arXiv:2304.11544v1 [math.GR] 23 Apr 2023

关于阿贝尔 pro-Lie 群余积的简短札记

WOLFGANG HERFORT、KARL H. HOFMANN 和
FRANCESCO G. RUSSO

Abstract. 本文引入阿贝尔 pro-Lie 群范畴中一族阿贝尔 pro-Lie 群的条件余积概念。文中证明，任意一族阿贝尔 pro-Lie 群的笛卡尔积都可以用条件余积的泛性质来刻画。

在 [HM77] 中，第二作者和 S. Morris 给出了判定一族局部紧阿贝尔群的（余）积何时存在的准则。对于前有限阿贝尔群，任意一族（A_i）$_{i\in I}$拟有限群的积都存在，且与笛卡尔积一致 $P:=\prod_{i\in I} A_i$。J. Neukirch 在 [Neu71] 中证明， P 具有一种泛性质，类似于（离散）阿贝尔群范畴中余积（直和）的泛性质。本文给出他的结果的一个版本，该版本适用于规模大得多的阿贝尔 pro-Lie 群族的笛卡尔积（参见 [HM07，第 5] 章）。为表述我们的结果，我们需要将 J. Neukirch 最初在 [Neu71] 中为拟有限群族引入的概念（另见 [RZ10，D.3]）调整到阿贝尔 pro-Lie 群范畴中。

定义 1. 设 $(A_j)_{\in J}$ 是一族拓扑群， H 是一个拓扑群，且 $\mathbb{F}=(\phi_j)_{j\in J}$，$\phi_j\colon A_j\to H$ 是一族连续同态。我们称 $\mathbb{F}$ 收敛，如果对 H 的每个单位元邻域 U，集合 $J_U:=\{j\in J\colon \phi_j(A_j)\not\subseteq U\}$ 都是有限的。

例 2. 对任意一族 $(A_j)_{j\in J}$ 拓扑群，令 $H=\prod_{j\in J} A_j$ 为带有蒂霍诺夫拓扑的笛卡尔积。设由下式给出一族 $\mathbb{F}=(\tau_j)_{j\in J}$ 自然态射 $\tau_j\colon A_j\to H$

$$\tau_j(a)=(a_k)_{k\in J} \text{ with } a_j=a \text{ and } a_k=0 \text{ otherwise.}$$

那么 $\mathbb{F}$ 是收敛的。

日期：2023 年 4 月星期二 25th 。关键词和短语：前李群，余积。2020年数学主题分类：22E20；22A05。

这可直接由 H上的乘积拓扑定义得出。态射 τ_j 称为自然嵌入。

我们通过泛性质来定义条件余积，这类似于阿贝尔离散群的余积（直和）的泛性质：

定义 3. 在拓扑群范畴 $\mathcal{A}$ 中，如果对象族 $(A_j)_{j\in J}$ 存在一个收敛态射族 $\tau_j\colon\ A_j \to G$、$j \in J$，并且对于 $\mathcal{A}$ 中的每个收敛态射族 $\psi_j\colon\ A_j \to H$、$j \in J$，都存在唯一的态射 $\omega\colon\ G \to H$，使得对于所有 $j \in J$ 都有 $\psi_j = \omega \circ \tau_j$，则称 G 为该对象族的条件余积。态射 τ_j 称为条件余积的余积映射。

我们将证明以下定理：

定理 4. 在阿贝尔前李群范畴中，阿贝尔前李群族 $(A_j)_{j\in J}$ 的条件余积是笛卡尔积 $P\colon = \prod_{j\in J} A_j$，其中典范嵌入为 $\tau_j\colon\ A_j \to P$。

但首先，我们要确保条件余积的唯一性：

命题 1. 如果 G 和 G' 是范畴 $\mathcal{A}$ 中拓扑群族 $(A_j)_{j\in J}$ 关于收敛族 τ_j 的条件余积，其中 $A_j \to G$ 和 τ'_j 是 $\mathcal{A}$ 中的态射族，那么存在一个自然同构 $\lambda\colon\ G \to G'$，使得对于所有 $j \in J$，都有 $\tau'_j = \lambda \circ \tau_j$。

证明。根据定义 2，由于 G 是带有余积映射 τ_j、$j \in J$ 的族 $(A_j)_{j\in J}$ 的条件余积，存在唯一的态射$\lambda\colon\ G \to G'$ 使得

$$(1) \qquad (\forall j \in J)\, \lambda \circ \tau_j = \tau'_j \colon A_j \to G'.$$

同样，由于 G' 也是族 $(A_j)_{j\in J}$ 的条件余积，其余积映射为 τ'_j、$j \in J$，因此存在唯一的态射 $\lambda'\colon G' \to G$ 使得

$$(2) \qquad (\forall j \in J)\, \lambda' \circ \tau'_j = \tau_j \colon A_j \to G.$$

因此，由（1）和（2），我们得到

$$(3) \qquad (\forall j \in J)\, \tau_j = \lambda' \circ \tau'_j = \lambda' \circ \lambda \circ \tau_j \colon G \to G.$$

然而，显然我们也有，

$$(4) \qquad (\forall j \in J)\, \tau_j = \mathrm{id}_G \circ \tau_j \colon G \to G.$$

因此，根据定义 3 中的唯一性，由（3）和（4）可得

$$(5) \qquad \lambda' \circ \lambda = \mathrm{id}_G\,.$$

现在交换 G和 G' 的角色，我们也可得

$$\lambda \circ \lambda' = \mathrm{id}_{G'} . \tag{6}$$

因此，由（5）和（6）， λ 是一个同构，这正是我们需要证明的。 □

我们注意到，对于拟有限群，条件余积与阿贝尔有限群簇的自由 pro-$\mathcal{C}$ 积一致，参见 [Neu71, RZ10]。

令 $\mathcal{A}$ 为拓扑阿贝尔 pro-Lie 群范畴（即由李群的射影极限构成的群：参见 [HM07，第160页及后续页和第 5]章）。每个前李群 G 都有一个闭正规子群滤子基 $\mathcal{N}(G)$，使得 G/N 是一个李群，并且 $G \cong \lim_{N\in\mathcal{N}(G)} G/N$。（例如，参见 [HM07，第160页，定义 A.]）

回顾一下，每个局部紧阿贝尔群都是前李群；根据山边定理，每个几乎连通局部紧群都是前李群。因此，显然每个拟有限群都是前李群。前李群的每个笛卡尔积 $P = \prod_{j\in J} A_j$ 本身也是前李群。

引理 5。设 H 是一个阿贝尔 pro-Lie 群，且 $\mathbb{F}$ 是一族收敛态射 $\psi_j : A_j \to H$。那么，对于每个 $N \in \mathcal{N}(H)$，集合 $\{j \in J\colon \psi_j(A_j) \not\subseteq N\}$ 都是有限的。

证明。设 $N \in \mathcal{N}(H)$。李群 H/N 有一个单位邻域 V，其中 $\{0\}$ 是 H/N 的唯一子群。现在令 $p\colon H \to H/N$ 为商态射，并设 $U = p^{-1}(V)$。

因此 $\psi_j(A_j) \not\subseteq N$意味着 $\psi_j(A_j) \not\subseteq U$。然而，根据定义 j，满足此条件的集合是有限的1 ，应用于族 $(A_j)_{j\in J}$的条件余积。引理得证。□

定理4的证明。条件余积在同构意义下的唯一性由命题1得出。

因此，根据定义 3，我们需要证明：给定一个阿贝尔 pro-Lie 群 H 以及一个收敛态射族 $\psi_j : A_j \to H$，则存在唯一的态射 $\omega : P \to H$ 满足$\psi_j = \omega \circ \tau_j$对所有 $j \in J$。

我们首先注意到，每个 $x \in P$ 都有一个表示

$$x = (\tau_j(a_j))_{j\in J} \tag{7}$$

对唯一元素 $a_j \in A_j$。记 $\mathcal{N}(H)$ 为 H 的所有闭子群构成的集合，使得 H/N 是一个李群。这是以下结论的推论：

[HM07，定理 3.27]， $\mathcal{N}(H)$ 是 H 的闭子群的一个滤子基，并且

$$H \cong \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H/N \tag{8}$$

代数上和拓扑上。

固定 $N \in \mathcal{N}(H)$，并令 $J_N := \{j \in J : \psi_j(A_j) \not\leq N\}$。于是，根据引理 5，集合 J_N 是有限的，并考虑到对 $x \in P$ 的表示式（7）以及对所有 $\tau_j(A_j) \leq N$ 的 $j \notin J_N$，我们通过令 $\omega_N : P \to H/N$ 得到一个定义良好的态射

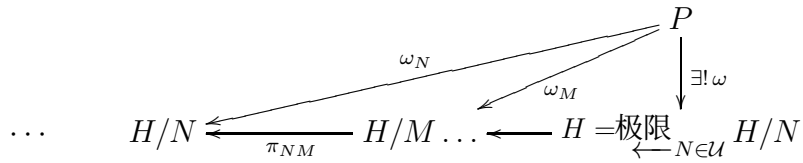
$$\omega_N(x) := \sum_{j\in J_N} \psi_j(a_j) + N. \tag{9}$$

对于 $\mathcal{N}(H)$ 中的子群 $M \leq N$ 和 H，令 $\pi_{NM} : H/M \to H/N$ 表示典范满态射。

对于 $M \leq N$，由等式（9）得到相容关系

$$\omega_N = \pi_{NM} \circ \omega_M, \tag{10}$$

如下面的图表所示：



考虑到公式（10）中的关系，我们看到逆极限的泛性质 $H = \varprojlim_{N\in\mathcal{U}} H/N$ 意味着存在唯一的连续同态 $\omega : P \to H$，其满足所需的关系

$$(\forall j \in J) \quad \psi_j = \omega \circ \tau_j. \tag{11}$$

□

注释。

范畴中对象族的余积 $\mathcal{A}$，是通过反转所有箭头而得到的范畴中的积。有趣的是，虽然积通常被视为简单的概念，但在许多范畴 $\mathcal{A}$（阿贝尔群范畴除外）中，余积往往很棘手。因此，作为本注释的结尾，或许有必要作一些一般性的评论。

一个早期的惊人事实是，在熟悉的群范畴中，$\mathbb{Z}(2)$ 与 $\mathbb{Z}(3)$ 的余积是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$。

在任何具有定义良好的对偶范畴的范畴 $\mathcal{A}$ 中，例如局部紧阿贝尔群范畴，某个族 $\coprod_j A_j$ 的余积

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ A_j $j \in J$，自然同构于其对偶 P $P\colon = \prod_j A_j$，即其对偶群的积。

即使在某些特殊情形下，例如紧阿贝尔群 A_j的情形，所得余积也很复杂，因为无限多个离散阿贝尔群的积的特征群可能难以处理。

若 $\mathcal{A}$是前有限阿贝尔群范畴，那么其对偶范畴就是阿贝尔挠群范畴 $\mathcal{T}$。$\mathcal{T}$中一族挠群 T_j 的积，是其笛卡尔积 $\prod_j T_j$的挠子群 $\mathrm{tor}(\prod_j T_j)$。因此，当我们讨论 $\mathcal{A}$中一族无界循环群 A_j 的余积时，手头可能已经有了一个复杂对象$\coprod_{j\in J} A_j$。

因此，任何余积表达清晰的特殊情形都值得欢迎，即便其适用范围可能有限。我们这里讨论的条件余积就是这样一个例子：它位于阿贝尔 pro-Lie 群这一相当大的、但仍较易理解的范畴中（见 [HM07]第 5 章）。作者在研究某些局部紧阿贝尔 p群时遇到了这样的余积。我们的条件余积适用于一类范围较为有限的态射族，我们称之为“收敛”的态射族。这里出现了颇为不同寻常的情况：对这类态射族中的每一族，其条件余积都与其笛卡尔积一致。经典情形中，我们熟知有限阿贝尔群范畴里的余积与积相一致；毕竟，这种情形颇为特殊。

References

[HM77] Karl Heinrich Hofmann 和 Sidney A. Morris。《拓扑群范畴中的局部紧积与余积》。《澳大利亚数学会通报》，17：401–417，1977 年。[HM07] Karl H. Hofmann 和 Sidney A. Morris。《连通前李群的李理论》，EMS数学专著丛书第 2 卷。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2007 年。关于前李代数、前李群及连通局部紧群的结构理论。[Neu71] J¨urgen Neukirch。《前有限群的自由积及其上同调》。《巴塞尔数学文献》，22：337–357，1971 年。[RZ10] Luis Ribes 和 Pavel Zalesskii。《拟有限群》，数学及其边界领域成果第 40 卷。第 3 辑：现代数学综述丛书 /数学及相关领域成果。第 3 辑：现代数学综述丛书/。施普林格出版社，柏林，第 2 版，2010 年。

Institute for Analysis and Scientific Computation
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstrasse 8-10/101Vienna, Austria电子邮箱：wolfgang.herfort@tuwien.ac.at

Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
Schlossgartenstr. 7e 64289 Darmstadt, Germany
电子邮箱：hofmann@mathematik.tu-darmstadt.de

Department of Mathematics and Applied Mathematics
University of Cape TownPrivate Bag X1,
Rondebosch 7701Cape Town, South Africa电子邮箱：francescog.russo@yahoo.com