明论视角研究了命题逻辑 Ciore 及其一阶版本 QCiore。该逻辑是从形式不一致逻辑（LFI）的角度开发的，旨在作为处理不一致数据库的合适工具。如前所述，Ciore 具有独特的性质，因此是一个值得研究的对象。首先，我们通过合适的序列系统给出 Ciore 的句法版本。接着，我们通过语义证明表明，该系统具有切消性质；并以此为基础展示 Ciore 的一些性质。随后，我们将上述序列系统扩展到一阶语言，并给出支配量词行为及其与一致性算子相互作用的序列规则。最后，我们使用著名的 Sh¨utte 方法证明完备性和切消定理。

我们将上述带等号的一阶 QCiore 系统的扩展留待未来研究。此外，探讨切消定理的应用也将很有意义，从而为克雷格插值定理、Robinson 定理和 Beth 可定义性定理等重要结果提供句法证明。

参考文献

[1] Avron, A.. 具有一致性算子的逻辑的非确定性语义。Journal of Approximate Reasoning, 45, 271–287, (2007).[2] Avron, A., Ben-Naim, J. 和 Konikowska, B., 具有广义有限值语义的逻辑的无切普通序列演算。Logica Universalis, 1, 41–69, 2006.[3] Avron, A. 和 Konikowska, B., 基于非确定性的逻辑多值演算，COS'04 论文集（语义挑战研讨会），维也纳，2004，Journal of Interest Group in Pure and Applied Logic, 2005 (10), 365–387.[4] Avron, A., Konikowska, B., & Zamansky, A. (2012). 次协调逻辑的无切序列演算模块化构造。第27届年度 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会论文集，85–94.[5] Cant´u L., 与 Stone 对合代数相关的保真度逻辑。硕士论文，南方国立大学（阿根廷巴伊亚布兰卡），2019.[6] Cant´u L. 和 Figallo M. (2020)，关于与对合 Stone 代数相关的保真度逻辑。Logic Journal of the IGPL 28(5), 1000–1020.[7] Cant´u L. 和 Figallo M. (2022)，与对合 Stone 代数相关逻辑的无切序列式系统。Journal of Logic and Computation (2022) 即将发表。DOI: https://doi.org/10.1093/logcom/exac061[8] Carnielli W.A., Coniglio M. E. 和 Marcos J.，形式不一致逻辑。载于：《哲学逻辑手册》，第14卷，第15–107页。编者：D. Gabbay；F. Guenthner。Springer，2007年。[9] Carnielli W.A. 和 J. Marcos J., C-系统分类。载于 W. A. Carnielli、M. E. Coniglio 和 I. M. L. D'Ottaviano 编，《次协调性——通向不一致的逻辑之路》，纯粹与应用数学讲义第228卷，第1–94页。Marcel Dekker，纽约，2002年。[10] Coniglio, M. E., Gome-Pereira, G. T., & Figallo, M. (2021). 关于三值次协调一阶逻辑 QCiore 的若干模型论结果。The Review of Symbolic Logic 4(1), 187–224. DOI: https://doi.org/10.1017/S1755020319000595,[11] da Costa, N.C.A.,《不一致形式系统》（葡萄牙语）。任职资格论文，1963年。由 Editora UFPR 于1993年在库里蒂巴再版。

[12] da Costa, N. C. A. 关于不一致形式系统理论（于1970年7月在智利圣地亚哥举行的首届拉丁美洲数学逻辑研讨会上所作的演讲）。Notre Dame Journal of Formal Logic 15(4), 497–510.[13] da Costa, N.C.A., 不一致形式系统的命题演算。巴黎科学院会议录，A辑，第257卷（1963），3790–3792.[14] da Costa, N. C. A., B´eziau, J.-Y., & Bueno, O. 次协调逻辑的若干方面。Bulletin of the IGPL 3(4), 597–614 (1995).[15] I. D'Ottaviano，三值一阶逻辑的完备性与紧致性。Revista Colombiana de Matem´aticas, XIX(1-2):77–94, 1985.[16] I. D'Ottaviano，J3 理论的可定义性与量词消去，Studia Logica, 46, 37–54, 1987.[17] Figallo, M. 四值模态逻辑的无切序列演算与自然演绎。Studia Logica, 109, 1347–1373.(2021). https://doi.org/10.1007/s11225-021-09944-3[18] Marcos, J. (2000). 对 da Costa 问题的 8K 种解答与半解答。未发表的草稿。[19] Mendelson, E. (1987).《数理逻辑导论》（第三版）。纽约：Chapman & Hall。[20] Mikenberg, I., da Costa, N. C. A., & Chuaqui, R. (1986). 实用真理与对真理的近似。The Journal of Symbolic Logic 51(1), 201–221.[21] Priest, G. (1979). 悖论逻辑。Journal of Philosophical Logic 8(1), 219–241.[22] Priest, G. (2006).《矛盾之中：对超协调性的研究》（2nd 版）。牛津：Oxford University Press。[23] Sette, A. M. A. (1973). 关于命题演算 P^1。Mathematica Japonicae 18(13), 173–180.[24] Takeuti, G. (2013) [1975].《证明论》（第二版）。纽约州米尼奥拉：Dover Publications。