arXiv:2304.11538v1 [math.MG] 23 Apr 2023

用于信号比较的 HV 几何

˘ RUIYU HAN、DEJAN SLEPCEV 和 YUNAN YANG

谨以此文献给 *Bob Pego*，他对数学的渊博知识和热爱给予了我们极大的启发。

摘要。为了比较和插值信号，我们研究了信号空间上的一种黎曼几何。该度量允许不连续信号，并同时度量水平变形（因此具备 Wasserstein 度量的诸多优点）和垂直变形。此外，它允许带符号信号，从而克服了基于最优传输的度量在信号处理中的主要缺陷。我们刻画了信号空间的度量性质，并证明了测地线的正则性和稳定性。此外，我们提出了一种高效的数值方案来计算测地线，并展示了若干实验，以突出该度量的特性。

1. 引言

在 [30], Miller and Younes 提出了一种任意维函数空间上的、基于变形的几何。它能够度量水平变形（Wasserstein 度量也如此）和垂直变形（ L^2 范数也如此）。与 Wasserstein 距离不同，它允许信号改变符号。本文中，我们将这种几何称为 HV 几何。

Trouvé and Younes [36] 提供了一些奠基性结果，后续研究则将这一方法推广到各种距离和情形。然而，鲜有研究细致考察信号的相关几何结构，并从理论上确立其性质。这与最优传输各种变体的大量发展形成鲜明对比。为了推动这一几何结构及相关几何结构的进一步发展，我们在可能最简单的设置，即一维信号中，提供一份基本自洽的介绍。随后，我们证明了刻画所得度量的新结果，给出各种先验估计，并确立极小测地线的正则性与稳定性。此外，我们还介绍了一种计算该度量的简单高效方案。

尽管这一框架 [36] 已被应用于多个领域，主要是图像处理领域，但据我们所知，它尚未应用于一维信号的情形。在这里我们论证，当在信号空间（一维函数）中考察这一框架时，它提供了一种可行的度量，具有令人满意的特征，并且能够有效计算。这为多种应用打开了大门。

给定一个有限区间，为简便起见，我们将其设为 $[0,1]$，并将信号空间视为 L^2 函数。信号空间上的路径由带源项的输运方程的（弱）解描述。特别地，连接 $f_0, f_1 \in L^2(0,1)$ 的路径可表示为

$$\begin{aligned} \partial_t f &= -\partial_x f \cdot v + z \quad \text{on } [0,1]\times[0,1], \\ v(0,\cdot) &= v(1,\cdot) = 0, \\ f(\cdot,0) &= f_0, \;\; f(\cdot,1) = f_1. \end{aligned} \tag{1}$$

日期：2023年4月25日。

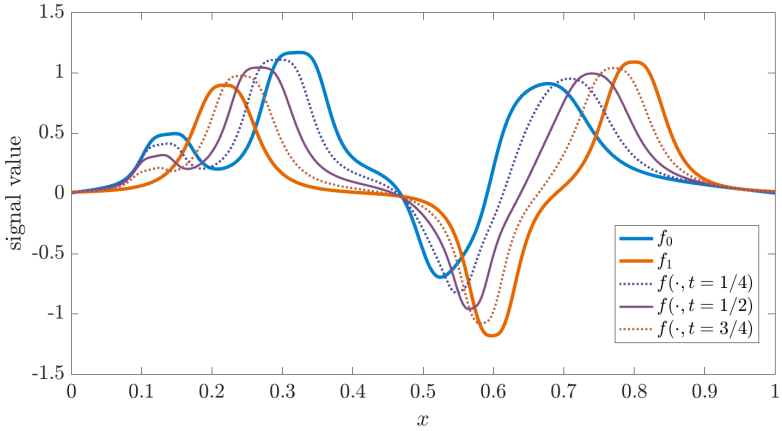


图1. 根据 HV几何， $\kappa = 0.1$、 $\lambda = 0.01$和 $\varepsilon = 0.0005$的信号空间中计算得到的测地线示例。我们注意到，对于某些特征，水平变换占主导地位，而另一些部分则通过垂直移动信号进行匹配。

衡量沿特定路径将 f_0 变形为 f_1 所需作用量为

$$A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f, v, z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \kappa v^2 + \lambda v_x^2 + \varepsilon v_{xx}^2 + z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{2}$$

其中 $\kappa > 0$、 $\lambda \geqslant 0$和 $\varepsilon > 0$。

v^2 项衡量信号的水平运动，而 z^2 衡量垂直变化。参数 κ 用于提高建模的灵活性，因为它对水平变化和垂直变化采用不同的处理方式。我们注意到，水平输运由输运方程项 $\partial_x f \cdot v$建模，而非连续性方程 $\mathrm{div}(fv)$。因此，即使 $z \equiv 0$，除非 div $v \equiv 0$， f的积分也不会守恒。λv_x^2 项衡量输运偏离守恒状态的程度。值得一提的是，在该度量的高维类比中， v_x 项将由 div v替代。从本质上说，它描述了为了扩张或收缩区域而需要创造或移除多少空间，使得 f 取某个特定值。εv_{xx}^2 项对于正则性是必要的。具体而言，它确保极小区域不会以任意小的代价膨胀，否则会形成一种不理想的捷径，并可能成为占主导地位的输运机制。事实上，我们将在第2.1节讨论，当 $\varepsilon = 0$时，这种几何可能会退化。

我们将函数 f_0 与 f_1 之间的距离定义为连接二者的所有可容许路径的作用量下确界

$$d_{HV(\kappa,\lambda,\varepsilon)} := \inf_{(f,v,z)} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1 \kappa v^2 + \lambda v_x^2 + \varepsilon v_{xx}^2 + z^2 \,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t \;=\; \inf_{(f,v,z)} \sqrt{A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f, v, z)}.$$

第二个等式通过重新参数化得到证明。当参数 κ、 λ 和 ε 在上下文中明确时，我们使用简写记法 d_{HV}。关于基于 HV几何的两个带符号信号之间计算得到的测地线示例，请参见图 1。

我们上文描述的度量并非新提出；除了一些细微的技术细节外，它就是 Miller and Younes [30] 提出并由 Trouvé and Younes [37] 研究的度量，也属于 Trouvé, Younes, and Holm [22]研究的变形族。它还与 Charlier, Charon, and Trouvé [10, 11]研究的度量密切相关。特别是， [37] 和 [10,定理 2] 证明了测地线的存在性，而 [11, 性质 1] 证明了该度量的完备性。文献 [22, 10, 11] 展示了

非常一般的框架，以及大量基于形变的方法，用于比较定义在固定或变化的集合与流形上的函数。

本文对信号空间中所关注的特定度量给出了简明且自成一体的描述。我们的问题主要采用欧拉观点，而非基于微分同胚群的方法。欧拉观点使我们能够考虑正则性较低的信号之间的路径。这使我们得以证明，仅惩罚一个导数的度量并不会导出测地空间，因为最小测地线可能不存在；参见第2.1节。我们证明了测地线的存在性，以及由此得到的信号度量空间的完备性，这分别对应于 [36] 和 [11],中的结果。我们的方法使我们能够将所得信号空间中的收敛刻画为 L^2 收敛；参见定理 2.16。据我们所知，其他框架中尚无此类结果。特别是，知道所得度量不弱于 L^2 距离，有助于明确形变所诱导的距离。此外，我们证明了极小化子的先验估计，从而表明极小化子保持信号的正则性。特别地，命题 3.1 给出了信号属于 H^1 时的结果，而注 3.2 则给出了光滑信号的结果。

此外，我们提出了一种数值算法，在保持 f 固定的情况下，交替优化关于v 和 z 的作用量，以及在保持 v 固定的情况下，优化关于 z 和 f 的作用量。每个子问题都相当于在一个线性约束下最小化一个二次泛函（与完整问题不同，完整问题的约束是非线性的），因此可以高效求解。我们观察到，该算法经过几次迭代后便会迅速收敛到作用量的一个局部极小值。通过交替求解这两个子问题，我们可以证明，作用量泛函 (2) 在连续层面上单调递减。在保持 v 固定的情况下优化关于 z 和 f 的作用量时，我们采用拉格朗日方法，其中涉及数值积分和数值插值。在保持 f 固定的情况下优化关于 v 和 z 的作用量时，我们通过有限差分法求解一个四阶偏微分方程 (PDE)。由于得到的测地线取决于初始数据，我们还提出了一种速度初始化，使其匹配每个信号的 k个最显著峰。为缓解只能找到局部极小化子的问题，我们对 $k \in \{0、1、\ldots\ldots、 k_{max}\}$ 进行优化，以选出作用值最小的初始化，其中 k_{max} 是我们选取的数量，表示我们希望匹配的显著峰的最大数目。特别地，$k = 0$ 对应于零速度初始化。

1.1. 文献综述。 在许多场景下，设计并选择合适的方式来比较所研究的函数十分重要。在去噪、去模糊或波形反演等逆问题中，选择适当的损失度量方式对结果至关重要。如果信号表示质量分布，且质量的位置比密度更为重要，那么最优传输度量尤其有效 [15, 17]。在采用二次代价的最优传输框架下，公式 (1) 被连续性方程所替代：

$$\partial_t f = -\operatorname{div}(fv)$$

而作用量为

$$A_W(f, v) = \int_0^1 \int_0^1 v^2 f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

最优传输度量要求被比较的函数非负且总质量相同。非平衡最优传输[24, 13], 放宽了对质量的要求，允许质量发生变化，但仍要求非负。对于非平衡传输，连续性方程可以包含乘性源项，作用量也会对信号放大进行惩罚：

$$\partial_t f = -\operatorname{div}(fv) + zf,$$
$$\text{and} \quad A_{UB}(f, v) = \int_0^1 \int_0^1 (v^2 + z^2) f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

在许多应用中，例如全波形反演 [17]，需要比较同时具有正值和负值的一般信号。这给最优传输的应用带来了限制。人们已提出若干种将最优传输方法用于带符号信号的思路 [17]，包括添加常数、对信号取指数、分别比较正部和负部，以及考虑在乘积空间上函数图之间的传输（例如 TL^p 度量[34]）。研究表明，在全波形反演及相关问题中，比较函数图上的信号是有效的 [27]。然而，所有这些方法都缺少一个关键要素，即能够实现插值或所需不变性的黎曼性质 $d(f_0,\ f_1) = d(-f_0,\ -f_1)$。

在计算机视觉、计算解剖学和几何处理中，用几何方法比较形状和 $\mathbb{R}^d$ 的子流形受到了广泛关注。曲线空间上的黎曼几何已得到深入研究。Mumford 和 Michor [28] 证明，如果在作用量中只考虑速度的 L^2 范数，那么度量就会退化。Bruveris、Michor 和 Mumford [9, 8]以及 Nardi、Peyre 和 Vialard [31] 证明，当 Sobolev 度量或相应的 BV型度量涉及两个或更多导数的 L^2 范数时，浸入平面曲线的空间是测地完备的。计算解剖学和非刚性配准领域的早期工作促成了对曲面形状以及高维流形几何的研究，其中许多研究已由 Younes [41]在其著作中进行了综述。近期研究结果 [3, 4] 证明，当度量至少惩罚变形场的一个导数时，测地线方程具有局部适定性。

另一类研究将形状空间视为集合内部来考察。从某种意义上说，这考虑了集合中包含的质量，与 Wasserstein 距离的做法类似。Liu、Pego 和其中一位作者 [25], 证明，将 Wasserstein 几何限制在示性函数空间中并不可行，因为测地线并不存在。事实上，极小化曲线弱收敛到无约束空间中的 Wasserstein 测地线。Wirth、Bar、Rumpf 和 Sapiro [40] 考虑了对速度场梯度进行惩罚的作用量，并证明在这种情况下，该几何是可行的。Rumpf 和 Wirth [32, 33], 进一步完善了这一框架，并提出了一种寻找测地线的数值方法。

在研究曲线空间和形状空间的几何的同时，研究者还考察了用于比较信号（例如灰度图像）的度量，同时允许域变形和强度变化。Trouvé [35] 提出了基于群作用的基本描述。随后，Trouvé 和 Younes 将其完善为可变形模板 [36] 和变形[37] 的描述。正如我们在开头所指出的，我们研究的几何属于这一类。文献 [22]给出了变形的欧拉描述。Charlier, Charon, and Trouvé[10, 11] 考察了将流形与其上的函数一并比较的空间。文献 [10, 11] 的作者证明，在满足充分正则性假设时，流形与函数对所构成的空间是测地完备的。许多数值方法（例如 [29, 20]）在计算给定图像之间的极小测地线时，采用所谓的射击法：迭代计算给定初始条件下的正向测地线，并调整初始条件。Berkels、Effland 和 Rumpf [6] 采用了另一种方法，提出了一种基于时间离散路径的变分 formulation；该方法以与时间积分的作用量相一致的方式，最小化相邻图像之间的变形。这是一种很有前景且理论基础扎实的方法。与我们的方法的一个区别是，他们的子问题仍然是非凸的。

1.2. **概述**。 本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们定义 HV几何及其相关距离，并建立它们的性质。特别是，我们在命题 2.1 中给出度量的缩放不变性。第 2.2 节中，我们严格确定切空间。此确定方式与 [36] 中的方式类似，但略有不同：我们不采用等价类，而是确定达到最小长度的代表元（正如梯度向量场会使 Wasserstein 几何中的作用量达到最小值）。第 2.3 节中，我们给出若干先验估计，以略异于 [36]的方式证明测地线的存在，并得到测地线满足的表示公式

。第 2.4 节中，我们证明 d_{HV} 度量在 $L^2(0,\ 1)$ 上是完备的，并且 d_{HV} 在 $L^2(0,\ 1)$ 上诱导的拓扑与 L^2 范数诱导的拓扑相同。此外，我们在命题 2.3 中表明，若不涉及速度的二阶导数，作用量极小化子可能不存在。第 3 节中，我们进一步研究测地线的若干性质。命题 3.1 表明，若起始信号和终止信号属于 H^1，则极小测地线上的信号始终属于 H^1。此外，注 3.2 指出，若信号光滑，则连接它们的测地线也光滑。命题 3.3 确立了极小测地线对端点扰动的 L^2 稳定性。需要指出的是，这并非一个直接的紧性结果，因为起初我们只能控制信号的 L^2 范数。第 3.1 节致力于建立作用量极小化子的一阶最优性条件。我们首先针对一般的 L^2 信号推导这些条件。若信号还属于 H^1，则我们证明欧拉–拉格朗日方程具有微分方程的形式。第 4 节中，我们介绍数值方法。首先，我们给出迭代最小化方案，该方案采用两个基于欧拉–拉格朗日方程和测地线表示公式的子问题。我们在第 4.2 节中介绍所采用的有限差分离散化方法。第 4.3 节中，我们描述路径初始化方法。由于能量通常存在局部极小值，因此采用结合信号信息的初始化方法十分重要。第 5 节中，我们展示若干示例，以突出 HV 信号几何的性质以及我们采用的数值方法。我们还将该方案应用于心电图数据集和地震学中的信号。最后，我们在第 5.1 节讨论参数选择。

2. HV几何及其性质。

为了严格定义 HV距离，我们首先精确定义可容许路径的集合。令$\mathcal{V}:=L^2((0、\ 1)、\ H^2(0、1)\cap H_0^1(0、\ 1))$。给定 $f_0、\ f_1\in L^2(0、\ 1)$，我们将可容许路径的集合定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f_0,f_1):=\big\{(f,v,z)\mid\ & f\in L^2((0,1),L^2(0,1))\cap C([0,1],H^{-1}(0,1)),\\ & v\in\mathcal{V},\ z\in L^2((0,1),L^2(0,1)),\\ & \partial_t f+\partial_x f\cdot v=z \text{ weakly},\ f(\cdot,0)=f_0,f(\cdot,1)=f_1\big\}.\end{aligned}\tag{3}$$

上文 $\partial_t f+\partial_x f\cdot v=z$ 的弱解是指，对于任意测试函数 $\phi\in C^\infty([0、\ 1]^2)$,

$$\begin{aligned}&-\int_0^1\int_0^1 f\partial_t\phi\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^1 f_1(x)\phi(x,1)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f_0(x)\phi(x,0)\,\mathrm{d}x\\ &\qquad=\int_0^1\int_0^1 f\phi\partial_x v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^1\int_0^1 f\partial_x\phi v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^1\int_0^1\phi z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4}$$

然后将 HV 距离定义为

$$d_{HV(\kappa,\lambda,\varepsilon)}:=\inf_{(f,v,z)\in\mathcal{A}(f_0,f_1)}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1\kappa v^2+\lambda v_x^2+\varepsilon v_{xx}^2+z^2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t\tag{5}$$

距离的定义蕴含了以下简单但有用的性质。

命题 2.1. 考虑 $f_0、\ f_1\in L^2(0、\ 1)$。设 $c>0$。则

(i) $d_{HV}(f_0、\ f_1)\leqslant\|f_0-f_1\|_{L^2}$。*(ii)* $d_{HV}(-f_0、-f_1)=d_{HV}(f_0、\ f_1)$*(iii)* $d_{HV}(f_0+c、f_1+c)=d_{HV}(f_0、\ f_1)$*(iv)* $d_{HV(c^2\kappa,\ c^2\lambda,\ c^2\varepsilon)}(cf_0、cf_1)=cd_{HV(\kappa,\ \lambda,\ \varepsilon)}(f_0、\ f_1)$

为说明作用量在空间重新缩放时的行为，将 f_0 和 f_1 周期性地延拓至$\mathbb{R}$。同样，给定路径 $(f、\ v、\ z)$，考虑将其周期性地延拓至 $\mathbb{R}$。那么对于 $L\in\mathbb{N}$

(v) $A_{L^2\kappa,\ \lambda,\ \varepsilon/L^2}(f(L\cdot,\cdot),v(L\cdot,\cdot),z(L\cdot,\cdot)) = A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f,v,z)$, 其中，按照惯例，作用量仅在 [0、1]上考虑。

性质 (i) 可通过计算线性插值的作用量来证明，其余性质则可直接应用作用量的定义得出。

2.1. 没有二阶导数时的退化。在证明关于 d_V 的严格结果之前，我们先说明，如果我们 $\varepsilon = 0$，信号几何就不具备所有理想性质。具体而言，我们将证明存在函数 f_0 和 f_1，使得作用量不存在任何极小化子。

更确切地说，考虑与 (3) 中相同的可容许路径集合，但将 $\mathcal{V}$ 替换为 $L^2((0,\ 1),\ H_0^1(0,\ 1))$。考虑作用量

$$A(f,v,z) = \int_0^1 \int_0^1 v^2 + v_x^2 + z^2 dxdt. \tag{6}$$

首先注意，当 f_0 和 f_1 是相差足够大的常函数时，线性插值并非最优。

引理 2.2。若 $\varepsilon = 0$，则对所有 $\lambda \in [0、\ \infty)$，均存在 $H \in \mathbb{R}$，使得 $f_0 \equiv 0$ 与 $f_1 \equiv H$ 之间的线性插值路径不是最优的。

证明。考虑某个 $H > 0$的 $f_0 \equiv 0$ 和 $f_1 \equiv H$。f_0 和 f_1 之间的一种可能路径是通过 L^2插值。这条路径由 $v \equiv 0$ 和 $z \equiv H$定义。于是

$$A(f,v,z) = \int_0^1 \int_0^1 z^2 dxdt = H^2$$

我们构造一条速度非零的竞争路径 v。在时间区间 $t \in [0,\ 1/3]$, 内，在 f_0 和之间使用 L^2插值

$$f_2(x) = \begin{cases} H & x \leqslant s \\ 0 & x > s \end{cases}$$

$_1$对于固定的 $s \in (0,\ 1/2)$。在此时间区间内，$v \equiv 0$，且 $\int_0^3 \int_0^s z^2 dxdt = 3sH^2$. 在时间区间$t \in [1/3, 2/3]$, 上，信号从 f_2 移动到

$$f_3(x) = \begin{cases} H & x \leqslant 1-s \\ 0 & x > 1-s \end{cases}$$

通过以恒定速度 $3(1-2s)$移动阶跃函数的边缘。以初始位置为参数的速度为 $w(x) = 3(1-2s)^{\frac{x}{s}}$，当 $x \in (0,\ s]$时，以及当 $x \in (s,\ 1)$时为 $w(x) = 3(1-2s)^{\frac{1-x}{1-s}}$。于是对于所有 $t \in [1/3, 2/3]$,，速度为 $v\big(x + w(x)\big(t - \frac{1}{3}\big),\ t\big) = w(x)$。根据链式法则，$0 \leqslant v \leqslant 3(1-2s)$和 $|v_x| \leqslant \frac{3(1-2s)}{s}$。所以

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \int_0^1 v^2 + \lambda v_x^2 dxdt \leqslant 3(1-2s)^2\left(1 + \frac{\lambda}{s^2}\right)$$

f_2 和 f_3 之间的插值是指信号沿着轨迹保持不变。最后使用L^2 在 f_3 和 f_1之间进行插值。这与时间区间 $[0, 1/3]$ 对称，并为作用量增加了 $3sH^2$。

因此，这条路径的总作用量有上界 $6sH^2 + 3(1-2s)^2\big(1 + \frac{\lambda}{s^2}\big)$.。取 $s < \frac{1}{6}$，然后取 $H > 0$使得 $H^2 > \frac{3}{1-6s}(1-2s)^2\big(1 + \frac{\lambda}{s^2}\big)$，我们便有 $H^2 > 6sH^2 + 3(1-2s)^2\big(1 + \frac{\lambda}{s^2}\big)$。因此，$L^2$ 插值不是 $f_0 \equiv 0$ 和 $f_1 \equiv H$之间的最优路径。□

命题 2.3。存在 $H > 0$，使得不存在一条连接 $f_0 \equiv 0$ 和 $f_1 \equiv H$ 且使作用量 (6) 最小的路径。

证明。 假设 H 满足引理 2.2 的条件。考虑任意一条从 f_0 到 f_1 的路径 $(f,\ v,\ z)$。根据是否 $v \equiv 0$, 我们将论证分为两种情况。

情形 1^o 如果 $v \equiv 0$。那么，对于所有 $x,\ t$都有 $f_t = z$，也就是说该路径是线性插值。因此，根据引理 2.2，该路径不会使作用量最小。

~情形 2^o $v \not\equiv 0$。从路径 $(f,\ v,\ z)$ 出发，通过创建两个副本，可以构造一条新路径 $(f,\ \tilde{v},\ \tilde{z})$ 将f 缩放到区间 $1\ 2$。

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(2x,t) & x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1,t) & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\tilde{v}(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}v(2x,t) & x \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}v(2x-1,t) & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\tilde{z}(x,t) = \begin{cases} z(2x,t) & x \leqslant \frac{1}{2} \\ z(2x-1,t) & x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

由此可得

$$\tilde{v}_x(x,t) = \begin{cases} v_x(2x,t) & x \leqslant \frac{1}{2} \\ v_x(2x-1,t) & x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

对于该路径的作用量,

$$\begin{aligned} A(\tilde{f},\tilde{v},\tilde{z}) &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{v}^2 + \tilde{v}_x^2 + \tilde{z}^2 dxdt + \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 \tilde{v}^2 + \tilde{v}_x^2 + \tilde{z}^2 dxdt \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} v(2x,t)^2 + \tilde{v}_x(2x,t)^2 + \tilde{z}(2x,t)^2 dxdt \\ &\quad + \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4} \tilde{v}(2x-1,t)^2 + \tilde{v}_x(2x-1,t)^2 + \tilde{z}(2x-1,t)^2 dxdt \\ &= \int\int \frac{1}{4} v^2 + v_x^2 + z^2 dx. \end{aligned}$$

由于 v非零，因此这严格小于作用量 $A(f,\ v,\ z)$。因此，路径 $(f,\ v,\ z)$ 不是最小的。所以，在 f_0 和 f_1 之间不存在使作用量最小的路径。 □

2.2. **切空间的识别**。我们注意到，在（5）中定义的 d_{HV} 可以看作信号空间中一条曲线的长度。事实上，正如下面将要证明的，$(L^2(0,\ 1),\ d_{HV})$ 是测地空间。根据可容许曲线和作用量的定义，我们看到，在切空间的欧拉描述中

$$\mathrm{Tan}_{f,Euler} = \{-vf_x + z\ :\ v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1),\ \ z \in L^2(0,1)\} \subseteq H^{-1} \tag{7}$$

其中，vf_x 是由 $\langle -vf_x,\ \phi\rangle = \int_0^1 v_x f\phi + vf\phi_x \mathbf{d}x$ 对所有 $\phi \in H_0^1$ 定义的 H^{-1} 中的元素。下面我们将证明，在拉格朗日描述中，切空间可以识别为 $(H^2(0,\ 1) \cap H_0^1(0,\ 1)) \times L^2(0,\ 1)$ 的一个子空间。

引理2.4。 给定 $f \in L^2(0、\ 1)$、$\bar{v} \in H^2(0、\ 1) \cap H_0^1(0、\ 1)$ 以及 $\bar{z} \in L^2(0、\ 1)$，存在唯一的一对 $v \in H^2(0、\ 1) \cap H_0^1(0、\ 1)$、$z \in L^2(0、\ 1)$，使瞬时作用量达到最小值

$$Q_f(v,z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \kappa v^2 + \lambda v_x^2 + \varepsilon v_{xx}^2 + z^2\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

在约束条件下

$$\forall \phi \in H_0^1(0,1) \qquad \int_0^1 f v_x \phi + f v \phi_x + z\phi \,\mathrm{d}x = \int_0^1 f \bar{v}_x \phi + f \bar{v} \phi_x + \bar{z}\phi \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

我们将解映射记为 S： $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \to H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$，也就是 $(v, z) = S(\bar{v}, \bar{z})$。

证明。令 $C(f, \bar{v}, \bar{z})$ 为满足约束 (9) 的 $v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $z \in L^2(0,1)$ 集合。注意，如果 $(v_n, z_n) \in C(f, \bar{v}, \bar{z})$, $v_n \to v$属于 H_0^1, $z_n \rightharpoonup z$属于 L^2，且 $n \to \infty$和 $v \in H^2(0,1)$，那么$(v, z) \in C(f, \bar{v}, \bar{z})$。也就是说，$f\phi \in L^2$确保 $\int f(v_n)_x \phi \mathrm{d}x \to \int f v_x \phi \mathrm{d}x$，并且 $v_n \to v$属于 L^∞意味着$\int f v_n \phi_x \mathrm{d}x \to \int f v \phi_x \mathrm{d}x$，如 $n \to \infty$所示。

我们注意到 $(\bar{v}, \bar{z}) \in C(f, \bar{v}, \bar{z})$和 $Q_f(\bar{v}, \bar{z}) < \infty$。令 $(v_n, z_n) \in C(f, \bar{v}, \bar{z})$为 Q的一个极小化序列。因此， $\{v_n\}_n$在 H^2 中有界，且 $\{z_n\}_n$在 L^2中有界。因此，存在一个子序列；经重新编号后，我们可以假设它就是整个序列， $v_n \to v$ 在 H_0^1 中收敛，且 $z_n \rightharpoonup z$ 在 L^2 中收敛到某个$v \in H^2 \cap H_0^1$和 $z \in L^2$。根据上述结果， $(v, z) \in C(f, \bar{v}, \bar{z})$。由于 Q_f关于 v 中的 H^1 收敛和 z 中的弱 L^2 收敛是序列下半连续的，我们得出结论： (v, z) 在 $C(f, \bar{v}, \bar{z})$上使Q_f达到最小值。

The 唯一性源于以下事实： Q_f是严格凸的，且 $C(f,\ \bar{v},\ \bar{z})$ 是凸的 x. □

现在我们通过一阶变分刻画上述解 $(v, z) = S(\bar{v}, \bar{z})$。注意到条件 (9) 蕴含 $(v - \bar{v}) f_x$ 属于 L^2，也就是说，对于所有 $\phi \in H_0^1(0,1)$，都有 $\langle (v - \bar{v}) f_x, \phi \rangle = \int_0^1 (z - \bar{z})\phi$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 H^{-1} 与 H_0^1 之间的对偶配对。容易证明，对于$f \in L^2(0,1)$ 和 $u \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$，条件 $uf_x \in L^2(0,1)$ 等价于 $uf \in H^1(0,1)$。这促使我们引入空间

$$R(f) = \left\{ u \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \ :\ uf \in H^1(0,1) \right\}. \tag{10}$$

注意，对于 $u \in R(f)$ $uf_x = (uf)_x - u_x f \in L^2$。我们还指出，如果 $f \in H^1$则 $R(f) = H^2(0,\ 1) \cap H_0^1(0,\ 1)$。

引理 2.5. 考虑 $f \in L^2(0,1)$, $\bar{v} \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$和 $\bar{z} \in L^2(0,1)$。那么 $(v, z) = S(\bar{v}, \bar{z})$当且仅当 $v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $z \in L^2(0,1)$并且

$$\forall u \in R(f) \qquad \int_0^1 \kappa v u + \lambda v_x u_x + \varepsilon v_{xx} u_{xx} + ((v - \bar{v}) f_x + \bar{z})(u f_x) \mathrm{d}x = 0. \tag{11}$$

证明。 如果 $(v, z) = S(\bar{v}, \bar{z})$那么 $v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $z \in L^2(0,1)$。取 $u \in \mathbb{R}(f)$和 $h = uf_x$，它属于 L^2，由于 $u \in R(f)$，我们注意到 $(v + su, z + sh) \in C(f, \bar{v}, \bar{z})$。 Q_f在 (v, z) 处的一阶变分给出条件 (11)。

现在假设 $v \in H^2(0,\ 1) \cap H_0^1(0,\ 1)$、 $z \in L^2(0,\ 1)$，并且式（11）成立。令 $(\tilde{v},\ \tilde{z}) = S(\bar{v},\ \bar{z})$。根据上述结果，对于 $(\tilde{v},\ \tilde{z})$，用 $(v,\ z)$代替时，式（11）同样成立。此外注意到 $v - \tilde{v} = (v - \bar{v}) - (\tilde{v} - \bar{v}) \in R(f)$。取 $u = v - \tilde{v}$ 并将式（11）的两种形式相减，得到

$$\int_0^1 \kappa (v - \tilde{v})^2 + \lambda (v_x - \tilde{v}_x)^2 + \varepsilon (v_{xx} - \tilde{v}_{xx})^2 + ((v - \tilde{v}) f_x)^2 \mathrm{d}x = 0$$

因此 $v = \tilde{v}$ 且 $z = \tilde{z}$。 □

值得注意的是，如果 $f \in H^1(0,1)$，那么 $R(f) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$，条件 (11) 意味着对于 $g = -f_x \bar{v} + \bar{z}$， v 是以下方程的弱解：

$$\begin{aligned} \varepsilon v_{xxxx} - \lambda v_{xx} + \kappa v + f_x^2 v &= -f_x g \quad \text{on } (0,1) \\ v &= 0 \quad \text{at } \{0,1\} \\ v_{xx} &= 0 \quad \text{at } \{0,1\}. \end{aligned} \tag{12}$$

上述引理使我们能够刻画切向速度，即定义如下：

$$\mathrm{Tan}_f = \big\{(v,z) \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \ : \ (v,z) = S(v,z)\big\}. \tag{13}$$

引理 2.5 给出 一对 $(v,\ z) \in H^2(0,\ 1) \cap H_0^1(0,\ 1) \times L^2(0,\ 1)$ 属于 Tan$f$ 当且仅当 f

$$\forall u \in R(f) \qquad \int_0^1 \kappa v u + \lambda v_x u_x + \varepsilon v_{xx} u_{xx} + z u f_x \mathrm{d}x = 0. \tag{14}$$

在 $f \in H^1(0,\ 1)$ 这一特殊情形下，我们可以将 Tan$f$ 刻画为由满足以下条件的对 $(v,\ z)$ 构成的集合：$z \in L^2(0,\ 1)$ 且 $v \in H^2(0,\ 1) \cap H_0^1(0,\ 1)$ 是.....的弱解

$$\begin{aligned} \varepsilon v_{xxxx} - \lambda v_{xx} + \kappa v &= -f_x z \quad \text{on } (0,1) \\ v &= 0 \quad \text{at } \{0,1\} \\ v_{xx} &= 0 \quad \text{at } \{0,1\}. \end{aligned} \tag{15}$$

我们还要指出，若 $u \in R(f)$，那么由于一维的 H^1 函数是连续的，因此 uf 和 u 都连续。由此可知，$f = uf/u$ 在 $u \neq 0$所在的集合上必定连续。换言之，若 f 在某个 x 处没有连续的代表元，那么所有函数 $u \in R(f)$在 x处都等于零；$u(x) = 0$。特别地，若 f 处处不连续，则 $R(f)$ 中的唯一 u 是零函数。因此，若 f处处不连续，则 $\mathrm{Tan}_f = H^2(0,\ 1) \cap H_0^1(0,\ 1) \times L^2(0,\ 1)$，也就是说，每一对都是切向对。

2.3. 最小化路径的存在性。这里我们证明作用量 (2) 的极小化子存在

定理 2.6。考虑 f_0、$f_1 \in L^2(0$、$1)$。存在一条可容许路径 $(f$、v、$z) \in \mathcal{A}(f_0$、$f_1)$，使作用量(2)达到最小。

在证明定理 2.6 之前，我们首先建立输运方程的解的若干性质。这些结果和相关技巧都是标准的，现将其列出以确保完备性。

引理 2.7。给定 $v \in \mathcal{V}$、$z \in L^2((0$、$1)^2)$。设 $f_0 \in L^2(0$、$1)$。如果 $f \in L^2((0$、$1)^2)$ 是初值问题的弱解

$$f(\cdot,0) = f_0, \quad \partial_t f + \partial_x f \cdot v = z \quad on\ [0,1]^2,$$

即对于每个 $\phi \in C^\infty([0$、$1]^2)$，(4) 成立，则 f 具有如下表示：对于几乎处处的 x、t，其中 $[0$、$1]^2$，

$$f(\Phi(x,t),t) = f_0(x) + \int_0^t z(\Phi(x,s),s)\,\mathrm{d}s, \tag{16}$$

其中，Φ 是向量场 v的流：

$$\partial_t \Phi(x,t) = v(\Phi(t,x),t), \quad \Phi(0,x) = x. \tag{17}$$

由此可知，弱解 f 是唯一的。

~ ~证明。将 f_0、z、v、f在 $[0$、$1]$之外延拓为零，并将这些延拓分别记为 $\tilde{z}$、f_0、$\tilde{v}$、f。注意到$\tilde{v} \in L^2(0,\ 1$、$W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$，因为 $H^2(0$、$1)$嵌入于 $W^{1,\infty}(0$、$1)$，$v(0$、$\cdot) \equiv 0$，$v(1$、$\cdot) \equiv 0$，且零延拓保持利普希茨常数不变。

则 $\tilde{f} \in L^2(0,\ 1,\ L^2(\mathbb{R}))$ 满足：对于所有在 $\mathbb{R} \times [0,\ 1)$中具有紧支集的测试函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0,\ 1])$

$$-\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \tilde{f} \partial_t \phi \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_0 \phi(x,0)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\tilde{v}\partial_x \phi + \phi \partial_x \tilde{v})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^1 \int_0^1 \phi \tilde{z} \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由于 $\tilde{v}$ 关于空间变量是利普希茨的，输运方程的解的表示（参见 [1]中的命题2.3）对于几乎处处的 x

$$\tilde{f}(\tilde{\Phi}(x,t),t) = \tilde{f}_0(x) + \int_0^t \tilde{z}(\tilde{\Phi}(x,s),s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1],$$

˜其中 Φ 是向量场 $\tilde{v}$ 的流，满足微分方程

$$\partial_t \tilde{\Phi}(x,t) = \tilde{v}(\tilde{\Phi}(x,t),t), \quad \tilde{\Phi}(0,x) = x$$

对每个 t 均成立。注意，由于 $\tilde{v}(x,\ t) = 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}\backslash(0,\ 1)$ 以及所有 $t \in [0,\ 1]$均成立，根据流映射的唯一性˜ ˜，对于几乎处处的 $x \in (0,\ 1)$, $\Phi(x,\ t) \in (0,\ 1)$ 对所有 t 均成立。定义 $\Phi(x,\ t) := \Phi(x,\ t)\mathbb{1}_{\{x\in[0,\ 1]\}}$。那么 Φ 是 v 的流，并且对于几乎处处的 x 属于 $[0,\ 1]$,

$$f(\Phi(x,t),t) = f_0(x) + \int_0^t z(\Phi(x,s),s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0,1].$$

□

备注 2.8。 [作用量极小化路径的表示公式。] 注意，如果 $z \in L^2((0,\ 1)^2)$ 是 $\partial_t z + \partial_x(zv) = 0$ 的弱解，并且 v 满足前一个引理的条件，那么它就是 $\partial_t z + (\partial_x z)v = -z\partial_x v$ 的弱解。因此

$$z(\Phi(x,t),t) = z(x,0) - \int_0^t z(\Phi(x,s),s)v_x(\Phi(x,s),s)\mathrm{d}s$$

这是该常微分方程的积分形式，其解为

$$z(\Phi(x,t),t) = z(x,0)\,e^{-\int_0^t v_x(\Phi(x,s),s)\mathrm{d}s}, \tag{18}$$

其中， Φ 是 v的流。这里需要强调的是， v_x 始终表示 v 关于第一个变量的偏导数，而不是复合函数的导数。

设 $J(x、\ t) = e^{-\int_0^t v_x(\Phi(x_、\ s)、\ s)\mathrm{d}s}$。我们有如下表示式:

$$f_1(\Phi(x,1)) = f_0(x) + \int_0^1 z(\Phi(x,t),t)\,\mathrm{d}t = f_0(x) + z(x,0)\int_0^1 J(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

其中，第一个等号由引理 2.7 得出。这使我们能够确定 $z(x、\ 0)$ ，从而得到

$$z(\Phi(x,t),t) = (f_1(\Phi(x,1)) - f_0(x))\,\frac{J(x,t)}{\int_0^1 J(x,\tau)\mathrm{d}\tau}. \tag{19}$$

因此，对于 $f(\Phi(x、\ t)、\ t)$，我们有如下公式

$$\begin{aligned} f(\Phi(x,t),t) &= f_0(x) + \int_0^t z(\Phi(x,s),s)\,\mathrm{d}s = f_0(x) + (f_1(\Phi(x,1)) - f_0(x))\,\frac{\int_0^t J(x,s)\mathrm{d}s}{\int_0^1 J(x,s)\mathrm{d}s} \\ &= (1-\eta(x,t))\,f_0(x) + \eta(x,t)\,f_1(\Phi(x,1)), \quad \text{where } \eta(x,t) = \frac{\int_0^t J(x,s)\mathrm{d}s}{\int_0^1 J(x,s)\mathrm{d}s}. \end{aligned} \tag{20}$$

公式 (20) 意味着，对于任意 $t \in [0、\ 1]$ 以及固定的 $x \in [0、\ 1]$, $f(\Phi(x、\ t)、\ t)$ 都是初始条件 $f_0(x) = f_0(\Phi(x、\ 0))$ 与终端时刻条件 $f_1(\Phi(x、\ 1))$之间的插值，其由速度 v确定的时变权函数为 $\eta(x、\ t)$ 。

注意，如果 $(f,\ v,\ z) \in \mathcal{A}(f_0,\ f_1)$ 那么 f 是 $f_t + f_x v = z$ 的弱解。我们在第 3.1 节的公式 (36) 中证明，若路径是作用量的临界点，则 z 满足连续性方程$z_t + (zv)_x = 0$。公式 (20) 和 (19) 给出了 f 和 z 的拉格朗日表示公式。

引理 2.9。设 $f_0 \in L^2(0、1)$、$v \in L^2(0、1、H^2(0、1)\cap H_0^1(0、1))$、$z \in L^2((0、1)^2)$。若 f 有表示(16)，则

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \exp(\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))})(\|f_0\|_{L^2(0,1)}+\|z\|_{L^2((0,1)^2)}).$$

Proof. 令 $D\Phi(\cdot,t)$ 为 $\Phi(\cdot,t)$ 的空间导数。注意，对于每个 $x\in[0,1]$

$$\partial_t D(\Phi(x,t)) = D(\partial_t\Phi(x,t)) = D(v(\Phi(x,t),t)) = v_x(\Phi(x,t),t))D\Phi(x,t).$$

对 t 积分，由于 $D\Phi(x,0))=1$

$$D\Phi(x,t) = \exp\left(\int_0^t v_x(\Phi(x,s),s))\,\mathrm{d}s\right) \leqslant \exp(\sqrt{2t}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}), \tag{21}$$

w这里的常数 $\sqrt{2}$ 来自嵌入 $H_0^1((0,1))\hookrightarrow L^\infty((0,1))$。因此

$$\exp(-\sqrt{2t}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}) \leqslant D\Phi(x,t) \leqslant \exp(\sqrt{2t}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}) \tag{22}$$

因为对于每个 $t\in[0,1]$

$$\left|\int_0^t v_x(\Phi(\,\cdot\,,s),s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^t \|v_x(\Phi(\,\cdot\,,s),s))\|_{L^\infty(0,1)}\,\mathrm{d}s \leqslant \sqrt{2t}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}. \tag{23}$$

根据引理 2.7，对于几乎处处的 $y\in[0,1]$, $t\in[0,1]$,

$$f(y,t) = f_0(\Phi(\,\cdot\,,t)^{-1}(y)) + \int_0^t z(\Phi(\Phi(\,\cdot\,,t)^{-1}(y),s),s)\,\mathrm{d}s. \tag{24}$$

通过变量替换，对于 (24) 右侧的第一项

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_0^2(\Phi(\,\cdot\,,t)^{-1}(y))\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 f_0^2(\Phi(\,\cdot\,,t)^{-1}(y))D\Phi(\,\cdot\,,t)^{-1}D\Phi(\,\cdot\,,t)\,\mathrm{d}y\\ &\leqslant \|f_0\|_{L^2(0,1)}^2\exp(\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}).\end{aligned}$$

对于 (24) 右侧的第二项，使用估计 (22) 两次并应用詹森不等式，

$$\left\|\int_0^t z(\Phi(\Phi(\,\cdot\,,t)^{-1},s),s)\,\mathrm{d}s\right\|_{L^2(0,1)} \leqslant \exp(\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))})\|z\|_{L^2((0,1)^2)}$$

将上述估计代入 (24)，我们得到

$$\begin{aligned}\|f(\cdot,t)\|_{L^2} &\leqslant \|f_0\|_{L^2(0,1)}\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}\right) + \exp(\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))})\,\|z\|_{L^2((0,1)^2)}\\ &\leqslant \exp(\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))})(\|f_0\|_{L^2(0,1)}+\|z\|_{L^2((0,1)^2)}).\end{aligned}$$

Ther因此，最大值$_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f(\cdot,\ t)\|_{L^2(0,\ 1)}\leqslant$指数$(\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,\ 1,\ H^2(0,\ 1))})(\|f_0\|_{L^2(0,\ 1)}+\|z\|_{L^2((0,\ 1)^2)})$.

□

注 2.10。我们注意到，可以结合注 2.8 和公式 (21)，得到 $\partial_t z+\partial_x(vz)$ 的弱解的另一种表示。也就是说，z 由以下条件刻画：

$$z(\Phi(x,t),t)\,D\Phi(x,t) = z(x,0)$$

对几乎处处的 x,
t。

引理 2.11。 给定 $v \in \mathcal{V}$、 $z \in L^2((0、\ 1)^2)$。设 $f_0 \in L^2(0、\ 1)$。若 $f \in L^2((0、\ 1)^2)$ 是初值问题的弱解

$$f(\cdot, 0) = f_0, \quad \partial_t f + \partial_x f \cdot v = z,$$

也就是说，对于每个 $\phi \in C^\infty([0、\ 1]^2)$,

$$\begin{aligned} &-\int_0^1 \int_0^1 f \partial_t \phi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_0^1 f_0(x)\phi(x,0)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = \int_0^1 \int_0^1 f\phi\partial_x v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \int_0^1 f\partial_x \phi v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \int_0^1 \phi z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{25}$$

于是 $f \in C(01、\ H^{-1})$ 以及

$$\|\partial_t f\|_{L^2(0,1,H^{-1})} \leqslant \left[1 + \|v\|_{L^2(0,1,H^2)} \exp(\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2)})\right](\|f_0\|_{L^2(0,1)} + \|z\|_{L^2((0,1)^2)}).$$

证明。 对于任意 $\phi \in L^2((0、\ 1)、\ H^1(0、\ 1))$

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^1 \int_0^1 (f\partial_x v + z)\,\phi \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^1 \int_0^1 f v \partial_x \phi \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\ &\qquad \leqslant \int_0^1 \|f(\cdot,t)\|_{L^2}\|\partial_x v(\cdot,t)\|_{L^2}\|\phi(\cdot,t)\|_{L^\infty} + \|f(\cdot,t)\|_{L^2}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|\partial_x\phi(\cdot,t)\|_{L^2}\mathrm{d}t \\ &\qquad\quad + \|z\|_{L^2((0,1)^2)}\|\phi\|_{L^2((0,1)^2)} \\ &\qquad \leqslant \left(\sqrt{2}\|f\|_{L^\infty(0,1,L^2)}\,\|v\|_{L^2(0,1,H^1)} + \|z\|_{L^2((0,1)^2)}\right)\|\phi\|_{L^2(0,1,H^1)}, \end{aligned}$$

因此，如果我们将 $\partial_t f(t)$ 定义为从 H^1 到 $\mathbb{R}$ 的映射，其定义为

$$\langle \partial_t f(t), g\rangle = \int_0^1 (f(\,\cdot\,,t)\partial_x v(\,\cdot\,,t) + z(\,\cdot\,,t))g \,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(\,\cdot\,,t)v(\,\cdot\,,t)\partial_x g \,\mathrm{d}x$$

我们看到， $\partial_t f \in L^2(0、\mathbf{1}、\ H^{-1}(0、\ 1))$，并且其范数受上述不等式右端控制。此外，根据弱解的定义，（4）推出 $\partial_t f$ 确实是 f 在 H^{-1}中的时间弱导数。因此， $f \in C(0、\mathbf{1}、\ H^{-1})$。

因此，结合引理 2.9 和上述估计，我们得出

$$\begin{aligned} \|\partial_t f\|_{L^2(0,1,H^{-1})} &\leqslant \|z\|_{L^2((0,1)^2)} + \sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2)}\|f\|_{L^\infty(0,1,L^2)} \\ &\leqslant [1 + \sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2)} \exp(\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2)})] \cdot (\|f_0\|_{L^2(0,1)} + \|z\|_{L^2((0,1)^2)}) \end{aligned} \tag{26}$$

□

现在我们证明定理 2.6。

定理 *2.6* 的证明。 为了应用变分法直接法证明最小化路径的存在性，我们证明紧性和下半连续性。

我们回顾一下，根据命题 2.1 的断言 **(i)**，存在一条有限作用量的路径。因此，对任意极小化序列 (f_n, v_n, z_n)，我们有 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在 $L^2(0,\mathbf{1},H^2 \cap H_0^1)$ 中有界，且$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在 $L^2((0,1)^2)$中有界。由于 $(L^2((0,1), H^s(0,1)))^* = L^2((0,1), H^{-s}(0,1))$ 对任意 s 成立，巴拿赫-阿劳格鲁定理允许我们提取一个子序列，仍记为 (v_n, z_n)，使得 $v_n \rightharpoonup v$和 $z_n \rightharpoonup z$分别在 $L^2(0,\mathbf{1},H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1))$ 和 $L^2((0,1)^2)$中弱收敛。

由于 $H^2(0,1) \hookrightarrow C^1(0,1)$, $v_n \in L^2(0,\mathbf{1},C^1(0,1))$。根据引理 2.7， f_n可表示为式 **(16)**，其中 v, z, Φ 分别替换为 v_n, z_n, Φ_n。

我们声称，沿着某个子序列

$$f_n \to f \quad \text{in } L^2(0,1,H^{-\frac{1}{2}}(0,1)). \tag{27}$$

首先注意到，根据引理 2.9，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 L^∞(0中的一个有界集，1，$L^2(0,\ 1)$)。存在 $f\in L^\infty(0,\ 1,\ L^2(0,\ 1))$，使得在取子序列后，$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$在 L^∞(0中，1，$L^2(0,\ 1)$)。重新编号后，我们假设该子序列就是整个序列。此外，

$$\|f\|_{L^\infty(0,1,L^2(0,1))} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^\infty(0,1,L^2(0,1))}.$$

将引理 2.11 应用于 $(f_n, v_n, z_n), \{\partial_t f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $L^1(0,1,H^{-1}(0,1))$ 中的有界集。根据 Lions-Aubin 引理 [12],，因为 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(0,1,L^2(0,1))$ 中的有界集，并且 $H^{-1} \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^2$ 紧地，存在 $\tilde{f}$ 属于 $L^2(0,1,H^{-\frac{1}{2}}(0,1))$，使得取一个子序列（仍记为 f_n）后，有 $f_n \to \tilde{f}$ 属于 $L^2(0,1,H^{-\frac{1}{2}}(0,1))$。事实上，$\tilde{f} = f$。也就是说，$f$ 是 f_n 在 $L^\infty(0,1,L^2(0,1))$ 中的弱*极限，因此也是在 $L^2(0,1,H^{-\frac{1}{2}}(0,1))$ 中的弱极限。由弱极限的唯一性，$f = f$。

总结如下：存在 $f\in L^2((0,\ 1)^2)$，$v\in\mathcal{V}$和 $z\in L^2((0,\ 1)^2)$ 使得

$$\begin{aligned}
f_n &\overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{in } L^\infty(0,1,L^2(0,1))\\
f_n &\to f \quad \text{in } L^2(0,1,H^{-\frac{1}{2}}(0,1))\\
z_n &\rightharpoonup z \quad \text{in } L^2(0,1,L^2(0,1))\\
v_n &\rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(0,1;H^2(0,1)).
\end{aligned}$$

现在令（4）中的项取极限。由于 $\phi\in C^\infty([0,\ 1]^2)$。首先考虑 $\int_0^1\int_0^1 f_n\phi\partial_x v_n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$这一项。

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1\int_0^1 f_n\phi\partial_x v_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^1\int_0^1 f\phi\partial_x v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right|\\
&\qquad\leqslant \left|\int_0^1\int_0^1 f_n\phi\partial_x v_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^1\int_0^1 f\phi\partial_x v_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right|\\
&\qquad\quad + \left|\int_0^1\int_0^1 f\phi\partial_x v_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^1\int_0^1 f\phi\partial_x v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right|\\
&\qquad\leqslant \int_0^1 \|f_n - f\|_{H^{-\frac{1}{2}}(0,1)}\|\phi\partial_x v_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(0,1)}\,\mathrm{d}t + \left|\int_0^1\int_0^1 f\phi(\partial_x v_n - \partial_x v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right|\\
&\qquad\leqslant \|f_n - f\|_{L^2((0,1),H^{-\frac{1}{2}}(0,1))}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\phi\partial_x v_n\|_{L^2((0,1),H^{\frac{1}{2}}(0,1))}\\
&\qquad\quad + \left|\int_0^1\int_0^1 f\phi(\partial_x v_n - \partial_x v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| =: A_1 + B_1,
\end{aligned}$$

考虑 A_1。对于每个 t，$\|\phi\partial_x v_n\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leqslant C\|\phi\|_{H^1}\|\partial_x v_n\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leqslant C\|\phi\|_{C^1}\|\partial_x v_n\|_{H^{\frac{1}{2}}}$根据Sobolev函数的乘法性质（见 [5]的定理7.4）。于是

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\phi\partial_x v_n\|_{L^2((0,1),H^{\frac{1}{2}}(0,1))} &\leqslant C\max_{t\in[0,1]}\|\phi(t)\|_{C^1}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\partial_x v_n\|_{L^2((0,1),H^{\frac{1}{2}}(0,1))}\\
&\leqslant C_\phi\sup_{n\in\mathbb{N}}\|v_n\|_{L^2((0,1),H^2(0,1))},
\end{aligned}$$

其中常数 C_ϕ 仅取决于 ϕ。将 $f_n\to f$与 $L^2(0,\ 1,\ H^{-\frac{1}{2}}(0,\ 1))$结合可得，当 $n\to\infty$时，$A_1\to 0$。由于 $\phi f\in L^2(0,\ 1,\ L^2(0,\ 1))$，它可以作为 $L^2(0,\ 1,\ H^1(0,\ 1))$中的测试函数。因此，采用类似的论证，

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f_n v_n\partial_x\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^1\int_0^1 f v\partial_x\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \to 0.$$

对于（4）中的其他项，取极限是显然的。因此 f 满足（4）。由引理 2.11，$f\in C(0,\ 1,\ H^{-1}(0,\ 1))$。

作用泛函的下半连续性直接由范数关于弱收敛的下半连续性得出。因此 $(f,\ v,\ z)$ 是一个极小化子。

□

证明 d_{HV} 是 $L^2(0,\ 1)$ 上的度量是直接的。特别地，通过以弧长参数化的方式连接极小化子，可以得到三角不等式，其中

$$d_{HV(\kappa,\lambda,\varepsilon)} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1 \kappa v^2 + \lambda v_x^2 + \varepsilon v_{xx}^2 + z^2 \,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t = \sqrt{A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f,v,z)}.$$

这种重新参数化的存在性源于重新参数化结果，该结果表明，任意可容许路径 $(f,\ v,\ z)$ 都可以通过 $[0,\ 1]$. 的任意绝对连续微分同胚按时间重新参数化。该引理只是关于将连续性方程的分布解重新缩放的引理的一个变体（参见 [2]的引理 8.1.3）。

引理 2.12。 设 $\mathrm{t}\colon = s \in [0、\ 1] \to \mathrm{t}(s) \in [0、\ 1]$ 是严格递增的绝对连续映射，且其逆映射 $\mathrm{s}\colon = \mathrm{t}^{-1}$ 也是绝对连续的。此外，$\mathrm{t}(0) = 0、\ \mathrm{t}(1) = 1$。则 $(f(x、\ t)、\ v(x、\ t)、\ z(x、\ t))$ 是以下方程的弱解

$$\partial_t f + \partial_x f \cdot v = z \quad in \quad [0,1]\times[0,1]$$

满足边界条件 $f(\cdot,0) = f_0, f(\cdot,1) = f_1$ 当且仅当

$$\hat{f}(x,s) =: f(x,\mathrm{t}(s)),\quad \hat{v}(x,s) = \mathrm{t}'(s)v(x,\mathrm{t}(s)),\quad \hat{z}(x,s)) := \mathrm{t}'(s)z(x,\mathrm{t}(s))$$

是.....的弱解

$$\partial_s \hat{f} + \nabla \hat{f}\cdot\hat{v} = \hat{z} \quad in \quad [0,1]\times[0,1]$$

ˆ ˆ满足边界条件 $f(\cdot,0) = f_0, f(\cdot,1) = f_1$。

引理 2.13. 距离 d_{HV} 是 $L^2(0,1)$上的度量。

证明。 我们断言，正性可由命题 2.6 中极小化子的存在性推出。若$f_0 = f_1$ 属于 $L^2(0,1)$，则显然有 $d_{HV}(f_0,f_1) = 0$。考虑 $f_0 \neq f_1$ 属于 $L^2(0,1)$的情形。注意，对 $(f,v,z) \in_1 \mathcal{A}$，我们可以按时间弧长重新参数化，使量$\left(\int_0^1 \kappa v^2(x,s) + \lambda v_x^2(x,s) + \varepsilon v_{xx}^2(x,s) + z^2(x,s)\,\mathrm{d}x\right)^2$ 在 s中为常数，其中重新参数化记为 $(f,\hat{}v,\hat{}z)$。特别地，重新参数化及其逆几乎处处可微。应用引理 2.12 并作变量替换，由詹森不等式可得

$$A_{(\kappa,\lambda,\varepsilon)}(\hat{f},\hat{v},\hat{z}) \leqslant A_{(\kappa,\lambda,\varepsilon)}(f,v,z).$$

根据詹森不等式，如果 (f,v,z) 是 $A(f,v,z)$ 的极小化子，那么它同时也是 $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1 \kappa v^2 + \lambda v_x^2 + \varepsilon v_{xx}^2 + z^2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t$的极小化子。极小化子的存在意味着$d_{HV}(f_0,f_1) > 0$，因为否则极小化子 $f(x,t)$ 是常数，而 $f_0 \equiv f(\cdot,t) \equiv f_1$ 这将导致矛盾。

对称性直接由定义可得。三角不等式则由路径的连接得到。考虑 $f_0,f_1,f_2 \in L^2(0,1)$。令 $(f_{01},\ v_{01},z_{01})$ 为 f_0 与 f_1 之间的最小化路径，并令(f_{12},v_{12},z_{12}) 为 f_1 与 f_2之间的最小化路径。定义

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f_{01}(2t) & \text{for } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ f_{12}(2t-1) & \text{for } t \in (\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

$\tilde{v}(t)$ 和 $\tilde{z}(t)$是 d 以类似方式定义。它立即得出 $d_{HV}(f_0,\ f_2) \leqslant d_{HV}(f_0,\ f_1) + d_{HV}(f_1,\ f_2)$。

□

2.4. 度量空间的完备性及其拓扑的刻画。 到目前为止，我们已经证明 d_{HV} 是 L^2 上的一个度量。现在我们来证明其完备性。

命题 2.14。 度量空间 $(L^2(0,1), d_{HV})$ 是完备的。

证明。 注意到 $d_{HV(\kappa,\lambda,\varepsilon)} \asymp d_{HV(1,1,1)}$，只需考虑 $d_{HV(1,1,1)}$。

设 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,1)$ 是 d_{HV} 中的柯西序列。不失一般性，假设对于所有 $n \in \mathbb{N}$、$d_{HV}(g_1, g_n) \leqslant 1$ 均成立。根据命题 2.6，对于 $n > 1$，令 $(g_{1,n}, v_{1,n}, z_{1,n})$ 表示在可容许集 $\mathcal{A}(g_1, g_n)$ 上的作用量 $A(f, v, z)$ 的极小化子。于是，由引理 2.9 及 d_{HV} 的定义可得

$$\begin{aligned}\|g_n\|_{L^2(0,1)} &\leqslant \exp(\sqrt{2}\|v_{1,n}\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))})(\|g_1\|_{L^2(0,1)} + \|z_{1,n}\|_{L^2((0,1)^2)}) \\ &\leqslant \exp(\sqrt{2}d_{HV}(g_1,g_n))(\|g_1\|_{L^2(0,1)} + d_{HV}(g_1,g_n)) \\ &\leqslant \exp(\sqrt{2})(\|g_1\|_{L^2(0,1)} + 1).\end{aligned}$$

于是，巴拿赫-阿劳格鲁定理表明，存在一个子序列 g_{n_k} 弱收敛于某个 $g_\infty \in L^2(0,1)$，其收敛空间为 $L^2(0,1)$。我们将该子序列记为 $\{\tilde{g}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。

另一方面，存在进一步的子序列（重新标记为原子序列）$\{v_{1,n}\}$、$\{z_{1,n}\}$ 和 $v_{1,\infty}$，$z_{1,\infty}$ 使得

$$\begin{aligned} v_{1,n} &\rightharpoonup v_{1,\infty}, \quad \text{weakly in } L^2(0,1,H^2(0,1)), \\ z_{1,n} &\rightharpoonup z_{1,\infty}, \quad \text{weakly in } L^2((0,1)^2). \end{aligned}$$

同时，根据引理 2.11，$\{\partial_t g_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(0,1,H^{-1}(0,1))$中的有界集。于是，Lions-Aubin 引理表明，除去一个子序列外，$g_{1,n} \to g_{1,\infty}$ 在 $L^2(0,1,H^{-\frac{1}{2}}(0,1))$中收敛。此外，我们有 $g_{1,n} \rightharpoonup g_{1,\infty}$ 在 $L^\infty(0,1,L^2(0,1))$中弱*收敛。

除去一个子序列外，

$$\begin{aligned} g_n &\rightharpoonup g_\infty \quad \text{in } L^2(0,1) \\ g_{1,n} &\overset{*}{\rightharpoonup} g_{1,\infty} \quad \text{in } L^\infty(0,1,L^2(0,1)) \\ g_{1,n} &\to g_{1,\infty} \quad \text{in } L^2(0,1,H^{-\frac{1}{2}}(0,1)) \\ z_{1,n} &\rightharpoonup z_{1,\infty} \quad \text{in } L^2(0,1,L^2(0,1)) \\ v_{1,n} &\rightharpoonup v_{1,\infty} \quad \text{in } L^2(0,1,H^2(0,1)). \end{aligned}$$

通过与定理 2.6 的证明类似的论证，可以验证 $(g_{1,\infty}, v_{1,\infty}, z_{1,\infty})$ 属于可容许集 $\mathcal{A}(g_1, g_\infty)$。因此

$$d_{HV}^2(g_1,g_\infty) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|v_{1,n}\|^2_{L^2(0,1,H^2(0,1))} + \liminf_{n\to\infty} \|z_{1,n}\|^2_{L^2((0,1)^2)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} d_{HV}^2(g_1,g_n).$$

那么，不失一般性，我们可以在 $\{\tilde{g}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中取一个进一步的序列，使得对于每个 n，对于任意 $m \geqslant n$, $d_{HV}(\tilde{g}_m, \tilde{g}_n) < \frac{1}{n}$。将 g_1 替换为 $\tilde{g}_n$ 后，我们重复上述论证。于是我们有

$$d_{HV}^2(\tilde{g}_n, g_\infty) \leqslant \liminf_{m\to\infty} d_{HV}^2(\tilde{g}_n, \tilde{g}_m) < \frac{1}{n^2}.$$

现在我们有一个子序列 $\{\tilde{g}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，它在 d_{HV} 中收敛到 g_∞。对于任意 $\delta > 0$，存在 $K_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{K_1} < \frac{\delta}{2}$。并且存在 $K_2 > 0$，使得对于所有 $m_1, m_2 > K_2$, $d_{HV(g_{m_1}, g_{m_2})} < \frac{\delta}{2}$。取 $N = \max\{K_1, K_2\}$，

$$d_{HV}(g_n, g_\infty) \leqslant d_{HV}(g_n, \tilde{g}_N) + d_{HV}(\tilde{g}_N, g_\infty) < \delta,$$

由此可得，$g_n \to g_\infty$ 在 d_{HV}中。 □

我们的下一个目标是证明，在 d_{HV} 中的收敛意味着在 L^2 中的收敛。为此，我们先证明以下估计。

引理 2.15. 对于任意 f_0、$f_1 \in L^2(0,1)$ 和 $g_0 \in C^\infty$。设 (f, v, z) 是作用量在可容许集 $\mathcal{A}(f_0, f_1)$ 和 $\psi := \Phi(\cdot, 1)$上的极小化子，其中 $\Phi(x, t)$ 是 $v(x, t)$的流映射。定义 $g_1 = g_0 \circ \psi^{-1}$。

那么 $g_1 \in C$满足 $\int_0^1 |g_1'| \mathrm{d}x = \int_0^1 |g_0'| \mathrm{d}x$ 和

$$\|f_1 - g_1\|_{L^2} \leqslant \exp(\sqrt{2} d_{HV}(f_0, f_1)) \left[\|f_0 - g_0\|_{L^2} + d_{HV}(f_0, f_1)\right]. \tag{28}$$

证明。 ψ^{-1} 是一个 C^1 微分同胚，这立即推出 $g_1 \in C^1$ 和 $\int_0^1 |g_0'| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |g_1'| \mathrm{d}x$。回顾一下，根据 (22)，我们有

$$|D\Phi(\cdot, t)| \leqslant \exp(\sqrt{2t} \|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}), \quad \forall t \in [0,1].$$

特别地,

$$|D\psi| \leqslant \exp(\sqrt{2} \|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}). \tag{29}$$

根据引理 2.7，对于几乎处处的 $y \in [0, 1]$,

$$f_1(y) - g_1(y) = f_0(\psi^{-1}(y)) + \int_0^1 z(\Phi(\psi^{-1}(y), s), s) \,\mathrm{d}s - g_0(\psi^{-1}(y)).$$

通过与引理 2.9 的证明中类似的估计，我们有

$$\begin{aligned} \|f_1 - g_1\|_{L^2} &\leqslant \left\| \int_0^1 z(\Phi(\psi^{-1}(\,\cdot\,), s), s) \,\mathrm{d}s \right\|_{L^2} + \|f_0 \circ \psi^{-1} - g_0 \circ \psi^{-1}\|_{L^2} \\ &\leqslant \exp(\sqrt{2} \|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}) \|z\|_{L^2((0,1)^2)} + \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \|v\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}\right) \|f_0 - g_0\|_{L^2} \\ &\leqslant \exp(\sqrt{2} d_{HV}(f_0, f_1)) [\|f_0 - g_0\|_{L^2} + d_{HV}(f_0, f_1)]. \end{aligned} \tag{30}$$

□

定理 2.16。 令 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2(01)$。若 $f_n \to f$ 属于 d_{HV}，则 $f_n \to f$ 属于 L^2。

证明。只需证明结论 $d_{HV(1,\ 1,\ 1)}$。我们将证明：对于 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的任意子序列，都存在一个进一步的子序列收敛到 f 中的 L^2。

令 $K := 2\exp(\sqrt{2})$。任意选取 $0 < \delta < 1$。通过抽取子序列，不妨设对每个 n，$d_{HV}(f_n, f) \leqslant \frac{\delta}{3K} < 1$。由于 C^∞ 在 L^2中稠密，存在 $g \in C^\infty$ 使得 $\|f - g\|_{L^2} \leqslant \frac{\delta}{3K}$。对于任意 n，令 ψ_n为 v_n的时间 1 流映射，其中 (f_n, v_n, z_n) 表示作用量 $A(f, v, z)$ 在可容许集 $\mathcal{A}(f, f_n)$上的极小化子。若 $f_n \neq f$，取 $g_n := g \circ \psi_n^{-1}$；若 $f_n = f$，则取 $g_n = g$。

我们将证明 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $W^{1,\ 2}(0,\ 1)$ 中的一个有界集。因此不失一般性，我们假设 $f_n \neq f$。由引理 2.15,

$$\|f_n - g_n\|_{L^2} \leqslant \exp(\sqrt{2} d_{HV}(f, f_n))[\|f - g\|_{L^2} + d_{HV}(f, f_n)] < \frac{\delta}{3}. \tag{31}$$

另一方面，由变量替换可得,

$$\|g_n\|_{L^2}^2 \leqslant \|g\|_{L^2}^2 \|D\psi_n\|_{L^\infty} \leqslant \|g\|_{L^2}^2 \exp(\sqrt{2} \|v_n\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))}),$$

其中我们使用了估计式 (29)，将 ψ, v 替换为 ψ_n, v_n。于是有

$$\|g_n\|_{L^2} \leqslant \|g\|_{L^2} \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} d_{HV}(f, f_n)\right) \leqslant \|g\|_{L^2} \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

这意味着 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 L^2 中的有界集。由于 ψ_n^{-1} 是 $v_n(\cdot,1-t)$ 的时间 1 流，根据 (21),

$$\int_0^1 |Dg_n|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \exp(\sqrt{2}\|v_n\|_{L^2(0,1,H^2(0,1))})\|g'\|_{L^2}^2 \leqslant \exp(\sqrt{2}d_{HV}(f,f_n))\|g'\|_{L^2}^2$$

这意味着 $\{Dg_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 L^2中的有界集。因此 $g_n \in W^{1,\,2}(0,\ 1)$ 和

$$\sup_n \|g_n\|_{W^{1,2}} < \exp(\sqrt{2})\big[\|g\|_{L^2} + \|g'\|_{L^2}^2\big].$$

因此，$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 W^1中的有界集，$^2(0,\ 1)$。根据 Morrey 不等式和 Arzelà–Ascoli 紧性判据，存在一个子序列 g_{n_k}，它在 L^2中是柯西序列。对于充分大的 N，任意 $i,\ j > N$，我们都有 $\|g_{n_i} - g_{n_j}\|_{L^2} < \frac{\delta}{3}$。因此 $^-$

$$\|f_{n_i} - f_{n_j}\|_{L^2} \leqslant \|f_{n_j} - g_{n_j}\|_{L^2} + \|g_{n_j} - g_{n_i}\|_{L^2} + \|f_{n_i} - g_{n_i}\|_{L^2} < \delta.$$

这意味着，取一个子序列后，$\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 L^2中的柯西序列。根据 L^2的完备性，它收敛到某个 $\tilde{f} \in L^2$。根据弱极限的唯一性，$\tilde{f}$ 也是该子序列在 L^2中的弱极限，因此我们应有 $f = f$（回想一下，f 是 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$的一个子序列的弱极限。）

因此，除去一个子序列外，$f_n \to f$ 属于 L^2。对于任意子序列 $f_n \to f$，都可以取其一个进一步的子序列，使其收敛于 f。这证明了对于整个序列，$f_n \to f$ 属于 L^2。□

3. Properties of geodesics.

3.1. 欧拉–拉格朗日方程。 假设 $(f,\ v,\ z) \in \mathcal{A}(f_0,\ f_1)$ 是作用量 (2) 在可容许集 (3) 上的极小化子。下面我们描述一阶最优性条件：首先针对一般路径，给出 (33) 和 (36)；然后在假设 $f_0,\ f_1 \in H^1(0,\ 1)$下，此时所有条件均为偏微分方程。

为了求得一阶最优性条件，换言之，即欧拉–拉格朗日方程，我们首先固定 f，并对 v 和 z 作一阶变分。受第 2.2 节类似推理的启发，我们引入空间,

$$R_T(f) = \big\{u \in L^2(0,1,H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))\ : uf \in L^2(0,1,H^1(0,1))\big\}. \tag{32}$$

注意，对于 $u \in R_T(f)$，对于几乎处处的 $t \in [0,\ 1]\, uf_x = (uf)_x - u_x f \in L^2((0,\ 1)^2)$。

现在我们刻画与引理 2.5 中类似的最优性条件。取 $u \in R_T(f)$ 和$h = uf_x$，其属于 $L^2((0,\ 1)^2)$，则对于任意 $s \in \mathbb{R}$ $(f,\ v + su,\ z + sh)$ 满足方程（4），因此 $(f,\ v + su,\ z + sh) \in \mathcal{A}(f_0,\ f_1)$。作用量（2）的一阶变分表明，$(f,\ v,\ z)$满足:

$$\forall u \in R_T(f) \qquad \int_0^1\int_0^1 \kappa vu + \lambda v_x u_x + \varepsilon v_{xx}u_{xx} + z(uf_x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{33}$$

接下来我们转而讨论 z 的最优性。为进行论证，记所考虑作用量的极小化子为 $(\bar{f},\ \bar{v},\ \bar{z})$。于是 $(\bar{f},\ \bar{z})$ 是 $\tilde{A}(z) = \int_0^1\int_0^1 z^2\mathrm{d}xdt$ 在集合 $(f,\ v,\ z) \in \mathcal{A}(f_0,\ f_1)$ 上的临界点，其中 $v = \bar{v}$。这是一个在线性约束下的凸泛函。因此，对于固定的 $\bar{v}$，$(f,\ \bar{z})$ 是全局极小值点。

此外，根据引理 2.7，约束 $(f,\ v,\ z) \in \mathcal{A}(f_0,\ f_1)$（其中 $v = \bar{v}$）可表示如下：对于几乎处处的 $x,\ t$

$$f(\Phi(x,t),t) = f_0(x) + \int_0^t z(\Phi(x,s),s)\,\mathrm{d}s. \tag{34}$$

换言之，z 需要满足：对于几乎处处的 $x \in (0,1)$

$$f_1(\Phi(x,1)) - f_0(x) = \int_0^1 z(\Phi(x,t),t)\,\mathrm{d}t \tag{35}$$

而 $f(\cdot,t)$ 对于 $0<t<1$ 由 (34) 定义。由于 f 不会直接进入作用量，我们只对 z 进行最小化，并由 (34) 定义 f。经过变量替换 $\tilde{\mathcal{A}}(z)=\int_0^1\int_0^1 z^2(\Phi(x,t),t)D\Phi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$。因此，若定义 $w(x,t)=z(\Phi(x,t),t)$，则问题转化为

$$\text{minimize} \int_0^1\int_0^1 w^2(x,t)D\Phi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\text{under constraint: } f_1(\Phi(x,1))-f_0(x)=\int_0^1 w(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{for a.e. } x\in(0,1).$$

根据柯西-施瓦茨不等式，该问题的极小化子 w 应满足 $w(x,\ t)D\Phi(x,\ t)$ 与时间˜无关。因此，使 z 最小化的 A 满足：对于几乎处处的 x

$$z(\Phi(x,t),t)D\Phi(x,t)=:z(x,0).$$

根据注记 2.10，这意味着 z 是下式的弱解

$$\partial_t z+\partial_x(zv)=0 \qquad \text{on } (0,1)^2, \tag{36}$$

这就是关于 z所需的一阶条件。

若 $f_0,\ f_1\in H^1(0,\ 1)$ 那么我们将在下面的命题 3.1 中证明，最小化路径 $f\in L^2(0,\ 1,\ H^1(0,\ 1))$。在这种情况下，$f,\ v,\ z$所满足的欧拉–拉格朗日方程，结合属于 $\mathcal{A}(f_0,\ f_1)$ 的条件，可以表示如下：

$$\varepsilon v_{xxxx}-\lambda v_{xx}+\kappa v+zf_x=0 \text{ weakly on } (0,1)^2 \tag{37}$$

$$v=0 \text{ and } v_{xx}=0 \text{ on } \partial\Omega\times[0,1] \tag{38}$$

$$z_t+(zv)_x=0 \text{ weakly on } (0,1)^2 \tag{39}$$

$$f_t+f_xv-z=0 \text{ weakly on } (0,1)^2 \tag{40}$$

$$f(\cdot,0)=f_0, \text{ and } f(\cdot,1)=f_1. \tag{41}$$

第一组方程和边界条件直接由（33）得到。其他条件与之前相同。

3.2. **测地线的正则性**。 本小节介绍有关测地线正则性的结果。 cs.

命题 3.1。 设 f_0、$f_1\in H^1$，并令 $(f、\ v、\ z)\in\mathcal{A}(f_0、\ f_1)$ 为一条作用量极小化路径。则 $f\in L^\infty(0、\ 1、\ H^1(0、\ 1))$，并且范数满足定量估计 (45)、(46)。

证明。 我们指出，根据定理 2.6，作用量极小化 $(f、\ v、\ z)\in\mathcal{A}(f_0、\ f_1)$ 的存在性得到了保证。第 3.1 节中的论证表明，z 弱地满足 $z_t+(zv)_x=0$。根据注 2.8，z 满足公式 (19)，而 f 满足公式 (20)。根据 [42], 中的定理 2.2.2，由于 $\Phi(\cdot、\ t)$ 在 x 上是双 Lipschitz 的，只需检验 $f(\Phi(x、\ t)、\ t)\in H^1$。下面我们将在若干处使用与 Φ 的复合。

令 $b:=e^{\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,\ 1,\ H^2)}}$。根据（22）可知，对于所有 $x\in[0,\ 1]$ 和 $t\in[0,\ 1]$

$$\frac{1}{b}\leqslant|D\Phi(x,t)|\leqslant b.$$

注意，对于所有 $t、\ \|\int_0^t v_x(\Phi(\cdot,\ s),\ s)\,\mathrm{d}s\|_{L^\infty}\leqslant\|v_x\|_{L^1(0,\ 1,\ L^\infty)}\leqslant\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,\ 1,\ H^2)}$。因此，对于所有 $(x,\ t)$

$$\frac{1}{b}\leqslant J(x,t)\leqslant e^{\sqrt{2}\|v\|_{L^2(0,1,H^2)}}=b. \tag{42}$$

根据变量替换，对于几乎处处的 t,

$$\int_0^1(\partial_x v_x(\Phi(x,t),t))^2\mathrm{d}x\leqslant\|D\Phi(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|v_{xx}(t)\|^2_{L^2((0,1))}\leqslant b\|v\|_{L^2(0,1,H^2)}.$$

对 t 积分并应用柯西-施瓦茨不等式可得，对于所有 $t\in[0,\ 1]$

$$\left\|\partial_x\int_0^t v_x(\Phi(x,s),s)\mathrm{d}s\right\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant tb\left\|v\right\|^2_{L^2(0,1,H^2)}.$$

结合链式法则和关于 J 的 L^∞ 估计可知， $J\in L^\infty(0,\ 1,\ H^1(0,\ 1))$ 以及

$$\forall t\in[0,1]\qquad \left\|\int_0^t J(x,s)\,\mathrm{d}s\right\|_{H^1(0,1)}\leqslant b+b^{3/2}\left\|v\right\|_{L^2(0,1,H^2)}\tag{43}$$

由于 $J\geqslant \frac{1}{b}\backsim\ 1/\int_0^1 J(x,t)dt$ 属于 $H^1(0,\ 1)$。根据链式法则， [18],

$$\left\|\partial_x\left(1/\int_0^1 J(x,t)dt\right)\right\|_{L^2}\leqslant b^2\left\|\partial_x\left(\int_0^1 J(x,t)dt\right)\right\|_{L^2}\leqslant b^{\frac{7}{2}}\|v\|_{L^2(0,1,H^2)}.\tag{44}$$

此外，根据变量替换和估计（22）， $\|\partial_x f_1(\Phi(x,\ 1))\|_{L^2}\leqslant\sqrt{b}\|\partial_x f_1\|_{L^2}$. 由（19）、（42）、（43）和（44），利用乘积法则并注意到 $\|gh\|_{L^2}\leqslant\|g\|_{L^2}\|h\|_{L^\infty}$，可得

$$\begin{aligned}\|\partial_x z(\Phi(x,\cdot),\cdot)\|_{L^2((0,1)^2)}&\leqslant(\|\partial_x f_1(\Phi(\cdot,1))\|_{L^2}+\|\partial_x f_0\|_{L^2})b^2\\&\quad+(\|f_1(\Phi(\cdot,1))\|_{L^\infty}+\|f_0\|_{L^\infty})(b^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{9}{2}})\|v\|_{L^2(0,1,H^2)}\\&\leqslant 3(\|f_1\|_{H^1}+\|f_0\|_{H^1})(b^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{9}{2}}\|v\|_{L^2(0,1,H^2)}).\end{aligned}$$

还需注意，根据变量替换，

$$\int_0^1\int_0^1 z^2(\Phi(x,t),t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant b\|z\|^2_{L^2((0,1)^2)}\leqslant b\|f_1-f_0\|^2_{L^2}.$$

由（20），通过变量替换和估计（22），对于任意 $t\in[0,\ 1]$,

$$\|\partial_x f(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}\leqslant\sqrt{b}\|\partial_x f(\Phi(\cdot,t),t)\|_{L^2}\leqslant 6(\|f_1\|_{H^1}+\|f_0\|_{H^1})(1+b^3+b^5\|v\|_{L^2(0,1,H^2)}),\tag{45}$$

利用 $\|v\|_{L^2(0,\ 1,\ H^2)}\leqslant C_\varepsilon\|f_1-f_0\|_{L^2}$ 可将其转化为一个估计，其中右端仅取决于初始信号和最终信号。

引理 2.9 给出的关于 $\|f(\cdot,\ t)\|_{L^2}$ 的估计以及上面对 z 的估计表明

$$\|f(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}\leqslant b(\|f_0\|_{L^2}+\sqrt{b}\|f_0-f_1\|_{L^2}),\tag{46}$$

由此完成证明。 □

注记 3.2。 上述正则性可以提高到具有更高正则性的空间。现在我们概述如下论证：如果 f_0 和 f_1 光滑，那么对于所有 $t\in[0,\ 1]$， $f(\cdot,\ t)$ 都是光滑的。对于 $f_0,\ f_1\in H^1(0,\ 1)$，命题 3.1 表明，最小化路径 $f\in L^\infty(0,\ 1,\ H^1(0,\ 1))$ 和 $z\in L^\infty(0,\ 1,\ H^1(0,\ 1))$。因此，在方程（37）中，对于每个 $t\in[0,\ 1]$，都有 $zf_x\in L^2(0,\ 1)$ 。椭圆边值问题的相关结果意味着 $v(\cdot,\ t)\in H^4(0,\ 1)$。此外，存在一个常数 C，使得

$$\|v(\cdot,t)\|_{H^4(0,1)}\leqslant C(\|zf_x(\cdot,t)\|_{L^2}+\|v(\cdot,t)\|_{H^2}).$$

Thus

$$\|v\|_{L^2(0,1,H^4)}\leqslant C(\|z\|_{L^2(0,1,H^1)}\|f\|_{L^2(0,1,H^1)}+\|v\|_{L^2(0,1,H^2)}),$$

w这里，右端根据命题 3.1，仅是依赖于 f_0 和 f_1的函数 .

根据常微分方程解关于参数的可微性，我们得到，对于固定的t，流映射 $\Phi(x,\ t)\in C^3(0,\ 1)$。此外， $\Phi(x,\ t)\in L^\infty(0,\ 1,\ C^3)$。事实上， $D^2\Phi(x,\ t)$ 满足以下方程:

$$\partial_t D^2\Phi(x,t)=(v_x(\Phi(x,t),t))^2(D\Phi(x,t))^2+v_x(\Phi(x,t),t)D^2\Phi(x,t).$$

根据Gronwall不等式和 (22)，我们得到 $D^2\Phi\in L^\infty((0,\ 1)^2)$。归纳地， $\Phi\in L^\infty(0,\ 1,\ C^3)$。

现在我们假设 $f_0,\ f_1 \in H^4(0,\ 1)$。上述讨论表明 $v \in L^2(0,\ 1,\ H^4)$ 以及$\Phi \in L^\infty(0,\ 1,\ C^3)$。对 (19) 应用链式法则，并按照证明命题 3.1 中的类似论证，我们有 $z \in L^\infty(0,\ 1,\ H^3(0,\ 1))$。由此根据 (20)，$f \in L^\infty(0,\ 1,\ H^3(0,\ 1))$，其中$\|f\|_{L^\infty(0,\ 1,\ H^3(0,\ 1))}$ 由 f_0 和 f_1的函数所界定。

通过迭代论证，我们得出，对于任意 $k \in \mathbb{N}$ $f,\ z \in L^\infty(0,\ 1,\ H^k(0,\ 1))$ 和 $v \in L^2(0,\ 1,\ H^k(0,\ 1))$，这意味着 $f(\cdot,\ t)$具有光滑性。

3.3. 测地线的稳定性。

接下来，我们通过子序列逼近研究测地线的稳定性。

命题 3.3。假设 $f_0 f_1 \in L^2(0 1)$ $f_0^n f_1^n \in L^2(0 1)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，且 $f_0^n \to f_0$ $f_1^n \to f_1$在 $L^2(0 1)$ 中当 $n \to \infty$时。设 $(f^n v^n z^n) \in \mathcal{A}(f_0^n f_1^n)$ 为作用量极小化路径。那么存在$(f v z) \in \mathcal{A}(f_0 f_1)$，使得沿着一个子序列

$$
\begin{aligned}
&f^n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \textit{in } L^\infty((0,1), L^2(0,1))\\
&f^n \to f \quad \textit{in } C((0,1), (L^2(0,1), d_{HV}))\\
&z^n \rightharpoonup z \quad \textit{in } L^2((0,1), L^2(0,1))\\
&v^n \rightharpoonup v \quad \textit{in } L^2([0,1]; H^2(0,1)).
\end{aligned}
$$

此外，(f, v, z) 是 f_0 与 f_1之间的作用量极小化路径。

证明。由于

$$
d_{HV}(f_0^n, f_1^n) \leqslant \|f_0^n - f_0\|_{L^2} + d_{HV}(f_0, f_1) + \|f_1^n - f_1\|_{L^2}, \tag{47}
$$

我们得出，当 n 足够大时，对所有 $A(f^n, v^n, z^n) \leqslant d_{HV}^2(f_0, f_1) + 1 \leqslant \|f_0 - f_1\|_{L^2}^2 + 1$ 均成立。不失一般性地，我们可以假设这些不等式对所有 n均成立。弱收敛的证明与定理 2.6的证明类似。为了证明 (f, v, z) 是作用量极小化路径，我们注意到，由下半连续性，$A(f, v, z) \leqslant \liminf_{n\to\infty} A(f^n, v^n, z^n)$。由于 $A(f^n, v^n, z^n) = d_{HV}^2(f_0^n, f_1^n)$，由（47）可得 $A(f, v, z) \leqslant d_{HV}^2(f_0, f_1)$。因此，$A(f, v, z) = d_{HV}^2(f_0, f_1)$。

我们声称，对于所有 t, $f^n(\cdot,\ t)$在 L^2 中是相对紧的。注意，由引理 2.9 可知，序列 $f^n(\cdot,\ t)$在 L^2 中一致有界。为证明其在 L^2 中相对紧，根据 [19][定理2，88] 我们需要证明，对于所有 $\delta > 0$，存在 $h_0 > 0$，使得对于所有 $h \in [0,\ h_0]$ 以及所有 n

$$
\|f^n(\cdot + h, t) - f^n(\cdot, t)\|_{L^2} < \delta. \tag{48}
$$

我们假设 (48) 成立来进行证明，并在最后验证该条件。

注意，由于 $t \mapsto f^n(\cdot, t)$ 是测地线，$t \mapsto f^n(\cdot, t)$ 是 $(L^2(0,1), d_{HV})$ 中的一条匀速曲线。因此，将函数族 f^n 视为从 $[0,1]$ 到 $(L^2(0,1), d_{HV})$ 的函数时，它们是一致利普希茨的，因而等度连续。由于我们知道 $\{f^n(\cdot, t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $(L^2(0,1), \|\cdot\|_{L^2})$ 中相对紧，因此关于 d_{HV} 度量，它在 L^2 中相对紧。因此，由适用于度量空间值函数的阿尔泽拉-阿斯科利定理可知，f^n 在 $C(0, 1, (L^2(0,1), d_{HV})$ 中相对紧。注意，这也意味着，取一个子序列后，$f^n(\cdot, t)$ 对所有固定的 t 都在 $L^2(0,1)$ 中收敛到 $f(\cdot, t)$。

现在我们转而证明式 (48) 成立。根据 (22)，对于每个 t、$\Phi_t := \Phi(\cdot,\ t)$：$\Phi_t^{-1}$ 都是利普希茨的，并且对于这两个映射以及所有 $t \in [0,\ 1]$，其利普希茨常数均由 $b_n := \exp(\sqrt{2}\|v^n\|_{L^2(0,\ 1,\ H^2)})$ 约束。

接下来我们证明函数 $\eta^n(x,t) := \int_0^t J^n(x,s)\,\mathrm{d}s \big/ \int_0^1 J^n(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau$，其中 $J^n(x,t) = e^{-\int_0^t v_x^n(\Phi^n(x,s),s)\mathrm{d}s}$ 在 x 中是 Hölder连续的。由于 v_x^n 是 Hölder连续的，我们有，对于 $x, y \in [0,1]$，

$$
|J^n(x,t) - J^n(y,t)| \leqslant e^{b_n} \int_0^t \|v_{xx}^n(\cdot, s)\|_{L^2} (\mathrm{Lip}(\Phi_s^n))^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s |x-y|^{\frac{1}{2}} \leqslant e^{b_n} b_n^{\frac{1}{2}} \|v^n\|_{L^2(0,1,H^2)} |x-y|^{\frac{1}{2}},
$$

因为 $|v_x(y)-v_x(y)| \leqslant |x-y|^{\frac{1}{2}}\|v_{xx}\|_{L^2}$。这意味着对于任意 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\int_0^t J^n(x,s)\,\mathrm{d}s$ 属于 $C^{0,\frac{1}{2}}(0,1)$，且 Hölder常数为 $e^{b_n} b_n^{\frac{1}{2}}\|v^n\|_{L^2(0,1,H^2)}$。注意，根据 (42)， $b_n^{-1} \leqslant J^n(x,t) \leqslant b_n$。因此，$(\int_0^1 J(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau)^{-1}$ 是 Hölder连续的，其常数为 $e^{b_n} b_n^{\frac{5}{2}}\|v^n\|_{L^2(0,1,H^2)}$。因此，对于任意 x,y，以及任意 t,

$$|\eta^n(x,\ t)-\eta^n(y,\ t)| \leqslant (b_n e^{b_n} b_n^{\frac{1}{2}} + b_n e^{b_n} b_n^{\frac{5}{2}})\,\|v^n\|_{L^2(0,\ 1,\ H^2)}|x-y|^{\frac{1}{2}} \leqslant 2e^{b_n} b_n^{\frac{7}{2}}\|v^n\|_{L^2(0,\ 1,\ H^2)}|x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

通过变量替换

$$f^n(y,t) = \eta^n((\Phi_t^n)^{-1}(y),t) f_0^n((\Phi_t^n)^{-1}(y)) + (1-\eta^n(\Phi_t^{-1}(y),t)) f_1^n(\Phi_1\Phi_t^{-1}(y))$$

我们注意到 $b := \sup\{b_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ 是有限的，因为 $\|v^n\|^2_{L^2(0,\ 1,\ H^2)} \leqslant c\|f_0-f_1\|^2_{L^2}+1$ 根据上述观察，对于某个 $c>0$ （取决于 λ，κ 和 ε）。

我们将 f^n、f_0 和 f_1 延拓为 $\mathbb{R}$ 上的零函数。我们还将 Φ_t^n 在 $[0,\ 1]$ 外延拓为恒等映射（$\Phi_t^n(x)=x$）。选择 $g_0,\ g_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 使得 $\|f_0-g_0\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{\delta}{100b^3}$ 和 $\|f_1-g_1\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{\delta}{100b^3}$。选择 $N(\delta)$ 使得，然后对于任意 $n>N(\delta)$、$\|f_0^n-f_0\|_{L^2} < \frac{\delta}{100b^3}$、$\|f_1^n-f_1\|_{L^2} < \frac{\delta}{100b^3}$ 然后对于 $n>N(\delta)$,

$$\begin{aligned}
&\|f_0^n((\Phi_t^n)^{-1}(y+h)) - f_0^n((\Phi_t^n)^{-1}(y))\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leqslant \|f_0^n((\Phi_t^n)^{-1}(y+h)) - g_0((\Phi_t^n)^{-1}(y+h))\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\qquad + \|g_0((\Phi_t^n)^{-1}(y+h)) - g_0((\Phi_t^n)^{-1}(y))\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\qquad + \|g_0((\Phi_t^n)^{-1}(y)) - f_0^n((\Phi_t^n)^{-1}(y))\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leqslant 2\|D(\Phi_t^n)^{-1}\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\|f_0^n-g_0\|_{L^2} + \|g_0((\Phi_t^n)^{-1}(y+h)) - g_0((\Phi_t^n)^{-1}(y))\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leqslant \frac{\delta}{25b^2} + b\,\mathrm{Lip}(g_0)h,
\end{aligned}$$

同样,

$$\|f_1^n(\Phi_1^n(\Phi_t^n)^{-1}(y+h)) - f_1^n(\Phi_1^n(\Phi_t^n)^{-1}(y))\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\delta}{25b^2} + b^2\,\mathrm{Lip}(g_1)h.$$

此外

$$\|\eta^n((\Phi_t^n)^{-1}(y+h),t) - \eta^n((\Phi_t^n)^{-1}(y),t)\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant 2e^{b_n} b_n^4\|v^n\|_{L^2(0,1,H^2)}h^{\frac{1}{2}} \leqslant Ch^{\frac{1}{2}}, \tag{49}$$

其中 $C := 2\exp(b)b^4(\sqrt{c}\|f_1-f_0\|_{L^2}+1)$。

因此,

$$\begin{aligned}
&\|f^n(\cdot,t) - f^n(\cdot+h,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leqslant \|\eta^n((\Phi_t^n)^{-1}(\cdot+h),t) f_0^n((\Phi_t^n)^{-1}(\cdot+h)) - \eta^n((\Phi_t^n)^{-1}(\cdot),t) f_0^n((\Phi_t^n)^{-1}(\cdot))\|_{L^2}\\
&\qquad + \|(1-\eta^n(\Phi_t^{-1}(\cdot+h),t)) f_1^n(\Phi_1\Phi_t^{-1}(\cdot+h)) - (1-\eta^n(\Phi_t^{-1}(\cdot),t)) f_1^n(\Phi_1\Phi_t^{-1}(\cdot))\|_{L^2}\\
&\quad\leqslant \|\eta^n\|_{L^\infty}\|f_0^n(\Phi_t^n)^{-1}(\cdot+h) - f_0^n(\Phi_t^n)^{-1}(\cdot)\|_{L^2}\\
&\qquad + \|\eta^n((\Phi_t^n)^{-1}(\cdot+h),t) - \eta^n((\Phi_t^n)^{-1}(\cdot),t)\|_{L^\infty}\|f_0^n\circ(\Phi_t^n)^{-1}\|_{L^2}\\
&\qquad + \|1-\eta^n\|_{L^\infty}\|f_1^n(\Phi_1^n(\Phi_t^n)^{-1}(\cdot+h)) - f_1^n(\Phi_1^n(\Phi_t^n)^{-1}(\cdot))\|_{L^2}\\
&\qquad + \|\eta^n((\Phi_t^n)^{-1}(\cdot+h),t) - \eta^n((\Phi_t^n)^{-1}(\cdot),t)\|_{L^\infty}\|f_1^n\circ\Phi_1^n\circ(\Phi_t^n)^{-1}\|_{L^2}\\
&\quad\leqslant b^2\left(\frac{\delta}{25b^2} + b\,\mathrm{Lip}(g_0)h\right) + Ch^{\frac{1}{2}}b\|f_0^n\|_{L^2} + (1+b^2)\left(\frac{\delta}{25b^2} + b^2\,\mathrm{Lip}(g_1)h\right) + Ch^{\frac{1}{2}}b\|f_1^n\|_{L^2}\\
&\quad\leqslant \frac{3\delta}{25} + 2b^3(\mathrm{Lip}(g_0)+\mathrm{Lip}(g_1))h + Cb(2+\|f_0\|_{L^2}+\|f_1\|_{L^2})h^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

我们选取 h_0，它取决于 f_0、f_1、g_0、g_1，使得对于所有 t、对于所有 $h \in [0, h_0]$ 以及 $n > N(\delta)$，(48) 都成立。对于 $n \leqslant N(\delta)$，存在 h_n，使得对于所有 $h \in [0, h_n]$，(48) 对 f^n 成立。取 $h := \min\{h_0, h_1, \ldots\ldots, h_{N(\delta)}\}$。对于所有 t、对于所有 $h \in [0, h]$ 以及对于所有 n，(48) 都成立。□

4. 数值方案

我们提出一种迭代最小化方案，以求出作用量 (50) 在可容许路径 (51) 上的极小化子。首先，在连续层面上分别固定 v 和 f，给出两个凸子问题。通过求解每个子问题，作用量泛函单调递减。随后，我们基于这种问题分解，给出求解最优路径的离散化方案。

4.1. 两个子问题。 回顾一下，我们的目标是最小化

$$A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f, v, z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \kappa v^2 + \lambda v_x^2 + \varepsilon v_{xx}^2 + z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{50}$$

在由下式定义的可容许路径集合上

$$\mathcal{A} = \{(f, v, z) : f_t = -f_x v + z,\ v(0,\cdot) = v(1,\cdot) = 0,\ f(\cdot, 0) = f_0,\ f(\cdot, 1) = f_1\}. \tag{51}$$

该变分问题的欧拉–拉格朗日方程在假设 $f_0, f_1 \in H^1((0,1))$ 的条件下由 (37)-(41) 给出。本节介绍的数值方法以及第 5 节中的实验，均基于信号为 $C^2((0,1))$ 的假设。鉴于命题 3.1 和注 3.2 的正则性结果，以及命题 3.3 中证明的稳定性结果，我们预期，正则信号的测地线可用于逼近一般信号的测地线。

我们指出，在 (f, v, z)这三个待优化变量中，由于约束集 (51)，z 由 f 和 v 决定。然而，由于存在非线性约束，直接在 (51) 上最小化 (50) 仍不切实际。接下来，我们通过求解欧拉–拉格朗日方程组 (37)-(41)，将优化问题转化为不动点问题。

更具体地说，我们通过两个凸优化子问题求得欧拉–拉格朗日方程的解。对于问题 (50)-(51)，该方法交替进行：固定 v 并求得最优的 (f, z)，以及固定 f 并寻找最优的 (v, z)。这种方法与许多现有优化算法有相似之处。首先，它与所谓的块坐标下降法 [38]相关，因为我们交替更新 (f, z) 和 (v, z)，即问题中的坐标块。基于 [26,P. 266], ，我们的算法也具有局部收敛性，因为作用泛函在每个坐标块上都有唯一的极小值。我们更新后的新 (f, z) 或 (v, z) 是各子问题的精确极小化子，这一点与交替方向乘子法 [39]具有相似特征。相应的最优 (f, z) 或 (v, z) 是对由 (37) - (41) 确定的线性约束（固定另一个变量）的加权投影。

最后，我们的方法与所谓的序列二次规划（SQP） [7]具有相同的思路。对于带有非线性约束的二次规划，SQP 通过对约束进行线性化，依次求解一系列优化子问题。在我们的方法中，通过固定v 或 f，我们实现了对 (51) 的线性化。接下来，我们将详细讨论这两个重要的子问题。

4.1.1. 从 v到 (f, z)。首先，对于给定的 v，我们考虑如下子问题：求出使作用量 (50) 最小化的 (f, z)，同时满足约束 $(f, v, z) \in \mathcal{A}$，其中 v 固定。注意，这等价于在线性约束下最小化一个凸（事实上是二次）目标泛函：

$$\min_{f,z} \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \text{s.t.} \quad (f, v, z) \in \mathcal{A}. \tag{52}$$

一阶最优性条件由方程 (39)、(40) 和 (41) 给出：

$$\begin{aligned} z_t + (zv)_x &= 0, \\ f_t + f_x v - z &= 0, \\ f(\cdot,0) = f_0,\ f(\cdot,1) &= f_1. \end{aligned} \tag{53}$$

为求解 (53)，我们可以使用拉格朗日方法。首先，我们可以得到一个求解 (17) 的流映射 $\Phi(x,\ t)$ 以及 $z(\Phi(x,\ t),\ t)$ 的解析解，该解析解见 (19)。请注意，我们仍需确定 (19) 中的量J。为此，根据引理 2.7，我们注意到 $J(x,\ t) = \exp(-\int_0^t v_x(\Phi(x,\ s),\ s)ds)$ 是以下辅助初值问题的弱解：

$$J_t + (Jv)_x = 0 \ \text{ on } [0,1]^2, \quad \text{with } J(x,0) \equiv 1.$$

因此，根据 (19)，我们得到 $z(\Phi(x,\ t),\ t)$的解析表达式：

$$z(\Phi(x,t),t) = (f_1(\Phi(x,1)) - f_0(x))\,\frac{J(x,t)}{\int_0^1 J(x,s)\mathrm{d}s}. \tag{54}$$

根据 (20)，我们还可以得到 $f(\Phi(x,\ t),\ t)$ 的解析表达式，

$$f(\Phi(x,t),t) = (1-\eta(x,t))\,f_0(x) + \eta(x,t)\,f_1(\Phi(x,1)), \quad \text{where } \eta(x,t) = \frac{\int_0^t J(x,s)\mathrm{d}s}{\int_0^1 J(x,s)\mathrm{d}s}. \tag{55}$$

最后，通过坐标变换，我们在 $(x,\ t)$ 坐标下得到函数 f 和 z（这些函数用于 v），而不是在流映射坐标 $(\Phi(x,\ t),\ t)$下得到。在离散层面，这相当于在沿流计算 f 和 z 的点与所需网格点之间执行一个插值步骤。

结合以上所有步骤，我们定义了一个连续算子

$$\mathcal{G}_1 : v \mapsto (z, f),$$

它求解（53）和（52）。注意，如果 $(f,z) = \mathcal{G}_1(v)$，则我们会自动得到 $(f,v,z) \in \mathcal{A}$。如果我们将上一步得到的 (f,v,z) 记为 $(f^{\text{old}}, v^{\text{old}}, z^{\text{old}})$，其中 $(f^{\text{old}}, v^{\text{old}}, z^{\text{old}}) \in \mathcal{A}$，那么我们有

$$A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f, v^{\text{old}}, z) \leqslant A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f^{\text{old}}, v^{\text{old}}, z^{\text{old}}).$$

以上步骤得到了满足（38）、（39）、（40）和（41）的函数 (f, v^{old}, z)，对应给定的 v^{old}，但它们不一定满足欧拉–拉格朗日方程中的（37）。否则，我们便找到了一组满足（50）一阶最优性条件的解。

4.1.2. 从 f 到 (v,z). 给定上一步得到的 f，我们考虑第二个子问题：在约束 $(f,v,z) \in \mathcal{A}$下，寻找使作用量（50）最小化的一对 $(v^{\text{new}}, z^{\text{new}})$。这同样是一个带线性约束的二次优化问题：

$$\min_{v,z} \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \kappa v^2 + \lambda v_x^2 + \varepsilon v_{xx}^2 + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \text{s.t. } (f,v,z) \in \mathcal{A}. \tag{56}$$

利用欧拉–拉格朗日方程（37）和约束 $z = f_t + v f_x$，可得以下关于 v的四阶边值问题：

$$\begin{aligned} \varepsilon v_{xxxx} - \lambda v_{xx} + (\kappa + |f_x|^2)v &= -f_t\,f_x \quad \text{on } (0,1)^2, \\ v &= 0 \quad \text{on } \{0,1\}\times(0,1), \\ v_{xx} &= 0 \quad \text{on } \{0,1\}\times(0,1). \end{aligned} \tag{57}$$

给定 f和解 v，我们还可得到 z。将解算子记为 $\mathcal{G}_2$： $f \mapsto (v^{\text{new}},\ z^{\text{new}})$。注意到

$$A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f, v^{\text{new}}, z^{\text{new}}) \leqslant A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f, v^{\text{old}}, z). \tag{58}$$

因此，将 $\mathcal{G}_2$ 与第 4.1.1 节中的前一步结合起来，可得到关于作用量泛函的以下不等式:

$$A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f^{\text{new}}, v^{\text{new}}, z^{\text{new}}) \underbrace{\leqslant}_{(v^{\text{new}}, z^{\text{new}}) = \mathcal{G}_2(f),\, f^{\text{new}} = f} A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f, v^{\text{old}}, z) \underbrace{\leqslant}_{(f,z) = \mathcal{G}_1(v^{\text{old}})} A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f^{\text{old}}, v^{\text{old}}, z^{\text{old}}),$$

其中 $(f^{\text{new}}, v^{\text{new}}, z^{\text{new}})$, (f, v^{old}, z), $(f^{\text{old}}, v^{\text{old}}, z^{\text{old}}) \in \mathcal{A}$均满足约束条件。如果我们通过将 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{G}_2$ 复合来定义一个新的算子 $\mathcal{G}_1$，即,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1 : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}, \tag{59}$$

由此得到一个更新公式，随后作用量泛函递减:

$$A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(\mathcal{G}(f, v, z)) \leqslant A_{\kappa,\lambda,\varepsilon}(f, v, z). \tag{60}$$

然后，我们可以重复应用 $\mathcal{G}$，直到找到一组解 (f^*, v^*, z^*)，其中 $\mathcal{G}(f^*, v^*, z^*) = (f^*, v^*, z^*)$。也就是说，$(f^*, v^*, z^*)$ 是 $\mathcal{G}$ 的不动点，而（60）表明不动点算子相对于作用量泛函具有压缩性。容易验证，(f^*, v^*, z^*) 同样满足欧拉–拉格朗日方程（37）–（41）。

算法 1用于最小化（50）的迭代方案。

1：给定初始猜测 $(f^{(0)}、v^{(0)}、z^{(0)}) \in \mathcal{A}$，**最大迭代次数** N **和容差** $\delta > 0$。**2：for** $n = 1$ **to** N **do 3：使用第 4.1.1 节中描述的** $\mathcal{G}_1$ **计算** $(\tilde{f}、\tilde{z}) = \mathcal{G}_1(v^{(n)})$，**并设置** $f^{(n+1)} = \tilde{f}$。**4：使用第 4.1.2 节中描述的** $\mathcal{G}_2$ **设置** $(v^{(n+1)}、z^{(n+1)}) = \mathcal{G}_2(f^{(n+1)})$。**5：如果**$|A_{\kappa}、_{\lambda}、_{\varepsilon}(f^{(n+1)}、v^{(n+1)}、z^{(n+1)}) - A_{\kappa}、_{\lambda}、_{\varepsilon}(f^{(n)}、v^{(n)}、z^{(n)})| < \delta$，**则 6：返回** $\left(f^{(n+1)}、z^{(n+1)}、v^{(n+1)}\right)$ **以及最小作用量值；中断。7：结束 if 8：结束 for**

算法 2用于通过阻尼最小化 (50) 的迭代方案。

1：给定初始猜测 $(f^{(0)}、v^{(0)}、z^{(0)}) \in \mathcal{A}$，**最大迭代次数** N，**容差** $\delta > 0$。**2：对于** $n = 1$ **到** N，**执行 3：计算** $(\tilde{f}、\tilde{z}) = \mathcal{G}_1(v^{(n)})$，**并设置** $f^{(n+1)} = \alpha_1 \tilde{f} + (1-\alpha_1) f^{(n)}$，**其中** α_1 **由算法 3 给出 4：而** $\mathcal{G}_1$ **如第 4.1.1 节所述。5：计算** $(\widehat{v}、\widehat{z}) = \mathcal{G}_2(f^{(n+1)})$，**并设置** $(v^{(n+1)}、z^{(n+1)}) = \alpha_2(\widehat{v}、\widehat{z}) + (1-\alpha_2)(v^{(n)}、z^{(n+\frac{1}{2})})$，**其中 6：**$\alpha_2$ **由算法 3 给出，而** $\mathcal{G}_2$ **如第 4.1.2 节所述。7：如果** $A_{\kappa}、_{\lambda}、_{\varepsilon}\left(f^{(n+1)}、v^{(n+1)}、z^{(n+1)}\right) > A_{\kappa}、_{\lambda}、_{\varepsilon}\left(f^{(n)}、v^{(n)}、z^{(n)}\right) - \delta$，**则 8：返回** $\left(f^{(n+1)}、z^{(n+1)}、v^{(n+1)}\right)$ **和最小作用量值；跳出。9：结束 if 10：结束 for**

算法 3阻尼参数的回溯线搜索。

1：给定旧迭代值 $(f、\ \bar{v}、\ \bar{z})$**，提出的新迭代值** $(f、\ \tilde{v}、\ \tilde{z})$**，目标函数** $A_\kappa、\ \lambda、\ \varepsilon$**，以及搜索步骤的最大数量** N。**设置** $\alpha = 1$、$A = A_\kappa、\ \lambda、\ \varepsilon(f、\ \bar{v}、\ \bar{z})$ **并将 FLAG 设为** $= 0$。**2：对于** $i = 1$ **到** N**，执行** **3：如果** $A_\kappa、\ \lambda、\ \varepsilon(f_\alpha、\ v_\alpha、\ z_\alpha) < A$**，其中** $(f_\alpha、\ v_\alpha、\ z_\alpha) = (1-\alpha)(f、\ \bar{v}、\ \bar{z}) + \alpha(f、\ \tilde{v}、\ \tilde{z})$**，则 4：返回** α **并将 FLAG 设为** $= 1$**；中断。5：结束 if 6：** $\alpha \leftarrow \alpha/2$。**7：结束 for 8：如果 FLAG 为** $= 0$**，则 9：返回** $\alpha = 0$。**10：结束 if**

算法 4通过不同的初始化搜索使作用量 (50) 最小化的路径 .

1：给定最大迭代次数 $N \in \mathbb{N}^+、\ \delta > 0、\ k_{max} \in \mathbb{N}$。2：**对于** $k = 0$ 到 k_{max} **执行**3：使用第 4.3 节中所述的基于显著性的匹配初始化，参数为 k，并且 4：获得 $(f^{(0)}、\ v^{(0)}、\ z^{(0)})$。5：使用 N 次迭代和容差 δ运行算法 2。获得最小作用量值 $\mathcal{J}(k)$。6：**结束循环**7：查找 $k^* = \operatorname{argmin} \mathcal{J}(k)$。8：返回最优路径 $(f、\ v、\ z)$ 及其作用值 $\mathcal{J}(k^*)$，该路径对应于参数为 k^*的初始化。

4.2. **离散格式**。 接下来，我们使用简单的一阶数值格式来求解上述讨论的两个子问题。如果已知信号 f_0 和 f_1 是光滑的，则建议采用高阶离散化方案，以提高效率和精度。另一方面，如果信号是不连续的，则已知一阶格式可以减轻吉布斯现象 [23]，而高阶方法可能会受到该现象的影响。

为计算 $(f,\ z) = \mathcal{G}_1(v)$，我们使用基于（54）和（55）的一阶数值积分计算 $z(\Phi(x,\ t),\ t)$ 以及 $f(\Phi(x,\ t),\ t)$。通过仅针对 x 变量进行一阶数值插值，我们从 $z(\Phi(x,\ t),\ t)$ 和 $f(\Phi(x,\ t),\ t)$得到 $z(x,\ t)$ 以及 $f(x,\ t)$。此步骤可以以并行方式实现。

为计算 $(v,\ z) = \mathcal{G}_2(f)$，对于每个固定的 t，我们有关于 $v(\cdot,\ t)$ 的四阶偏微分方程，并且在边界 $\{0,\ 1\}$ 上有 $v = 0$ 和 $v_{xx} = 0$（如果 $\varepsilon \neq 0$）。

考虑空间域 $[0,1]$ 和时间域 $[0,1]$ 上的均匀网格。空间间距$\Delta x = 1/N_x$，时间域间距 $\Delta t = 1/N_t$。令 $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^{N_x+1}$ 为近似$[v(0, j\Delta t),\ \ldots\ldots,\ v(i\Delta x, j\Delta t),\ \ldots\ldots,\ v(1, j\Delta t)]^\top$ 的向量。在有限差分离散化下，PDE（57）变为以下线性系统，

$$(A + \operatorname{diag}(\mathbf{w}_j \odot \mathbf{w}_j))\, \mathbf{v}_j = -\boldsymbol{\tau}_j \odot \mathbf{w}_j,$$

其中，$\odot$ 表示 Hadamard乘积，$\mathrm{diag}(\mathbf{x})$ 表示一个对角矩阵，其元素为向量 $\mathbf{x}$ 的元素，$A \in \mathbb{R}^{(N_x+1)\times(N_x+1)}$ 由下式给出

$$\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
-\frac{4\varepsilon}{\Delta x^4}-\frac{\lambda}{\Delta x^2} & \kappa+\frac{2\lambda}{\Delta x^2}+\frac{5\varepsilon}{\Delta x^4} & -\frac{4\varepsilon}{\Delta x^4}-\frac{\lambda}{\Delta x^2} & \frac{\varepsilon}{\Delta x^4} & & & & & \\
\frac{\varepsilon}{\Delta x^4} & -\frac{4\varepsilon}{\Delta x^4}-\frac{\lambda}{\Delta x^2} & \kappa+\frac{2\lambda}{\Delta x^2}+\frac{6\varepsilon}{\Delta x^4} & -\frac{4\varepsilon}{\Delta x^4}-\frac{\lambda}{\Delta x^2} & \frac{\varepsilon}{\Delta x^4} & & & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
& & \frac{\varepsilon}{\Delta x^4} & -\frac{4\varepsilon}{\Delta x^4}-\frac{\lambda}{\Delta x^2} & \kappa+\frac{2\lambda}{\Delta x^2}+\frac{6\varepsilon}{\Delta x^4} & -\frac{4\varepsilon}{\Delta x^4}-\frac{\lambda}{\Delta x^2} & \frac{\varepsilon}{\Delta x^4} & & \\
& & & \frac{\varepsilon}{\Delta x^4} & -\frac{4\varepsilon}{\Delta x^4}-\frac{\lambda}{\Delta x^2} & \kappa+\frac{2\lambda}{\Delta x^2}+\frac{5\varepsilon}{\Delta x^4} & -\frac{4\varepsilon}{\Delta x^4}-\frac{\lambda}{\Delta x^2} & & \\
& & & & & & 1 &
\end{bmatrix},$$

以及 $\mathbf{w}^j$，$\boldsymbol{\tau}_j \in \mathbb{R}^{N_x+1}$，分别近似 $f_x(\cdot,\ t_j)$ 和 $f_t(\cdot,\ t_j)$，由下式给出

$$\mathbf{w}_j = \frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix}0 & (f(x_3,t_j)-f(x_2,t_j)) & \dots & (f(x_{N_x+1},t_j)-f(x_{N_x},t_j)) & 0\end{bmatrix}^\top,$$
$$\boldsymbol{\tau}_j = \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix}0 & (f(x_2,t_{j+1})-f(x_2,t_j)) & \dots & (f(x_{N_x},t_{j+1})-f(x_{N_x},t_j)) & 0\end{bmatrix}^\top,$$

其中 $f(x_i,\ t_j) = f(i\Delta x,\ j\Delta t)$。我们注意到，右端的第一个和最后一个元素设为零，而左端的第一行和最后一行也经过了修改。这两个线性方程用于在边界上施加 $v = 0$；参见 (57)。由于边界上 $v_{xx} = 0$，虚拟点 $v(-\Delta x,\ \cdot) = -v(\Delta x,\ \cdot)$ 和 $v(1+\Delta x,\ \cdot) = -v(1-\Delta x,\ \cdot)$，可用于 A 的第二行和第 N_x 行。线性系统中其余的 $N_x - 3$ 个方程用于施加线性偏微分方程 (57)。注意，给定 f 后，我们可以对所有时间 $\{t_j\}$ 并行求解 $\{\mathbf{v}_j\}$，或者针对 $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^\top \dots \mathbf{v}_{N_t+1}^\top]^\top$ 构造一个大型稀疏线性系统，通过一次稀疏线性求解来求解。当 f_0，f_1 光滑时，最好使用中心差分法来求得$\boldsymbol{\tau}_j$。

现在我们有两个步骤：$\mathcal{G}_1$：$v \mapsto (f,\ z)$ 通过一阶数值积分和插值，以及 $\mathcal{G}_2$：$f \mapsto (v,\ z)$ 通过线性偏微分方程求解器。在连续层面上，根据（60）可得到单调能量衰减。算法 1 将这两个步骤结合起来，以迭代求得（50）的近似局部极小值。

虽然该算法对许多信号都很有效，但在离散层面上，由于插值、积分和偏微分方程求解器产生的数值误差，（60）可能并不在不动点更新的每次迭代中成立。为确保离散化的 变分问题仍具有单调衰减的作用量泛函，我们可以引入阻尼参数 α_1 和 α_2，其作用类似于梯度下降算法中的步长；详情请参见算法 2。我们注意到，大多数情况下，$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ 就足以确保作用值衰减，这也是连续层面上的情形。只有当其接近目标解且数值误差占主导时，在两个子问题之间迭代可能会观察到作用值不再单调下降。此时，阻尼有助于获得更准确的局部最小值。我们使用收缩因子为 $1/2$ 的回溯线搜索来寻找合适的阻尼系数；详情请参见算法 3。

4.3. 寻找良好的初始化。我们注意到，$\mathcal{G}$ 的不动点满足欧拉–拉格朗日方程 (37)-(41)，但由于可能存在局部极小值，它们未必能在 (51) 上使 (50) 最小。换言之，不动点算子 $\mathcal{G}$ 具有多个不动点。可以从不同的初始猜测开始，研究收敛行为，同时选择目标函数值最小的解。

我们提出了两种不同类型的初始猜测。

(1) 零速度初始化。 我们设定 $v^{(0)}(x,t) \equiv 0$，并计算 $(f^{(0)}, z^{(0)}) = \mathcal{G}_2(v^{(0)})$。请注意，在这种情况下，我们有 $f^{(0)}(x,t) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$ 和 $z^{(0)}(x,t) = f_1(x) - f_0(x)$。
(2) 显著性匹配初始化。 我们预计，如果存在一条作用量显著小于线性插值的路径，那么该路径将匹配附近的较大峰。我们观察到，匹配最高峰在扰动下并不稳定，因为附近可能存在伪峰，例如图 3 中振荡所导致的伪峰。因此，我们采用一种更稳定的方式来衡量峰的大小。具体而言，我们使用源自地形学的显著性 概念，用于描述峰相对于其周围区域的高度。信号的显著性定义为：到达另一个具有更高值的局部最大值所需下降的最小高度。考虑一个正整数 k。对于给定的 f_0 和 f_1，我们分别选取具有最大 k 显著性的 k 个局部最大值。局部最大值的位置分别记为 $\{x_i\}$ 和$\{y_i\}$、 $1 \leqslant i \leqslant k$。然后，我们构造一个映射 $T(x)$，使得对于每个 i，都有 $T(x_i) = y_i$，以及$T(0) = 0$、 $T(1) = 1$。我们使用线性插值来定义其函数值，使得 $x \in (0、 1)\backslash\{x_i\}$。随后将初始速度设为 $v^{(0)}(x、 t) = T(x) - x$，该速度在时间上保持不变，并使用$(f^{(0)}、 z^{(0)}) = \mathcal{G}_1(v^{(0)})$ 作为 f和 z的初始猜测。此外，如果 f_0和 f_1 中的局部最小值比最大值更显著，也可以通过匹配 $-f_0$ 和 $-f_1$的显著性来进行初始化。

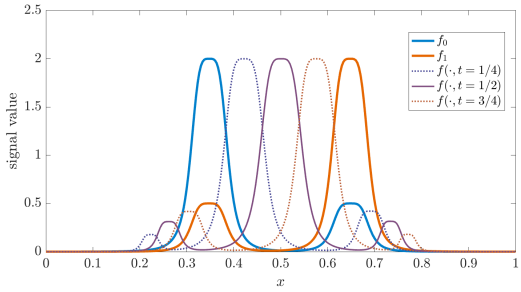
零速度初始化等价于显著性匹配初始化的一种退化情形，其中 $k = 0$。在这种情况下，我们通过在 $T(0) = 0$ 和 $T(1) = 1$ 之间进行线性插值，得到 $T(x) = x$。下文中，我们将把“零速度初始化”称为 $k = 0$。我们还指出，对于不同的整数 k，初始化也有所不同，这可能导致作用量泛函（50）的收敛行为和局部极小值不同。我们建议尝试几个 k 值。虽然可以采用多种方式将显著性匹配初始化纳入优化方案，但我们以算法 4 为例进行概述，并使用它来生成第 5 节中的数值结果。为了提高效率，与运行完整的算法 1 或算法 2 以寻找优化问题的极小化子相比，在搜索初始化时可以使用较少的迭代次数。

5. 数值实验

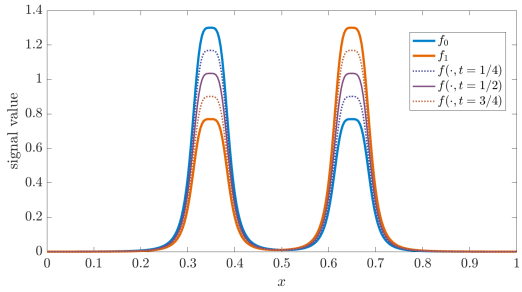
在本节中，我们给出几个示例来说明使用HV几何[1]的测地线。在本节中，我们始终将源信号 f_0 绘制为蓝色，将目标信号 f_1 绘制为红色，而它们在HV几何下的重心则使用紫色表示。我们使用虚线表示$t = \frac{1}{4}$ 和 $t = \frac{3}{4}$ 处的信号。

示例 5.1。最短测地线的非唯一性。 我们考虑一个源信号和目标信号均包含两个峰的示例。我们使用 300 个空间区间和 290 个时间区间对时空域进行离散化。对于图 2 中的所有图，我们设定超参数 $\kappa = 0.02$、 $\lambda = 0.001$ 和 $\varepsilon = 0.002$。在图 2a 中，每个信号都包含一个较大的隆起和一个较小的隆起。较大的隆起明显更高。测地线主要由水平输运主导。在图 2b 中，每个信号中的两个隆起大小相近，但其位置保持不变。在这种情况下，测地线主要由垂直变化主导，而不是像前一个示例中那样由水平输运主导。最后，在固定隆起位置的同时调整其高度比，我们找到了水平输运和垂直变化产生相同作用值的情形；见图 2c。也就是说，我们找到了作用相同的路径所对应的局部极小值，我们认为这些局部极小值也是全局极小值。因此，我们认为测地线并不唯一，这表明信号空间至少有一部分具有正曲率。

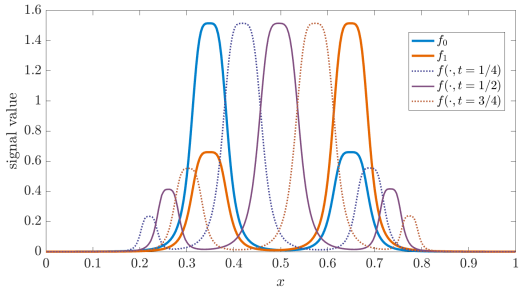
[1]复现这些示例的代码基于第 4 节所述的数值方案，可在 https: // github.com/yunany/Compute-HV-distance-between-signals.git 找到。

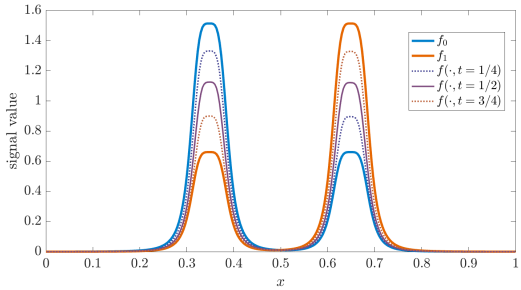


（A）大峰远大于小峰；水平输运占主导地位。



（B）峰的大小相近；垂直变化占主导地位。





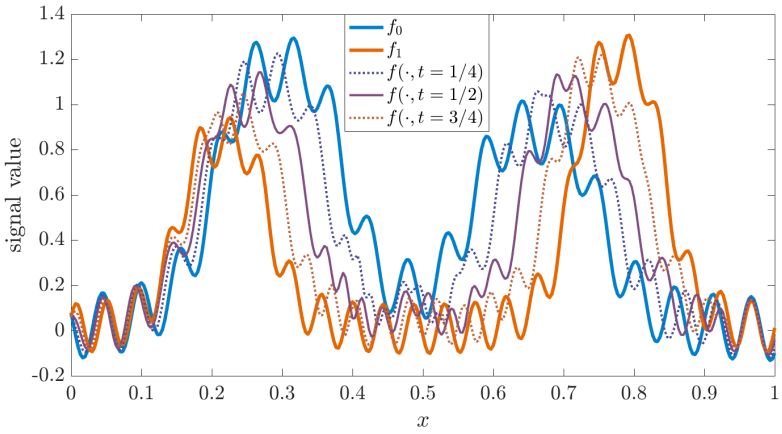
（C）对于适当的峰高比，两种占主导地位的输运机制会产生相同的作用量。

图 2. 最短长度测地线不唯一的示例。我们设定$\kappa = 0.02$、 $\lambda = 0.001$和 $\varepsilon = 0.002$。我们使用了 300 个空间区间和290 个时间区间。

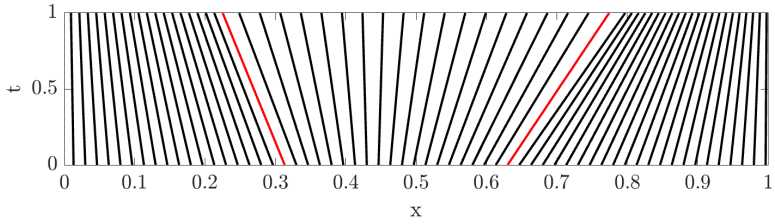
示例 5.2。带有高频扰动的峰。 在这里，我们使用上一节介绍的显著性匹配初始化，为我们的迭代方案找到一个良好的起点，使其收敛到作用泛函（50）的全局极小值。在图 3a 中，我们展示了超参数 $\kappa = 10^{-3}$、 $\lambda = 5 \times 10^{-5}$ 和 $\varepsilon = 2.5 \times 10^{-5}$ 下的测地线。我们使用了 300 个空间区间和 290 个时间区间。在图 3b 中，我们展示了基于显著性匹配初始速度的流映射，该流映射将源信号中最显著的两个峰映射到目标信号中最显著的两个峰。与这些峰匹配的轨迹以红色标出，其余轨迹通过线性插值获得。图 3c 展示了相对于最终收敛速度的流映射，该流映射与图 3b 中的流映射较为接近。

示例5.3。具有不连续性的信号。在图 4 中，我们考虑一个非光滑源信号和一个光滑目标信号。这里，我们使用超参数 $\kappa = 0.02$、 $\lambda = 0.001$和 $\varepsilon = 0.002$。我们使用了 300 个空间区间和 290 个时间区间。在静态网格上的有限差分离散化对信号 f_0进行了隐式正则化。由于我们使用了一阶数值格式，计算得到的解不会受到吉布斯现象的影响，这一点从图 4 中的测地线可以看出。此外，我们还观察到，不连续特征与不连续特征之间在水平方向和垂直方向上都存在渐变过渡。

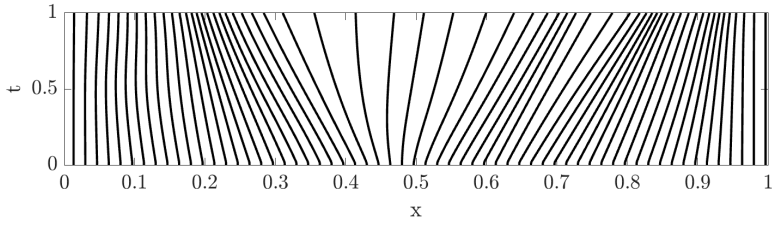
示例 5.4。增长与扩张。 在图 5 中，我们考虑一个“增长”示例，其中目标信号的宽度和高度都远大于源信号。在此，我们使用超参数 $\kappa = 0.2$、$\lambda = 0.01$ 和 $\varepsilon = 0.02$。我们使用了 300 个空间区间和 290 个时间区间。需要指出的是，该示例对超参数的选择较为敏感，而超参数会直接影响 HV几何下重心在 f_0 和 f_1 之间的位置。



（A）基于 HV几何的测地线



（B）初始速度的流映射（红色轨迹表示最显著的两个峰之间的初始匹配—配，位于 f_0 和 f_1之间）



（C）最优速度的流映射

图 3。我们使用显著性匹配初始化来寻找作用量最小化路径。在（A）中，我们展示了初始信号（蓝色）、最终信号（红色），以及沿计算得到的测地线在 $t = 0.25$、$t = 0.5$和 $t = 0.75$ 处的信号；超参数为 $\kappa = 10^{-3}$、$\lambda = 5 \times 10^{-5}$和 $\varepsilon = 2.5 \times 10^{-5}$。我们使用了 300 个空间区间和 290 个时间区间。初始速度对应的流如（B）所示，最优速度对应的流如（C）所示。

示例 5.5。 在图 6 中，我们比较了两个各自包含单个隆起的带符号信号，它们的峰宽度和位置并不一致。对于根据第 5.1 节讨论的参数估计（61）所确定的超参数，我们计算了二者在 HV 几何下的测地线。粗略估计 $L = 0.3$、$W = 0.4$ 和 $H = 0.4$，可得到 $\kappa = 0.1$、$\lambda = 0.01$ 和 $\varepsilon = 0.005$。我们注意到，较大范围的参数都可能产生相似的测地线。该路径使用 300 个空间区间和 290 个时间区间进行离散化。与最优速度 v 对应的流映射绘制在图 6 的底部，可以观察到，该输运特征将源信号（蓝色）的峰映射到目标信号（红色）的峰。

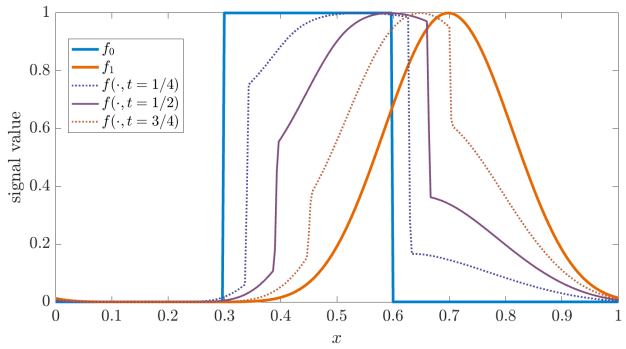


图 4。算法适用于非光滑数据。这里，我们使用超参数$\kappa = 0.02$、 $\lambda = 0.001$、$\varepsilon = 0.002$、300 个空间区间和 290 个时间区间。

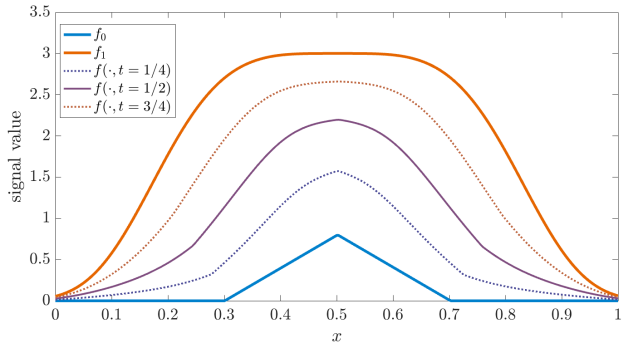


图 5。 d_{HV}测地线平衡了水平扩展和垂直增长。我们使用 $\kappa = 0.2$、 $\lambda = 0.01$、$\varepsilon = 0.02$、300 个空间区间和 290 个时间区间。

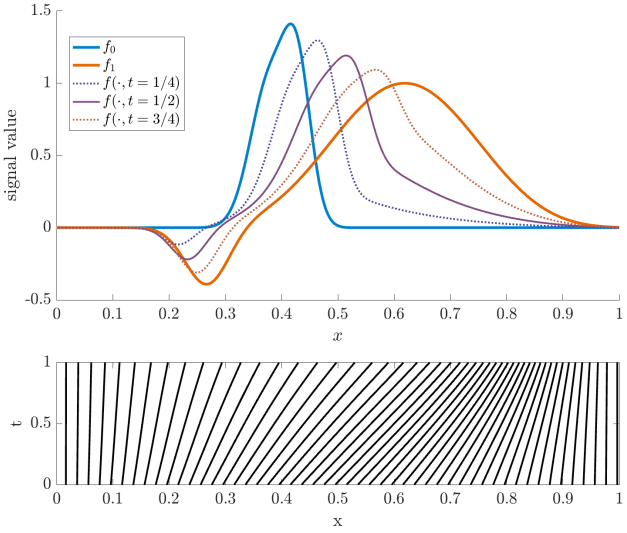
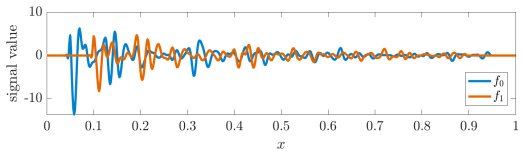
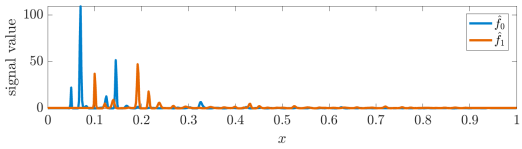


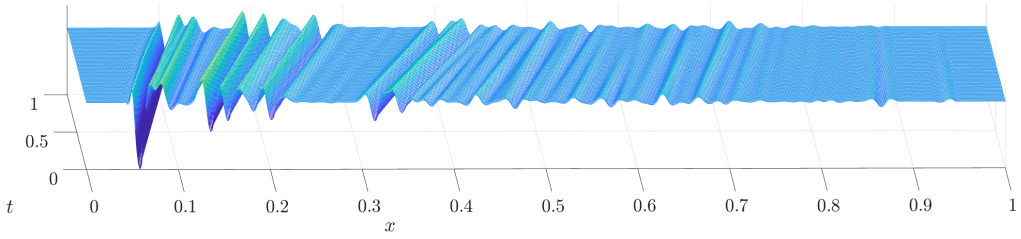
图 6。我们展示了沿计算得到的测地线的初始信号，其超参数由公式 (61) 给出，并采用 $L = 0.3$、 $W = 0.4$ 和 $H = 0.4$。底部图像展示了最优速度 v的流。



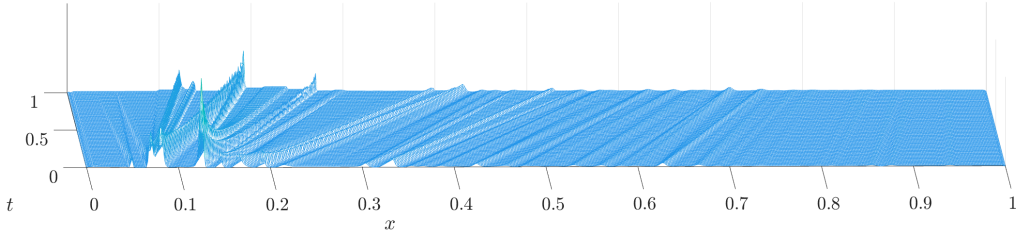
（A）原始信号



（B）归一化信号 $\hat{f}_0$ 和 $\hat{f}_1$ 用于最优传输



（C）基于 HV 几何的优化器 $f(x,\ t)$



（D）基于最优传输映射的 $\hat{f}_0$ 与 $\hat{f}_1$

图7。我们通过HV几何诱导的流映射以及采用二次代价的最优传输（应用于归一化信号），比较两个一维地震信号的匹配结果。（A）：HV几何中使用的原始信号；（B）：为满足最优传输要求而归一化的信号；（C）HV几何中的优化器 $f(x,\ t)$；（D）基于最优传输映射的ˆ ˆ位移插值，介于 f_0 和 f_1 之间。

示例 5.6。（地震信号）在地震应用中使用最优传输（OT）时，由于信号必须为非负且具有相等的总质量 [16, 17]，因此会面临约束条件方面的困难。在本示例中，我们测试所提出的HV几何，用于比较图7a所示的合成地震信号。为了使用最优传输进行比较，我们可以先对信号进行归一化，使其为非负且具有相等的总质量；归一化信号见图7b f_0，f_1，然后进行平方并缩放，使其积分为1 [16]。图7c和图7d分别展示了HV几何和最优传输几何的速度流图。对于最优传输，我们使用二次代价函数。对于HV几何，我们为第5.1节中公式（61）的参数设置 $H = 2$、$L = 0.1$ 和 $W = 0.02$。注意，在经典最优传输中，所有质量都必须通过单调映射 T 进行传输，使得 $\int_0^x \hat{}f_0(y)\mathrm{d}y = \int_0^{T(x)} \hat{}f_1(y)\mathrm{d}y$。这可能导致质量被长距离且不均匀地传输，如图7d所示。所提出的HV几何不仅能够自然地处理带符号信号，避免对信号进行预处理所产生的伪影，还能对速度施加正则性约束。

示例 5.7. 最后，我们来看一个真实案例。我们比较了来自 PhysioNet 2017挑战赛心电图数据库的两个心跳信号 [14, 21]；见图 8。根据下文第 5.1 节中公式 (61) 给出的超参数，在 HV几何下计算信号空间中的测地线，其中$L = W = 0.1$ 和 $H = 300$由给定数据估计。我们使用 600 个空间区间和

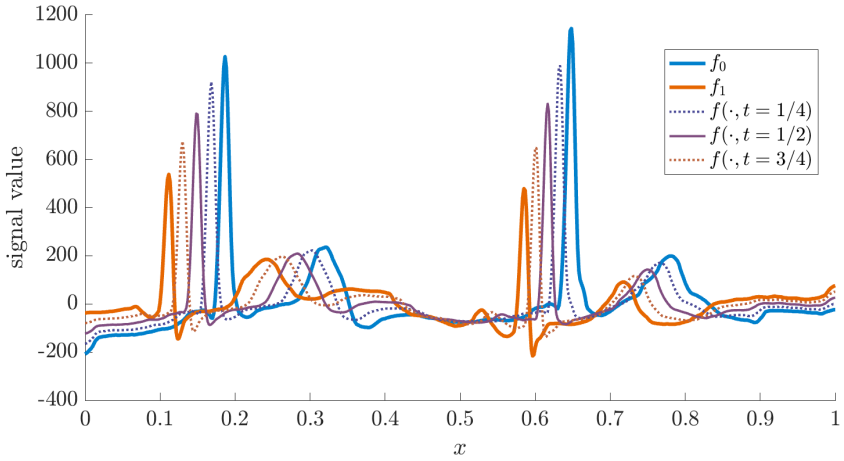


图 8. 图中展示了 HV几何下两个心电图信号之间的测地线。我们注意到，对于某些特征，水平变换占主导地位；而另一些部分则通过垂直移动图形进行匹配。我们根据 (61) 设置 κ、 λ 和 ε ，其中$L = W = 0.1$ 和 $H = 300$。我们使用 600 个空间区间和 150 个时间区间。

150 个时间区间。我们注意到，大幅度特征（R波峰和T波）通过水平输运以理想的方式匹配，而小幅度扰动则通过垂直调整进行匹配。这体现了 HV几何的优势。

5.1. 参数选择。 使用 HV几何分析信号的一个重要环节是如何选择参数 κ, λ 和 ε。这取决于数据中存在的长度尺度。这里我们根据距离的缩放性质给出一个简单的参数选择规则；参见命题 2.1。设 H 为数据中的平均垂直变化， W 为数据中特征的典型宽度，L为待匹配特征之间的最大水平距离。那么我们建议使用

$$\kappa = 0.01\frac{H^2}{L^2}, \quad \lambda = 0.02H^2, \text{ and } \varepsilon = 0.2H^2W^2. \tag{61}$$

正如我们所提到的，参数的缩放符合距离的不变性。实数系数（0.01、0.02、0.2）是基于对不同信号类型进行数值实验得出的。

我们注意到，给定一个数据集 $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$，对于 H，一个不错的建议是采用信号之间典型的 L^2距离：

$$H^2 = \frac{1}{n^2}\sum_i \sum_j \|f_i - f_j\|_{L^2}^2.$$

我们还注意到， H^2 是方差的两倍，因此可以通过对一个指标求和来计算：

$$H^2 = \frac{2}{n}\sum_i \|f_i\|_{L^2}^2 - 2\left\|\frac{1}{n}\sum_i f_i\right\|_{L^2}^2.$$

我们指出，对于大多数信号，结果对参数并不十分敏感。

致谢

我们感谢王建明为第2.1节中的结果提供了关键思路。我们感谢Katy Craig所进行的富有启发性的讨论。DS和RH感谢美国国家科学基金会通过资助项目DMS 2206069提供支持。本项工作部分是在DS和YY访问西蒙斯理论研究所期间完成的

计算中心（2021年秋季）。YY感谢Max Rössler博士、Walter Haefner基金会和苏黎世联邦理工学院基金会提供支持。

参考文献

[1] L. AMBROSIO 和 G. CRIPPA，非光滑速度下的连续性方程与常微分方程流，《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑：数学》，144（2014），第 1191–1244 页。[2] L. AMBROSIO、N. GIGLI 和 G. SAVARÉ，《度量空间及概率测度空间中的梯度流》，苏黎世联邦理工学院数学讲义，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，第二版，2008。[3] M. BAUER、M. BRUVERIS、P. HARMS 和 P. W. MICHOR，泛函演算的光滑扰动及其在度量空间黎曼几何中的应用，《数学物理通讯》，389（2022），第 899–931 页。[4] M. BAUER、P. HARMS 和 P. W. MICHOR，浸入空间上的分数阶索伯列夫度量，《变分法与偏微分方程》，59（2020），第 62 号论文，共 27 页。[5] A. BEHZADAN 和 M. HOLST，索伯列夫空间中的乘法：再探，2015。[6] B. BERKELS、A. EFFLAND 和 M. RUMPF，图像空间中的时间离散测地路径，《SIAM 成像科学杂志》，8（2015），第 1457–1488 页。[7] P. T. BOGGS 和 J. W. TOLLE，序列二次规划，《数值学报》，4（1995），第 1–51 页。[8] M. BRUVERIS，曲线空间上索伯列夫度量的完备性性质，《几何与力学杂志》，7（2015），第 125–150 页。[9] M. BRUVERIS、P. W. MICHOR 和 D. MUMFORD，浸入平面曲线空间上索伯列夫度量的测地完备性，《Forum Mathematicum Sigma》，2（2014），第 e19 号论文，共 38 页。[10] B. CHARLIER、N. CHARON 和 A. TROUVÉ，用于功能形状变异性分析的 Fshape 框架，《计算数学基础》，17（2017），第 287–357 页。[11] N. CHARON、B. CHARLIER 和 A. TROUVÉ，索伯列夫空间中的功能形状变形，《计算数学基础》，18（2018），第 1535–1596 页。[12] X. CHEN、A. JÜNGEL 和 J.-G. LIU，关于 Aubin-Lions-Dubinskiĭ 引理的注记，《应用数学学报》，133（2014），第 33–43 页。[13] L. CHIZAT、G. PEYRÉ、B. SCHMITZER 和 F.-X. VIALARD，非平衡最优传输：动态与 Kantorovich 表述，2015。[14] G. D. CLIFFORD、C. LIU、B. MOODY、L.-W. H. LEHMAN、I. SILVA、Q. LI、A. E. JOHNSON 和 R. G. MARK，基于短时单导联心电图记录的房颤分类：PhysioNet/心脏病学计算挑战赛 2017，载于《2017 年心脏病学计算会议（CinC）》，2017，第 1–4 页。[15] B. ENGQUIST、B. D. FROESE 和 Y. YANG，用于地震全波形反演的最优传输，《数学科学通讯》，14（2016），第 2309–2330 页。[16] B. ENGQUIST 和 Y. YANG，地震反演与最优传输的数据归一化，《分析方法与应用》，26（2019），第 133–148 页。[17] , 基于最优传输的地震反演：超越周期跳跃，《纯粹与应用数学通讯》，75（2022），第 2201–2244 页。[18] L. C. EVANS，《偏微分方程》，《数学研究生教程》第 19 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998。[19] I. FONSECA 和 G. LEONI，《变分法现代方法：L^p 空间》，《数学施普林格专著》，施普林格出版社，纽约，2007。[20] A. FRANÇOIS、P. GORI 和 J. GLAUNÈS，使用半拉格朗日格式的变形图像配准，载于《几何信息科学》，《计算机科学讲义》第 12829 卷，施普林格出版社，尚，2021，第 781–788 页。[21] A. L. GOLDBERGER、L. A. N. AMARAL、L. GLASS、J. M. HAUSDORFF、P. C. IVANOV、R. G. MARK、J. E. MIETUS、G. B. MOODY、C.-K. PENG 和 H. E. STANLEY，Physiobank、Physiotoolkit 和 Physionet，《循环》，101（2000），第 e215–e220 页。[22] D. D. HOLM、A. TROUVÉ 和 L. YOUNES，变形的 Euler-Poincaré 理论，《应用数学季刊》，67（2009），第 661–685 页。[23] P. D. LAX，吉布斯现象，《科学计算杂志》，28（2006），第 445–449 页。[24] M. LIERO、A. MIELKE 和 G. SAVARÉ，最优熵传输问题及正测度之间一种新的 Hellinger–Kantorovich 距离，《数学发明》，211（2017），第 969–1117 页。[25] J.-G. LIU、R. L. PEGO 和 D. SLEP ˇCEV，不可压缩流及形状间测地线的最小作用量原理，《变分法与偏微分方程》，58（2019），第 179 号论文，共 43 页。[26] D. G. LUENBERGER 和 Y. YE，《线性与非线性规划》，第 228 卷，施普林格出版社，2015。[27] L. MÉTIVIER、R. BROSSIER、Q. MÉRIGOT 和 E. OUDET，一种作为 L^p 距离推广的图空间最优传输距离：在地震成像逆问题中的应用，《逆问题》，35（2019），第 085001 号，共 49 页。[28] P. W. MICHOR 和 D. MUMFORD，平面曲线空间上的黎曼几何，《欧洲数学学会杂志（JEMS）》，8（2006），第 1–48 页。

[29] M. I. MILLER、A. TROUVÉ 和 L. YOUNES，计算解剖学中的测地线射击，《数学成像与视觉杂志》，24（2006），第 209–228 页。[30] M. I. MILLER 和 L. YOUNES，群作用、同胚与匹配：一个通用框架，《国际计算机视觉杂志》，41（2001），第 61–84 页。[31] G. NARDI、G. PEYRÉ 和 F.-X. VIALARD，有界变差与索伯列夫度量下形状空间上的测地线，《SIAM 成像科学杂志》，9（2016），第 238–274 页。[32] M. RUMPF 和 B. WIRTH，形状空间中的离散测地线演算及其在黏性流体对象空间中的应用，《SIAM 成像科学杂志》，6（2013），第 2581–2602 页。[33] , 测地线演算的变分时间离散化，《IMA 数值分析杂志》，35（2015），第 1011–1046 页。[34] M. THORPE、S. PARK、S. KOLOURI、G. K. ROHDE 和 D. SLEP ˇCEV，一种用于信号分析的传输 L^p 距离，《数学成像与视觉杂志》，59（2017），第 187–210 页。[35] A. TROUVÉ，无限维群作用与形状识别，《巴黎科学院报告》I 辑：数学，321（1995），第 1031–1034 页。[36] A. TROUVÉ 和 L. YOUNES，可变形模板的局部几何，《SIAM 数学分析杂志》，37（2005），第 17–59 页。[37] , 李群作用下的变形，《计算数学基础》，5（2005），第 173–198 页。[38] P. TSENG，不可微最小化中块坐标下降法的收敛性，《优化理论与应用杂志》，109（2001），第 475 页。[39] Y. WANG、W. YIN 和 J. ZENG，非凸非光滑优化中 *ADMM* 的全局收敛性，《科学计算杂志》，78（2019），第 29–63 页。[40] B. WIRTH、L. BAR、M. RUMPF 和 G. SAPIRO，形状空间中测地线的连续介质力学方法，《国际计算机视觉杂志》，93（2011），第 293–318 页。[41] L. YOUNES，形状与微分同胚，《应用数学科学》第 171 卷，施普林格出版社，柏林，2010。[42] W. P. ZIEMER，弱可微函数：索伯列夫空间与有界变差函数，1989。

（Ruiyu Han 和 Dejan Slepˇcev）卡内基梅隆大学数学科学系，美国宾夕法尼亚州匹兹堡，邮编 15213电子邮件地址：ruiyuh@andrew.cmu.edu, slepcev@math.cmu.edu

（Yunan Yang）苏黎世联邦理工学院理论研究所，瑞士苏黎世，邮编 8092电子邮件地址：yunan.yang@eth-its.ethz.ch