arXiv:2304.11483v1 [cs.LO] 22 Apr 2023

齐次性下的前缀与后缀逻辑是初等的 *

DarioDella Monica Angelo Montanari 乌迪内大学 乌迪内大学
dario.dellamonica@uniud.it angelo.montanari@uniud.it
Gabriele Puppis Pietro Sala 乌迪内大学 维索纳大学
gabriele.puppis@uniud.it pietro.sala@univr.it

摘要

本文研究齐次性假设下逻辑 BE 的有限可满足性问题。BE 是 Halpern 和 Shoham 区间时序逻辑的基石，其特征是包含分别对应于区间上的前缀（又称“Begins”）关系和后缀（又称“Ends”）关系的模态算子。在复杂度方面，BE 介于“Chop”逻辑 C 与区间逻辑 D 之间；前者的可满足性问题已知具有非初等复杂度，而后者基于子区间（又称“During”）关系，且为 PSPACE-完备。已有研究表明，BE 是 EXPSPACE-困难的；目前唯一已知的可满足性判定过程是原始递归的，但不是初等的。我们的工作通过证明 BE 是 EXPSPACE-完备的，进一步精确刻画了其可满足性问题的复杂度界。为此，我们构造了一种等可满足范式，其中嵌套模态算子的数量有界。该规范化技术类似于 Scott 量词消去，但由于齐次性假设所施加的限制，其实现要复杂得多。

1 引言

本文研究前缀和后缀区间关系的 BE 逻辑的可满足性问题的计算复杂度。所考虑的解释设置是有限线性序上的区间，并采用齐次性假设（见下文）。BE 逻辑处于区间时序逻辑体系 [9] 的核心位置，并且与标准的基于点的时态逻辑 [2]存在有趣的联系。一般而言，区间时序逻辑的公式可以表达时间点对的性质，而非单个时间点的性质；这些公式的求值对象是此类点对的集合，即点上的二元关系。与基于点的时态逻辑相比，它们具有很强的表达能力，因此通常无法将其可满足性问题归约为经典单子二阶逻辑的可满足性问题，这并不令人意外。

该逻辑 BE 具有两个（一元）模态算子 $\langle B\rangle$ 和 $\langle E\rangle$，分别对当前区间的前缀和后缀进行量化。这些模态算子可以视为 Allen 二元关系 *Begins* 和 *Ends* [1]在逻辑上的对应物。特别地，BE 逻辑可以看作 Halpern 和 Shoham 的区间时序逻辑 [9]，（记作 HS）的一个片段；该逻辑为 Allen 的十二种非平凡关系中的每一种都配备了一个模态算子。

事实证明，在所有相关的区间结构类上，BE 的可满足性问题都是不可判定的 [7, 10]。不过，通过限制语义，尤其是对命题字母的解释，可以摆脱这一黯淡的局面。一个有趣的例子是齐次性假设：根据该假设，当且仅当某个命题字母在区间的所有点上都成立时，它才在该区间上成立。换句话说，根据齐次语义，模型中任意区间的标记，都由其中所包含的单点区间的标记唯一确定。

*我们感谢 2022年 意大利 INdAM-GNCS 项目的支持 *“Elaborazione del Linguaggio Naturale e Logica Temporale per la Formalizzazione di Testi”*，项目编号为 CUP_E55F22000270001。我们还要感谢 Alberto Molinari、Laura Bozzelli 和 Adriano Peron，感谢他们进行的许多有益讨论。最后，Angelo Montanari 想要致谢他在波尔多 LaBRI 休假期间与 Gabriele Puppis 和 Pietro Sala 共同开展的相关问题研究。

齐次性假设的一个优点是，它使得在 Kripke结构上定义区间逻辑的自然解释成为可能。例如，在研究模型检测问题时，这一点非常有用。模型检测问题被定义为：判断给定公式在由给定 Kripke结构生成的所有（齐次）区间结构上是否有效。就此而言，该问题可以看作经典有效性/可满足性问题的一种变体，并且许多可判定性与复杂度方面的结果都可以从一个问题迁移到另一个问题。在 [12] 中已证明，当限制在BE上时，模型检测问题和可满足性问题都变得可判定；事实上，对于完整的HS 逻辑也是如此：当限制为齐次区间结构时，这些问题变得可判定。

尽管 BE 逻辑的语法简单，且采用齐次性假设，但事实证明它的表达能力相当强，表达也十分简洁。在 [2], Bozzelli等人证明了，当在有限词上进行解释时，线性时序逻辑（LTL）与采用齐次性假设的 BE 逻辑定义了同一类无星正则语言，但后者形式体系的表达简洁度至少比前者高出指数级。这也反映在 BE 逻辑可满足性问题的复杂度上：已证明该问题是 ExpSpace-难的 [3, 定理 3.1].[1] 另一方面，目前已知的唯一一种 BE 公式可满足性判定过程 [12] 基本上沿用完整 HS 的判定过程，而且并非初等的。

还值得将采用齐次性假设的 BE 逻辑，与它的两个近亲——Chop 逻辑 C [16] 和子区间关系逻辑D [4]——在表达能力和复杂度方面进行比较。逻辑C具有一个二元模态C，可将当前区间分成两部分，并分别对两部分进行谓述。逻辑D具有一个一元模态D，可对当前区间的子区间进行谓述。显然，就表达能力而言，BE 逻辑介于逻辑D与逻辑C之间：模态D可以在 BE 逻辑中定义，即$D\ \varphi$等价于$B\ E\varphi$；而模态B和E又可以在逻辑C中定义，例如，$B\ \varphi$等价于 φC true。在齐次性假设下，逻辑C的可满足性问题是非初等可判定的，具体而言是塔完全的，因为可以直接将其归约到广义无星正则表达式的语言空性问题，反之亦然 [13, 15], ；而通过适当的收缩方法 [4]，已证明逻辑D的可满足性问题是 PSpace-完全的。还值得指出的是，若移除齐次性假设，逻辑D的可满足性问题将变得不可判定 [11]。

基于上述观察，弥合BE可满足性问题的复杂度下界与上界之间的差距至关重要。近年来，人们在提高 ExpSpace 下界方面投入了大量精力，例如使用 Stockmeyer计数器的变体 [15], ，以及开发初等可满足性判定程序。尽管付出了这些努力，复杂度差距仍未改变，并且已被证明是一个颇具挑战性的问题。BE 的特殊地位可由以下事实体现：在齐次性假设下，关于HS的适当片段的可满足性和/或模型检测问题的诸多研究结果，所涉及的逻辑既不包含模态算子$\langle B\rangle$，也不包含模态算子$\langle E\rangle$ ，或者仅包含其中一个（最新概况可见于 [5, 6]）。

本文证明了，在齐次性假设下，BE 逻辑的可满足性问题是初等可判定的，并且恰好是 ExpSpace-完全的。该结果借助一种颇为出人意料的规范化技术建立起来：将任意 BE 公式转换为一个具有有界嵌套模态算子且与原公式等可满足的公式。具体而言，我们将证明，可以在多项式时间内计算出规范化公式，使其模态算子的嵌套深度至多为 4，并且全称模态算子与存在模态算子之间至多交替 2 次。将 BE 公式转换为规范化公式的过程也可以被视为一种量词消去技术 、，类似于 Scott [14]。然而，从这一视角来看，该转换必须应对更大的困难：由于齐次性假设，我们进行谓述所涉及的元素不能以任意方式加标签。鉴于这一困难，从任意给定的 BE 公式出发，能够在多项式时间内计算出一个等可满足的规范化公式，确实颇为令人惊讶。

本文其余部分的组织如下。第2节介绍 BE 逻辑，并指出齐次性假设所带来的相关影响。第3节定义将 BE 公式转换为规范形式的方法。第4节推导一种最优的可满足性判定过程，并分析其复杂度。结论部分评估已完成的工作，并概述未来的研究方向。为方便读者，论文电子版本中的技术术语和符号均链接至其定义，点击鼠标即可访问这些定义。

[1]事实上，所引用的结果关注的是 BE 的模型检测问题，该问题的输入不仅包括一个公式，还包括一个 Kripke结构。恰好，ExpSpace 下界证明中所使用的 Kripke结构生成了所有可能的齐性区间结构，因此该结果可以立即转移到 BE 的有效性/可满足性问题。

2 预备知识

设时间域为自然数的有限前缀（N、$<$）。 N 上的区间记为 $[x,y]$，其中 x、$y \in N$ 和 $x \le y$； N上的所有区间构成的集合记为 $\mathbb{I}(N)$。令 $<_B$（分别为 $<_E$）表示区间上的真前缀（分别为后缀）关系，其定义为： $J <_B I$ 当且仅当 $\min(I) = \min(J) \le \max(J) < \max(I)$（分别地， $J <_E I$ 当且仅当 $\min(I) < \min(J) \le \max(J) = \max(I)$）。

逻辑 BE 的 公式由有限非空集合 Σ中的命题字母构造而成，该集合称为 签名，构造时使用经典布尔联结词和模态算子。后者用于对当前区间的前缀和后缀进行量化。形式上，BE 公式满足以下文法：

$$\varphi \ ::= \ p \ \ (\text{for } p \in \Sigma) \ \mid \ \neg\varphi \ \mid \ \varphi \vee \varphi \ \mid \ \langle B\rangle \varphi \ \mid \ \langle E\rangle \varphi.$$

语义通过区间结构 S 及其一个区间 I 来定义。形式上，签名 Σ 上的区间结构是一个二元组 $\mathcal{S} = (\mathbb{I}(N), \sigma)$，其中 $\sigma : \mathbb{I}(N) \to \wp(\Sigma)$ 是将区间标记为 Σ 的子集的区间标记。BE 公式 φ 在 S 的区间 I 上是否成立，记作 $\mathcal{S}, I \models \varphi$，由以下规则确定：

- $\mathcal{S}, I \models p$ 当且仅当 $p \in \sigma(I)$;
- $\mathcal{S}, I \models \neg\varphi$ 当且仅当 $\mathcal{S}, I \not\models \varphi$;
- $\mathcal{S}, I \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ 当且仅当 $\mathcal{S}, I \models \varphi_1$ 或 $\mathcal{S}, I \models \varphi_2$;
- $\mathcal{S}, I \models \langle B\rangle \varphi$ 当且仅当$\mathcal{S}$ $J \models \varphi$ 存在某个 $J <_B I$;
- $\mathcal{S}, I \models \langle E\rangle \varphi$ 当且仅当$\mathcal{S}$ $J \models \varphi$ 存在某个 $J <_E I$。

若一个公式在每个区间结构的每个区间上都成立，则该公式有效；类似地，若它在某个区间结构的某个区间上成立，则该公式可满足。若对于每个区间结构 S 及其中的每个区间 I，$\mathcal{S}, I \models \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{S}, I \models \varphi'$，则两个公式 φ 和 φ' 等价。若两个公式要么都可满足，要么都不可满足，则它们等可满足。有效性、可满足性和等价性的概念可以相对于特定的区间结构类（甚至可以是单个区间结构）来定义。例如，如果对于所有 $\mathcal{S} \in \mathscr{C}$ 和所有 $I \in \mathcal{S}$，都有 $\mathcal{S}, I \models \varphi$，我们就称公式 φ 在区间结构类 $\mathscr{C}$ 上有效。特别地，当 $\mathscr{C}$ 只包含一个区间结构 S 时，如果对于所有 $I \in \mathcal{S}$，都有 $\mathcal{S}, I \models \varphi$，我们就称公式 φ 在 S 上有效。

可以为 BE 逻辑添加语法糖。例如，我们经常使用诸如$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$、$\mathsf{false} = p \wedge \neg p$（对于任意 $p \in \Sigma$）、$\mathsf{true} = \neg\mathsf{false}$ 以及 $[X]\varphi = \neg X \neg\varphi$ 等简写，表示 $X \in \{B, E\}$。其他一些有用的简写包括 $\pi = [B]\mathsf{false}$，它将其求值所在的区间限制为单元素集合；以及 $[G]\varphi = \varphi \wedge [B]\varphi \wedge [E]\varphi \wedge [B][E]\varphi$，它要求所有子区间（包括当前区间、其真前缀和其真后缀）都满足 φ。简写 π 和 $[G]$可以分别视为派生的一元和零元模态算子，并可作为语法糖添加到 BE 中。

齐次性假设。 我们回顾一下 [10, 12] 逻辑 BE 的可满足性问题是不可判定的，除非将范围限制在齐次区间结构上。若区间结构 $\mathcal{S} = (\mathbb{I}(N), \sigma)$是 齐次的，则其标记满足条件 $\sigma(I) = \bigcap_{x \in I} \sigma([x,x])$ 对所有 $I \in \mathbb{I}(N)$均成立。直观地说，这意味着标记 σ 由其在单点区间上的限制唯一确定。下面我们仔细看看齐次性的影响。

首先，每个公式 $B(p_1 \wedge p_2)$ 都等价于 $Bp_1 \wedge Bp_2$，E 的情形也类似。不过请注意，齐次性并不意味着任意公式 φ_1, φ_2在用命题字母 p_1, p_2 替换时也具有类似性质。例如，公式 $B(p \wedge \neg p)$ 和 $(B\ p) \wedge (B\ \neg p)$ 并不等价。

利用齐次性，还可以高效地将任意 BE公式重写为一个与其等价的公式，使其中命题字母的每次出现都与 π 合取。基于这一观察，我们引入以下温和的范式：

定义 1。 一个 BE 公式 ψ 处于 齐次范式，当且仅当命题字母的每次出现 p 在 ψ 中都出现在子公式 $\pi \wedge p$内。

基本上，齐次范式限制命题字母只能在单点区间上求值。例如，公式 $(\pi \wedge q) \vee B(\pi \wedge \neg(\pi \wedge p))$ 属于齐次范式，并且在区间 I 上成立，当且仅当 I 由一个标记为 q 的单点组成，或者 I 的左端点未标记为 p。

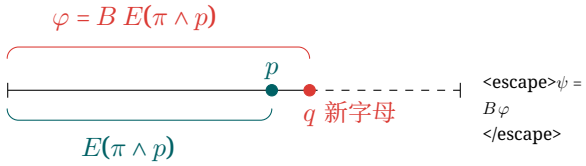


图 1：公式 $\psi = B\varphi$ 的规范化示例。

命题 2。可以在线性时间内将任意公式 ψ 转换为与其等价的齐次范式公式；此处的等价性是在齐性区间结构上解释时成立的。

证明。只需将命题字母 p 在 ψ 中的每一次出现都替换为公式 everywhere(p) $= (\pi \wedge p) \vee (B(\pi \wedge p) \wedge E(\pi \wedge p) \wedge [B](\pi \vee E(\pi \wedge p)))$。所得公式与 ψ 等价，因为在齐性区间结构上，p 与 everywhere(p)等价。 □

我们将 BE$_\pi$ 逻辑的这一片段记作 BE，其中仅包含齐次范式中的公式。从此以后，我们将只处理 BE$_\pi$ 公式，并默认这一假设有时可以省略不提。因此，我们将形如 $\pi \wedge p$ 的（子）公式视为原子公式。

3 BE$_\pi$的有界嵌套范式

本节将介绍一种变换，将任意 BE$_\pi$ 公式转换为具有有界数量嵌套模态算子的等可满足公式。该变换在某种程度上让人联想到一阶逻辑的二变量片段 [14], 中所谓的斯科特范式，因为它在扩展后的命题字母集合上生成一个公式，当且仅当原公式可满足时，该公式才是可满足的。这里的难点在于，变换产生的新命题字母的赋值必须满足齐次性假设。也就是说，我们不能通过给满足某个（子）公式 φ 的区间标记一个新的命题字母 q_φ，来识别这些区间。相反，我们将通过适当地关联分配给其端点的新标记来识别这些区间。我们的变换将关键性地利用这样一个事实：在齐次性条件下，两个重叠区间上公式的赋值，相较于相互不相交区间上的同一组公式的赋值，具有“更少的自由度”。

定义 3。 BE$_\pi$ 公式的模态深度（或简称为深度）是其中嵌套的模态算子的最大数量，即BE$_\pi$ $\langle B\rangle$ 和$\langle E\rangle$ 的最大嵌套数量，但不计算定义算子 π的那些算子。如果一个BE$_\pi$ 公式具有如下形式 $\psi \wedge [G]\xi$，则称其为浅层范式 $\psi \wedge [G]\xi$，其中 ψ 和 ξ 的深度均不超过2。

关于上述定义，我们回顾一下，$[G]\xi$是 $\xi \wedge [B]\xi \wedge [E]\xi \wedge [B][E]\xi$的简写，因此，处于浅层范式的公式的深度至多为 4。然而，并非所有深度为 4 的公式都处于浅层范式。

定理 4。给定任意 BE$_\pi$ 公式 ψ，可以在多项式时间内计算出一个与之等可满足的公式 $\psi^\star$，且该公式处于浅层范式。

为了突出该定理证明背后的关键思想之一（我们将其推迟到下一小节讨论），下面给出一个公式规范化的示例。

例 5。考虑签名 $\Sigma = \{p\}$ 上的公式 $\psi = B\ \varphi$，其中 $\varphi = B\ E(\pi \wedge p)$。图 1 展示了一个满足 ψ 的区间结构；特别地，它标出了见证 φ（红色）和 $E(\pi \wedge p)$（蓝色）的区间。注意，ψ 的深度为 3，且不属于浅层范式。为了将 ψ 改写为一个等可满足的浅层范式公式，我们引入一个新的命题字母 q，用于标记满足 φ 且关于前缀关系极小的区间的右端点（简称这些区间为前缀极小区间）。注意，这些区间的右端点紧邻标记为 p 的点的右侧。因此，我们考虑扩展签名 $\Sigma' = \{p, q\}$ 上的区间结构，使以下公式有效：

$$\xi \;=\; \underbrace{\big(\neg\pi \wedge \neg\langle B\rangle\neg\pi\big)}_{\textit{interval has exactly two points}} \;\rightarrow\; \underbrace{\big(\langle B\rangle(\pi \wedge p) \leftrightarrow \langle E\rangle(\pi \wedge q)\big)}_{\textit{q is to the right whenever p is to the left}}$$

我们可以验证，在使 ξ 有效的区间结构上，每个满足φ 的前缀极小区间也满足 $\varphi' = E(\neg\pi) \wedge E(\pi \wedge q)$；反过来，每个满足 φ' 的区间也满足

φ。这意味着，同样在使 ξ 有效的区间结构上，深度为 3 的公式 $\psi = B\varphi$ 等价于深度为 2 的公式 $\psi' = B\varphi'$。此外，由于可以始终通过加入新命题字母 q 来扩展 $\Sigma = \{p\}$ 上任意区间结构的标记，使其满足 $[G]\xi$，我们得出结论：ψ 与公式 $\psi^\star = \psi' \wedge [G]\xi$等可满足。由于 ξ 的深度为 1，$\psi^\star$ 也处于浅层范式。

任意公式 ψ 的规范化过程会反复执行类似于例 5 中所介绍的重写。更确切地说，我们首先将 ψ 中每个深度为 $d > 2$ 且形式为 $B\ \varphi$（分别为 $E\ \varphi$）的最外层子公式替换为一个深度为 2 的等可满足公式 $B\ \varphi'$（分别为 $E\varphi'$）。该重写步骤会通过与例 5 中 $[G]\xi$ 类似的公式，在保持等可满足性的同时，用新的命题字母扩展签名，并对这些命题字母施加约束。约束中将包含原始子公式 φ 的出现，因此需要依次对约束进行规范化，最终得到深度至多为 2 的公式。关于定理 4 的规范化过程的更多细节和形式化论证将在接下来的小节中给出。

我们通过指出定理 4 的一个直接推论来结束这一部分。我们回顾一下，根据 [12]，在齐次性下存在一种相当简单但非初等的过程，用于判定 BE公式 ψ 的可满足性。仔细考察该过程的描述可以看出，它具有非-

确定性时间复杂度为 $O(\mathrm{tow}(h, |\psi|))$，其中 $\mathrm{tow}(h, n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$（$n$ 个 2）是以 n 和 h 结尾的 h 重幂塔，h 是输入公式 ψ 中嵌套模态算子的最大数量。由于简写 π 可以在常数时间内直接处理，因此上述复杂度界中的参数 h 可以与我们对 BE$_\pi$ 公式的模态深度概念对应起来。特别地，当我们考虑浅层范式下的公式 ψ 时，参数 h 至多为 4。结合命题 2 和定理 4，我们得到齐次性假设下 BE 逻辑可满足性问题的第一个粗略复杂度界：

推论 6。在限制于齐性区间结构的 BE 逻辑中，可满足性问题是初等可判定的，即至少属于 4NExpTime。

我们将在第4节中给出更为细致的复杂度分析，证明齐同性下 BE 逻辑的可满足性问题实际上是 ExpSpace-完全的。

3.1 扩展器

BE$_\pi$ 公式规范化过程的第一个要素是扩展器。直观而言，它是一个公式，它依据旧命题字母，在任意（齐次）区间结构中约束新的命题字母。

定义 7. 设 $\Sigma \subseteq \Sigma'$为两个签名，并设 $\mathbb{S} = (\mathbb{I}(N), \sigma)$ 和 $\mathbb{S}' = (\mathbb{I}(N'), \sigma')$ 分别是定义在 Σ 和 Σ'上的区间结构。若 $N' = N$ 且对于所有区间 $I \in \mathbb{I}(N)$，$\sigma'(I) \cap \Sigma = \sigma(I)$，则称 $\mathbb{S}'$ 是 $\mathbb{S}$ 的扩展。

一个扩展 器从 Σ 到 Σ' 是一个BE$_\pi$ 公式 ξ 定义在 Σ' 使得，对于每个区间结构$\mathcal{S}$ 上 Σ，存在 一个对 $\mathbb{S}'$ 的扩张 $\mathbb{S}$，使得 ξ 有效。

下面给出一个关于扩展器的简单引理。

引理 8. 若 ξ 是一个从 Σ 到 Σ'的扩展器，ψ 和 ψ' 分别是签名 Σ 和 Σ'上的公式，并且在所有 ξ 有效的区间结构上，ψ与ψ'等价，那么 ψ和 $\psi' \wedge [G]\xi$等可满足。

证明。假设区间结构 $\mathbb{S}'$ 满足 $\psi' \wedge [G]\xi$，其签名为 Σ'。由于 ξ 在 $\mathbb{S}'$上有效，ψ 与 ψ' 在 $\mathbb{S}'$上等价，因此 $\mathbb{S}'$ 满足 ψ。反过来，若区间结构 $\mathbb{S}$ 满足 ψ，其签名为 Σ，那么存在 $\mathbb{S}$ 的一个扩张 $\mathbb{S}'$，使得 ξ 有效。这意味着 ψ 与 ψ'在 $\mathbb{S}'$上等价。因此 $\mathbb{S}'$ 满足 ψ'，也满足 $\psi' \wedge [G]\xi$。 □

3.2 最小见证区间

回顾一下，BE$_\pi$ 公式的规范化会将深度为 $d > 2$ 的子公式 $B\varphi$（分别为 $E\ \varphi$）替换为等价的深度为 2 的公式 $B\varphi'$（分别为 $E\ \varphi'$）。在这方面，一个简单的观察是，为了确定哪些区间满足 $B\varphi$（分别为 $E\varphi$），可以考察满足 φ 且对于前缀（分别为后缀）关系而言是极小的区间。

定义 9。给定一个 BE$_\pi$ 公式 φ、一个区间结构$\mathcal{S}$以及其中的一个区间 I，我们称 I 是前缀极小的（相应地，后缀极小的），φ 如果 $\mathcal{S}\ I \vDash \varphi$ 且 $\mathcal{S}\ J \nvDash \varphi$ 对于每个 $J <_B I$（相应地，$J <_E I$）。

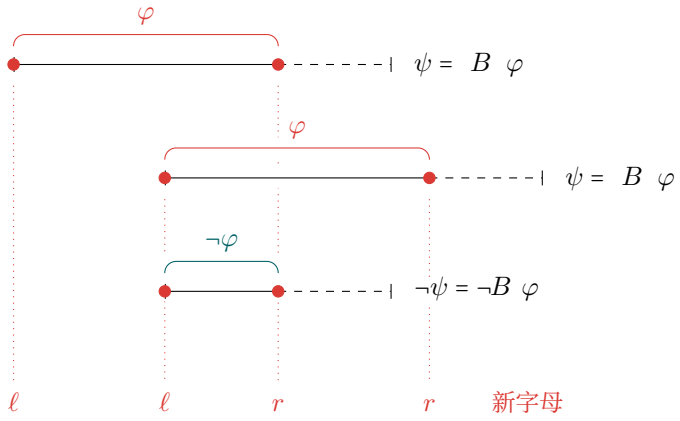


图2： φ 的重叠前缀极小区间及其交集。

稍后我们将看到，一旦在前缀极小/后缀极小区间的端点处标注新的命题字母，就可以使用一个公式 φ' 无歧义地识别出相对于 φ 的这些区间；该公式的大小与 φ 的大小成正比，但深度仅为 1。例 5 已经给出了这一技术的简化说明。下面，我们将在更一般的视角下讨论这一方法，并指出重叠的极小见证可能带来的问题。

例10。假设 φ 是一个深度为 2 的公式。我们的目标是将其替换为一个深度为 1 的公式 φ'，使得在区间结构的某个适当扩张中，$B\varphi'$ 与 $B\varphi$ 等价。如前所述，一种自然的方法是只关注对 φ 前缀极小的区间，并用合适的新命题字母标记它们的端点。例如，图2中的红色括号表示 φ 的两个前缀极小区间。我们分别用新命题字母 ℓ 和 r 标记它们的左端点和右端点，并假设扩张后的区间结构满足 ℓ 和 r 的预期用途。接着我们定义 $\varphi' = (B(\pi \wedge \ell) \wedge E(\pi \wedge r)) \vee ((\pi \wedge \ell) \wedge (\pi \wedge r))$，并注意到每个满足 $B\varphi$ 的区间也必定满足 $B\varphi'$。因此，人们可能会想用 φ' 替换 φ。遗憾的是，尽管 $B\varphi$ 蕴含 $B\varphi'$，反向蕴含却不成立，因为任意两个对 φ 前缀极小区间的交集并不总满足 φ（见图2中的蓝色括号）。一般而言，为避免歧义地标记极小区间的端点，可以对任意两个重叠区间的端点使用不同的字母。更准确地说，应引入若干组字母 ℓ、r，其组数等于右端点各不相同的、对 φ 前缀极小的重叠区间的最大数量。

3.3 最小见证区间的编码

例10提出了规范化过程中至关重要的第三个要素：它表明，为了明确标记公式 φ 的前缀极小（分别为后缀极小）区间的端点，必须先界定重叠区间不同右端点（分别为左端点）的数量。下文的推论14将给出这一数量的精确上界。

定义11。 区间$\mathcal{I}$ 的集合称为相交族，如果存在一点 x 包含在$\mathcal{I}$中的每个区间内。

图3左侧展示了一个区间相交族的例子。

为了证明所需的上界，我们先建立两个辅助引理。第一个引理将偏序集（例如按包含关系排序的区间相交族）的最大基数与其链和反链的最大基数联系起来。具体来说，偏序集的链是由两两可比较元素构成的子集。反链则是由两两不可比较元素构成的子集。事实上，第一个引理是对狄尔沃斯定理的重新表述 [8]（为使本文内容完整，我们在此给出证明）：

引理12. 设 X 是一个偏序集，并假设它的所有链和反链的基数都至多为 n。那么 X 的基数至多为 n^2。

证明。首先请注意， X 是良基的，因为根据假设，链的基数至多为 n。定义 X的划分 $Y_1, Y_2, \ldots$，其中每个 Y_i 仅包含极小元素

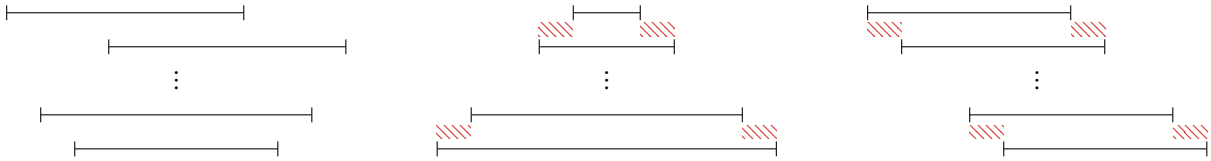


图3：从左到右：一个由区间组成的相交族、一条链和一个反链 .

of $X \setminus \bigcup_{j<i} Y_j$——特别是，每个 Y_i 都根据前面的集合 $Y_1, \ldots, Y_{i-1}$归纳定义。按构造，每个子集 Y_i 都是反链，因此根据该命题的假设，其基数至多为 n。

现在，我们用 n 来界定划分中子集的数量。为导出矛盾，假设 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}$ 属于 X 的划分。根据构造，对于每个 $1 < i \leq n+1$ 和每个 $y \in Y_i$，都存在 $y' \in Y_{i-1}$ 使得 $y' < y$（否则，y 本应被加入 Y_{i-1}）。利用这一性质和简单归纳，我们可以构造一条长度为 $n+1$ 的链：先任取一个 $y_{n+1} \in Y_{n+1}$，然后反复利用该性质，在一条包含 $y_i < y_{i+1} < \cdots < y_{n+1}$、$i > 1$、$y_i \in Y_i$、$y_{i+1} \in Y_{i+1}$、……、$y_{n+1} \in Y_{n+1}$ 的链前面添加一个新元素 $y_{i-1} < y_i$，其中 $y_{i-1} \in Y_{i-1}$。显然，这样一条长度为 $n+1$ 的链会导致矛盾，因此，$Y_1, Y_2, \ldots$ 对 X 的划分至多包含 n 个元素。由此可得 $|X| = \sum_i |Y_i| \leq n^2$。 □

最终，我们旨在应用引理12，利用包含关系作为偏序，来界定每个具有两两不同右端点的相交族中前缀极小（分别为后缀极小）区间的基数。为此，界定此类相交族的链和反链的基数至关重要。在研究相交族时，避免使用单点区间也会很方便（注意，每个相交族中至多有一个单点区间）。

引理13. 设 S 为一个区间结构，φ 一个 BE$_\pi$ 公式，I 为 φ 的具有两两不同右端点的非单点前缀极小（分别为后缀极小）区间的相交族，并且 I′ 为 I 的一个链或反链，其中偏序由包含关系给出。则有

$$|\mathcal{I}'| \leq 2^{2|\varphi|}. \tag{1}$$

证明. 我们给出 φ 的非单点前缀极小区间相交族的证明（后缀极小区间的情形使用对称论证）。为导出矛盾，假设存在一个 BE$_\pi$ 公式 φ、一个 φ 的具有两两不同右端点的非单点前缀极小区间相交族 I，以及 I 的一个子集 I′，该子集是一个链或反链，并且违反界限（1），即 I′ 包含多于 $2^{2|\varphi|}$ 个区间。我们还可以不失一般性地假设，φ 是见证该界限违反情形的最小公式（稍后在考虑 φ 的子公式的前缀极小区间族时，我们将利用这一假设）。

令 $\boldsymbol{\partial}_B\varphi$（分别地，$\boldsymbol{\partial}_E\varphi$）为满足以下条件的公式集合：$\alpha\, B\alpha$（分别地，$E\alpha$）是 φ 的子公式，且其上方没有其他模态算子。例如，若 $\varphi = B\alpha_1 \wedge B\, B\, \alpha_2 \wedge E\, B\alpha_3$，则 $\boldsymbol{\partial}_B\varphi = \{\alpha_1,\ B\ \alpha_2\}$ 和 $\boldsymbol{\partial}_E = \{B\ \alpha_3\}$。注意，$|\varphi| \geq |\boldsymbol{\partial}_B\varphi| + |\boldsymbol{\partial}_E\varphi|$。

定义 φ-剖面为非单点区间 I 的有序对（B，E），其中 B（分别地，E）是满足以下条件的公式集合 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_B\varphi$（分别地，$\alpha \in \boldsymbol{\partial}_E\varphi$）：它们在 I的前缀（分别地，后缀）处成立。注意，具有相同 φ-剖面的任意两个非单点区间要么都满足 φ，要么都满足 $\neg\varphi$；特别地，这归功于 φ 处于齐次范式。

我们还注意到，最多只有 $2^{|\boldsymbol{\partial}_B\varphi|+|\boldsymbol{\partial}_E\varphi|}$ 个不同的 φ-profile。因此，根据我们对 I′ 的假设，存在

$$n > 2^{2|\varphi|-|\boldsymbol{\partial}_B\varphi|-|\boldsymbol{\partial}_E\varphi|}$$

具有相同 φ-profile 的区间 I_1、……、$I_n \in$ I′。不失一般性地，假设这些区间 I_1、……、I_n 按其右端点的自然序排列，即 $\max(I_1) < \cdots < \max(I_n)$。根据 I′ 是链还是反链，这些区间的左端点也分别按降序或升序排列（见图3）。

在证明的其余部分，除非另有说明，i 表示从 1 到 $n-1$的一个自然数，尤其将用于对连续区间对进行索引，例如 I_i 和 I_{i+1}。对于每个 i，令 $w_i < x_i \leq y_i < z_i$为 I_i 和 I_{i+1}的四个端点。此外，令左端-$\Delta_i = [w_i + 1, x_i]$ 和右端-$\Delta_i = [y_i, z_i - 1]$（这些

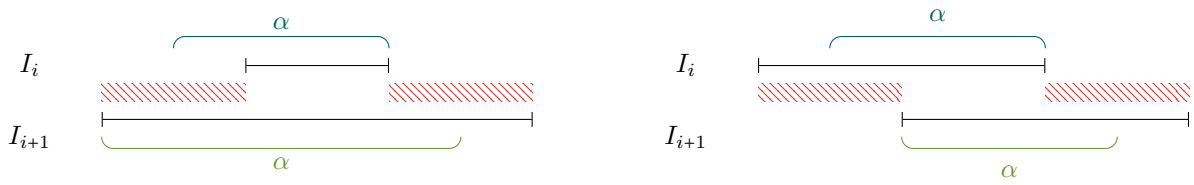


图4：链（左）和反链（右）中的特殊见证。

区间在图3中由红色虚线矩形表示）。由于 I′ 是链或反链，左端-Δ_i和右端-Δ_i在所有 i 之间均两两不相交（这一性质将在后文使用，也是将研究范围限制在链和反链上的主要原因）。

给定 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_B\varphi$ 和 $1 \le i < n$， α 在 i 处的一个特殊 B-见证（若存在）是指满足以下条件的前缀极小区间：它与 I_{i+1} 具有相同的左端点，且其右端点属于右-Δ_i。图4给出了两个特殊 B-见证的例子，以绿色括号表示：一个例子对应链排列，另一个对应反链排列。对称地，给定 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_E\varphi$ 和 $1 \le i < n$， α 在 i 处的一个特殊 E-见证（若存在）是指满足以下条件的后缀极小区间：它与 I_i 具有相同的右端点，且其左端点属于左-Δ_i。图4中的特殊 E-见证以蓝色括号表示。

现在，当 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_B\varphi$（分别为 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_E\varphi$）成立，并且 α 在 i处存在一个特殊的B-见证（分别为E-见证）时，我们用一对（B， α）（分别为（E， α））为索引 $1 \le i < n$ 添加标记。如果对于任何 α都不存在特殊见证，则用符号–为 i 添加标记。令 $K_i = [\min(I_{i+1}), \max(I_i)]$，并注意到 K_i 是I_{i+1}的一个真前缀。我们将证明，对于某个索引 i，区间 K_i 满足 φ，从而与 I_{i+1}的前缀极小性相矛盾。为此，只需找到一个标记为–的索引 i。事实上，如果情况如此，我们断言

断言13.1. 在 I_i 的某个前缀（分别为后缀）上成立的每个公式 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_B\varphi$ （分别为 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_E\varphi$），也在 K_i的某个前缀（分别为后缀）上成立，反之亦然。

上述断言将意味着 φ-profile of K_i 与 I_i 的相同，从而 $K_i \models \varphi$.

断言的证明。假设索引 i 被标记为 –。考虑某个 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_B\varphi$。如果 α 在 I_i 的某个前缀处成立，那么 α 也会在 I_{i+1} 的某个前缀处成立，因为 I_i 和 I_{i+1} 具有相同的 φ-profile。令 J 为满足 α 的 I_{i+1} 的最小前缀。由于 i 被标记为 –，我们有 $\max(J) < \max(I_i) = \max(K_i)$，这意味着 J 也是 K_i 的前缀。反之，如果 α 在 K_i 的某个前缀处成立，那么它显然也会在 I_{i+1} 的某个前缀处成立，因此也会在 I_i 的某个前缀处成立，因为 I_i 和 I_{i+1} 具有相同的 φ-profile。接下来，考虑某个 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_E\varphi$。如果 α 在 I_i 的某个后缀处成立，那么令 J 为满足 α 的 I_i 的最小后缀。由于 i 被标记为 –，我们有 $\min(J) > \min(I_{i+1}) = \min(K_i)$，这意味着 J 也是 K_i 的后缀。反之，假设 α 在 K_i 的某个后缀处成立，并令 J 为满足 α 的 K_i 的最小后缀。再次由于 i 被标记为 –，我们有 $\min(J) > \min(I_i)$，这意味着 J 也是 I_i 的后缀。 □

还需证明至少有一个索引 i 被标记为 –。为此，我们对标记为形如（X， α）的数对、其中 $X = B$（分别为 $X = E$）以及 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_X\varphi$的索引数量进行界定。根据构造，对于每个标签（$X$， α）， α 的特殊X见证构成了关于 α的一个相交（反）链 $\mathrm{I}_{X,\alpha}$，其中的区间是前缀极小的（分别为后缀极小的）。此外，我们知道：

- $\mathrm{I}_{X,\alpha}$ 中的所有区间都不是单元素集合。这是因为，唯一会出现单元素集合特殊X见证的情形是 I′ 是一个反链， $n = 2$，且 $\max(I_1) = \min(I_2)$。然而，根据$n > 2^{2|\varphi|-|\boldsymbol{\partial}_B\varphi|-|\boldsymbol{\partial}_E\varphi|} \ge 2$，这一情形被排除了。

- I 中的区间$_{X,\alpha}$ 具有两两不同的右端点（分别为左端点）。这是因为这些端点分别属于区间的右侧 Δ_i （分别为左侧Δ_i），而这些区间在所有 i 中均两两不相交。

- 每个（反）链 $\mathrm{I}_{X,\alpha}$ 的基数至多为 $2^{2|\alpha|}$。这是由前述性质以及 α 是 φ 的真子公式得出的；我们假设 φ 是违反界限 (1) 的最小公式。

I鉴于最后一个性质，我们可以推得，没有标记为 – 的指标数量 is

$$\begin{aligned} n' &\leq \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_B\varphi} 2^{2|\alpha|} + \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_E\varphi} 2^{2|\alpha|} \\ &\leq 2^{\sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_B\varphi} 2|\alpha| + \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_E\varphi} 2|\alpha|}, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式可由对积求和的主导性得出。接下来，回想一下 $n > 2^{2|\varphi|-|\boldsymbol{\partial}_B\varphi|-|\boldsymbol{\partial}_E\varphi|}$，因此，标记为 – 的指标 $1 \leq i < n$ 的数量为

$$n - 1 - n' \geq 2^{2|\varphi|-|\boldsymbol{\partial}_B\varphi|-|\boldsymbol{\partial}_E\varphi|} - 2^{\sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_B\varphi} 2|\alpha| + \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_E\varphi} 2|\alpha|}.$$

我们通过证明 $2|\varphi| - |\boldsymbol{\partial}_B\varphi| - |\boldsymbol{\partial}_E\varphi| > \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_B\varphi} 2|\alpha| + \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_E\varphi} 2|\alpha|$，说明右侧的数总是正数。根据 φ 是否包含模态算子，我们分两种情况讨论。如果 φ 不包含模态算子，那么 $2|\varphi| - |\boldsymbol{\partial}_B\varphi| - |\boldsymbol{\partial}_E\varphi| = 2|\varphi| > 0 = \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_B\varphi} 2|\alpha| + \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_E\varphi} 2|\alpha|$。否则，如果 φ 至少包含一个模态算子，我们注意到：(i) φ 的大小至少等于子公式 $X\ \alpha$ 的大小之和，其中 $X \in \{B, E\}$ 且 $\alpha \in \boldsymbol{\partial}_X\varphi$，它们是 $|X\ \alpha| = |\alpha| + 1$；(ii) 对于 $X \in \{B, E\}$，$\sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_X\varphi}(|\alpha| + 1) = (\sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_X\varphi} |\alpha|) + |\boldsymbol{\partial}_X\varphi|$。由此可得：

$$\begin{aligned} & 2|\varphi| - |\boldsymbol{\partial}_B\varphi| - |\boldsymbol{\partial}_E\varphi| \\ \geq\ & \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_B\varphi} 2|\alpha| + \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_E\varphi} 2|\alpha| + |\boldsymbol{\partial}_B\varphi| + |\boldsymbol{\partial}_E\varphi| \\ >\ & \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_B\varphi} 2|\alpha| + \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\partial}_E\varphi} 2|\alpha|. \end{aligned}$$

我们已经证明了 j 已证明至少有一个索引 i 必须标记为–，从而完成了证明。 e
lemma. □

结合引理12和13，我们得到了任意非单元素集合前缀/后缀极小区间的相交族关于 φ 的所需界：

推论14。设 S 为一个区间结构，φ a BE$_\pi$ 公式，I 为 φ 的非单元素集合前缀极小（分别为后缀极小）区间的一个相交族。那么，I 中区间的不同右（分别为左）端点数量至多为 $2^{4|\varphi|}$。

我们将通过说明如何使用新的命题字母以及合适的公式 flat(φ) 和 enc(φ) 来刻画 φ 的前缀极小区间，结束这一部分（对于后缀极小区间也可以给出类似的推论）。

推论15。考虑一个 BE$_\pi$ 公式 φ，其签名为 Σ，并令 $\Sigma' = \Sigma \uplus \{p_1, \ldots, p_m, \ell, r, s\}$，其中 $p_1, \ldots, p_m, \ell, r, s$ 是新引入的命题字母，且 $m = 4|\varphi|$（这正是推论14的界中出现的指数）。定义 BE$_\pi$ 公式[2]

$$\begin{aligned} \mathrm{flat}(\varphi) &= \Big(\langle B\rangle(\pi \wedge \ell) \wedge \langle E\rangle(\pi \wedge r) \wedge \\ &\qquad \bigwedge_{i=1,\ldots,m} \big(\langle B\rangle(\pi \wedge p_i) \leftrightarrow \langle E\rangle(\pi \wedge p_i)\big)\Big) \\ &\vee (\pi \wedge s) \\ \mathrm{enc}(\varphi) &= \underbrace{\big(\mathrm{flat}(\varphi) \wedge \neg\langle B\rangle\,\mathrm{flat}(\varphi) \rightarrow \varphi\big)}_{\textit{prefix-minimial intervals for } \mathrm{flat}(\varphi) \textit{ satisfy } \varphi} \\ &\wedge \underbrace{\big(\varphi \wedge \neg\langle B\rangle\,\mathrm{flat}(\varphi) \rightarrow \mathrm{flat}(\varphi)\big)}_{\textit{prefix-minimal intervals for } \varphi \textit{ satisfy } \mathrm{flat}(\varphi)} \end{aligned}$$

我们有，enc(φ) 是一个从 Σ 到 Σ' 的扩展器，并且对于所有使 enc(φ) 有效的区间结构，$B\varphi$ 与 Bflat(φ) 等价。

[2]请注意，尽管记法如此，公式 flat(φ) 仅取决于签名和 φ 的大小，而 enc(φ)
完全取决于 依赖于 φ。

证明。我们首先说明新引入的命题字母 p_1、……、p_m、 ℓ、r、s 的预期用途。字母 p_1、……、p_m 将用 m 元比特组标注区间结构中的点，从而枚举一个指数规模的集合（例如 {1}、……、2^m）。更准确地说，对于 φ 的每个非单元素集合前缀极小区间，其左端点和右端点将分别通过具有标签 ℓ 和 r 来标识，并且二者具有相同的 m 元比特组——这种端点之间的对应关系由 flat(φ) 的第一个析取项检查。对于 φ 的单元素集合前缀极小区间，则改用特殊标签 s 来标识——这一点由 flat(φ) 的第二个析取项检查。另一个重要的约束是：任意两个相交的区间，只要它们是非单元素集合的、对 γ 而言前缀极小的，并且不是另一个区间的后缀，就必须用不同的 m 元比特组标记其端点。

推论14保证了存在满足上述所有约束的标注。公式 enc(φ) 恰好强制了这样的标注；事实证明，它是一个从 Σ 到 Σ' 的扩展器（也就是说，每个 Σ 上的区间结构都存在一个 Σ' 上的扩展，使 enc(φ) 有效）。此外，如果标注正确，即 enc(φ) 在某个扩展区间结构上有效，那么 φ 的每个前缀极小区间也是 flat(φ) 的前缀极小区间，反之亦然。请注意，仍可能存在满足 φ 但不满足 flat(φ) 的区间，或反之；不过，这些区间总会包含满足 φ 和 flat(φ) 的真前缀。总之，这证明了在使 enc(φ) 有效的扩展区间结构上，两个公式 $B\varphi$ 和 B flat(φ) 等价。

□

3.4 规范化过程

现在我们可以描述定理 4 背后的规范化过程了。设 ψ 是一个 BE$_\pi$ 公式。 ψ 的规范化过程包括反复应用一些保持可满足性的重写步骤，并逐步减少深度大于 2 的不同子公式的数量，直到最终得到浅层范式。

每个重写步骤都应用于形如 $\psi_i \wedge [G]\xi_i$ 的公式，该公式定义在签名 Σ_i 上（最初为 $\psi_0 = \psi$、 $\xi_i =$ true 和 $\Sigma_i = \Sigma$），并得到定义在扩展签名 Σ_{i+1} 上的等可满足公式 $\psi_{i+1} \wedge [G]\xi_{i+1}$。要执行重写步骤，我们必须选择 $\psi_i \wedge [G]\xi_i$ 的一个子公式 $X\varphi$，其中 $X \in \{B, E\}$，该子公式的深度为 $d > 2$，且不出现在任何其他模态算子的作用域下，但可能出现在以 ξ_i 为参数的算子 $[G]$ 的作用域下。然后，我们利用推论15，从 Σ_i 到 Σ_{i+1} 获得一个扩展器 enc(φ)，以及一个公式 X flat(φ)；对于使 enc(φ) 有效的每个区间结构，该公式都等价于 $X\varphi$。接着，我们将 $\psi_i \wedge [G]\xi_i$ 重写为公式

$$\underbrace{\psi_i\big[\langle X\rangle\varphi \,/\, \langle X\rangle \mathrm{flat}(\varphi)\big]}_{\psi_{i+1}} \wedge [G]\Big(\underbrace{\xi_i\big[\langle X\rangle\varphi \,/\, \langle X\rangle \mathrm{flat}(\varphi)\big] \wedge \mathrm{enc}(\varphi)}_{\xi_{i+1}}\Big) \tag{†}$$

由于 $[G]$ 关于 $\wedge$ 的分配律，公式 (†) 等价于 $(\psi_i \wedge [G]\xi_i)[X\,\varphi / X$ flat(φ)$] \wedge [G]$ enc(φ)。此外，根据引理 8，后一个公式与 $\psi_i \wedge [G]\xi_i$ 等可满足。这完成了对一个重写步骤的描述。

现在让我们分析规范化过程的复杂度。当无法再选择任何具有所需性质的子公式 $X\varphi$ 时，该过程终止：在这种情况下，重写后的公式 $\psi_i \wedge [G]\xi_i$ 结果是浅层范式，我们可以令 $\psi^\star = \psi_i \wedge [G]\xi_i$。为了界定重写步骤的数量，我们研究单个重写步骤如何影响深度大于 2 的不同子公式的数量。对于 $X\varphi$，我们注意到，该子公式不再出现在重写后的公式 $\psi_{i+1} \wedge [G]\xi_{i+1}$ 中（特别是，enc(φ)的预期用途是蕴含 $X\varphi \leftrightarrow X$ flat(φ)，但推论 15 的陈述中所采用的写法避免了让 φ 处于模态算子的作用域内，从而保证 enc(φ) 的深度至多为 2）。另一方面， $\psi_{i+1} \wedge [G]\xi_{i+1}$中可能会出现新的子公式：它们要么是深度至多为 2 的公式（例如，X flat(φ)），要么是 $\psi_i \wedge [G]\xi_i$ 中已经出现的公式的副本（例如， φ）。总而言之，一个重写步骤的作用是减少深度大于 2 的不同子公式的数量。这意味着重写步骤的数量至多与原始公式 ψ的大小呈线性关系。最后，每个重写步骤都是纯粹的句法操作，可以在所涉及的公式 $\psi_i \wedge [G]\xi_i$上高效执行，而该公式的大小至多随 i线性增长。这表明，整个规范化过程可以在相对于 $|\psi|$的多项式时间内完成，并完成了定理 4 的证明。

□

4 可满足性问题的复杂度

在此　本节将在前述规范化结果的基础上，证明一个紧致的复杂度界　　：

定理16. 限制在齐性区间结构上的 BE 逻辑的可满足性问题是ExpSpace-完全的。

关于齐次性下 BE 的 ExpSpace 下界已在 [3], 中证明，因此我们将重点放在上界上。根据命题 2 和定理 4，给定任意 BE 公式 ψ，可以在多项式时间内计算出一个 BE_π 公式 $\psi^\star$，使其在齐性区间结构上等可满足。当然，这也意味着 $\psi^\star$ 的大小至多是 $|\psi|$的多项式。下面我们论证，可以在相对于公式自身大小的指数空间内，测试浅层范式中公式的可满足性。结合前面的观察，这就证明了定理16。

4.1 逻辑类型的复合

我们需要将逻辑类型的概念形式化，该概念类似于引理13证明中使用的轮廓概念。它不仅确定哪些公式在给定区间上成立，而且还满足温和的复合性质，即在适当条件下，可以根据两个原始相邻区间的类型计算其和的类型。分别为深度 0、1 和 2 的公式定义类型将十分方便（由于我们假设处理的是浅层范式中的公式，因此无需考虑更高深度）。我们将首先介绍深度 0 类型和深度 1 类型的相对简单的定义和性质，然后重点讨论更复杂的深度 2 类型概念。

深度 0 和深度 1 类型。我们固定一个区间结构 $\mathfrak{S} = (\mathbb{I}(N)\ \sigma)$，并假设所有公式都在 $\mathfrak{S}$ 的签名 Σ 上。

定义 17. 区间 I的深度 0 类型$^0(I)$，记作 $\{\pi\} \cup \{p \in \Sigma : \mathcal{S}\ I \vDash \pi \wedge p\}$，根据 I是否为单元素集合，取上述集合或空集。

区间 $I = [x, y]$的深度 1 类型是四元组 $\mathrm{type}^1(I) = (S, T, B, E)$，其中 S是符号 1、2 或 3，分别取决于 I 包含一个点、两个点还是更多点； T =type$^0(I)$、B =type$^0([x, x])$ 和 E =type$^0([y, y])$。

容易看出，相邻区间的深度 0（分别为深度 1）类型可以复合，形成这两个区间之和的深度 0（分别为深度 1）类型。还可以验证，区间的深度 0（分别为深度 1）类型决定了哪些深度为 0（分别为至多 1 ）的公式在该区间上成立。下面的两个引理将这些简单结果形式化。

引理 18. 对于 $d = 0$ 和 $d = 1$，存在一个作用于深度 d 类型的复合算子 $\cdot$，可在多项式时间内计算，并且对于所有满足 $\max(I) + 1 = \min(J)$ 的相邻区间对 I, J，都有 $\mathrm{type}^d(I) \cdot \mathrm{type}^d(J) = \mathrm{type}^d(I \cup J)$。

证明. 深度 0 类型的复合是平凡的：对于每一对深度 0 类型 T, T'，我们只需令$T \cdot T' = \varnothing$。这是正确的，因为两个相邻区间之和总是一个非单点区间，其深度 0 类型为空集。

至于两个深度 1 类型的复合，设它们为 $\mathsf{T} = (S, T, B, E)$ 和 $\mathsf{T}' = (S', T' B', E')$，我们令 $\mathsf{T} \cdot \mathsf{T}' = (S'', T \cdot T' B, E')$，其中 S''取 2 或 3，具体取决于 $S = S' = 1$是否成立；而 $T \cdot T'$是深度 0 类型 T和 T'的复合，如上所定义。显然可以验证，如果 $\mathsf{T} = \mathrm{type}^1([x, y])$ 且 $\mathsf{T}' = \mathrm{type}^1([y + 1, z])$，那么 $\mathrm{type}^1([x, z]) = \mathsf{T} \cdot \mathsf{T}'$。□

引理 19. 对于 $d = 0$ 和 $d = 1$，对于每个深度至多为 d 的 BE_π 公式 φ，以及满足 $\mathrm{type}^d(I) = \mathrm{type}^d(J)$ 的所有区间 I、J，我们都有 $\mathfrak{S}\ I \vDash \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{S}\ J \vDash \varphi$。此外，给定 φ 和 $\mathrm{type}^d(I)$，可以在多项式时间内决定 $\mathfrak{S}\ I \vDash \varphi$ 是否成立。

证明. 我们首先证明 $d = 0$ 的情形。对于 $\varphi = \pi$ 的情形，$\mathfrak{S}\ I \vDash \varphi$ 当且仅当 I 是一个单元素集合，或者等价地， $\pi \in \mathrm{type}^0(I)$。 $\varphi = \pi \wedge p$ 的情形同样是平凡的，因为 $\mathfrak{S}\ I \vDash \varphi$ 当且仅当 $p \in \mathrm{type}^0(I)$。剩下的情形是 φ 为前述原子公式的布尔组合。在这种情况下，我们以原子公式的赋值为基础，在 I 处“同态地”确定 φ 的赋值。

现在我们来证明关于 $d = 1$ 的断言。当 φ 的深度为 0，或其形式为 $B\,\alpha$ 或 $E\,\alpha$ 且 α 的深度同样为 0 时，情况比较有趣。一旦这些情况下的断言得到证明，就可以

使用与之前相同的论证，将其推广到这些公式的布尔组合。令 $I = [x, y]$ 且 $\mathsf{type}^1(I) = (S, T, B, E)$，并回忆 $T = \mathsf{type}^0(I)$、$B = \mathsf{type}^0([x, x])$ 以及 $E = \mathsf{type}^0([y, y])$。

如果 φ 的深度为 0，那么我们知道，分量 T (=类型$^0(I)$) 已经可以确定 $\mathsf{S}\ I \models \varphi$ 是否成立。

如果 $\varphi = B\alpha$，我们还要根据 S区分三种子情况。如果 $S = 1$，那么 I是一个单元素集合，因此 $\mathsf{S}\ I \not\models B\ \alpha$。如果 $S = 2$，那么 I的唯一前缀是单点区间 $[x, x]$，因此 $\mathsf{S}\ I \models B\ \alpha$ 当且仅当 $\mathsf{S}\ [x, x] \models \alpha$。由于 α的深度为 0，因此可以利用类型 $B =$类型$^0([x, x])$ 判定后一条件。如果 $S = 3$，那么由于 α 是形如 π 或 $\pi \wedge p$的公式的布尔组合，其中 $p \in \Sigma$，只需考虑 I的两个前缀：单点区间 $J_0 = [x, x]$ 和区间 $J_1 = [x, x + 1]$。特别地，$\mathsf{S}\ I \models B\ \alpha$ 当且仅当 $\mathsf{S}\ J_0 \models \alpha$或 $\mathsf{S}\ J_1 \models \alpha$。同样，后两个条件由 J_0 和 J_1的深度 0 类型决定，分别为 B 和 $\varnothing$。这说明了如何利用类型 $\mathsf{type}^1(I) = (S, T, B, E)$ 确定 $\mathsf{S}\ I \models B\ \alpha$ 是否成立。

剩下的情形是公式 $\varphi = E\alpha$，可以通过对称论证处理，使用分量 E 而不是 B。

□

深度 2 类型。现在我们引入深度 2 公式的类型。这里的工具体系并不像人们所希望的那样简洁，因为期望的复合性质与可能的深度 2 类型数量之间存在权衡。例如，深度 2 公式的类型要具有完全的复合性，只有允许相对于底层签名大小呈双指数增长的类型数量才有可能——这一点可以利用基于通信复杂度的论证，以及深度 2 公式能够描述等级为 2 [15] 的 Stockmeyer 计数器这一事实，形式化地证明。为了在尽可能保持类型数量较少的同时简化复合性质，我们将用一个公式和一些上下文对深度 2 类型进行参数化。

我们首先讨论几个尝试性的定义及其缺陷。按照定义深度 1 类型时所采用的相同原则，可以将区间 I 的深度 2 类型定义为 $(\mathsf{T}\ \mathscr{B}, \mathscr{E})$，其中 $\mathsf{T} = \mathsf{type}^1(I)$，$\mathscr{B} = \{\mathsf{type}^1(J) : J <_B I\}$，并且 $\mathscr{E} = \{\mathsf{type}^1(J) : J <_E I\}$。这种深度 2 类型的概念具有完全的复合性，并且能够确定齐次范式中每个深度 2 公式的求值（证明略）。遗憾的是，相对于签名的大小，这类类型的数量可能呈双指数增长，因此不适用于我们将在可满足性过程中采用的预期用途。另一种选择是用一个公式 φ 对I 的深度 2 类型进行参数化，并将其定义为三元组 $(\mathsf{T}\ \mathscr{B}, \mathscr{E})$，其中 $\mathsf{T} = \mathsf{type}^1(I)$ 与之前相同，而 $\mathscr{B}$（分别为 $\mathscr{E}$）是 α 中在 φ 的真前缀（分别为后缀）上成立的子公式集合。显然，所得类型能够确定 φ 在区间 I 上的求值。第二种尝试相对于 φ 的大小也至多产生指数数量的深度 2 类型。另一方面，所得类型携带的信息不足以实现复合，原因在于：仅知道哪些深度 1 子公式在两个相邻区间上成立，并不足以推导出哪些深度 1 子公式在并区间上成立。适当的深度 2 类型概念，在某种程度上是我们刚才讨论的两种尝试的融合。

现在我们固定一些其他有用的记号和术语：

- 给定一个BE_π 公式 φ，我们用$\mathrm{Depth}^{\leq 1}(\varphi)$ 表示 φ 的深度至多为 1 的子公式集合。
- 引理 19 表明，一个区间 I 的深度 1 类型实际上决定了哪些深度至多为 1 的公式在 I处成立。这促使我们引入以下记号：给定一个深度 1 类型$\mathcal{T}$和一个公式 $\alpha \in \mathrm{Depth}^{\leq 1}(\varphi)$，我们写作$\mathcal{T} \vdash \alpha$，表示$\mathcal{S}\ I \models \alpha$ 对某个（或等价地，对每个）满足以下条件的区间 I 成立：$^1(I)$ =的类型为T（给定T和 α，可以高效地检验这一性质）。
- 根据引理 18，深度 1 类型带有一个复合运算 $\cdot$，该运算形成半群结构。通过引入虚拟深度1 类型 ε，并假设 $\varepsilon \cdot \mathcal{T} = \mathcal{T} \cdot \varepsilon = \mathcal{T}$对每个深度 1 类型$\mathcal{T}$均成立，我们将该结构补充为一个幺半群。

定义 20. 设 L、R 是一些（可能是虚设的）深度 1 类型。具有深度 2 φ 类型 的区间 I，其左 上下文为右上下文 L、R，是元组类型$^2_{\varphi,\ \mathcal{L},\ \mathcal{R}}(I) = (\mathsf{L}, \mathsf{R}, \mathsf{T}\ \mathscr{B}, \mathscr{E})$，其中

- T =类型$^1(I)$,
- $\mathscr{B} = \{\alpha \in$ 深度$^{\leq 1}(\varphi) : \exists J <_B I\ \mathsf{L}$ 类型$^1(J) \vdash \alpha\}$,
- $\mathscr{E} = \{\alpha \in$ 深度$^{\leq 1}(\varphi) : \exists J <_E I$ 类型$^1(J) \cdot \mathsf{R} \vdash \alpha\}$.

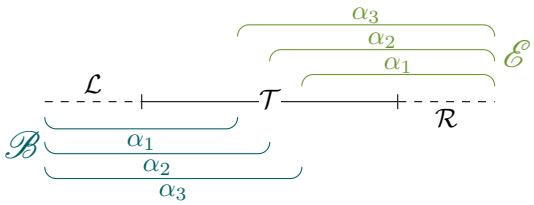


图 5：深度为2的类型的组成部分。

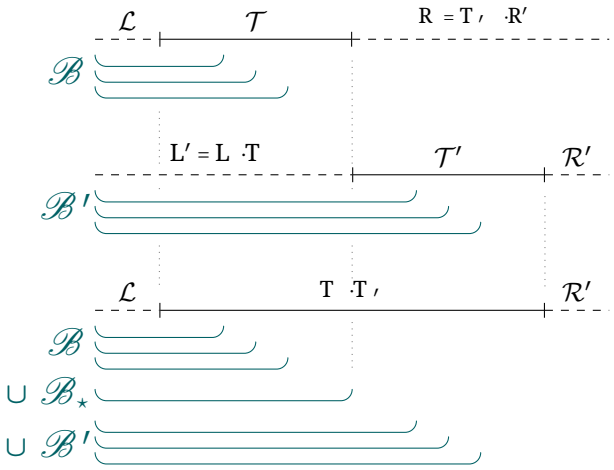


图 6：深度 2 类型的复合。

我们对深度-2 φ-类型的组成部分作一些直观说明（读者也可以参阅图 5）。组成部分 T 无非是参考区间 I 的深度 1 类型，因此确定了深度至多为 1 的哪些公式在 I 处成立。组成部分 L 和 R 分别表示与 I 相邻的某些区间的深度 1 类型，这些区间位于左侧和右侧，并将作为复合操作的上下文。集合 $\mathscr{B}$ 表示 φ 的哪些深度至多为 1 的子公式在某些区间 I' 上成立；这些区间与 I 向左重叠（即满足 $\min(I') \le \min(I) \le \max(I') < \max(I)$），并且 $K = I' \setminus I$ 的深度 1 类型与左上下文 L 一致。集合 $\mathscr{E}$ 为向右重叠 I 的区间 I' 提供类似信息，并且满足 $\text{type}^1(I' \setminus I) = \text{R}$。作为特殊情况，我们注意到，当 $\text{L} = \text{R} = \varepsilon$ 时，可以令 I' 遍历 I 的前缀或后缀，从而确定哪些子公式在参考区间 I 的前缀和后缀上成立。特别地，这可用于确定 φ 在 I 处的求值，并推广我们之前讨论过的类型定义的第二种尝试。

下面，我们将证明适用于深度-2 类型的引理 18 和引理 19 的类似结论。

引理 21. 存在一个作用于深度-2 φ-类型的复合算子 $\cdot$，它可在多项式时间内计算，并且对于所有上下文 L、L′、R、R′以及所有相邻区间 I、I'，若 $\text{L} \cdot \text{type}^1(I) = \text{L}'$且 $\text{type}^1(I') \cdot \text{R}' = \text{R}$，则

$$\text{type}^2_{\varphi,\mathcal{L},\mathcal{R}}(I) \cdot \text{type}^2_{\varphi,\mathcal{L}',\mathcal{R}'}(I') = \text{type}^2_{\varphi,\mathcal{L},\mathcal{R}'}(I \cup I') .$$

证明. 为简洁起见，令 $\mathscr{T} = \text{type}^2_{\varphi,\mathcal{L},\mathcal{R}}(I)$ 和 $\mathscr{T}\prime = \text{type}^2_{\varphi,\mathcal{L}',\mathcal{R}'}(I')$，其中 $\mathscr{T} = (\text{L}, \text{R}, \text{T} \quad \mathscr{B}, \mathscr{E})$, $\mathscr{T}\prime = (\text{L}', \text{R}', \text{T}\prime, \mathscr{B}', \mathscr{E}\prime)$，$\text{L} \cdot \text{T} = \text{L}'$，且 $\text{T}\prime \cdot \text{R}' = \text{R}$。我们将复合定义为

$$\mathscr{T} \cdot \mathscr{T}' = (\mathcal{L}, \mathcal{R}', \mathcal{T} \cdot \mathcal{T}', \mathscr{B} \cup \mathscr{B}' \cup \mathscr{B}_\star, \mathscr{E} \cup \mathscr{E}' \cup \mathscr{E}_\star)$$

其中

$$\mathcal{B}_\star = \{\alpha \in \text{Depth}^{\le 1}(\varphi) : \mathcal{L}' \vdash \alpha\}$$
$$\mathcal{E}_\star = \{\alpha \in \text{Depth}^{\le 1}(\varphi) : \mathcal{R} \vdash \alpha\}$$

（见图 6）。

注意，由引理 19 可知，给定类型 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}'$，复合 $\mathscr{T} \cdot \mathscr{T}\prime$ 可在多项式时间内计算。

下面我们证明，所定义的复合 $\mathscr{T} \cdot \mathscr{T}$ $\text{type}^2_{\varphi,\mathcal{L},\mathcal{R}'}(I \cup I')$ 是正确的，即它与类型 $(\mathscr{B}'', \mathscr{E}'')$ 一致。后一个类型的形式为 $(\text{L}, \text{R}, \text{T}\prime\prime, \mathscr{B}'', \mathscr{E}'')$，因此 $\mathscr{T} \cdot \mathscr{T}'$ 的前两个分量显然是正确的。剩下需要证明的是 $\text{T}\prime\prime = \text{T} \cdot \text{T}\prime$，$\mathscr{B}'' = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}' \cup \mathscr{B}_\star$，以及 $\mathscr{E}'' = \mathscr{E} \cup \mathscr{E}\prime \cup \mathscr{E}_\star$。根据引理 18，我们有 $\text{T}\prime\prime = \text{type}^1(I \cup I') = \text{type}^1(I) \cdot \text{type}^1(I') = \text{T} \cdot \text{T}\prime$。此外，根据定义 20，$\mathscr{B}''$ 包含满足以下条件之一的公式 $\alpha \in \text{Depth}^{\le 1}(\varphi)$:

1. 对于某个与 I 在左侧具有重叠关系的区间 I''（即 $\min(I'') \le \min(I) \le \max(I'') < \max(I)$），且满足 $\text{type}^1(I'' \setminus I) = \text{L}$ 的 $I'' \vDash \alpha$。

令 $K = I'' \setminus I$ 和 $J = I'' \cap I$，并利用引理 19，该条件等价于

$$\mathrm{type}^1(I'') = \mathrm{type}^1(K) \cdot \mathrm{type}^1(J) = \mathcal{L} \cdot \mathrm{type}^1(J) \vdash \alpha$$

因此也等价于 $\alpha \in \mathscr{B}$。

2. $I'' \vDash \alpha$，对于某个区间 I''，它以 I 为后缀（即 $\min(I'') \leq \min(I) \leq \max(I'') = \max(I)$），且 $\mathrm{type}^1(I'' \setminus I) = \mathrm{L}$。

令 $K = I'' \setminus I$，并利用引理 19 以及关于上下文 L 和 L′ 的假设，可以发现该条件等价于

$$\mathrm{type}^1(I'') = \mathrm{type}^1(K) \cdot \mathcal{T} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{T} = \mathcal{L}' \vdash \alpha$$

因此也等价于 $\alpha \in \mathscr{B}_\star$。

3. $I'' \vDash \alpha$，对于某个包含 I 的区间 I''，它与 I' 在左侧存在重叠关系（即 $\min(I'') \leq \min(I) \leq \max(I) < \max(I'') < \max(I')$），且 $\mathrm{type}^1(I'' \setminus I') = \mathrm{L}$。

令 $K = I'' \setminus I'$ 和 $J = I'' \cap I'$，并再次利用引理 19 以及关于上下文 L 和 L′ 的假设，可以发现该条件等价于

$$\begin{aligned}\mathrm{type}^1(I'') &= \mathrm{type}^1(K) \cdot \mathcal{T} \cdot \mathrm{type}^1(J) \\ &= \mathcal{L} \cdot \mathcal{T} \cdot \mathrm{type}^1(J) = \mathcal{L}' \cdot \mathrm{type}^1(J) \vdash \alpha\end{aligned}$$

因此得到 $\alpha \in \mathscr{B}'$。

我们已经证明 $\mathscr{B}'' = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}' \cup \mathscr{B}_\star$。利用对称论证可证明 $\mathscr{E}'' = \mathscr{E} \cup \mathscr{E}' \cup \mathscr{E}_\star$. □

引理 22. 对于所有区间 I 和 J，满足 $\mathrm{type}^2_{\varphi,\varepsilon,\varepsilon}(I) = \mathrm{type}^2_{\varphi,\varepsilon,\varepsilon}(J)$，以及任意深度至多为 2 的 BE$_\pi$ 公式 φ，都有 $\mathrm{S}\ I \vDash \varphi$ 当且仅当 $\mathrm{S}\ J \vDash \varphi$。此外，根据给定的类型 $\mathrm{type}^2_{\varphi,\varepsilon,\varepsilon}(I)$，可以在多项式时间内判定 $\mathrm{S}\ I \vDash \varphi$ 是否成立。

证明。设 φ 是一个深度至多为 2 的公式，并设 I 是一个区间，其深度 2 类型为 $(\varepsilon, \varepsilon, \mathrm{T}\ \mathscr{B}, \mathscr{E})$，其中左右上下文均为 ε。

如果 φ 的深度小于 2，那么根据引理 19，分量 $\mathrm{T} = \mathrm{type}^1(I)$ 已经可以决定（在多项式时间内有效地）$\mathrm{S}\ I \vDash \varphi$ 是否成立。

否则，如果 φ 的深度为 2 且形式为 $B\ \alpha$，那么当且仅当存在 I 的一个真前缀 J 使得 $\mathrm{S}\ J \vDash \alpha$ 时，$\mathrm{S}\ I \vDash B\ \alpha$ 成立。由于 $\alpha \in \mathrm{Depth}^{\leq 1}(\varphi)$，后一个条件等价于 $\varepsilon \cdot \mathrm{type}^1(J) \vdash \alpha$，因此，当且仅当 $\alpha \in \mathscr{B}$ 时，$\mathrm{S}\ I \vDash B\ \alpha$ 成立。对于 $\varphi = E\ \alpha$ 的情形也类似，但使用组件 $\mathscr{E}$。

最后，对前述公式的布尔组合进行同态求值。 □

4.2 可满足性判定过程

作为热身，我们先描述深度至多为 2 的公式的可满足性判定过程；随后将其推广到浅层范式中的公式。

我们固定一个 BE$_\pi$ 公式 ψ，其深度至多为 2。通过将 ψ 归约为由适当的有限状态自动机识别的语言的非空性，可以在多项式空间内判定其可满足性。为了形式化地从给定公式 ψ 构造自动机，方便起见，我们将签名 Σ 上的区间结构 $\mathcal{S} = (\mathbb{I}(N)\ \sigma)$ 编码为字母表 $\wp(\Sigma)$ 上的有限词 $w_{\mathcal{S}} = a_0 \dots a_{\max(N)}(i)$，其中对所有 $i \in N$（回忆一下，N 是自然数的一个有限前缀）。

引理23。给定一个深度至多为2的 BE$_\pi$ 公式 ψ，可以在多项式空间[3] 内计算出一个有限状态自动机 A_ψ，它接受当且仅当其为满足 $\mathrm{S}\ I \vDash \psi$ 的区间结构 S 的编码 $w_{\mathcal{S}}$，其中 I 是 S 的最大区间。

证明概要。A_ψ 的构造相当标准，它是三个自动机的级联积：

1. 一个确定自动机，其状态计算与输入前缀对应的区间的深度 1 类型，

[3]所谓在多项式空间内计算自动机，是指可以在多项式空间内枚举其初始状态、终止状态和转移。枚举过程可用于其他复杂度相近的算法中，例如测试所识别语言的空性。

2. 一个余确定自动机，其状态计算与输入后缀对应的区间的深度 1 类型；3. 一个确定自动机，用于计算输入前缀的深度-2 ψ-类型，其中左上下文为常量虚拟上下文，右上下文由前一个自动机的状态给出。

这些自动机的转移是通过深度 1 类型和深度 2 类型的复合性质定义的（引理 18 和 21）。

下面，我们将详细介绍 $\mathcal{A}\psi$ 的构造。与深度 1 类型的处理方式类似，我们引入 虚设深度-2 类型 来抽象一个空区间：它们是形如 (L, R $\varepsilon, \varnothing, \varnothing$) 的元组，其中 L 和 R 分别是左上下文和右上下文，而 ε 是虚设深度 1 类型（当然，对于每一组左右上下文，恰好有一个虚设深度 2 类型）。与通常一样，只要上下文兼容，虚设类型与深度 2 类型复合时的作用就如同单位元。我们还将使用关系 $\vdash$ 的推广形式，使其适用于深度 2 类型。具体而言，给定一个深度 2 类型 $\mathscr{T}$，当且仅当存在（或等价地，对每个）区间 I，使得 $\text{type}^2_{\varphi,\ \varepsilon,\ \varepsilon}(I) = \mathscr{T}$，且 S $I \vDash \psi$ 时，我们记作 $\mathscr{T} \vdash \psi$。

- 字母表 A 由签名 Σ的子集构成；
- 状态空间 Q 由三元组 q = (L, R $\mathscr{T}$) 构成，其中 L、R 是深度 1 类型，且 $\mathscr{T}$是一个深度-2 ψ-类型，其左上下文为 ε，右上下文为 R；
- 初始状态 I 集合由三元组 q = (L,R $\mathscr{T}$) 构成，其中 L $= \varepsilon$ 是虚设深度 1 类型，且 $\mathscr{T}$ = (L,R $\varepsilon, \varnothing, \varnothing$) 是一个虚设深度 2 类型；
- 终态 F集合由三元组 q = (L, R $\mathscr{T}$) 构成，其中 R $= \varepsilon$ 和 $\mathscr{T} \vdash \psi$；
- 转移规则 T集合由三元组 $(q, a, q\prime)$ 构成，其中 q = (L, R $\mathscr{T}$)、 $a \subseteq \Sigma$ 和 $q\prime$=(L$\prime$, R$\prime$ $\mathscr{T}\prime$) 满足：L$\prime$ = L $\cdot$ 类型^1(I_a)，R = 类型^1(I_a) $\cdot$ R，且 T$\prime$ $= \mathscr{T} \cdot$ 类型$^2_{\psi,\mathcal{L},\mathcal{R}}$($I_a$)，其中 I_a表示由命题字母集合 a 标记的单点区间。

值得注意的是，自动机 Aψ 是无歧义的，也就是说，对每个输入，它至多有一次成功运行。

现在我们声称，对于每个输入 $w_{\mathcal{S}} = a_0 \dots a_{n-1}$，自动机 A$\psi$ 中所有从任意状态（不一定是初始状态或终止状态）出发并结束的可能运行，都具有如下形式

$$q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots\dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$$

其中 q_i = (L$_i$, R$_i$, $\mathscr{T}_i$) 满足：对于所有 $i = 0, \dots, n$,

1. $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_0 \cdot \text{type}^1([0, i-1])$,
2. $\mathcal{R}_i = \text{type}^1([i, n-1]) \cdot \mathcal{R}_n$,
3. $\mathscr{T}_i = \mathscr{T}_0 \cdot \text{type}^2_{\psi,\mathcal{E},\mathcal{R}_i}([0, i-1])$.

上述每个性质都可以通过简单归纳来验证，归纳顺序可以是从较小的 i 到较大的 i，也可以反过来（繁琐的细节从略）。

由第 1、2、3 项所述性质以及初始状态和终止状态的定义，立即可得：当且仅当 S $[0, n-1] \vDash \psi$ 时，Aψ 在 $w_{\mathcal{S}}$ 上有一次成功运行。

最后，关于构造 Aψ 的复杂度，我们回顾一下引理 18 和 21：深度 1 类型和深度-2 类型可以在多项式空间内枚举，也可以在多项式时间内组合。这意味着，自动机 Aψ 的初始状态和转移可以在多项式空间内枚举。要枚举终止状态，只需针对给定的深度-2 类型 $\mathscr{T}$ 检验诸如 $\mathscr{T} \vdash \psi$ 这样的性质。根据引理 22，这可以在多项式时间内完成。 □

上述自动机 Aψ 可以在 ψ 多项式空间内构造，这意味着，关于 $|\psi|$，所识别的语言的（非）空性也可以在多项式空间内判定。进而，这表明，深度至多为 2 的 BE$_\pi$ 公式 ψ 的可满足性可以在多项式空间内判定。

为完成定理16的证明，还需将浅层范式 BE$_\pi$ 公式ψ 的可满足性问题归约为自动机 Aψ 的非空性问题，其中 Aψ 可在关于 ψ的指数空间内计算。为此，只需回顾一下， ψ必定具有 $\varphi \wedge [G]\xi$的形式，其中 φ和 ξ 都是深度至多为 2 的 BE$_\pi$ 公式。利用引理23，可以构造自动机 Aφ 和 A$\neg\xi$，它们的

语言分别包含 φ 和 $\neg\xi$的模型的编码。从 A$_{\neg\xi}$出发，可以高效地构造自动机 A$_{G\neg\xi}$，它识别那些包含被 A$_{\neg\xi}$接受的内部子区间的词所构成的语言，从而编码 $G\ \neg\xi\ (= \neg\,[G]\,\xi)$ 的模型。随后对后一个自动机取补，得到自动机 A$_{[G]\xi}$，它接受 $[G]\,\xi$的模型的编码。注意，借助经典子集构造的在线版本，可以在关于 ξ大小的指数空间内完成这一步。最后，计算自动机 A$_{\varphi}$ 和 A$_{[G]\xi}$的积，以识别$\psi = \varphi \wedge [G]\,\xi$的模型编码所构成的语言。因此，可以在关于原始公式 ψ大小的指数空间内判定后一个语言的非空性。

□

5 结论

我们已经解决了这样一个问题：在齐性区间结构上解释的 BE 逻辑是否具有初等可满足性问题。我们通过给出一个最优ExpSpace 判定过程回答了这个问题（ExpSpace-困难性已在 [3]中证明）。作为附带结果，我们还为 BE 公式设计了一种范式，在保持可满足性的同时，将嵌套模态算子的数量限制在较小范围内。令人惊讶的是，这种范式可以通过一系列类似于 Scott 量词消去技术的重写步骤，在多项式时间内从任意 BE 公式计算得出。

至于未来的工作，可以尝试探究类似技术是否适用于 BE 的扩展形式，其中的模态算子基于其他Allen区间关系（例如重叠关系、相接关系，以及前缀关系和后缀关系的逆关系等）。

参考文献

[1]J. F. Allen。关于时间区间知识的维护。《ACM通讯》，26(11):832–843，1983年。doi:10.1145/182.358434。[2] L. Bozzelli、A. Molinari、A. Montanari、A. Peron 和 P. Sala。区间与点时序逻辑模型检测：表达能力比较。ACM计算理论汇刊，20(1):4:1–4:31，2019年。doi:10.1145/3281028。[3] L. Bozzelli、A. Molinari、A. Montanari、A. Peron 和 P. Sala。区间时序逻辑 HS 的哪些片段在模型检测中具有可处理性？Theor. Comput. Sci.，764:125–144，2019年。doi:10.1016/j.tcs.2018.04.011。[4] L. Bozzelli、A. Molinari、A. Montanari、A. Peron 和 P. Sala。在齐次性假设下，子区间逻辑的可满足性与模型检测。Log. Methods Comput. Sci.，18(1)，2022年。[5] L. Bozzelli、A. Montanari、A. Peron 和 P. Sala。在前缀与内部子区间时序逻辑中加入相接关系会使其达到 EXPSPACE完全。载于第12届国际博弈、自动机、逻辑与形式化验证研讨会论文集，EPTCS 第346卷，第179–194页，2021年。doi:10.4204/EPTCS.346.12。[6] L. Bozzelli、A. Montanari、A. Peron 和 P. Sala。子区间与后缀时序逻辑的 PSPACE完全性。载于第28届国际时间表示与推理研讨会，LIPIcs 第206卷，第9:1–9:19页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2021年。doi:10.4230/LIPIcs.TIME.2021.9。[7] D. Bresolin、D. Della Monica、V. Goranko、A. Montanari 和 G. Sciavicco。区间时序逻辑的阴暗面：标定不可判定性边界。《数学与人工智能年刊》，71(1-3):41–83，2014年。doi:10.1007/s10472-013-9376-4。[8] R. P. Dilworth。偏序集的分解定理。《数学年刊》，51(1):161–166，1950年。[9] J. Y. Halpern 和 Y. Shoham。时间区间的命题模态逻辑。《ACM学报》，38(4):935–962，1991年。doi:10.1145/115234.115351。

[10] K. Lodaya。强化区间时序逻辑的不可判定性。载于 ASIAN，LNCS 1961，第290–298页。Springer，2000年。[11] J. Marcinkowski 和 J. Michaliszyn。子区间逻辑的不可判定性。Fundamenta Informaticae，131(2):217–240，2014年。doi:10.3233/FI-2014-1011。[12] A. Molinari、A. Montanari、A. Murano、G. Perelli 和 A. Peron。计算的区间性质检测。Acta Informatica，53(6-8):587–619，2016年。doi:10.1007/s00236-015-0250-1。[13] S. Schmitz。超越初等复杂度层级的复杂度层级。ACM计算理论汇刊，8(1):3:1–3:36，2016年。doi:10.1145/2858784。[14] D. Scott。两个变量中句子有效性的判定方法。《符号逻辑杂志》，27:377，1962年。[15] L. J. Stockmeyer。自动机理论与逻辑中判定问题的复杂度。博士论文，麻省理工学院，电气工程系，1974年。[16] Y. Venema。区间切分的模态逻辑。逻辑与计算杂志，1(4):453–476，1991年。doi:10.1093/logcom/1.4.453。