arXiv:2304.11493v1 [math.AC] 22 Apr 2023

局部上同调模有限性性质上的广义 Hartshorne 问题

ANDR´E DOSEA、RAFAEL HOLANDA 和 CLETO B. MIRANDA-NETO

摘要。本文的主要目标是回答 Hartshorne 关于局部上同调模余有限性的著名问题的自然广义版本中的一些新正例，并由此回答 Huneke 关于这些模的关联素理想集合有限性的猜想。我们的方法扩展了文献中的若干结果，主要基于谱序列技巧，以及与上同调维数和 Gorenstein 投射维数等数值不变量的联系。我们还在多项式环上给出了一个相当病态的非弱 Laskerian 模例子（即它存在一个具有无限多个关联素理想的商模），其第一局部上同调模非零且只有有限多个关联素理想。

1. 引言

1968年，Grothendieck [16] 猜想：如果 R 是一个（交换、有单位元的诺特）环，I 是 R 的一个理想，且 N 是一个有限（即有限生成的）R-模，那么对于所有 i，同态模 $\mathrm{Hom}_R(R/I, H^i_I(N))$ 都是有限的。这里，$H^i_I(N)$ 表示 N 关于 I 的第 i 个局部上同调模。该猜想是错误的，约两年后，Hartshorne [18], 给出了第一个反例；其中，他特别定义：如果对于所有 i，$\mathrm{Supp}_R H \subset V(I)$，且 R-模 $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, H)$ 是有限的，则称 R-模 H 是 I-余有限的。随后，他提出了下面的问题，该问题扩展了 Grothendieck 的猜想。

*Hartshorne*问题：如果 N 是有限的，那么对于所有 $i \geq 0$，$H^i_I(N)$ I-余有限的条件是什么?

众所周知，且不难看出，I-余有限模只有有限多个关联素理想。这一事实直接关联起 Hartshorne问题与 Huneke 在 1990 年圣丹斯会议上提出的关于 $\mathrm{Ass}_R H^i_I(N)$ 有限性的优美猜想。

日期：2023年4月25日。2020 数学主题分类。主要分类 13D45、13D02、13D07、13D05、18G40；次要分类 13C13、13C60、14B15。关键词和短语。局部上同调、弱余有限性、关联素理想、Hartshorne 问题、Huneke猜想。

*Huneke*的猜想：若R 是局部环，且N 是有限模，则对所有$i \geq 0$，模$H^i_I(N)$ 都有有限多个关联素理想。

这一猜想存在反例（见 Katzman [25], 以及 Singh 和 Swanson [39]）。另一方面，例如，Brodmann 和 Lashgari [7]证明了：如果 N 是一个有限的 R-模，且对于所有满足 $i < t$ 的 $H^i_I(N)$ 均为有限模，那么 $\operatorname{Ass}_R H^t_I(N)$ 也是有限的。还值得回顾的是，如果不要求 R 为局部环，这些关联素理想的集合可能是无限的（见 Singh [37, 38]）；而当 R 是一个光滑的 $\mathbb{Z}$-代数时，它们总是有限的（见 Bhatt、Blickle、Lyubeznik、Singh 和 Zhang [5]）。

此类问题吸引了众多研究者的关注，并且在若干情形下得到了肯定的回答，通常是在较小维数的情况下；参见 Bahmanpour 和 Naghipour [3], 、Huneke 和 Koh [22]、Marley [31],以及 Melkersson [33]。关于局部上同调中的有限性问题，优秀的综述可参见 Hochster [20] 和 Lyubeznik [27]，以及他们参考文献中的许多相关论述，例如 Huneke 和 Lyubeznik [23]、Huneke 和Sharp [24], 以及 Lyubeznik [26]。

现在回顾一下，Divaani-Aazar 和 Mafi [14] 利用弱 Laskerian 性质（例如，所有有限模都满足这一性质），引入了所谓的I-弱余有限模这一类。它严格扩展了I-余有限模这一类，并继承了关联素理想有限的性质。随后，人们也针对I-弱余有限模考察了Hartshorne问题。此外，Herzog[19] 将经典的局部上同调模$H^i_I(N)$ 推广为适当的模$H^i_I(M,N)$，其中M 是一个R-模；令$M = R$ 即可恢复$H^i_I(N)$。关于广义局部上同调为何值得关注的有力理由及若干结果（包括 Cohen-Macaulay 模的刻画、一般缺陷理论和典范模理论的发展，以及关于射影维数预设上界的判据），请参阅近期论文 [15]。此外，正如本文引言后文将要说明的，我们的一些结果甚至在普通局部上同调理论中也导出了新的结论。因此，下面有一个有趣的问题。

广义*Hartshorne*问题：如果M 是有限的，且N 是弱 Laskerian，那么对于所有$i \geq 0$, 何时$H^i_I(M,N)$ I-弱余有限？需要注意的是，关于更强的I-余有限性也可以提出这一问题，但此时M 和N 均为有限的。

同样，Huneke猜想也可以推广为以下问题。

广义*Huneke*问题：如果M 是有限的，且N 是弱 Laskerian，那么对于所有$i \geq 2$，集合 $\operatorname{Ass}_R H^i_I(M,N)$ 何时是有限的?

值得注意的是，集合 $\operatorname{Ass}_R H^1_I(M, N)$ 已知是有限的；这可由 Mafi [28, 定理 3.3] 得出。至于模 $H^0_I(M, N)$，很容易看出它.....

I-弱余有限（稍后本文的某个证明中将对此进行验证），因此 $\operatorname{Ass}_R H^0_I(M,N)$ 也必定是有限的。自然地，Huneke 提出的一个较弱的相关问题，关注的是对于满足$H^i_I(M,N) \neq 0$的某个 $i \geq 2$，$\operatorname{Ass}_R H^i_I(M,N)$ 的有限性。

本工作旨在解决上述广义问题及与之密切相关的问题，这也是该理论取得的其他成果之一。我们的主要结果是定理 2.10、3.6、3.12、3.16、3.24 和 3.33。特别地，这些结果加强或推广了其他一些作者的结果，其中大多数还导出了即使在通常的局部上同调理论中也是新的推论，例如推论 3.19、3.26 和 3.35；另见命题 3.29 和定理 3.31——后者的证明受到 Cuong、Goto 和 Hoang [10, 推论 5.3], 的启发，进而引导我们得到一个应用（见推论 3.36），涉及维数至多为 2 的 I-弱模有限模范畴；在局部情形下，该应用推广了 Bahmanpour、Naghipour 和 Sedghi [4, 定理 3.5]所处理的维数至多为 1 的情形。在论文的最后部分（见第 4 节）中，我们给出了几个关于局部上同调模的关联素理想集合的引人入胜的例子，其中一个说明：多项式环上的非弱 Laskerian 模 N 可能具有仅含有限个关联素理想的 $H^1_I(N) \neq 0$。

我们的主要技术建立在广泛使用某些谱序列（见引理 2.5）的基础上，并探究其与适当数值不变量之间的联系，例如给定模对 M、N的广义上同调维数（见定义 3.11）和相对 Gorenstein 射影维数（见定义 3.22）；在我们的大多数结果中，假设 M 是有限的，且N 是弱 Laskerian 的。

在全文中，所有环均假设为带乘法单位元 1 的交换 Noether 环，并且如上文所述，我们所说的有限 模是指有限生成模。

2. 第一个广义局部上同调模

我们首先研究与某些H^1_I（M、N）-模R的第一个广义局部上同调模相关的有限性性质M 和N；见下文定义 2.3。全文中，I 是环R的真理想，并且照常令$V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} R \mid I \subset P\}$。首先，让我们引入几个在本文中发挥核心作用的概念。

定义 2.1. ([14]) 设W 是一个R-模。

(i) W 称为弱 *Laskerian*，如果对于每个R-子模U，集合 $\operatorname{Ass}_R W/U$ 都是有限的；

(ii) 如果 $\mathrm{Supp}_R W \subset V(I)$，且对于所有$i \geq 0$，$\mathrm{Ext}^i_R(R/I, W)$ 都是弱 Laskerian，则称W 为I-弱余有限 。

下面我们汇集这些概念的一些相关事实（证明见 [14]）。例如，(iv) 将在若干证明中用到，而不作明确说明。

注 2.2。 (i) 任意诺特模都是弱 Laskerian。若 $\mathrm{Supp}_R W$ 有限，则W 是弱 Laskerian；特别地，任意 Artin R-模都是弱 Laskerian。若M有限且N 是弱 Laskerian，则对于所有$i \geq 0$，R-模 $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ 和 $\mathrm{Tor}^R_i(M,N)$都是弱 Laskerian。

(ii) 假设 $\mathrm{Supp}_R W \subset V(I)$。若$W$ 是弱 Laskerian，则W 是I-弱余有限；特别地，若 W 有限或 Artin，则W 是I-弱余有限。

(iii) 若 W 是I-弱余有限的，则 $\mathrm{Ass}_R W$ 是有限的。

(iv) 若正合列中的R-模任意两个$0 \to U \to W \to C \to 0$ (分别是$U \to W \twoheadrightarrow C$)为I-弱余有限的（分别为弱 Laskerian），则剩下的模也具有相同性质。

定义 2.3。 ([19], [6]) 给定$i \geq 0$，关于R 的理想I，R-模M、N 的第i个广义局部上同调模 定义为

$$H^i_I(M,N) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_R(M/I^n M, N).$$

对于每个i，正向系统由满射$M/I^{n+1}M \to M/I^n M$诱导。还要注意，令$M = R$, 此定义便得到N的通常局部上同调模$H^i_I(N)$。

现在假设N 是一个有限R-模。除$H^0_I(N)$外，只有第一个局部上同调模$H^1_I(N)$ 能够在无需额外假设的情况下保证其关联素理想集合有限。这一事实众所周知， [31, 命题 1.1(c)]中给出了一个简单证明。将N 替换为弱 Laskerian$R$-模（因此不一定有限）时，如 [14,推论 2.7]所示，该结论仍然成立。

正如预期，我们可以对 $\mathrm{H}^0_I(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 和 $\mathrm{H}^1_I(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 考虑同样的问题。如果 M 再次为有限模且 N 为弱 Laskerian，那么模 $\mathrm{H}^0_I(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 是 I-弱余有限的，因此它具有有限个关联素理想。集合 $\mathrm{Ass}_R \mathrm{H}^1_I(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 的有限性同样仍然成立，这一点可由下文的命题 2.4 中强调的 [28, 定理 3.3], 推导得到。在本节中，我们的主要目标是在某些情形下证明 $\mathrm{Ass}_R \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{R/I}, \mathrm{H}^1_I(\mathrm{M}, \mathrm{N}))$ 的有限性，其自然动机是

该问题中的等式

$$\operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(R/I, H^1_I(M,N)) = \operatorname{Ass}_R H^1_I(M,N),$$

这可由 [9, 练习 1.2.27] 以及以下事实轻易得到：$\operatorname{Ass}_R H^1_I(M,N) \subset V(I)$。我们记录下面这一事实，通过在 [28, 定理 3.3]中取$t = 1$ 可以看出这一点。

命题 2.4。 设 M 是有限的，N 是弱 *Laskerian* 的。那么，关联素理想$_R H^1_I(M, N)$ 是有限的。

在转入本节的主要目标之前，我们回顾一下 [15, 命题 2.1] 中的一些谱序列工具，这些工具将在我们的大多数证明中使用。

引理 2.5。 对于 R-模 M 和 N，当 M 有限时，我们有以下谱序列：

(i) $E_2^{p,q} = H^p_I(\operatorname{Ext}^q_R(M,N)) \Rightarrow_p H^{p+q}_I(M,N)$;
(ii) $E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^p_R(M, H^q_I(N)) \Rightarrow_p H^{p+q}_I(M,N)$.

下一个命题推广了 [29, 引理 2.7]。

命题 2.6。 设 M,N 为 R-模，其中 M 是有限模，N 是弱 *Laskerian* 模。以下断言等价：

(i) $H^1_I(M,N)$ 是 I-弱余有限；(ii) H^1_I
$(\operatorname{Hom}_R(M,N))$ 是 I-弱余有限；(iii)
$\operatorname{Hom}_R(M, H^1_I(N))$ 是 I-弱余有限。

证明。 引理 2.5 中的任一谱序列E 均位于第一象限，并具有一个角

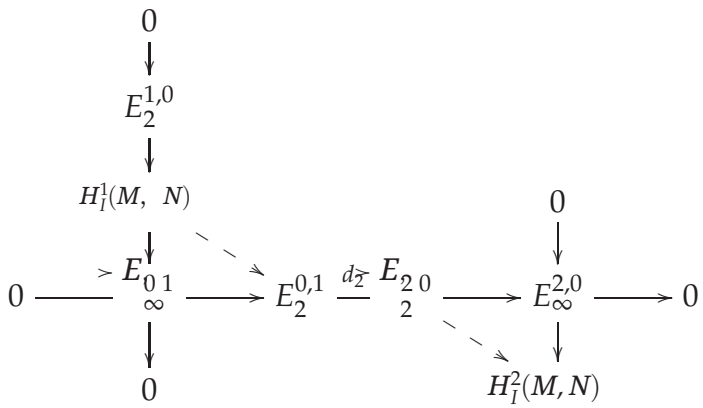
$$\begin{array}{ccccc} E_2^{0,1} & & E_2^{1,1} & & E_2^{2,1} \quad \cdots \\ & \searrow^{d_2} & & & \\ E_2^{0,0} & & E_2^{1,0} & & E^{2,0} \quad \cdots \end{array}$$

注意，存在正合列

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1_I(M,N) \to E_\infty^{0,1} \to 0\ ,$$

$$0 \to E_\infty^{0,1} \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to E_\infty^{2,0} \to 0\ .$$

由于 $E_\infty^{2\,0} \subset ,H_I^2(M,N)$，我们可以将上述正合列合并为一个五项正合序列



现在，对于等价关系 (i)⇔(ii)，我们结合引理 2.5(i) 的谱序列来考察这个序列。因此，我们得到一个短正合列

$$0 \to H_I^1(\mathrm{Hom}_R(M,N)) \to H_I^1(M,N) \to C \to 0\ ,$$

其中 $C \subset H_I^0(\mathrm{Ext}_R^1(M,N))$。因此，$C$ 是 I-弱余有限的，这使我们能够推导出 $H_I^1(M,N)$ 的 I-弱余有限性与 $H_I^1(\mathrm{Hom}_R(M,N))$的 I-弱余有限性之间的等价性。

接下来，对于等价关系 (i)⇔(iii)，考虑引理 2.5(ii)中给出的谱序列及其五项正合序列。由正合序列

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^1(M,H_I^0(N)) \to H_I^1(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,H_I^1(N)) \to C' \to 0,$$

并且由于 $C' \subset \mathrm{Ext}_R^2(M,H_I^0(N))$ 是 I-弱余有限的，我们得出：$H_I^1(M,N)$ 是I-弱余有限的，当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(M,H_I^1(N))$ 具有相同的性质。□

定义 2.7。 R-模 M 的I-深度 定义为

$$\mathrm{depth}_I M = \inf\{i \geq 0 \mid H_I^i(M) \neq 0\}.$$

显然，如果 M 是有限的且 $M \neq IM$，那么该定义与经典定义一致，即包含于 I 中的某个（任意）极大M-序列的长度。此外，如果R是局部环且I 是其极大理想，则记作 $\mathrm{depth}_R M$。

注 2.8. 由引理 2.5(ii) 的谱序列所对应的五项正合序列（见命题 2.6 的证明），并结合以条件 $\mathrm{depth}_I N > 0$替代N的弱拉斯克性质，实际上可得到一个同构

$$H_I^1(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(M,H_I^1(N)).$$

这推广了 [33, 引理 7.9]。

命题 2.9。 设 M、N 为 R-模，其中 M 是有限的，且 深度$_I N > 0$。假设对于所有 i 都有$\mathrm{Tor}_i^R(R/I, M) = 0 > 0$ (见下文备注 2.13)。则

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/I, H^1_I(M,N)) \subset \mathrm{Ext}^1_R(M/IM, H^1_I(N)).$$

证明。取 $P_\bullet$ 作为R/I 的投射分解，取$E^\bullet$ 作为$H^1_I(N)$的内射分解，并考虑张量-Hom 伴随关系，我们得到双复形的一个同构

$$\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, \mathrm{Hom}_R(M, E^\bullet)) \cong \mathrm{Hom}_R(P_\bullet \otimes_R M, E^\bullet)$$

由此我们导出一个谱序列

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/I, \mathrm{Ext}^j_R(M, H^1_I(N))) \Rightarrow_i \mathrm{Ext}^{i+j}_R(M/IM, H^1_I(N)).$$

Th通过分析此类谱序列的角部，结果随即得到 e. □

最后，我们得到本节的主要结果，以及它在通常局部上同调情形下的直接推论（这可能是专家们所熟知的）。

定理 2.10。 设 M 是有限的，N 是弱 *Laskerian* 的。若对于所有 i，$\mathrm{Tor}_i^R(R/I,M) = 0$ 和深度$_I N > 0$，则$\mathrm{Ext}^1_R(R/I, H^1_I(M,N))$ 是弱 *Laskerian* 的。特别地，关联素理想$_R$ $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, H^1_I(M,N))$ 是有限的。

证明。 首先，在引理 2.1 和引理 2.2], 中取 $s = 1$ 和 $\mathcal{S}$ 为所有弱 Laskerian R-模所构成的范畴，我们得到

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/I, H^1_I(N)) \quad \text{for} \quad i = 0,\ 1。$$

因此，根据 [34, 引理 2.2], ，对于 $i = 0$，1，R-模 $\mathrm{Ext}^i_R(M/IM, H^1_I(N))$ 是弱 Laskerian 的。现在，由命题 2.9可得结论。 □

推论 2.11。 若 N 是弱 *Laskerian* 的，且 $\mathrm{depth}_I N > 0$，则 $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, H^1_I(N))$ 是弱 *Laskerian* 的。特别地，关联素理想$_R$ $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, H^1_I(N))$ 是有限的。

提出以下问题似乎是很自然的。

问题 2.12. 在定理 2.10 的假设下，$H^1_I(M,N)$ 是否是 I-弱余有限?

注 2.13。 为完整起见，我们回顾两个已知情形：对于所有 $i > 0$，$\mathrm{Tor}_i^R(R/I,M)$ 均为零，且 M 为有限模；此外还要排除 M 为平坦模这一显然情形（例如，$M = R$ ）。第一种情形是 I 由一个 M-序列生成（这是显然且众所周知的）；第二种情形是 R 为局部环，M 为极大 Cohen–Macaulay 模（即，$\mathrm{depth}_R M = \dim R$），且 I具有有限投射维数；参见 [40, 引理 2.2]。

3. 局部上同调模的弱余有限性

普通局部上同调模和广义局部上同调模的 I-余有限性与 I-弱余有限性，在小维数环的情形下已经得到了广泛研究。本节主要旨在研究当附加于给定数据的其他数值不变量，即该对M,N的广义上同调维数和相对 Gorenstein 射影维数，取较小值时，I-弱余有限性对于 $H^i_I(M,N)$ 的性质。我们的目标之一是为广义局部上同调模提供 [14, 定理 3.1] 的一个版本（因而也为 [33, 命题 3.11] 提供一个版本）。

首先，在将本部分划分为各个小节之前，我们先给出一个预备结果。

命题 3.1. 设 M，N 为 R-模，且 M 有限。假设 $\mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Supp}_R N \subset V(I)$。如果 N 是弱 *Laskerian* 的 （分别地，有限的），则对于所有 $i \geq 0$，$H^i_I(M, N)$ 是 I-弱余有限的（分别地，有限的）。因此，对于所有 $i \geq 0$，关联素理想$_R H^i_I(M, N)$ 是有限的。

证明。 应用 [15, 推论 1.8], ，我们得到同构

$$H^i_I(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_R(M,N) \quad \text{for all} \quad i \geq 0.$$

注意到 N 也有限的情形现在是显然的。最后，如果 N 是弱 Laskerian 的，那么根据注 2.2(i)，模 Ext^i_R(M, N) 也是弱 Laskerian 的，因此每个 H^i_I(M, N) 也是如此。由于 Supp_R H^i_I(M, N) $\subset$ V(I)，根据注 2.2(ii)，我们得到对于所有 i ≥ 0，H^i_I(M, N) 是 I-弱余有限的，所需结论得证。特别地，H^i_I(M, N) 具有有限多个关联素理想（见注 2.2(iii)）。□

3.1. **上同调单射对**。 我们首先建立一个弱余有限性判据（下述定理 3.6），它推广了 [14, 定理 3.1] ，并且当模 $H^i_I(M, N)$ 对许多指标消失时尤其有用。为此，我们引入一个技术性定义，其设计旨在使一些结果能够从通常局部上同调情形推广到广义局部上同调情形。

定义 3.2。 设 M、N 为 R-模，且 M 为有限模。若对于某个 R-模 N的任一内射分解 $E^\bullet$ 中出现的每个 E{v34>，0 阶通常局部上同调模 $H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M、E^i))$都是内射模，则称对 M 、 N 是 I- 上同调单射对。

注 3.3。 下面说明一些关于定义 3.2 的内容。

(i) 我们不知道上述定义是否与$E^\bullet$ 的选择无关（我们认为是无关的）。不过，我们声称，若M,N 是I-上同调内射的，那么N 的内射分解$E^\bullet$ 可以取为极小的。事实上，若N的$E^\bullet$ 是一个极小内射分解，则存在一个由R-模构成的正合复形$C^\bullet$，使得$E^\bullet = E^\bullet \oplus C^\bullet$。现在，该结论由同构可得

$$H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M,E^i)) \cong H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M,\widetilde{E}^i)) \oplus H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M,C^i)),$$

其中 这就保证了 $H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M, \tilde{E}^i))$ 若 $H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M, E^i))$ 也是内射的，则前者必为内射 .

(ii) 有限平坦 R-模 F 满足：对于任意内射 E ，当 E 为内射时，模 $H^0_I((\mathrm{Hom}_R(F, E)) \cong H^0_I(F, E)$ 也是内射的；特别地，对于所有 R-模 N，F,N 是 I-上同调内射的。事实上，首先注意到 $H^0_I(F, E) \cong \mathrm{Hom}_R(F, H^0_I(E))$ （这是众所周知的，但也可由引理 2.5(ii) 中给出的谱序列推出）。因此，函子

$$\mathrm{Hom}_R(-, H^0_I(\mathrm{Hom}_R(F, E))) \cong \mathrm{Hom}_R(- \otimes_R F, H^0_I(E))$$

由于 $H^0_I(E)$ 是内射的，因此它是正合的。反过来，按照同样的论证，如果 M 是有限 R-模，满足 $H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M, E))$ 是内射的，并且对于某个内射 R-模 E，$\mathrm{Hom}_R(-, H^0_I(E))$ 是忠实函子，那么 M 必须是平坦的。特别地，当 (R, m) 是局部的时，模 $H^0_{\mathbf{m}}(M, E_R(R/m))$ 是内射的当且仅当 M 是自由的，其中 $E_R(R/m)$ 表示剩余域 R/m 的内射包。

回顾一下，非零有限 R-模 N 是*Gorenstein* 模，当且仅当其 Cousin复形$C^\bullet(N)$ 是 N 的一个极小内射分解。详情见 [35], [36]。

命题 3.4. 设 R 是 *Gorenstein* 局部环，M 是有限 R-模。那么，对于某个 R 的理想 I，若且唯若 M 是自由模，配对 M, R 是 I-上同调内射。更一般地，将 R 替换为 *Gorenstein* 模 N 后，结论仍然成立。

证明。 首先，容易看出，若 M 是自由模，则配对 M,R 是I-上同调内射。反过来，由于给定的局部环$(R,\mathbf{m})$ 是 Gorenstein 环，模$E_R(R/\mathbf{m})$是R的一个极小内射分解的一部分。注意

$$E_R(R/\mathbf{m}) = H^0_{\mathbf{m}}(E_R(R/\mathbf{m})) \subset H^0_I(E_R(R/\mathbf{m})) \subset E_R(R/\mathbf{m}),$$

因此这些等式均成立。现在，利用注释 3.3(ii)，我们推出，模 $H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M, E_R(R/m)))$ $\cong \mathrm{Hom}_R(M, H^0_{\mathbf{m}}(E_R(R/m))) \cong H^0_{\mathbf{m}}(M, E_R(R/m))$ 是内射的，当且仅当 M 是自由模。因此，若 M, R 是 I-上同调内射，则 M 是自由模，证毕。

最后，假设 R-模 N 是 Gorenstein 的，且 M、N 这一对是 I-上同调内射的。根据 [36, 命题 3.5], ，如果 $\dim N = n$，那么 $C^\bullet(N)$ 的第 n 项由 $C^n(N) = E_R(R/m)^{\mu^n(m,N)}$ 给出，其中 $\mu^n(m, N)$ 是 N 关于 m 的第 n 个 Bass 数。因此，该假设迫使模

$$H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M, C^n(N))) \cong \mathrm{Hom}_R(M, H^0_I(E_R(R/\mathbf{m})))^{\mu^n(\mathbf{m},N)}$$

是内射的，从而 $\mathrm{Hom}_R(M, H^0_I(E_R(R/\mathbf{m})))$ 也必须是内射的；如上所见，这等价于 M 是自由的。□

现在，受上述命题和注释 3.3(ii) 的启发，我们自然可以考虑以下互补问题。

问题 3.5。 设 R 是一个局部环。如果 M 是有限模，且 $\mathrm{pd}_R M < \infty$，那么对于每个（或至少某个）非 Gorenstein$R$-模N，有序对 M、N 是否是 I-上同调内射的?

下面的定理是本小节的主要结果。它也将成为本文其他部分中的关键工具，例如命题 3.21 和定理 3.24 的证明中。

定理 3.6。 设 M 是有限模，N 是弱 *Laskerian* 模。假设对偶 M,N 是 I-上同调内射的。若存在整数 $s \geq 0$，使得对于所有 $i \neq s$，$H^s_I(M,N)$ 都是 I-弱余有限的，则 $H^i_I(M,N)$ 是 I-弱余有限的。

证明。 取 R/I 的一个投射分解 $P_\bullet$，以及如定义 3.2 中所述的N 的一个内射分解 $E^\bullet$，则双复形

$$\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M, E^\bullet))) \cong \mathrm{Hom}_R(P_\bullet, H^0_I(M, E^\bullet))$$

给出一个谱序列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_R(R/I, H^q_I(M,N)) \Rightarrow_p \mathrm{Ext}^{p+q}_R(M/IM, N).$$

现在我们采用与 [32, 命题 2.5] 中相同的方法进行论证。根据假设，对于所有 $r \geq 2$ 以及p、q、$i \geq 0$（其中$q \neq s$），R-模 $\mathrm{Ext}^i_R(M/IM, N)$ 和 $E_r^{p\,q}$ 都是弱 Laskerian 的。特别地，由于$E_\infty^{p\,q}$ 是 $\mathrm{Ext}^{p+q}{}_R(M/IM, N)$ 的子商，因此它也必然是弱 Laskerian 的。还需注意，给定 p、$q \geq 0$后，总能取足够大的r，使得$E_r^{p\,q}$ 是弱 Laskerian 的。

现在，考虑微分 $d_r^{p\,q}, : E_r^{p\,q} \to , E_r^{p+r\,q-r+1}$, 对于 $r \geq 2$。对于每个 $q \geq 0$，$E_r^{p\,q}$ 或 $E_r^{p+r\,s-q+1}$ 中至少有一个是弱 Laskerian 的，因此 $\mathrm{im} d_r^{p\,q}$ 也是如此。如果令 $r \geq 2$ 足够大，使得 $E^p{}_{,s\,r+1}$ 是弱 Laskerian 的，那么由正合列

$$0 \to \mathrm{im}\, d_r^{p-r,s+r-1} \to \ker d_r^{p,s} \to E_{r+1}^{p,s} \to 0$$

我们推出 t hat ker$d_r^{p\,s}$ 是弱 Laskerian 的。因此，利用正合列

$$0 \to \ker d_r^{p,s} \to E_r^{p,s} \to \mathrm{im}\, d_r^{p,s} \to 0$$

我们推出 $E_r^{p\,s}$ 的弱拉斯克性质。重复应用这一论证，我们得出 $E_2^{p\,s}$ 是弱 Laskerian 的。
□

注 3.7. 如果在定理 3.6 中假设 N 是有限的，那么可以在该陈述中用 *I-cofinite* 替换 I-弱余有限。

推论 3.8. 设定理 *3.6* 的假设成立。如果存在一个整数 $s \geq 0$，使得对于所有 $i \neq s$，都有 $H^i_I(M,N) = 0$，那么 $H^s_I(M,N)$ 是 I-弱余有限的。

然后，通过在定理 3.6 中取 $M = R$，记录下 [14, 定理 3.1] 。

推论 3.9。 如果 N 是弱 *Laskerian* 模，并且存在一个整数 $s \geq 0$，使得对于所有 $i \neq s$，$H^i_I(N)$ 都是 I-弱余有限的，那么 $H^s_I(N)$ 是 I-弱余有限的。

定理 3.6 的另一个直接推论是以下有用结果，本文中将多次用到。

推论 3.10. 设 M 有限，且 N 弱 *Laskerian*。假设 M,N 这一对是 I-上同调内射的。若存在不同的整数 $s,k \geq 0$，使得对所有 $i \neq s,k$，$H^i_I(M,N)$ 均为 I-弱余有限，则 $H^s_I(M,N)$ 是 I-弱余有限，当且仅当 $H^k_I(M,N)$ 是 I-弱余有限。

3.2. **上同调维数与弱余有限性**。 在本部分中，我们应用定理 3.6，以获得关于I-弱余有限性的一些结果，研究对象为$H^i_I(M,N)$，尤其是当 $\mathrm{cd}_I(M,N) \leq 3$时，其中数值 $\mathrm{cd}_I(M,N)$ 定义如下。

定义 3.11. ([1]) 设 M、N 为 R-模。关于理想 I 的广义上同调维数 M、N 定义为

$$\mathrm{cd}_I(M,N) = \sup\{i \geq 0 \mid H^i_I(M,N) \neq 0\}.$$

注意，若 $M = R$，则可恢复 N 关于 I 的上同调维数的标准定义 $\mathrm{cd}_I N$。此外，通常将 I 的上同调维数记为 $\mathrm{cd}\, I$，定义为满足以下条件的最小整数 $m \geq 0$：对所有R-模 T 及所有整数 $j > m$，$H^j{}_I(T) = 0$。根据 [8, 命题 6.1.11],，有如下等式

$$\mathrm{cd}\, I = \mathrm{cd}_I\, R.$$

这一不变量将在推论 3.18 和 3.19 中使用。值得回顾的是，在给定的局部环 $(R,\mathbf{m})$满足适当假设时，数值 $\mathrm{cd}\, I$ 与去心概形 $\mathrm{Spec}R/I \setminus \{\mathbf{m}\}$ 的连通性密切相关（参见 [17] 和 [23]）。

现在我们观察以下定理。

定理 3.12. 设 M 有限，N 弱 *Laskerian*。设 M,N 是 I-上同调单射的。那么以下断言成立：

(i) 若 $cd_I(M,N) = 1$，则 $H^1_I(M,N)$ 是 I-弱余有限；*(ii)* 若 $cd_I(M,N) = 2$，则 $H^1_I(M,N)$ 是 I-弱余有限，当且仅当 $H^2_I(M,N)$ 是 I-弱余有限；*(iii)* 设 $cd_I(M,N) = 3$，且 i、j、k 是 $\{1,2,3\}$ 中三个不同的指标。若 $H^i_I(M,N)$ 是 I-弱余有限，则 $H^j\, I(M,N)$ 是 I-弱余有限，当且仅当 $H^k_I(M,N)$ 是 I-弱余有限。

证明。 首先注意到，模 $H^0_I(M,N) \cong H^0_I(\mathrm{Hom}_R(M,N))$ 嵌入 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$中。已知后者是 I-弱余有限的，因为 M 是有限的，而 N

是弱 Laskerian 的。因此，$H^0_I(M,N)$ 也是 I-弱余有限的。现在，推论 3.10 适用。

□

注 3.13. 利用命题 2.6，并在定理 3.12(ii) 的情形下，我们可以推出，任意一个模的 I-弱余有限性

$$\mathrm{Hom}_R(M,H^1_I(N)),\ H^1_I(\mathrm{Hom}_R(M,N)),\ H^1_I(M,N),\ H^2_I(M,N)$$

都能使其他所有模具有相同的性质。值得一提的是，对于弱 Laskerian R-模 N 的通常局部上同调模 $H^i_I(N)$ ，在某些情况下已知其具有 I-弱余有限性，例如（假设 R 是局部的）若 $\dim R \leq 3$（见 [14, 推论 3.4]），以及若 $\dim M \leq 3$ 或 $\dim N \leq 3$（见 [10, 推论 5.3]）。

令 $M = R$ ，并考虑注释 3.3(ii)，我们可以立即将定理 3.12 记录为关于通常局部上同调的如下推论。

推论 3.14。 设 N 是弱 *Laskerian* 模。则以下断言成立 :

(i) 若 $\mathrm{cd}_I N = 1$，则 $H^1_I(N)$ 是 I-弱余有限；(ii) 若 $\mathrm{cd}_I N = 2$，则 $H^1_I(N)$ 是 I-弱余有限，当且仅当 $H^2_I(N)$ 是 I-弱余有限；(iii) 设 $\mathrm{cd}_I N = 3$，且 i、j、k 是 $\{1,2,3\}$ 中三个不同的指标。若 $H^i_I(N)$是 I- 弱余有限，则 $H^j I(N)$ 是 I- 弱余有限，当且仅当 $H^k_I(N)$ 是 I-弱余有限。

接下来，在证明进一步的结果之前，我们为方便起见引入一些记号。

记号 3.15。 设 M、N 是两个 R-模。记

$$g(M,N) = \inf_{j\geq 0}\{\mathrm{depth}_I \mathrm{Ext}^j_R(M,N)\} \quad \text{and} \quad c(M,N) = \sup_{j\geq 0}\{\mathrm{cd}_I \mathrm{Ext}^j_R(M,N)\}.$$

因此，存在一个偏差 $\delta(M, N) = c(M, N) - g(M, N) \geq 0$，并且注意到，由引理 2.5(i)的谱序列可知，当 $i < g(M, N)$ 或 $i > c(M, N)$ 时，必有 $H^i_I(M, N) = 0$ 。下一个定理讨论偏差为 0 和 1 时 $H^i_I(M, N)$ 的 I-弱余有限性。

定理 3.16。 设 M 是有限的，N 是弱 *Laskerian* 的。假设以下任一情形成立:

(i) $\delta(M,N) = 0$;
(ii) $\delta(M,N) = 1$ *and either* $H^{g(M,N)}_I(\mathrm{Ext}^j_R(M,N))$ *or* $H^{c(M,N)}_I(\mathrm{Ext}^j_R(M,N))$ *is I-weakly cofinite, for each* $j \geq 0$.

那么，对于所有 $i \geq 0$，$H^i_I(M,N)$ 都是 I-弱余有限的。

证明。 对每个 j，将推论 3.10 应用于配对 $R, \mathrm{Ext}^{j}{}_{R}(M,N)$，可得$H^i_I(\mathrm{Ext}^{j}{}_{R}(M,N))$ 在两种情况下对所有 $i \geq 0$ 都是 I-弱余有限的。现在，考虑引理 2.5(i) 的谱序列，

$$E_2^{i,j} = H^i_I(\mathrm{Ext}^j_R(M,N)) \Rightarrow_i H^{i+j}_I(M,N).$$

为简便起见，令 $g = g(M、N)$ 以及 $c = c(M、N)$。注意，当 $i < g$或$i > c$时，$E_2^{ij} = 0$。因此，如果 $g = c$，那么 E 只有一条垂直线E_2^{cj}，其中可能存在非零模，从而根据收敛性，

$$H^c_I(\mathrm{Ext}^{i-c}_R(M,N)) \cong H^i_I(M,N) \quad \text{for all} \quad i \geq 0,$$

当然，此时 $\mathrm{Ext}^k_R(M、N) = 0$，只要 $k < 0$。在这种情况下即可得到结论。

现在设 $g + 1 = c$。那么，E 只有两条垂直线，其中可能存在非零模。由于其第二页上的微分具有双次数$(2,-1)$，即$E_2^{ij} \to、 E_2^{i+2\,j-1}$，对于任意$i$、$j$，我们 deduce that $E_2 = E_\infty$。再次利用收敛性，对于每个$i \geq 0$，存在一个短正合列

$$0 \to H^c_I(\mathrm{Ext}^{i-c}_R(M,N)) \to H^i_I(M,N) \to H^g_I(\mathrm{Ext}^{i-g}_R(M,N)) \to 0,$$

由此我们得到I-弱余有限性，即$H^i_I(M、N)$的I-弱余有限性。 □

现在看来，提出以下问题是合理的。

问题 3.17。 设M 为有限模，N 为弱 Laskerian 模，且有 $\delta(M,N) = \delta \geq 2$。假设对于每个$j \geq 0$，至少有 δ 个模

$$H^{g(M,N)+k}_I(\mathrm{Ext}^j_R(M,N)), \quad k = 0, \ldots, \delta,$$

是I-弱余有限的。对于所有$i \geq 0$，$H^i_I(M,N)$ 是否为I-弱余有限的?

定理 3.16使我们能够在 $\mathrm{cd}\, I = 1$时，证明对于所有$i \geq 0$，模$H^i_I(M,N)$ 的I-弱余有限性。这改进了 [29, 定理 2.2]。

推论 3.18。 设 M 为有限模，N 为弱 *Laskerian* 模。若$\mathrm{cd}\, I = 1$，则 R-模 $H^i_I(M,N)$ 对于所有 $i \geq 0$均为 I-弱余有限的。特别地，关联素理想$_R H^i_I(M,N)$ 对于所有 $i \geq 0$均为有限的。

证明。由于 cd I = 1，特别地，对于每个 j，当所有 i ≥ 2 时，模 $H^i_I(\mathrm{Ext}^j R(M,N))$ 都消失。此外，$0 \leq g(M,N) \leq c(M,N) \leq 1$，并且回顾可知，$H^0_I(\mathrm{Ext}^j R(M,N)) \subset \mathrm{Ext}^j R(M,N)$ 是 I-弱余有限的。现在由定理 3.16 可得结论。□

另一个推论是以下对 [29,定理 2.10] 的推广。

推论 3.19。 设 M 是有限的，N 是弱 *Laskerian* 的。若 $\operatorname{cd} I = 1$，则 R-模$\operatorname{Ext}_R^i(M, H^j I(N))$对所有 i，$j \geq 0$ 都是 I-弱余有限的。

证明。 考虑引理 2.5(ii) 中的谱序列，

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}_R^p(M, H_I^q(N)) \Rightarrow_p H_I^{p+q}(M, N).$$

注意，它只有两条可能含有非零模的水平线。特别地，对于每个 $i \geq 0$，都有一个短正合列

$$0 \to E_\infty^{i,0} \to H_I^i(M, N) \to E_\infty^{i-1,1} \to 0,$$

其中 $E_\infty^{i\,0}$ 和 $E_\infty^{i-1\,1}$ 分别是模 $E_2^{i\,0} =$、$\operatorname{Ext}_R^i(M, H_I^0(N))$ 及 $E_2^{i-1\,1} =$、$\operatorname{Ext}_R^{i-1}(M, H_I^1(N))$ 的子商。现在回想一下，N 是弱 Laskerian 的，因此 $E_2^{i\,0}$ 也如此。因此，对于所有 $i \geq 0$，$E_\infty^{i\,0}$ 都是弱 Laskerian 的。由推论 3.18，$H_I^i(M, N)$ 是 I-弱余有限的，因此 $E_\infty^{i-1\,1}$ 也同样是 I-弱余有限的。最后，给定 $i \geq 0$，并注意到 $E_\infty^{i\,1} \cong$ 是 $\ker(E_2^{i\,1} \to, E_2^{i+2\,0},)$，由正合列可得结论

$$0 \to E_\infty^{i,1} \to E_2^{i,1} \to E_2^{i+2,0}.$$

□

注 3.20。 设 R 为局部环，且M、N 均为有限模，其中M 在R上的投射维数有限，记为 p。令$n = \operatorname{cd}_I N$。于是，根据 [15, 推论 2.3], ，对于所有$i > p + n$，有$H_I^i(M,N) = 0$；而对于$i = p + n$,

$$H_I^{p+n}(M, N) \cong \operatorname{Ext}_R^p(M, H_I^n(N)) \cong \operatorname{Ext}_R^p(M, R) \otimes_R H_I^n(N).$$

特别地，若 $\operatorname{cd} I = 1$（根据 [8, 命题 6.1.11]，这与 $\operatorname{cd}_I R$ 相同），则对于所有 $i > p + 1$，有 $H_I^i(M, R) = 0$；并且 $H^{p+1} I(M, R) \cong \operatorname{Ext}^p R(M, H_I^1(R)) \cong \operatorname{Ext}^p R(M, R) \otimes_R H_I^1(R)$。现在值得说明的是，$H^{p+1} I(M, R)$ 可能为零，即不等式 $\operatorname{cd}_I(M, R) \leq p + 1$ 可能是严格的。事实上，设 (R, m) 是维数为 1 的 Gorenstein 局部环，并且 $p = 1$（例如，$M = R/(x)$，其中 $x \in m$ 为某个正则元）。那么，$\operatorname{cd} m = 1$，且 $H_{\mathfrak{m}}^1(R) \cong E_R(R/m)$，这是一个内射 R-模，因此 $\operatorname{Ext}_R^1(M, H_{\mathfrak{m}}^1(R)) = 0$，从而 $H_{\mathfrak{m}}^2(M, R) = 0$。

我们以阐述使界 $\operatorname{cd}_I(M, N) \leq p + n$ 成为 Sharp 的条件来结束本小节。我们指出，若将 I-弱余有限性替换为 I-余有限性，该命题仍然成立。

命题 3.21。 设 R 为局部环，并假设 M,N 是一对 I-上同调内射的有限 R-模，且 $\operatorname{pd}_R M = p < \infty$；再考虑一个整数 $n \geq \operatorname{cd}_I N$。若存在整数 $k \in \{1, \ldots, p + n - 1\}$，使得对于所有 i 的 $H(M, N)$ 均为 I-弱余有限

$i \in \{1,\ldots,p+n-1\} \setminus \{k\}$，且 $H_I^k(M,N)$ 不是 I-弱余有限，则 $n = \mathrm{cd}_I N$，且

$$\mathrm{cd}_I(M,N) = p+n.$$

证明。由于 $\mathrm{cd}_I(M,N) \leq p + \mathrm{cd}_I N \leq p+n$，只需证明 $H^{p+n}{}_I(M,N) \neq 0$。反之，定理 3.6 蕴含 $H_I^k(M,N)$ 是I-弱余有限的，这与假设矛盾。□

3.3. **Gorenstein 射影维数与弱余有限性**。我们首先考虑一些适当的数值（与给定的一对模相关），它们将在本小节中发挥关键作用。

定义 3.22。([12]) 设 M,N 是两个有限 R-模。M 相对于 N 的 Gorenstein 射影维数定义为

$$\mathrm{Gpd}_N M = \sup\{i \geq 0 \mid \mathrm{Ext}_R^i(M,N) \neq 0\}.$$

这里值得回顾的是，若 M,N 是有限 R-模且 $\mathrm{pd}_R M < \infty$，则 $\mathrm{Gpd}_N M = \mathrm{pd}_R M$（见 [12, 引理 2.2(iv)]）。

记号 3.23。([12], [13]) 设M、N 是两个有限R-模。记

$$\rho(M,N) = \dim M \otimes_R N + \mathrm{Gpd}_N M.$$

在 [13, 定理 2.7], 中，当 $\rho(M、N) \leq 2$时，模$H_I^i(M, N)$ 的I-弱余有限性已得到证明。本部分的主要目标是在$\rho(M、N) = 3$ 和 $\rho(M、N) = 4$的情形下研究这一问题。

定理 3.24。设 R 是局部环，且 M、N 是一对 I-上同调内射有限 R-模。则以下断言成立：

(i) 如果 $\rho(M, N) \leq 3$，则对于所有 $i \geq 0$，$H_I^i(M, N)$ 都是 I-弱余有限的。特别地，对于所有 $i \geq 0$，关联素理想 $Ass_R H_I^i(M, N)$ 都是有限的；*(ii)* 如果 $\rho(M, N) = 4$，则 $H_I^1(M, N)$ 是 I-弱余有限的，当且仅当 $H_I^2(M, N)$ 是 I-弱余有限的。此外，对于所有 $i \neq 2$，关联素理想 $Ass_R H_I^i(M, N)$ 都是有限的；*(iii)* 如果 $\rho(M, N) = 4$，R 是局部环，且 $dim\ Hom_R(M, N) \leq 3$，则对于所有 $i \geq 0$，$H_I^i(M, N)$ 都是 I-弱余有限的。特别地，对于所有 $i \geq 0$，关联素理想 $Ass_R H_I^i(M, N)$ 都是有限的。

证明。(i) 令 $\rho = \rho(M,N)$。注意，$\mathrm{cd}_I M \otimes_R N \leq \dim M \otimes_R N$，由此可得

$$\mathrm{Gpd}_N M + \mathrm{cd}_I M \otimes_R N \leq \rho \leq 3.$$

因此，根据 [12, 定理 2.5], ，我们得到 $H_I^i(M,N) = 0$ 对所有 $i > 3$ 均成立；此外，R-模 $H^{\rho}{}_I(M,N)$ 和 $H^{\rho-1}{}_I(M,N)$ 具有有限支撑。如前所述，$\rho \leq 2$的情形由 [13, 定理 2.7], 可知，因此我们可以假设 $\rho = 3$。现在，

[14, 引理 2.2(iii)] 保证 R-模 $H^3_I(M,N)$ 和 $H^2_I(M,N)$ 是弱 Laskerian 的，因而是 I-弱余有限的。由于 $H^0_I(M,N)$ 总是 I-弱余有限的，我们的定理 3.6 便推出 $H^1_I(M,N)$ 也具有相同性质。这证明了该断言。

(ii) 类似于上文 (i) 部分的证明，我们得到，对于所有$H^i_I(M,N) = 0\, i > 4$，且$H^4_I(M,N)$ 和$H^3_I(M,N)$ 均为I-弱余有限。现在，再次利用$H^0_I(M,N)$ 是I-弱余有限这一点，结合推论 3.10 和命题 2.4 即可得到所需结果。

(iii) 将 [10, 推论 5.3] 应用于有序对R、$\mathrm{Hom}_R(M,N)$，我们推得R-模$H^i_I(\mathrm{Hom}_R(M,N))$ 对于所有$i \geq 0$均为I-弱余有限。由命题 2.6 可知$H^1_I(M,N)$ 为I-弱余有限。现在由 (ii) 及其证明即可得到所需结果。□

注 3.25。 (i) 关于定理 3.24(iii)，了解以下极限情形可能会很有意义： ρ（M、N） 和 dimHom_R（M、N） 均等于 4（另见定理 3.33 及其证明）。

(ii) 由该定理的证明可知，若 R 是局部环，且 M、N 是有限 R-模，并且 ρ（M、N） $< \infty$，则对所有 $i > \rho$（M、N）都有 H^i_I（M、N） $= 0$；由 [15, 推论 2.2],也可得到这一结论，该推论还给出了一个同构

$$H^{\rho(M,N)}_I(M,N) \cong H^{\dim M\otimes_R N}_I(\mathrm{Ext}^{\mathrm{Gpd}_N M}_R(M,N)),$$

并顺便注意到，根据 [12,定理 2.5], ，这些模必为 Artin。现在我们观察到，当 dim $\mathrm{Ext}^{\mathrm{Gpd}_N}{}_{M\,R}$（$M$、$N$） $<$ dim $M \otimes_R N$（回忆一下，对所有 i，都有 dim Ext^i_R（M、N） $\leq$ dim $M \otimes_R N$）时，$H^{\rho(M,N)}{}_I$（M、N） $= 0$。

由定理 3.24(ii)及其证明，我们立即得到通常局部上同调理论中的一个新结论。该结果将在推论 3.35 中进一步补充。

推论 3.26. 设 R 是局部环，N 是有限模，且维数$N = 4$。以下条件等价：

(i) 对所有 i，$H^i_I(N)$ 均为 I-弱余有限；(ii) $H^1_I(N)$ 为 I-弱余有限；
(iii) $H^2_I(N)$ 为 I-弱余有限。

接下来，我们记录一个辅助引理。

引理 3.27。 设 f 是两个 R-模之间的 R-线性映射。如果对于所有 $i \geq 0$，$\mathrm{Ext}^i_R(R/I, \ker f)$ 和$\mathrm{Ext}^i_R(R/I, \mathrm{coker}\, f)$ 都是弱 *Laskerian*，那么模$\ker \mathrm{Ext}^i_R(R/I, f)$ 和$\mathrm{coker}\, \mathrm{Ext}^i_R(R/I, f)$ 对于所有 $i \geq 0$ 也都是弱 *Laskerian*。

证明。 已知所有弱 Laskerian R-模构成一个 Serre 子范畴（见 [14, 引理 2.2]）。现在，只需令 $\mathcal{S}$ 为这样的一个范畴，并应用 [33, 推论 3.2]，即可立即得到该引理。□

下面的结果给出了 I-弱余有限性的一个判据，类似于 [33, 推论 3.4] 中讨论的 I-余有限性判据。它将成为定理 3.33 证明中的一个关键工具。

推论 3.28. 设 H 是一个 R-模，且 $\operatorname{Supp}_R H \subset V(I)$。假设存在 $x \in I$，使得 $0 :_H x$ 和 H/xH 都是 I-弱余有限的。那么，H 是 I-弱余有限的。

证明。令 $f = x1_H \in \operatorname{Hom}_R(H, H)$。根据假设，对于所有 $i \geq 0$，R-模 $\operatorname{Ext}^i_R(R/I, \ker f)$ 和 $\operatorname{Ext}^i_R(R/I, \operatorname{coker} f)$ 都是弱 Laskerian。由于 $x \in I$，且映射 $\operatorname{Ext}^i_R(R/I, f)$ 是 $\operatorname{Ext}^i_R(R/I, H)$ 上的乘法映射 x，因此它必为零映射，即，

$$\ker \operatorname{Ext}^i_R(R/I, f) = \operatorname{Ext}^i_R(R/I, H).$$

现在，利用引理 3.27，我们推得对所有i，$\operatorname{Ext}^i_R(R/I,H)$ 都是弱 Laskerian。此外，由于 $\operatorname{Supp}_R H \subset V(I)$，我们得出 H 是 I- 弱余有限的。□

我们注意到以下结果。

命题 3.29. 若 N 是维数为 d 的弱 *Laskerian* 模，则$\operatorname{Supp}_R H^d_I(N)$ 是有限的。因此，$H^d_I(N)$ 是弱 *Laskerian*。特别地，$H^d_I(N)$ 是 I-弱余有限的。

证明。 根据 [2, 定理 3.3]，，存在 N 的一个有限子模N_1，使得 $\operatorname{Supp}_R N/N_1$ 是有限的。短正合列$0 \to N_1 \to N \to N/N_1 \to 0$ 诱导出一个正合列

$$H^d_I(N_1) \to H^d_I(N) \to H^d_I(N/N_1) \to 0.$$

注意到 $\operatorname{Supp}_R H^d_I(N/N_1)$ 是有限的。另一方面，$\dim N_1 \leq d$。若 $\dim N_1 < d$，则 $H^d_I(N_1) = 0$，结论即得。否则，利用 [8, 练习 7.1.7]，我们推得 $H^d_I(N_1)$ 是 Artin 模，因此 $\operatorname{Supp}_R H^d_I(N_1)$ 是有限的。现在，$\operatorname{Supp}_R H^d_I(N)$ 的有限性可由上述正合列直接推出。根据注 2.2(i)，模 $H^d_I(N)$ 是弱 Laskerian 的；又显然 $\operatorname{Supp}_R H^d_I(N) \subset V(I)$，故它必为 I-弱余有限（见注 2.2(ii)）。□

现在我们分别将 [10, 推论 5.2 和推论 5.1] 推广如下。

推论 3.30. 假设 N 是弱 *Laskerian* 的。则以下断言成立：

(i) 若 $\dim N \leq 2$，则对所有 $i \geq 0$，$H^i_I(N)$ 均为 I-弱余有限；(ii) 若 $\dim R \leq 2$，且 M 有限，则对所有 $i \geq 0$，$H^i_I(M, N)$ 均为 I-弱余有限。

证明。 (i) 部分由推论 3.14 和命题 3.29 可轻易得出。为证明 (ii)，考虑引理 2.5(i) 中的谱序列 E 。利用上面的 (i)，对所有 $p,q \geq 0$，$E_2^{p\,q}$ 均为 I-弱余有限。由同构 $E_2^{1\,i} \cong ,E_\infty^{1\,i}$ 以及正合列

$$0 \to E_\infty^{0,j} \to E_2^{0,j} \to E_2^{2,j-1} \to E_\infty^{2,j-1} \to 0$$

对于每个 i、$j \geq 0$，将该序列分解为两个短正合序列后，我们可得：对于所有 p、$q \geq 0$，$E_\infty^{p\,q}$ 都是 I-弱余有限的。该结果现由收敛性得出。□

下面的论述涉及通常局部上同调，是新的结果，并将在定理 3.33 的证明中发挥关键作用。

定理 3.31。 设 R 是局部的，且 $\dim N \leq 2$。以下条件等价：

(i) 对于所有 $i \geq 0$，$H_I^i(N)$ 是 I-弱余有限的；(ii) $\operatorname{Ext}_R^i(R/I, N)$ 对于所有 $i \geq 0$ 都是弱 *Laskerian* 的；(iii) $\operatorname{Ext}_R^i(R/I, N)$ 对于 $i = 0, 1$ 是弱 *Laskerian* 的。

证明。 取 $\mathcal{S}$ 为弱 Laskerian R-模的范畴，由 [33,命题 3.9],可知，(i) 推出 (ii)。显然，(ii) 推出 (iii)。现在假设 (iii)，并证明 (i) 成立。

用 $\mathbf{m}$ 表示 R的极大理想。首先，根据平坦基变换性质（见 [8,定理 4.3.2]）以及 [31, 引理 2.1], ，不妨假设 R 是 $\mathbf{m}$-进完备的。给定两个非负整数 i,j，考虑模

$$T = \operatorname{Ext}_R^i(R/I, H_I^j(N)).$$

对于任意给定的 R-子模 $L \subseteq T$，我们需要推出 $\operatorname{Ass}_R T/L$ 是有限的。反设某个子模 L使得该集合无限。因此，我们可以选取一个可数无限子集

$$\{P_t\}_{t=1}^{\infty} \subset \operatorname{Ass}_R T/L, \quad P_t \neq \mathbf{m} \quad \text{for each} \quad t.$$

考虑乘法闭子集 $S = R \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} P_t$。那么，对每个 t，都有 $S^{-1}P_t \in \operatorname{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}T/S^{-1}L$。特别要注意，$\operatorname{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}T/S^{-1}L$ 是无限的。另一方面， [32, 引理 3.2]（其中要求 R 完备）保证 $m \nsubseteq \bigcup_{t=1}^{\infty} P_t$，即 m 与 S 相交，这（由于 $\dim N \leq 2$）迫使

$$\dim S^{-1}N \leq 1.$$

现在，由于 $S^{-1}R$-模 $\operatorname{Ext}^i S^{-1}R(S^{-1}R/S^{-1}I, S^{-1}N)$ 在 $i = 0, 1$ 时是弱 Laskerian 的，我们可以应用 [34,命题 3.4]，从而得到对所有 $j \geq 0$，$H^j S^{-1}I\,(S^{-1}N)$ 都是 $S^{-1}I$-弱余有限的。因此，$S^{-1}T$ 是一个弱 Laskerian 的 $S^{-1}R$-模

因此商模 $S^{-1}T/S^{-1}L$ 也是如此。特别地，$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}S^{-1}T/S^{-1}L$ 是有限的，这就矛盾了。□

问题 3.32. 目前一个自然的问题（其技术难点我们尚无法克服）是：对于局部环 R 及 R-模 M,N，其中 M 有限且 $\dim N \leq 2$，判断以下断言是否等价：

(i) 对所有 $i \geq 0$，$H^i_I(M,N)$ 都是 I-弱余有限；(ii) 对所有 $i \geq 0$，$\mathrm{Ext}^i_R(M/IM, N)$ 都是弱 Laskerian；
(iii) 对 $i = 0, 1$，$\mathrm{Ext}^i_R(M/IM, N)$ 是弱 Laskerian。

现在陈述本节的主要结果。

定理 3.33. 设 R 是局部环，M,N 是由有限 R-模构成的 I-上同调内射对，且 $\rho(M,N) = 4$ (见记号 *3.23*)。若 $\mathrm{Hom}_R(R/I, H^2_I(\mathrm{Hom}_R(M,N)))$ 是弱 *Laskerian*，则 R-模 $H^i_I(M,N)$ 对所有 $i \geq 0$ 都是 I-弱余有限。特别地，对所有 $i \geq 0$，关联素理想$_R$ $H^i_I(M,N)$ 都是有限的。

证明。令$T = \mathrm{Hom}_R(M,N)$。我们可以写成 $\dim T \leq \dim M \otimes_R N \leq \rho(M,N) = 4$。根据定理 3.24(iii)，不妨设 $\dim T = 4$。因此，我们得到

$$\dim T = \dim M \otimes_R N = 4 \quad \text{and} \quad \mathrm{Gpd}_N M = 0.$$

注意，后一个等式意味着对于所有$i \geq 1$，$\mathrm{Ext}^j{}_R(M,N) = 0$。现在，特别地，引理 2.5(i)中的谱序列保证了

$$H^i_I(M,N) \cong H^i_I(T) \quad \text{for all} \quad i \geq 0.$$

回顾一下，根据定理 3.24(ii)的证明，对于所有 $i > 4$，$H^i_I(M, N) = 0$，此外，模 $H^4_I(M, N) \cong H^4_I(T)$ 和 $H^3_I(M, N) \cong H^3_I(T)$ 都是 I-弱余有限的（还要回顾 $H^0_I(M, N)$ 总是具有这一性质）。因此，只需证明 $H^2_I(T)$ 的 I-弱余有限性。这将通过推论 3.28 得以完成。

首先，由于 $H^2_I(T) \cong H^2_I(T/H^0_I(T))$，我们可以假设深度$_I T > 0$，并选取一个$T$-正则元 $x \in I$。这给出一个正合列

$$H^1_I(T) \to H^1_I(T) \xrightarrow{\psi} H^1_I(T/xT) \to H^2_I(T) \xrightarrow{\varphi} H^2_I(T) \to H^2_I(T/xT) \to H^3_I(T),$$

其中 φ 是 T 上 H^2_I 的乘法映射 x。由于 $\dim T/xT = 3$，我们可以将 [10, 推论 5.3] 应用于 R、T/xT 这一对，从而得到对所有 $i \geq 0$，通常局部上同调模 $H^i_I(T/xT)$ 都是 I-弱余有限的。此外，由于 $H^3_I(T)$ 也是 I-弱余有限的，模 $\mathrm{coker}\ \varphi = H^2_I(T)/xH^2_I(T)$ 必定具有相同的性质。另请注意，子模 $\mathrm{Hom}_R(R/I, \ker \varphi) \subset \mathrm{Hom}_R(R/I, H^2_I(T))$ 是弱 Laskerian。

现在，我们来考虑短正合列

$$0 \to \operatorname{im}\psi \to H_I^1(T/xT) \to \ker\varphi \to 0.$$

特别地，Hom_R（R/I,im ψ） $\subset \mathrm{Hom}_R$（$R/I, H_I^1$（T/xT）） 是弱 Laskerian 的，并且通过诱导正合序列

$$\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^1(T/xT)) \to \mathrm{Hom}_R(R/I, \ker\varphi) \to \mathrm{Ext}_R^1(R/I, \operatorname{im}\psi)$$

我们得到 Ext_R^1(R/I, im ψ) 也是弱 Laskerian 的。因此，我们已经证明，对于 j $= 0$, 1，Ext^j R(R/I, im ψ) 是弱 Laskerian 的。另一方面，利用 [30,定理1.1(ii)]，我们得到 dim H_I^1(T/xT) $\leq$ dim T/xT $- 1 = 2$。由定理 3.31 可知，im ψ 是 I-弱余有限的，这使得模 ker $\varphi = 0 :_{H_I^2}$(T) x 也具有相同的性质。应用推论 3.28，我们得出 H_I^2(T) 是 I-弱余有限的，正如所需。□

注3.34。 (i) 在定理 3.33 的证明中出现的同构 $H_I^i(M,N) \cong H_I^i(\mathrm{Hom}_R(M,N))$ 对所有$i \geq 0$成立，并且适用于广泛的情形。例如，假设R 是局部的，$\mathrm{depth}_R M = \mathrm{depth} R$，且$N$ 具有有限内射维数。那么，众所周知的 Ischebeck公式（参见例如 [9, 练习 3.1.24]）给出 $\mathrm{Gpd}_N M = 0$。由引理 2.5(i) 中谱序列的收敛性，便可得到所需的同构。

(ii) 根据上文定理 3.33 证明的第一部分，再结合定理 3.24(iii) 和 [12, 引理 2.2(iv)], , 我们可推出如下事实。假设R 是局部的，且N 是有限R-模。若存在一个非自由有限R-模 M，满足 $\mathrm{pd}_R M < \infty$，且有序对M、N 是I-上同调内射的，并且 $\rho(M,N) = 4$，那么对所有$i \geq 0$，$H_I^i(M,N)$都是I-弱余有限的（特别地，$\mathrm{Ass}_R H_I^i(M,N)$ 是有限的）。

对于通常局部上同调，我们推导出以下结果，以补充推论 3.26。

推论 3.35。 设 R 是局部环，N 是有限模，且 $\dim N = 4$。以下条件等价：

(i) 对所有 $i \geq 0$，$H_I^i(N)$ 都是 I-弱余有限的；
(ii) 对所有 $i \geq 0$，$H_I^i(H_I^2(N))$ 都是 I-弱余有限的；
(iii) $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^2(N))$ 是弱 *Laskerian*。

证明。 根据 [30, 定理1.1(ii)], , 我们有 $\dim H_I^2(N) \leq 2$。于是，定理 3.31 确保，当且仅当对所有$j \geq 0$，$\mathrm{Ext}^j{}_R(R/I, H_I^2(N))$ 都是弱 Laskerian 时，(ii) 成立，即$H_I^2(N)$ 是I-弱余有限，进而推出条件(iii)。现在，注意到

$$\rho(R,N) = \dim N + \mathrm{Gpd}_N R = \dim N = 4$$

an并应用定理 3.33 及$M = R$，我们得出(iii)蕴含(i)。 □

我们以定理 3.31 的一个应用结束本节，该应用涉及维数至多为 2 的所有 I-弱余有限 R-模所构成的范畴$\mathcal{C}^2(R,I)_{\mathrm{wcof}}$。我们的结果扩展了 [4, 定理 3.5], ，后者研究了范畴 $\mathcal{C}^1(R,I)_{\mathrm{wcof}}$。

推论 3.36. 若 R 是局部环，则 $\mathcal{C}^2(R,I)_{\mathrm{wcof}}$ 是一个阿贝尔范畴。

证明。设 f : M $\to$ N 是一个 R-线性映射，其中 M、N 是 $\mathcal{C}^2$(R, I)$_{\mathrm{wcof}}$ 中的对象。所有维数至多为 2 的 R-模构成的类是所有 R-模范畴的一个 Serre 子范畴。因此，模 ker f、im f 和 coker f 的维数至多为 2。注意，子模 Hom_R(R/I, ker f) $\subset \mathrm{Hom}_R$(R/I, M) 是弱 Laskerian 的。类似地，Hom_R(R/I, im f) 也具有这一性质。另一方面，短正合列 $0 \to$ ker f $\succ$ M $\succ$ im f $\succ 0$ 给出了正合列

$$\mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{im}\, f) \to \mathrm{Ext}^1_R(R/I, \ker f) \to \mathrm{Ext}^1_R(R/I, M),$$

由此我们得到模 Ext^1_R（R/I, ker f）具有弱 Laskerian 性质。因此，根据定理 3.31，ker f 是 I-弱余有限的，从而由正合列

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/I, M) \to \mathrm{Ext}^1_R(R/I, \mathrm{im}\, f) \to \mathrm{Ext}^2_R(R/I, \ker f)$$

我们推得 Ext^1_R（R/I, im f）具有弱 Laskerian 性质。因此，再次应用定理 3.31，im f 必为 I-弱余有限的。最后，由正合列 $0 \to$ im $f \succ N \succ$ coker $f \succ 0$可知，coker f 是 I-弱余有限的。□

4. 病态例子

在最后一节中，我们给出两个例子；在我们看来，它们对于本文所研究的理论颇有意义。这些例子说明，若 M 是有限的，而N 不是 弱 Laskerian 的（特别地，不是有限的），则集合 $\mathrm{Ass}_R H^1_I(M, N)$ 可以是无限的，也可以是有限的。尤其是后一种情形揭示了一种相当病态的行为；据我们所知，文献中尚未注意到这一点。在两个例子中，$R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 表示由不定元 $x_1, \ldots, x_n$ 在无限域 k上生成的多项式环。

例 4.1. 假设 $n \geq 3$ 且令 $I = (x_1) \subset R$。考虑素理想

$$P_t = (x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n - t) \quad \text{for each} \quad t \in k.$$

令 $M = R/(x_2)$ 且 $N = \bigoplus R/P_t$。首先，注意到 N 不是弱 *Laskerian* $t\in k$，因为对于所有 $t \in k$，都有 $P_t \in$ 关联素理想$_R N$。此外，由于 $H^1_I(M, N) \cong \bigoplus H^1_I(M, R/P_t)$，我们 $t\in k$

得到 $\operatorname{Ass}_R H^{1}{}_I(M, R/P_t) \subset$ 关联素理想$_R H^1_I(M, N)$ 对每个$t \in k$成立。另一方面，因为e

$$\operatorname{depth}_{\operatorname{ann}_R M/IM} R/P_t = \operatorname{depth}_{(x_1,x_2)} R/P_t = \operatorname{depth}_I R/P_t = 1,$$

我们可以应用 [11, 定理 2.4] 以便写出

$$\operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(R/I, H^1_I(M, R/P_t)) = \operatorname{Ass}_R \operatorname{Ext}^1_R(M/IM, R/P_t)$$
$$= \operatorname{Ass}_R \operatorname{Ext}^1_R(R/(x_1, x_2), R/P_t) = \operatorname{Ass}_R R/((x_1, x_2) + P_t).$$

于是我们推导出

$$\operatorname{Ass}_R H^1_I(M, R/P_t) = \operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(R/I, H^1_I(M, R/P_t)) = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - t)\},$$

这表明 $\operatorname{Ass}_R H^1_I(M, N)$ 是无限的。

例子 **4.2.** 设 $n \geq 2$。固定 $\lambda_0 \in k^* = k \setminus \{0\}$，并令 $I = (x_1 - \lambda_0) \subset R$。置

$$N = \left(\bigoplus_{\lambda \in k^*} k[x_1]_{x_1 - \lambda} \right) \oplus R_{x_1}.$$

这是一个 R-模，其中 x_i 在 $k[x_1]_{x_1-\lambda}$ 上平凡作用，对于每个 $i = 2$，.....，n。我们将在下面的步骤中看到，N 不是弱 Laskerian 的，但颇为令人意外的是，对于任意有限 R-模 M，集合 $\operatorname{Ass}_R H^1_I(M, N)$ 是有限的。

步骤 1。N 不是弱 Laskerian 的。

对于每个 $\lambda \in k^*$，令 $T^\lambda = k[x_1]_{x_1-\lambda}$，并令 $\mathbf{m}_\lambda = (x_1 - \lambda, x_2, \ldots\ldots, x_n) \subset R$。注意到

$$\mathbf{m}_\lambda = \operatorname{ann}_R \overline{(x_1 - \lambda)^{-1}} \in \operatorname{Ass}_R T^\lambda / k[x_1].$$

另一方面，取 $L = \left(\bigoplus_{\lambda \in k^*} k[x_1] \right) \oplus R \subset N$，可得

$$N/L \cong \left(\bigoplus_{\lambda \in k^*} T^\lambda / k[x_1] \right) \oplus R_{x_1}/R$$

因此，对于所有 $\lambda \in k^*$，有$\mathbf{m}_\lambda \in$ 关联素理想$_R N/L$。因此，关联素理想$_R N/L$ 是无限的。特别地，N 不是弱 Laskerian。

步骤 2。$\operatorname{Ass}_R H^1_I$（$M$，$L$）是有限的。

该 sho rt 正合列 $0 \to L \to N \to N/L \to 0$ 诱导出一个正合列 ce

$$H^0_I(M, N/L) \to H^1_I(M, L) \to H^1_I(M, N) \to H^1_I(M, N/L),$$

进而得到包含关系

关联素理想$_R H^1_I(M, N) \subset \operatorname{Ass}_R H^1_I(M, L) \cup \operatorname{Supp}_R H^0_I(M, N/L) \cup \operatorname{Supp}_R H^1_I(M, N/L)$.

现在注意到 $\mathrm{H}_I^1(\mathrm{M},\mathrm{L}) \cong \mathrm{H}_I^1\left(\mathrm{M}, \bigoplus_{\lambda\in} \mathrm{k}^* \mathrm{k}[\mathrm{x}_1]\right) \oplus \mathrm{H}_I^1(\mathrm{M},\mathrm{R})$。根据命题 2.4，集合 Ass_R $\mathrm{H}_I^1(\mathrm{M},\mathrm{R})$ 是有限的。此外，给定 $\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}_R \mathrm{H}_I^1\left(\mathrm{M}, \bigoplus_{\lambda\in} \mathrm{k}^* \mathrm{k}[\mathrm{x}_1]\right)$，我们有 $\mathrm{I} \subset \mathrm{P}$ 且 P $\in \mathrm{Supp}_R\mathrm{k}[\mathrm{x}_1]$。因此

$$x_2, \ldots, x_n \in 0 :_R k[x_1] \subset P,$$

从而 $(x_1 - \lambda_0$、$x_2, \ldots\ldots$、$x_n) \subset P$，因此 $P = \mathbf{m}^{\lambda_0}$，这给出

$$\mathrm{Ass}_R H_I^1\left(M, \bigoplus_{\lambda\in k^*} k[x_1]\right) \subset \{\mathbf{m}_{\lambda_0}\}.$$

因此，我们已经证明 $\mathrm{Ass}_R H_I^1(M, L)$ 是有限的。

步骤 3。$\mathrm{Ass}_R H_I^1(M, N)$ 是有限的。

显然，商 $T^\lambda/k[x_1]$ 中的每个元素都被 $x_2, \ldots\ldots$、x_n 以及某个 $(x_1 - \lambda)$ 的幂所湮灭。这表明，对于每个 $Q \in \in \mathrm{Supp}_R T^\lambda/k[x_1],$，有 $\mathbf{m}_\lambda \subset Q$，即

$$\mathrm{Supp}_R T^\lambda/k[x_1] = \{\mathbf{m}_\lambda\}.$$

类似地，我们看到，当 $Q \in \in \mathrm{Supp}_R Rx_1/R$ 时，有 $(x_1) \subset Q$。现在，给定 $P \in \in \mathrm{Supp}_R H_I^i(M, N/L)$，必有 $P \subset I$，且 $P \in \in \mathrm{Supp}_R N/L$。由于

$$\mathrm{Supp}_R N/L = \left(\bigcup_{\lambda\in k^*} \mathrm{Supp}_R T^\lambda/k[x_1]\right) \cup \mathrm{Supp}_R R_{x_1}/R,$$

我们得到：要么 $P = \mathbf{m}_\lambda$ 对于某个 $\lambda \in k^*$成立，要么 $P \in \mathrm{Supp}_R Rx_1/R$成立。后一种情况是不可能的；事实上，若非如此，则如上所见，我们将有 $(x_1) \subset P$，但同时还有 $I = (x_1 - \lambda_0) \subset P$，这与 $\lambda_0 \neq 0$ 矛盾。因此，$P = \mathbf{m}_\lambda$。由于再次有 $I \subset P$，我们必然有 $P = \mathbf{m}^{\lambda_0}$。于是

$$\mathrm{Supp}_R H_I^i(M, N/L) = \{\mathbf{m}_{\lambda_0}\},$$

根据前一步及其证明，这保证了 $\mathrm{Ass}_R H_I^1(M, N)$ 是有限的，正如所要证明的那样。

为完整起见，注意取 $M = R$ 后，我们可对集合 $\mathrm{Ass}_R H_I^1(N)$ 得到同样的性质（模 $H_I^1(N)$ 由下文的注记可知非零）。

注 4.3。如果对每个有限 R-模 M，$H_I^1(M, N) = 0$ 都有可能成立，那么例 4.2 的目标就基本毫无意义了，因此现在值得说明这并非 如此。事实上，我们断言，只要 M 是满足以下条件的有限 R-模：

$$\mathrm{Hom}_R(M, k[x_1]_{x_1-\lambda_0}/k[x_1]) \neq 0,$$

容易看出，例如M是自由模，或者$M = k[x_1, \ldots, x_r]$对 $1 \leq r \leq n$成立时，该条件成立。特别地，取$M = R$，便可得到$H^1_I(N) \neq 0$。

为证明该结论，反设对于任意上述模，$\mathrm{H}^1_I(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = 0$。于是，对于所有 $\lambda \in \mathrm{k}^*$，$\mathrm{H}^1_I(\mathrm{M}, \mathrm{k}[\mathrm{x}_1]_{x_1-\lambda}) = 0$。另外注意到，由于显然 $\mathrm{H}^0_I(\mathrm{k}[\mathrm{x}_1]_{x_1-\lambda}) = 0$，我们有 $\mathrm{H}^0_I(\mathrm{M}, \mathrm{k}[\mathrm{x}_1]_{x_1-\lambda}) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{M}, \mathrm{H}^0_I(\mathrm{k}[\mathrm{x}_1]_{x_1-\lambda})) = 0$。现在，由短正合列

$$0 \to k[x_1] \to k[x_1]_{x_1-\lambda} \to k[x_1]_{x_1-\lambda}/k[x_1] \to 0$$

我们可推出同构

$$H^1_I(M, k[x_1]) \cong H^0_I(M, k[x_1]_{x_1-\lambda}/k[x_1]) \cong \mathrm{Hom}_R(M, H^0_I(k[x_1]_{x_1-\lambda}/k[x_1])).$$

任取 $\lambda \neq \lambda_0$，我们立即得到 $H^0_I(k[x_1]_{x_1-\lambda}/k[x_1]) = 0$，这表明 $H^1_I(M, k[x_1]) = 0$。现在，取 $\lambda = \lambda_0$（此时模 $k[x_1]_{x_1-\lambda_0}/k[x_1]$ 是 I-挠的），我们得到

$$\mathrm{Hom}_R(M, k[x_1]_{x_1-\lambda_0}/k[x_1]) \cong H^1_I(M, k[x_1]) = 0.$$

这一矛盾证明了该论断，并结束了本文。

致谢。 第一作者和第二作者获得了 CAPES 博士奖学金的资助。第三作者获得了 CNPq-巴西项目 301029/2019-9 和 406377/2021-9 的部分资助。

参考文献

[1] J. Amjadi，R. Naghipour，《广义局部上同调模的上同调维数》，《代数集刊》*2*（2008），303–308。[2] K. Bahmanpour，《关于弱 Laskerian 余有限模范畴》，Math. Scand. **115**（2014），62–68。[3] K. Bahmanpour，R. Naghipour，《小维数理想的局部上同调模的余有限性》，《代数杂志》**321**（2009），1997–2011。[4] K. Bahmanpour，R. Naghipour，M. Sedghi，《关于理想的余有限模与弱余有限模》，J. Algebra Appl. **16**（2018），1850056。[5] B. Bhatt，M Blickle，G. Lyubeznik，A. K. Singh，W. Zhang，《光滑 $\mathbb{Z}$-代数的局部上同调模具有有限多个关联素理想》，《数学发明》**197**（2014），509–519。[6] M. H. Bijan-Zadeh，《局部上同调理论的一个共同推广》，Glasgow Math. J. **21**（1980），173–181。[7] M. P. Brodmann，F. A. Lashgari，《局部上同调模的关联素理想的一个有限性结果》，Proc. Amer. Math. Soc. **128**（2000），2851–2853。[8] M. P. Brodmann，R. Y. Sharp，《局部上同调：代数导论及其几何应用》，第2版，Cambridge Stud. Adv. Math. **136**，剑桥大学出版社，剑桥，2013。[9] W. Bruns，J. Herzog，《科恩–麦考利环》，修订版，Cambridge Stud. Adv. Math. **39**，剑桥大学出版社，剑桥，1998。

[10] *N. T. Cuong*，*S. Goto*，*N. V. Hoang*，《广义局部上同调模的余有限性》，《京都数学杂志》*55*（*2015*），*169–185*。[11] *N. T. Cuong*，*N. V. Hoang*，《广义局部上同调模的某些有限性性质》，*East-West J. Math. 7*（*2005*），*107–115*。[12] *K. Divaani-Aazar*，*A. Hajikarimi*，《广义局部上同调模与同调 *Gorenstein* 维数》，《代数通讯》*39*（*2011*），*2051–2067*。[13] *K. Divaani-Aazar*，*A. Hajikarimi*，《一维理想的广义局部上同调模的余有限性》，《加拿大数学通报》*55*（*2012*），*81–87*。[14] *K. Divaani-Aazar*，*A. Mafi*，《弱 *Laskerian* 模的局部上同调模的关联素理想》，《代数通讯》*34*（*2006*），*681–690*。[15] *T. H. Freitas*，*V. H. Jorge-P´erez*，*C. B. Miranda-Neto*，*P. Schenzel*，《广义局部对偶性、典范模与射影维数的给定界》，《纯粹与应用代数杂志》*227*（*2023*），*107188*。[16] *A. Grothendieck*，《相干层的局部上同调以及局部和整体 *Lefschetz* 定理》（*SGA 2*），*Adv. Stud. Pure Math. 2*，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，*1968*。[17] *R. Hartshorne*，《代数簇的上同调维数》，《数学年刊》（第*2*辑）*88*（*1968*），*403–450*。[18] *R. Hartshorne*，《仿射对偶性与余有限性》，《数学发明》*9*（*1970*），*145–164*。[19] *J. Herzog*，《复形、分解与局部代数中的对偶性》，学位论文，埃森大学，*1970*。[20] *M. Hochster*，《局部上同调的有限性性质与数值行为》，《代数通讯》*47*（*2019*），*1–11*。[21] *C. Huneke*，《局部上同调问题》，载于：《交换代数与代数几何中的自由分解》，犹他州桑丹斯，*1990*，*Res. Notes Math. 2*，*Jones and Bartlett*，波士顿，马萨诸塞州，*1992*，第*93–108*页。[22] *C. Huneke*，*J. Koh*，《局部上同调模的余有限性与消失》，《剑桥哲学学会数学学报》*110*（*1991*），*421–429*。[23] *C. Huneke*，*G. Lyubeznik*，《关于局部上同调模的消失》，《数学发明》*102*（*1990*），*73–93*。[24] *C. Huneke*，*R. Y. Sharp*，《局部上同调模的 *Bass* 数》，《美国数学会汇刊》*339*（*1993*），*765–779*。[25] *M. Katzman*，《局部上同调模的关联素理想的一个无限集例子》，《代数杂志》*252*（*2002*），*161–166*。[26] *G. Lyubeznik*，《局部上同调模的有限性性质（*D*-模在交换代数中的一个应用）》，《数学发明》*113*（*1993*），*41–55*。[27] *G. Lyubeznik*，《局部上同调的部分综述》，载于：《局部上同调及其应用》，*Marcel Dekker*，*2001*。[28] *A. Mafi*，《局部上同调模中有限性问题的推广》，《印度科学院数学科学学报》*119*（*2009*），*159–164*。[29] *A. Mafi*，*H. Saremi*，《余有限模与广义局部上同调》，《休斯敦数学杂志》*35*（*2009*），*1013–1018*。[30] *A. Mafi*，*H. Saremi*，《关于局部上同调模的有限性维数》，《代数集刊》*21*（*2014*），*517–520*。[31] *T. Marley*，《小维数环上局部上同调模的关联素理想》，《数学手稿》*104*（*2001*），*519–525*。

[32] T. Marley、J. Vassilev，局部上同调模的余有限性与关联素理想，《代数杂志》**256**（2002），180–193。[33] L. Melkersson，关于理想余有限的模，《代数杂志》。**285**（2005），649–668。[34] H. Roshan-Shekalgourabi、M.Hatamkhani，*Hartshorne*问题与弱余有限性，《数学报告（布加勒斯特）》**22(72)**（2020），*3-4*，329–340。[35] R. Y. Sharp，交换诺特环上模的*Cousin*复形，《数学杂志》**112**（1969），340–356。[36] R. Y. Sharp，*Gorenstein*模，《数学杂志》**115**（1970），117–139。[37] A. K. Singh，局部上同调模中的*p*-挠元，《数学研究快报》**7**（2000），165–176。[38] A. K. Singh，局部上同调模的关联素理想，载于：第48届代数研讨会论文集，名古屋大学（2003），133–145。[39] A. K. Singh、I. Swanson，局部上同调模及*Frobenius*幂的关联素理想，《国际数学研究通知》**33**（2004），1703–1733。[40] K. Yoshida，完美模的张量积与极大满射*Buchsbaum*模，《纯粹与应用代数杂志》**123**（1998），313–323。巴拉伊巴联邦大学数学系，巴西帕拉伊巴州若昂佩索阿，邮编58051-900电子邮箱：andredosea@hotmail.com SISSA（国际高等研究学校），意大利的里雅斯特Bonomea 路 265 号，邮编 34136；以及巴拉伊巴联邦大学数学系，巴西帕拉伊巴州若昂佩索阿，邮编58051-900电子邮箱：rferreir@sissa.it，rf.holanda@gmail.com 巴拉伊巴联邦大学数学系，巴西帕拉伊巴州若昂佩索阿，邮编 58051-900电子邮箱：cleto@mat.ufpb.br