arXiv:2304.11568v1 [math.OC] 23 Apr 2023

具有状态约束的网络时空经济增长模型中的最优控制问题

ALESSANDRO CALVIA[a]、FAUSTO GOZZI[b]、MARTA LEOCATA[c]、GEORGIOS I. PAPAYIANNIS [d,h]、ANASTASIOS XEPAPADEAS [e,f]、ATHANASIOS N. YANNACOPOULOS [g,h]

摘要。我们提出了一个空间经济增长模型，其中空间被描述为由相互连接的地理位置组成的网络，并研究了该模型在带有状态约束的图上的相应有限维最优控制问题。网络上的经济增长模型源于空间经济数据的特性，这类数据天然具有类图结构；这一事实使得这些模型非常适合进行数值实现和校准。网络环境不同于相关文献所采用的环境，在相关文献中，空间被建模为空间的一部分欧几里得空间，从而产生无限维最优控制问题。在介绍模型及相关控制问题之后，我们证明了最优控制的存在性与唯一性，并给出了值函数的正则性结果，为进一步研究最优策略奠定了基础。随后，我们关注一些特定情形，在适当假设下，可以求得控制问题的显式解。最后，我们讨论了包含两个和三个地理位置的网络情形。

关键词：最优控制问题；值函数；图与网络；HJB方程的黏性解与正则解；双边黏性解；空间经济增长模型；AK生产函数。

AMS 2020： 34H05, 49K15, 49L20, 49L25, 91B62, 93C15.

目录

1. 引言 21.1. 论文动机 21.2. 论文的主要贡献 21.3. 符号 42. 最优控制问题 43. 最优控制的存在性和值函数的性质 64. 动态规划原理与HJB方程 85. 网络上的AK模型 15. 一般情形 1

1
1

[a] 帕尔马大学经济与企业科学系，帕尔马，意大利。[b] 经济与金融系，LUISS *Guido Carli*，罗马，意大利。[c] 比萨高等师范学院，比萨，意大利。[d] 数学科，海军科学系，希腊海军学院，比雷埃夫斯。[e] 国际与欧洲经济研究系，雅典经济与商业大学，雅典，希腊。[f] 博洛尼亚大学经济科学系，博洛尼亚，意大利。[g] 统计系，雅典经济与商业大学，雅典，希腊。[h] 随机建模与应用实验室，雅典经济与商业大学。电子邮箱地址： alessandro.calvia@unipr.it (A.Calvia), fgozzi@luiss.it (F.Gozzi), marta.leocata@sns.it(M. Leocata), gpapagiannis@aueb.gr (G.I. Papayiannis), anastasio.xepapadeas@unibo.it(A. Xepapadeas),ayannaco@aueb.gr (A.N. Yannacopoulos)。A. Calvia、F. Gozzi 和 M. Leocata 获意大利大学与研究部（MIUR）资助，资助框架为 PRIN项目2017FKHBA8 001（经济活动的时空演化：数学模型与实证应用）。A. Calvia 和 M. Leocata 是国家数学分析、概率及其应用小组 （GNAMPA）的成员，该小组隶属于意大利国家高等数学研究所 （INdAM）。。

5.2 双节点情形5.3 三节点情形：数值研究 附录 A. 技术结果 附录 B. 命题的证明5.15参考文献 18 20 21 23 24

1. 引言

1.1. **论文动机**。 从技术角度来看，经济增长经典理论与带有状态约束和控制约束的最优控制问题的研究有关。这类问题曾在数学和经济学文献中的多篇论文里得到研究；关于经济学方面，读者可参阅Barro和Sala-iMartin所著的书籍 [4], ，关于数学方面，可参阅Seierstad和Sydsæter所著的书籍 [23] 以及Yong和Zhou所著的书籍 [28], 。

近年来，一些研究论文探讨了经济增长的空间异质性，这种异质性源于相关经济变量的地理分布。在相关文献中，出现了各种动态经济增长模型，其中明确纳入了空间维度。这些模型大多考虑分布于欧几里得空间某个子集上的地理位置连续体（通常为单位圆或单位球面），并将状态方程设定为抛物型偏微分方程（PDE）。从数学角度来看，这一选择促成了对带状态约束的无限维最优控制问题的研究，参见 Boucekkine 等人 [8, 7, 9], Brito [11], Calvia 等人 [12],Fabbri [15], Gozzi 和 Leocata[19], Xepapadeas 与 Yannacopoulos [26, 27]。

这些模型的主要缺点之一是，除了能够求得值函数显式形式的特殊情形外，很难获得有关值函数正则性的信息，因此也难以证明验证定理和求得最优反馈策略。此外，由于维数灾难，数值模拟会遇到困难；在这种设置下，对经济变量的空间运动进行建模也并非易事。

鉴于这些事实，研究空间变量由相互连接的地理位置网络描述的经济增长模型，似乎是合理且有意义的。数学上，我们所说的网络是指一个加权图，其中节点是各个地理位置（如城市、区域等），弧是部分地理位置之间的连接，而权重表示每条连接的重要程度。与地理位置连续分布的模型相比，加权图结构使资本运输更符合现实，也契合空间经济数据的性质，因为这类数据恰好具有这样的网络特征（参见 Allen 和 Arkolakis [2]）。这一事实使这些模型非常适合数值实现和校准。

本文研究网络上的经济增长问题，其中每个位置（即节点）都存在资本创造和消费。我们考虑生产函数为线性的情形，即所谓的 AK生产函数，这一选择与前述大多数文献一致。我们通过线性算子来刻画资本流动性 L，该算子例如可以是离散拉普拉斯算子（参见备注 2.2）。选择一般线性算子使我们的模型具有更大的灵活性，不同于前述文献所研究的模型。特别是，它允许我们考虑不同的经济现象，例如资本集中或资本分散（参见 Xepapadeas 和 Yannacopoulos [26]）。

我们研究一个最优控制问题，其中集中式社会规划者旨在确定每个地理位置的最优消费路径，以最大化给定的总贴现效用。显然，在每个时间点以及图的每个节点上，资本水平都必须保持非负。因此，我们面对的是一个带状态约束的最优控制问题，其中 $\mathbb{R}^n$ ， n 是图中的节点数。

1.2. **本文的主要贡献**。 本文针对我们所引入的网络经济增长模型，建立了一些结果（下文将作简要概述）。这些结果是全面分析此类模型的关键；我们的最终目标是刻画控制问题的值函数，以及状态和

控制变量（即资本和消费）的最优路径，并揭示它们如何取决于网络结构。要实现这些目标，我们需要深入分析所面临的状态约束最优控制问题，主要是因为 Soner [24], 所给出的标准结果无法直接应用或推广。事实上，我们考虑资本在网络中的流动所对应的线性状态动力学，以及无界的消费效用。这与文献中通常考虑的情形不同：那些情形假设状态方程中的向量场以及运行收益/成本函数均有界且满足 Lipschitz 条件。特别是，我们考虑严格递增且凹的效用函数，既非线性也非二次函数，这使得我们无法采用更直接的方法求解优化问题。因此，要实现我们的目标，就需要开发新技术，这项工作留待未来研究。

然而，正如上文所预期的，本文证明了以下重要结果：

(i) 我们在定理 4.6中证明，值函数是 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程的双边黏性解（按照 Bardi 和 Capuzzo-Dolcetta [3,定义 2.27], 的意义，即它既是 HJB 方程的黏性解，也是其相反方程的黏性解），定义在 $\mathbb{R}^n$ 的正正交象限上，其中 n 是图中的节点数。我们还在定理4.7中证明，值函数在 $\mathbb{R}^n$ 的正正交象限内部连续可微。(ii) 我们给出了 $\mathbb{R}^n$ 的正正交象限内部的最优反馈映射，参见推论 4.8。(iii) 在一些能够更精确描述网络上资本流动性的特定情形下，我们在数据满足适当条件时，通过研究一个相关的辅助最优控制问题，显式写出值函数，参见方程 (5.17)。参见命题 5.5 和定理 5.7。(iv) 对于上述特定情形，我们建立了一个关于最优资本和消费路径长期行为的结果，参见命题 5.11 和定理 5.12。我们还在命题 5.13 中分析增长率与图的连通性之间的关系。(v) 我们研究了具有对称图权重的双节点情形，并进一步刻画了那些能够显式计算值函数的情形下值函数的性质，参见命题5.14和命题 5.15。最后，我们讨论了具有对称图权重的三节点情形下的一些数值模拟。

我们的主要结果是值函数在 $\mathbb{R}^n$ 的正正交象限内部具有正则性，即连续可微性。一方面，这使我们能够在 $\mathbb{R}^n$ 的正正交象限内部获得最优控制的反馈刻画，这对于定性研究和数值逼近最优路径至关重要。另一方面，这将 Cannarsa 和 Soner [14] （另见 Bardi 和 Capuzzo-Dolcetta [3],、Cannarsa 和 Sinestrari [13], 以及 Freni 等人 [18]在经济增长问题中的早期结果）推广到了效用函数在无穷远处和/或零附近可能无界的情形。

为了求得值函数的显式形式（如上文第（iii）点所述），并研究相应的最优路径，我们借鉴了 Boucekkine 等人 [9] 以及 Calvia 等人 [12]在所分析的无限维情形中采用的思想。值得注意的是，我们在命题5.5 中给出了一个充分条件，使得与最优控制问题相关的 HJB方程能够通过一个（可能是非线性的）特征值问题得到显式解。上述无限维框架中引用的情形没有与这一结果以及条件（5.17）相对应的结论。

最后，我们注意到，第5.2节给出的结果以及第5.3节讨论的数值模拟，为理解图结构与优化问题解的定性性质之间的联系提供了一些初步思路。我们认为，进一步开展这项研究很有意义，这将留待未来研究。

我们在引言的最后概述本文的结构。第 2 节介绍经济增长模型和最优控制问题。第 3 节证明最优控制的存在性与唯一性，并探讨值函数的一些有用性质；随后在第 4 节证明主要结果，具体内容见上文的第 (i) 点和(ii) 点。第 5节详细说明控制问题与网络结构之间的联系，并给出

resu上文第 (iii)点提到的显式解。最后，在第 5.2节和5.3节中 e
disc分别讨论双节点情形和三节点情形。

1.3. **符号**。本节汇总本文所使用的主要符号。

符号 $\mathbb{R}^n$ 表示由实数 n-元组组成的通常的 n 维欧几里得空间；其标准基表示为 $\{e_1,\dots,e_n\}$。实数集表示为 $\mathbb{R}$。集合

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\colon x_i\geq 0,\forall i=1,\dots,n\},$$
$$\mathbb{R}^n_{++} := \{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\colon x_i> 0,\forall i=1,\dots,n\},$$

分别表示 $\mathbb{R}^n$ 的正锥（或正正交象限）和严格正锥（或严格正正交象限）。为清晰起见，在方便时，我们用 $[x]_i$ 表示向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 的第 i 个分量。对于任意 x，$y\in\mathbb{R}^n$，$\|x\|$ 是 x 的欧几里得范数，而 $\langle x,y\rangle$ 是 x 与 y 的内积。如果 A 是任意矩阵，则 A^T 表示其转置，$\|A\|$ 表示其弗罗贝尼乌斯范数。

如果 $f\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在点 $x\in\mathbb{R}^n$处可微，则 $\mathrm{D}f(x)$ 表示 f 在 x处的梯度。符号 $\mathrm{C}(E)$ 和 $\mathrm{C}^1(E)$ 分别表示集合 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 上连续函数和连续可微函数的集合。$[0,+\infty$上的取值于$E\subseteq\mathbb{R}^n$ 的局部可积函数集合记为 $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);\ E)$。

2. 最优控制问题

本节将介绍所研究的最优控制问题。给定一个网络，该网络描述了有限数量的地理分布位置 $n\geq 2$，资本在这些位置产生，并且这些位置存在消费。在本文的第一部分，我们不对该网络建立明确的模型，因为我们只关注为优化问题提供一般性结果。从第 5 节开始，我们将该网络建模为一个加权图，并推导出更具体的结果。在每个位置 $i=1$、……、n，资本根据 AK¯生产函数产生：位置 i 处经济的产出为 $(A_i-\delta_i)k_i$，其中 $k_i\in\mathbb{R}$ 是¯当前资本水平，$A_i>0$ 是位置 i 的技术水平，而 $\delta_i\geq 0$ 对资本折旧效应进行参数化。为节省参数，我们给定系数[1] $A_i\colon=(\bar{A}_i-\delta_i)>0$、$i=1$、……、$n$，即假设每个技术水平都包含资本折旧效应。此外，我们还给定

- 一个算子 $L\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，用于描述网络上的资本流动性，即资本可能因位置之间的相互作用而进入或离开任何位置；
- 一个算子 $N\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，用于描述消费水平对系统状态（即资本）的影响。

下文中，我们将位置 $i=1$、……、n 在时间$t\geq 0$ 的资本和消费水平分别记为 $K_i(t)$ 和 $C_i(t)$。我们还引入向量 $K(t)\colon=(K_1(t)$、……、$K_n(t))$、$C(t)\colon=(C_1(t)$、……、$C_n(t))$，以及对角矩阵 $A=\mathrm{diag}(A_1$、……、$A_n)$。

给定上述数据、一个 $k=(k_1$、……、$k_n)\in\mathbb{R}^n_+$ 初始资本禀赋向量，以及一个消费路径 $C\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);\ \mathbb{R}^n_+)$，我们假设 K 的动态由以下常微分方程描述

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t)=(L+A)K(t)-NC(t),\quad t\geq 0,\\ K(0)=k\in\mathbb{R}^n_+.\end{cases}\tag{2.1}$$

标准结果保证常微分方程（2.1）存在唯一解，记为 $K^{k,\,C}$，该解满足

$$K^{k,C}(t)=\mathrm{e}^{t(L+A)}k-\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)(L+A)}NC(s)\,\mathrm{d}s,\quad t\geq 0.\tag{2.2}$$

以下假设在全文中始终成立。

假设2.1。

[1] A_i 的正性是使经济问题具有意义的前提。

(i) L 是一个生成正 C_0-半群 $(e^{tL})_{t\geq 0}$ 的线性算子，即对于所有 $t \geq 0$，$e^{tL}(\mathbb{R}^n_+) \subseteq \mathbb{R}^n_+$。

(ii) N 是一个保正线性算子，即 $N(\mathbb{R}^n_+) \subseteq \mathbb{R}^n_+$。此外，对于所有$i = 1, \ldots, n$， $N\mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$。

根据假设 2.1-(i)，算子 L 可表示为一个 $n \times n$ 矩阵，仍记作 L，其元素为 $\ell_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$。这一假设还确保 $(e^{tL})_{t\geq 0}$ 是一个正线性系统，也就是说，对于任意非负的 $k \in \mathbb{R}^n_+$，对于所有 $t \geq 0$，都有 $e^{tL}k \in \mathbb{R}^n_+$，参见 [16,定义 2]。这等价于要求 L 是一个Metzler矩阵，即对于所有 $i \neq j, i, j = 1, \ldots, n$，都有 $\ell_{ij} \geq 0$，参见 [16, 定理 2]。由于 A 是对角矩阵， $L + A$ 也为 Metzler 矩阵，即 $(e^{t(L+A)})_{t\geq 0}$ 是一个正线性系统。这意味着，如果我们选择一条零消费路径，也就是说，对于所有 $t \geq 0$, $C(t) = 0$，那么对于任意非负的初始资本禀赋，方程 (2.1) 的解 (2.2) 都是非负的。正线性系统具有多种重要性质（例如参见 [16]），这些性质贯穿全文，并在需要时予以回顾。

假设 2.1-（ii）确保算子 N可表示为一个 $n \times n$ 矩阵，仍记作N，其元素为 $n_{ij} \geq 0$，对所有 i, $j = 1$，……，n均成立。事实上，关于 N 闭正正交锥的不变性等价于 N 是一个非负矩阵。此外，该假设的第二部分意味着，对于每个 $i = 1$，……，n，存在 $j = 1$，……，n 使得 $n_{ij} > 0$。从经济学角度来看，这意味着每个消费水平至少会影响一个节点中资本的演化。

现在我们着手介绍旨在研究的最优控制问题。给定一个贴现因子 $\rho > 0$，并对固定的 $\gamma > 0$，令u_γ: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 为如下形式的效用函数

$$u_\gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \text{if } \gamma \in (0,1) \cup (1, +\infty), \\ \log(x), & \text{if } \gamma = 1, \end{cases} \qquad x \geq 0. \tag{2.3}$$

考虑一位社会规划者，其目标是控制消费水平 C，使收益泛函最大化

$$J(C) \coloneqq \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\sum_{i=1}^n p_i u_\gamma(C_i(t)) \right) \mathrm{d}t, \quad C \in \mathcal{A}_+(k), k \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.4}$$

其中 $p_i > 0, i = 1, \ldots, n$ 是给定的权重，可容许控制集 $\mathcal{A}_+(k)$ 定义为

$$\mathcal{A}_+(k) \coloneqq \{C \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0, +\infty); \mathbb{R}^n_+), \text{ s.t. } K^{k,C}(t) \in \mathbb{R}^n_+, \forall t \geq 0\}. \tag{2.5}$$

因此，我们关注能够使资本水平保持非负的非负控制（即消费计划）。该最优控制问题的值函数为

$$V(k) = \sup_{C \in \mathcal{A}_+(k)} J(C), \quad k \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.6}$$

下文中，我们用 U_γ: $\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \gamma > 0$ 表示函数

$$U_\gamma(x) \coloneqq \sum_{i=1}^n p_i u_\gamma(x_i), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.7}$$

因此，在（2.4）中引入的收益泛函可写为

$$J(C) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} U_\gamma(C(t)) \mathrm{d}t, \quad C \in \mathcal{A}_+(k), k \in \mathbb{R}^n_+.$$

注 2.2。 对于 L，一个自然的选择是采用所谓的 离散拉普拉斯算子，我们从第 5 节开始采用这一选择。对于 N，一种不同于单位矩阵的可选方案是考虑$N = \mathrm{diag}(p_1, \ldots, p_n)$，其中 $p_1, \ldots, p_n$ 是泛函 J中引入的权重（2.4）。这些权重可能与各个位置的人口水平相关 $i = 1, \ldots, n$，也可能取决于社会规划者考虑的其他主观标准。

注记 2.3。 第 3 节和第 4 节中证明的各种结果均可推广到效用函数单调递增、凹且上有界或下有界的一般情形。为此，可以采用 [1, 5] 中采用的方法。

3. 最优控制的存在性和值函数的性质

本节将证明，在适当的假设下，第 2 节引入的优化问题存在唯一的最优控制。这是一项基本结果，将在第 4 节中用于将值函数 V（见（2.6））刻画为适当 HJB 方程的黏性解。随后，我们将建立值函数的重要性质。

首先，我们注意到，假设2.1-(i) 还确保$(L+A)^T$是一个Metzler矩阵，因此$(\mathrm{e}^{t(L+A)^T})_{t\geq 0}$ 也是一个正线性系统。这意味着（参见 [16, 定理 11]），$(L+A)^T$ 的主特征值是唯一且为实数，称为弗罗贝尼乌斯特征值，记为 $\lambda_\star \in \mathbb{R}$。

我们提出如下假设，该假设将在第3 节和第4节中使用。

假设3.1。

(i) 存在一个特征向量 $b^\star \in \mathbb{R}^n_{++}$，对应于（$L+A$）^{T}的特征值 $\lambda_\star > 0$。

(ii) $\rho > \lambda_\star(1-\gamma)$。

在第5节中，将确定某些假设，这些假设是满足假设3.1的充分条件。

备注 3.2。（$\mathrm{e}^{t(L+A)^T}$）的正性$_{t\geq 0}$ 保证了正特征向量的存在性（即，在 $\mathbb{R}^n_+$ 中）并且这些特征向量与弗罗贝尼乌斯特征值相关，称为 *Frobenius*特征向量。然而，仅凭这一事实并不足以保证假设 3.1-（i）得到满足，因为 $\lambda_\star$ 可能是非正的。还应注意，与不同于弗罗贝尼乌斯特征值的特征值相关的特征向量不可能严格为正，参见 [16, 定理 11]。

本节的第一个结果涉及具有有限效用的最优策略的存在性与唯一性。我们省略证明，该证明可按照 [17, 定理 3.1] 中的方法完成。

命题 3.3。值函数 V 是有限的，并且对于每个初始状态 $k \in \mathbb{R}^n_+$，存在一个^唯一的最优策略 $C \in \mathcal{A}_+(k)$，对应于问题 （2.6）。

备注3.4。命题3.3 可使用 [1, 5]中采用的方法扩展至更一般的效用函数。

在下一个命题中，我们将证明值函数 V（2.6）中引入的若干重要正则性性质。回顾一下，给定 $E \subseteq \mathbb{R}^n$，$v \in \mathrm{C}(E)$，以及 $k \in E$，超微分 v 在 k 处定义为集合

$$\mathrm{D}^+v(k) := \left\{ q \in \mathbb{R}^n : \limsup_{x \to k,\, x \in E} \frac{v(x) - v(k) - \langle p, x-k\rangle}{\|x-k\|} \leq 0 \right\}.$$

命题3.5。

(i) V关于 $\mathbb{R}^n_+$逐分量递增，即对所有 $i = 1, \ldots, n$ 以及所有满足 $k_i \leq k'_i$ 和 $k_j = k'_j$, $j \neq i$ 的 $k, k' \in \mathbb{R}^n_+$，均有 $V(k) \leq V(k')$。*(ii)* V 关于 $\mathbb{R}^n_+$ 是凹函数，并且在 $\mathbb{R}^n_{++}$上局部利普希茨连续。*(iii)* 对任意 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$，$D^+V(k)$非空，且$D^+V(k) \subseteq \mathbb{R}^n_{++}$。*(iv)* 若 $\gamma \neq 1$，则 V是$(1-\gamma)$-齐次的，即对每个 $\alpha > 0$ 和$k \in \mathbb{R}^n_+$，$V(\alpha k) = \alpha^{1-\gamma}V(k)$。*(v)* 若 $0 < \gamma < 1$，则值函数 V 在 $\mathbb{R}^n_+$上连续。

证明。点 （i）和 （ii）可参照 [18, 命题4.2-（i）、（iii）], 证明，利用状态方程（2.1）的线性以及 U_γ（定义见（2.7）的凹性。同样，点 （iv）的证明可参照 [18, 命题4.2-（ii）]。

接下来，我们证明第 （iii） 点。固定 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$。根据 [13, 定理 A.1。13], 的凹性，V 可知$\mathrm{D}^+V(k) \neq \emptyset$。这还意味着，$\mathrm{D}^+V(k)$ 与凸分析中 V在 k 处的半微分定义相一致（参见 [13, 注 3.3。2]），即 $q \in \mathrm{D}^+V(k)$ 当且仅当

$$V(x) - V(k) \leq \langle q, x-k\rangle, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{3.1}$$

反设存在 $q \in \mathrm{D}^+V(k)$ 使得 $q_i \le 0$，对于某个 $i = 1, \dots, n$。由于 V 是逐分量递增且凹的，根据（3.1）可知，这意味着 V 在半直线 $k + \alpha e_i$，$\alpha \ge 0$ 上是常数。我们希望证明这将导致矛盾。

令 $C^\star \in \mathcal{A}_+(k)$ 为 k 的最优控制。固定 α，$\varepsilon > 0$，定义 $k = k + \alpha e_i \in \mathbb{R}^n_{++}$，并令 $C(t) = C^\star(t) + \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(t)\delta e_i$，$t \ge 0$，其中 $\delta > 0$ 是我们稍后需要确定的常数，以确保 $C \in \mathcal{A}_+(k)$。

显然，$\bar{C} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);\ \mathbb{R}^n_+)$。当且仅当该控制对 $\bar{k}$ 可容许时，$K^{\bar{k},\,\bar{C}}(t) \in \mathbb{R}^n_+$ 对所有 $t \ge 0$ 成立。利用（2.2），可得

$$K^{\bar{k},\bar{C}}(t) = K^{k,C^\star}(t) + \underbrace{\alpha \mathrm{e}^{t(L+A)}e_i - \delta \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(s)\,\mathrm{e}^{(t-s)(L+A)}Ne_i\,\mathrm{d}s}_{:=R(t)}.$$

为证明可容许性，只需证明对于所有 $t \ge 0$，$R(t) \in \mathbb{R}^n_+$。注意，当 $t > \varepsilon$ 时，我们有

$$K^{\bar{k},\bar{C}}(t) = K^{k,C^\star}(t) + \mathrm{e}^{(t-\varepsilon)(L+A)}R(\varepsilon).$$

因此，得益于半群 $(\mathrm{e}^{t(L+A)})_{t\ge 0}$ 的正性，只需证明对于所有 $0 \le t \le \varepsilon$，$R(t) \in \mathbb{R}^n_+$。固定 $t \in [0,\varepsilon]$。我们有，对于所有 $j = 1, \dots, n$，

$$\begin{aligned}
&\langle K^{\bar{k},\bar{C}}(t), e_j\rangle \ge \alpha\langle \mathrm{e}^{t(L+A)}e_i, e_j\rangle - \delta\int_0^\varepsilon \langle \mathrm{e}^{(t-s)(L+A)}Ne_i, e_j\rangle\,\mathrm{d}s \ge 0\\
\iff &\int_0^\varepsilon \left\langle \mathrm{e}^{(t-s)(L+A)}\left[\frac{\alpha}{\delta\varepsilon}\mathrm{e}^{s(L+A)} - N\right]e_i, e_j\right\rangle \mathrm{d}s \ge 0
\end{aligned}$$

再次利用 $(\mathrm{e}^{t(L+A)})_{t\ge 0}$ 是正半群这一事实，上述不等式在对于所有 $s \in [0,\varepsilon]$，$\left[\frac{\alpha}{\delta\varepsilon}\mathrm{e}^{s(L+A)} - N\right]e_i \in \mathbb{R}^n_+$ 时成立。我们有，对于所有 $j = 1, \dots, n$，

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[\frac{\alpha}{\delta\varepsilon}\mathrm{e}^{s(L+A)} - N\right]e_i, e_j\right\rangle \ge 0\\
\iff &[Ne_i]_j \le \frac{\alpha}{\delta\varepsilon}\langle \mathrm{e}^{s(L+A)}e_i, e_j\rangle \le \frac{\alpha}{\delta\varepsilon}\|\mathrm{e}^{s(L+A)}\| \le \frac{\alpha}{\delta\varepsilon}\mathrm{e}^{s\|L+A\|} \le \frac{\alpha}{\delta\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon\|L+A\|}.
\end{aligned}$$

由假设2.1-(ii)可知，取

$$\delta = \frac{\alpha\mathrm{e}^{\varepsilon\|L+A\|}}{\varepsilon \max\limits_{j=1,\dots,n}[Ne_i]_j} \le \frac{\alpha\mathrm{e}^{\varepsilon\|L+A\|}}{\varepsilon[Ne_i]_j}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

因此，$C \in \mathcal{A}_+(k)$。此外，利用在 (2.3) 中定义的效用函数 u_γ 严格递增这一事实，可得 $J(C) > J(C^\star) = V(k)$。因此，$V(k) > V(k)$，这与 V 在半直线 $k + \alpha e_i$，$\alpha \ge 0$ 上应为常数这一事实相矛盾。

最后，我们证明第 (v) 点。V 在 $\mathbb{R}^n_{++}$ 上的连续性是同一集合上的局部利普希茨连续性的结果。因此，我们只需证明其在边界上的连续性。

考虑 $k \in \partial\mathbb{R}^n_+$，并固定一个单位向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 使得 $k + \mu v \in \mathbb{R}^n_+$，其中 μ 足够小。由 [22，定理 10。3]（另见该引用下方的讨论），只需证明

$$V(k + \mu_m v) \to V(k), \text{ as } m \to \infty, \tag{3.2}$$

对于任意 $(\mu_m)_{m\ge 1}$ 收敛于零的序列。根据命题 3.3，我们知道存在一族最优控制 $C_m \in \mathcal{A}_+(k + \mu_m v)$，使得 $k + \mu_m v$，即 $J(C_m) = V(k + \mu_m v)$，对所有 $m \ge 1$。根据引理 A.1，存在 $\Gamma > 0$，其与 $(\mu_m)_{m\ge 1}$ 和 $(C_m)_{m\ge 1}$ 无关，使得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\lambda_\star}\|C_m(s)\|\,\mathrm{d}s \le \Gamma\langle k + \mu_m v, b^\star\rangle \le \Gamma\|b^\star\|\|k\|, \tag{3.3}$$

其中，最后一个不等式在 m 充分大时成立。于是，由引理A.2，存在[2] $C_0 \in \mathrm{L}^1_{\lambda_\star}([0,+\infty);\ \mathbb{R}^n)$，使得 $C_0(t) \in \mathbb{R}^n_+$，对所有 $t \ge 0$ 均成立，并且在取子列后，$C_m^{1-\gamma} \to C_0^{1-\gamma}$ 在 $\mathrm{L}^{1-\gamma}_{\lambda_\star}([0,+\infty);\ \mathbb{R}^n)$ 中弱收敛。

[2] 加权空间 L^p_λ 的定义 $_\star([0,+\infty);\ \mathbb{R}^n)$，$p \ge 1$，定义见（A.2）。

我们需要证明 C_0 对 k是可容许的，即 $C_0 \in \mathcal{A}_+(k)$。由 (A.5) 以及 t 的线性性 he semi群，我们得到，对于所有的 $i = 1, \ldots, n$,

$$\langle K^{k,C_0}(t), e_i\rangle \geq \limsup_{m\to\infty} \langle K^{k+\mu_m v, C_m}(t), e_i\rangle \geq 0,$$

由此我们推得 $C_0 \in \mathcal{A}_+(k)$。最后，由（A.6）可得

$$\lim_{m\to\infty} V(k+\mu_m v) = \lim_{m\to\infty} J(C_m) = J(C_0) \leq V(k).$$

由于 $\mu \mapsto V(k+\mu v)$ 是凹函数，该不等式蕴含（3.2）。 □

4. 动态规划原理与 HJB方程

本节将证明，式（ V（2.6）中给出的值函数同时满足动态规划原理和反向动态规划原理。证明 V 是某个适当 HJB方程的双边黏性解（下文将给出精确定义）的一个关键结果。

下面的引理断言 V 满足动态规划原理。由于证明是标准的（例如参见 [3]），这里省略证明。

引理 4.1（动态规划原理）。 对于所有 $k \in \mathbb{R}^n_+$ 和 $t > 0$,

$$V(k) = \sup_{C\in\mathcal{A}_+(k)} \left[\int_0^t \mathrm{e}^{-\rho s} U_\gamma(C(s))\,\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\rho t} V(K^{k,C}(t))\right]. \tag{4.1}$$

若假设 3.1成立，则 (4.1) 中的上确界可在 C处取到，其中 C 是$k \in \mathbb{R}^n_+$的最优策略，即

$$V(k) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\rho s} U_\gamma(\widehat{C}(s))\,\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\rho t} V(K^{k,\widehat{C}}(t)). \tag{4.2}$$

对于线性系统（2.1）的反向轨迹，也可以得到类似的结果。首先，我们需要一些定义。对于每个 $k \in \mathbb{R}^n_+$，我们用 $\mathcal{A}_-(k)$ 表示满足以下条件的局部可积策略集合：反向轨迹满足正性约束，即

$$\mathcal{A}_-(k) := \{C \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n_+) \text{ s.t. } K^{k,C}(t) \in \mathbb{R}^n_+, \forall t \leq 0\},$$

其中 $K^{k,\,C}$ 是反向常微分方程的唯一解,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K(t) = (L+A)K(t) - NC(t), \quad t < 0, \\ K(0) = k, \end{cases}$$

其由（2.2）给出。

定义 4.2。 如果存在初始条件 $k \in \mathbb{R}^n_+$、$t > 0$以及最优策略 $\widehat{C} \in \mathcal{A}_+(k)$，使得 $k_0 = K^{k,\,\widehat{C}}(t)$，则称 k_0 为最优点。我们将最优点集记为 $\mathcal{O}$。

引理 4.3 (反向动态规划原理)。 对于每个 $k \in \mathbb{R}^n_+$、 $t > 0$ 和 $C \in \mathcal{A}_-(k)$ ， 值函数满足以下不等式,

$$V(k) \leq \mathrm{e}^{\rho t} V(K^{k,C}(-t)) - \int_0^t \mathrm{e}^{\rho s} U_\gamma(C(-s))\,\mathrm{d}s. \tag{4.3}$$

此外，如果 $k_0 \in \mathcal{O}$，则存在 $C \in \overline{\mathcal{A}}_-(k_0)$ 使得

$$V(k_0) = \mathrm{e}^{\rho t} V(K^{k_0,\overline{C}}(-t)) - \int_0^t \mathrm{e}^{\rho s} U_\gamma(\overline{C}(-s))\,\mathrm{d}s. \tag{4.4}$$

证明。考虑 $k \in \mathbb{R}^n_+$、 $t > 0$ 和 $C \in \mathcal{A}_-(k)$。令 $k_0 \coloneqq K^{k,C}(-t)$，定义 $\widetilde{C}(s) \coloneqq C(s-t)$，其中$0 \le s \le t$，并将其在 $s > t$ 上延拓为零。然后，利用（2.2），可以直接证明

$\widetilde{\ }$对于 $\tau \le t$，有 $K^{k_0,\widetilde{C}}(\tau) \in \mathbb{R}^n_+$；此外，由于 $(\mathrm{e}^{t(L+A)})$ 的正性，$K^{k_0,\widetilde{C}}(\tau) \in \mathbb{R}^n_+$，对于$\widetilde{\ }\tau > t$。因此，$C \in \mathcal{A}_+(k_0)$。应用动态规划原理，即（4.1），可得

$$V(k_0) \ge \int_0^t \mathrm{e}^{-\rho s} U_\gamma(\widetilde{C}(s))\,\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\rho t} V(K^{k_0,\widetilde{C}}(t)).$$

$\widetilde{\ }$将两边乘以 $\mathrm{e}^{\rho t}$，回顾 $K^{k_0,\widetilde{C}}(t) = k$ 以及 $k_0 = K^{k,\widetilde{C}}(-t)$，并对积分作变量代换，我们得到

$$\mathrm{e}^{\rho t} V(K^{k,C}(-t)) \ge \int_0^t \mathrm{e}^{\rho s} U_\gamma(C(-s))\,\mathrm{d}s + V(k),$$

由此得到（4.3）。为证明（4.4），固定 $k \in \mathbb{R}^n_+$，并回顾命题 3.3：存在一个最优控制 $\widehat{C} \in \mathcal{A}_+(k)$。令 $k_0 \coloneqq K^{k,\widehat{C}}(t) \in \mathcal{O}$，定义 $C(s) = \widehat{C}(s+t)$，其中 $-t \le s \le 0$，并将其在 $s < -t$ 上延拓为零。按照之前的推理，我们有 $C \in \mathcal{A}_-(k_0)$。应用（4.2），得到

$$V(k) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\rho s} U_\gamma(\widehat{C}(s))\,\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\rho t} V(K^{k,\widehat{C}}(t)).$$

因此，进行与上述类似的计算，我们得到（4.4）。 □

与最优控制问题（2.6）相关的 HJB方程为

$$\rho v(k) = \langle (L+A)k, \mathrm{D}v(k)\rangle + H_\gamma(\mathrm{D}v(k)), \quad k \in \mathbb{R}^n_+, \tag{4.5}$$

其中哈密顿量 $H_\gamma\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 对所有 $q \in \mathbb{R}^n$定义为

$$H_\gamma(q) \coloneqq \sup_{c \in \mathbb{R}^n_+} \{-\langle Nc, q\rangle + U_\gamma(c)\}. \tag{4.6}$$

标准计算表明，哈密顿量可以显式写为

$$H_\gamma(q) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{1-\gamma} \displaystyle\sum_{i=1}^n p_i^{\frac{1}{\gamma}} [N^T q]_i^{1-\frac{1}{\gamma}}, & \text{if } q \in \mathbb{R}^n_{++},\ \gamma \ne 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n p_i \left[\log\left(\frac{p_i}{[N^T q]_i}\right) - 1\right], & \text{if } q \in \mathbb{R}^n_{++},\ \gamma = 1, \\ +\infty, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{4.7}$$

其中最大化元 $\widehat{c}\colon\ \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ 由下式给出

$$\widehat{c}_i(q) = \left(\frac{p_i}{[N^T q]_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad q \in \mathbb{R}^n_{++}. \tag{4.8}$$

注意到 $\widehat{c}$ 是连续的，其严格正性源于参数的严格正性p_1，……， p_n 以及假设2.1-(ii)。

得益于引理4.1中陈述的动态规划原理，我们能够按照 V 作为方程（4.5）的双边黏性解来刻画值函数 [18]（另见 [3]）。下一组定义将明确说明这一解概念的确切含义。

定义 4.4。 函数 $v \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n_{++})$ 是方程（*4.5*）的粘性次解，如果对于任意 $\phi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n_{++})$以及任意局部极大点 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$ 处的 $v - \phi$，

$$\rho v(k) - \langle (L+A)k, \mathrm{D}\phi(k)\rangle - H_\gamma(\mathrm{D}\phi(k)) \le 0.$$

类似地， $v \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n_{++})$ 是（*4.5*）的粘性上解，如果对于任意 $\phi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n_{++})$ 以及任意局部极小点 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$ 属于 $v - \phi$，

$$\rho v(k) - \langle (L+A)k, \mathrm{D}\phi(k)\rangle - H_\gamma(\mathrm{D}\phi(k)) \ge 0.$$

最后， $v \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n_{++})$ 是黏性解（4.5）当且仅当它既是（4.5）的粘性次解，也是其超解。

De定义 4.5。 函数 $v \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n_{++})$ 是一个 双边黏性解 的（4.5），如果它是一个黏性 ty solu式（4.5）两侧的

$$-\rho v(k) + \langle (L+A)k, \mathrm{D}v(k)\rangle + H_\gamma(\mathrm{D}v(k)) = 0. \tag{4.9}$$

我们还需要引入以下由 $k \in \partial\mathbb{R}^n_+$ 参数化的集合族，

$$\mathcal{U}(k) = \{c \in \mathbb{R}^n_+ : \exists C \in \mathcal{A}_-(k), \tau > 0, \text{ s.t. } C(t) = c, \forall t \in (-\tau, 0]\} \tag{4.10}$$

以及所谓的向内哈密顿量

$$H_{\text{in}}(k,q) = \sup_{c \in \mathcal{U}(k)} \{-\langle Nc, q\rangle + U_\gamma(c)\}, \quad (k,q) \in \partial\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

定理4.6。值函数 V 是（4.5）在 $\mathbb{R}^n_{++}$上的双边黏性解，即：

$$\rho V(k) = \langle (L+A)k, q\rangle + H_\gamma(q), \quad \forall\, k \in \mathbb{R}^n_{++},\, q \in \mathrm{D}^+V(k). \tag{4.12}$$

此外，

$$\rho V(k) - \langle (L+A)k, q\rangle - H_\gamma(q) \le 0, \quad -\rho V(k) + H_{\text{in}}(k,q) \le 0, \quad \forall\, k \in \partial\mathbb{R}^n_+,\, q \in D^+V(k), \tag{4.13}$$

其中 H_{in} 是（4.11）中定义的向内哈密顿量。

证明。 我们简要概述证明过程。为证明 V 是（4.5）在 $\mathbb{R}^n_{++}$上的双边黏性解，只需证明 V 是（4.5）和（4.9）在 $\mathbb{R}^n_{++}$上的粘性次解，即对于任意 $\phi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n_{++})$ 以及 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$ 的任意局部极大点 $V - \phi$，

$$\begin{cases} \rho V(k) - \langle (L+A)k, \mathrm{D}\phi(k)\rangle - H_\gamma(\mathrm{D}\phi(k)) \le 0, \\ -\rho V(k) + \langle (L+A)k, \mathrm{D}\phi(k)\rangle + H_\gamma(\mathrm{D}\phi(k)) \le 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

次解性质，即（4.14），可以按照 [18,命题4.10]中的方法证明，而这等价于证明（4.12），参见例如 [3, 第二章，公式（1.7）]。由（4.12）可知，V 也是（4.5）和（4.9）在 $\mathbb{R}^n_{++}$上的粘性上解。事实上，由于 V 在 $\mathbb{R}^n_{++}$ 上连续且凹（见命题3.5），如果 ϕ 是 $\mathbb{R}^n_{++}$ 中的任意可微函数，且 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$ 是 $V - \phi$ 的一个局部极小点，那么 V在 k 处可微，并且 $\mathrm{D}V(k) = \mathrm{D}\phi(k)$（参见 [3, 第二章，习题4.11]）。因此，（4.12）蕴含上解性质。最后，（4.13）也可以按照 [18, 命题4.10]中的方法证明。□

定理 4.7. 值函数 V 在 $\mathbb{R}^n_{++}$， $V \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n_{++})$上连续可微，并且是 (4.5) 在 $\mathbb{R}^n_{++}$上的经典解。

证明。由于 V 是凹函数，根据 [13, 命题 3.3.4 (e)]，只需证明对所有 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$，$\mathrm{D}^+V(k)$ 是单点集。固定 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$，并假设存在矛盾，即存在 q^1、 $q^2 \in \mathrm{D}^+V(k)$，且 $q^1 \neq q^2$。于是，由于 $\mathrm{D}^+V(k)$ 是凸集（参见 [13, 命题 3.1.5 (b)]），对每个固定的 $\lambda \in [0,1]$，都有 $q^\lambda := \lambda q^1 + (1-\lambda)q^2 \in \mathrm{D}^+V(k)$。回想一下，根据命题 3.5-(iii)，$\mathrm{D}^+V(k) \in \mathbb{R}^n_{++}$，并利用由 (4.7) 给出的 H_γ 关于 $\mathbb{R}^n_{++}$ 严格凹这一事实，我们得到

$$H_\gamma(q^\lambda) > \lambda H_\gamma(q^1) + (1-\lambda)H_\gamma(q^2).$$

利用（4.12），我们得到

$$0 = \rho V(k) - \langle (L+A)k, q^\lambda\rangle - \lambda H_\gamma(q^1) - (1-\lambda)H_\gamma(q^2) > \rho V(k) - \langle (L+A)k, q^\lambda\rangle - H_\gamma(q^\lambda),$$

这与（4.12）对 $q^\lambda \in \mathrm{D}^+V(k)$ 也成立这一事实矛盾。由于 $V \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n_{++})$ 是一个双边黏性解，因此我们得出结论： V 是（4.5）的经典解（参见 [3, 第二章，命题1。3]）。□

推论 4.8。固定 $k \in \mathbb{R}^n_+$，考虑相应的最优控制 $C \in \mathcal{A}_+(k)$ 对于问题 (2.6)，并令 $\widehat{K}^{k,\widehat{c}}$ 为具有初始条件 k 和控制 $\widehat{C}$的 (2.1) 的解。于是，对所有满足 $\widehat{K}^{k,\widehat{c}}(t) \in \mathbb{R}^n_{++}$的 $t \ge 0$， $\widehat{C}(t)$ 是连续的、严格为正的，并且满足

$$\widehat{C}(t) = \widehat{c}(\mathrm{D}V(K^{k,\widehat{C}}(t))), \tag{4.15}$$

其中 $\widehat{c}$ 是式(4.8)中给出的函数。

证明。 根据定理 4.7，我们知道 $V \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R}^n_{++})$。由（4.12），对于所有满足 $\widehat{K}^k,\ \widehat{c}(t) \in \mathbb{R}^n_{++}$的 $t \geq 0$，有

$$\rho V(\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t)) = \langle (L+A)\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t), \mathrm{D}V(\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t))\rangle + H_\gamma(\mathrm{D}V(\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t))). \tag{4.16}$$

对（4.2）求时间导数，可得

$$U_\gamma(\widehat{C}(t)) - \rho V(\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t)) + \langle (L+A)K^{k,\widehat{C}}(t), \mathrm{D}V(\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t))\rangle - \langle N\widehat{C}(t), \mathrm{D}V(\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t))\rangle = 0.$$

将上述单位算子与（4.16）结合可知，对于所有满足 $\widehat{K}^k,\ \widehat{c}(t) \in \mathbb{R}^n_{++}$ 的 $t \geq 0$，

$$U_\gamma(\widehat{C}(t)) - \langle N\widehat{C}(t), \mathrm{D}V(\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t))\rangle = H_\gamma(\mathrm{D}V(\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t))) = \sup_{c\in\mathbb{R}^n_+}\{U_\gamma(c) - \langle Nc, \mathrm{D}V(\widehat{K}^{k,\widehat{C}}(t))\rangle\}.$$

因此，（4.15）立即成立；$\widehat{c}$ 的连续性和严格正性是以下事实的直接推论：与 $\widehat{c}$ 具有相同的性质，且 $\mathrm{D}V$ 和状态轨迹具有连续性。□

5. 网络上的 AK 模型

本节为由 $n \geq 2$ 组成的地理分布位置网络建立一个模型，该网络已在第 2 节中介绍。我们将证明，对于该模型，先前提出的所有假设均得到验证，因此第 3 节和第 4 节中证明的所有结果均成立。此外，我们研究 HJB方程（4.5）的经典解，并通过引入适当的辅助优化问题，建立能够显式表示优化问题（2.6）的值函数的条件。最后，在第 5.2 节中，我们讨论仅涉及两个地理位置的情形下的一些进一步结果，即 $n = 2$；在第 5.3 节中，我们对考虑三个位置的情形进行数值研究，即 $n = 3$。

5.1. 一般情形。我们用图 $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ 对 $n \geq 2$ 地理分布位置构成的网络进行建模，其中 $\mathscr{V}$是对应于各位置的顶点集合，$\mathscr{E}$是连接各顶点的边集合。我们假设该图是简单的（即无向的）、有限的且带权的。令 $\mathscr{V}$为集合 $\{1,\dots,n\}$，并令 $\mathscr{E}$为 $\{(i,\ j)$ 的子集，使得 $\in \{1,\dots,n\}^2$ 满足 $i \neq j\}$。我们称两个顶点 $i,\ j \in \mathscr{V}$相连，并记作 $i \sim j$，若存在一条连接它们的边，即

$$i \sim j \quad \Longleftrightarrow \quad (i,j) \in \mathscr{E}.$$

最后，我们用 $W = (w_{ij})_{i,\ j\in\mathscr{V}}$ 表示图的权重矩阵，其中 $w_{ij} \geq 0$，对所有$i,\ j \in \mathscr{V}$均成立。由于假设该图是简单图，W 是对称的。为简化符号，我们假设顶点 $i,\ j \in \mathscr{V}$ 不相连当且仅当 $w_{ij} = 0$。特别地，由于不存在自环，对所有 $i \in \mathscr{V}$，$w_{ii} = 0$均成立。权重可解释为描述每对节点之间经济联系强度的参数。它们还使我们能够通过如下记账方程推导资本流动的动态变化。固定一个节点 $i \in \mathscr{V}$。我们假设在每个时刻 $t > 0$，都会有来自每个节点 $j \sim i$的资本流入，其大小与这些相连节点在时刻 t的资本水平 k_j 成正比，比例因子为 w_{ij}。因此，从相连位置 j 流入位置 i 的资本总量为

$$\sum_{\substack{j\in\mathscr{V}\\ j\sim i}} w_{ij}k_j = \sum_{j=1}^n w_{ij}k_j.$$

类似地，我们假设在每个时间 $t > 0$，都有资本流动流向每个节点 $j \sim i$，其流量与时间 t时的资本水平 k_i 成正比，比例因子为 $w_{ji} = w_{ij}$。因此，从位置 i 流向相连位置 j 的总流量为

$$-\sum_{\substack{j\in\mathscr{V}\\ j\sim i}} w_{ij}k_i = -\sum_{j=1}^n w_{ij}k_i.$$

Putt综合这些事实，我们可以将资本流动的动态表示为式（2.1），by intr引入对称矩阵 $L=(\ell_{ij})_{i,\ j\in\mathscr{V}}$，其中

$$\ell_{ij}=\begin{cases} w_{ij}, & \text{if } i\neq j,\\ -\sum\limits_{\substack{j\in\mathscr{V}\\ j\neq i}} w_{ij}, & \text{if } i=j. \end{cases} \tag{5.1}$$

我们将考虑算子 N 在 (2.1) 中为单位算子且$\gamma\neq 1$的情形。这个选择，加上 L 是 Metzler矩阵这一事实，意味着假设 2.1成立。因此，我们得到优化问题

$$\begin{aligned} &\sup_{C\in\mathcal{A}_+(k)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}\left(\sum_{i=1}^n p_i\frac{C_i(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)\mathrm{d}t\\ &\text{s.t.}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t)=(L+A)K(t)-C(t), \quad t\geq 0,\\ K(0)=k\in\mathbb{R}^n_+,\end{cases}\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中，可行控制集合 $\mathcal{A}_+(k)$ 定义见 (2.5)。

注 5.1。 矩阵 $-L$，其中 L 定义见 (5.1)，对应于加权图上图拉普拉斯算子的标准定义（例如，参见 [6]）。众所周知，$-L$ 生成半正定二次型 $\langle z,(-Lz)\rangle=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n w_{ij}(z_i-z_j)^2\geq 0$，$z\in\mathbb{R}^n$。因此，$-L$ 具有 n 非负特征值，其中最小值为 0 ，对应的特征向量为 $\mathbf{1}=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T$。自然地，$L$ 是负半定的，且与$-L$ 具有相同的特征向量，其特征值的绝对值与 L的特征值相等，但符号相反。这一事实对后续内容至关重要。

为介绍本节的主要假设，我们需要以下定义。对于线性系统 $(\mathrm{e}^{tL})_{t\geq 0}$ ，我们可以将一个具有 n 个顶点的图与之关联，称为影响图，参见 [16,第 3] 章。当且仅当 $\ell_{ji}\neq 0$ 时，有向弧 $(i,\ j)$ 连接影响图中的顶点 i 和 j ，也就是说，当第 i 个变量直接影响第 j 个变量时，二者之间存在连接。如果所关联的影响图是连通的，即任意一对顶点 i 和 j 之间都存在一条路径，我们就称 $(\mathrm{e}^{tL})_{t\geq 0}$ 是不可约的。换言之，不可约性意味着线性系统 $(\mathrm{e}^{tL})_{t\geq 0}$ 中的任意变量都会（直接或间接地）影响其他所有变量。由于 L 是对称的，线性系统 $(\mathrm{e}^{tL})_{t\geq 0}$ 的影响图与图 $\mathscr{G}$ 一致，但顶点除外，因为影响图可能包含自环。因此，假设 $(\mathrm{e}^{tL})_{t\geq 0}$ 是不可约的，等价于 $\mathscr{G}$ 是连通的，而这又等价于要求矩阵 L 本身是不可约的。下一命题汇总了关于矩阵 $L+A$ 的一些有用结果。

命题5.2。 如果矩阵 L 是不可约的，则以下结果成立：

(i) 半群 $(\mathrm{e}^{t(L+A)})_{t\geq 0}$ 是正的且不可约的。*(ii)* 矩阵 $L+A$ 是对称的，因此 $L+A$ 的特征值均为实数，并且存在一个由 $\{b^0,b^1,\ldots,b^{n-1}\}$ 构成的 $\mathbb{R}^n$ 的正交归一特征向量基，其对应的特征值为 $\lambda_0\geq\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_{n-1}$。*(iii)* 特征向量 b^0 是 $L+A$ 的唯一严格正特征向量（相差一个标量倍数）；此外，相应的特征值 λ_0 是单特征值，并满足

$$0<\min_{i\in\mathscr{V}}A_i\leq\lambda_0\leq\max_{i\in\mathscr{V}}A_i. \tag{5.3}$$

证明。 点 (i) 显然成立，因为矩阵 A 是对角矩阵。因此，$L+A$ 是一个 Metzler矩阵，并且 $(\mathrm{e}^{t(L+A)})_{t\geq 0}$ 的影响图仍然是连通的。显然，点 (ii) 源于 $L+A$ 的对称性。

第 (iii) 点由第 (i) 点推出。事实上，根据 [16, 定理 17] ，我们可知，与最高特征值 b^0 相对应的特征向量 λ_0 （属于 $L+A$ ）唯一（相差一个标量倍数），且严格为正，并且 λ_0 是单特征值。利用 $L+A$ 的对称性并应用 [16,定理 12], ，可得（5.3）。□

因此，在本节余下部分，我们作如下假设

假设 5.3。

(i) 矩阵 L 不可约。(ii)

$\rho > \lambda_0(1-\gamma)$。

注意到，假设 5.3 确保假设3.1成立。事实上，$L+A$ 的对称性和命题5.2-(iii)保证假设 3.1-(i) 得到满足，即对于某个 $\kappa > 0$，有 $\lambda_\star = \lambda_0$ 和 $b^\star = \kappa b^0$。假设 5.3-(ii) 与假设 3.1-(ii) 完全相同。这样一来，第3节和第4节的所有结果均成立。特别地，如定理4.6所确立的，值函数 V 是与最优控制问题 (5.2) 相关的 HJB方程 (4.5) 的双边黏性解。现在，我们希望分析 $\mathbb{R}^n$ 的严格正正交象限上的 (5.2) 的经典解，并给出适当条件，使这些解与值函数 V 一致。准确地说，我们给出如下定义。

定义5.4. 函数 $v\colon\ \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ 若满足以下条件，则称其为经典解（4.5）在 $\mathbb{R}^n_{++}$ 上的 v 在 $\mathbb{R}^n_{++}$ 中连续可微，并且

$$\rho v(k) = \langle (L+A)k, \mathrm{D}v(k)\rangle + H_\gamma(\mathrm{D}v(k)), \quad \forall k \in \mathbb{R}^n_{++}, \tag{5.4}$$

其中 $\gamma > 0$，$\gamma \neq 1$和 H_γ 定义见（4.6）。

我们先给出以下结果。

命题 5.5. 设 $u \in \mathbb{R}^n_{++}$、$\mu \in \mathbb{R}$ 满足 $\mu(1-\gamma)$，>0，并定义

$$v(k) \coloneqq \frac{1}{1-\gamma}\left[\frac{\gamma}{\mu(1-\gamma)}\right]^\gamma \langle k, u\rangle^{1-\gamma}, \quad k \in \mathbb{R}^n_{++}. \tag{5.5}$$

若 L 不可约，且有序对 (μ, u) 是非线性特征值问题的一个解

$$(L+A)u = \left[\frac{\rho}{1-\gamma} - \mu\Phi(u)\right]u, \tag{5.6}$$

其中

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^n p_i^{\frac{1}{\gamma}} u_i^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad u \in \mathbb{R}^n_{++}, \tag{5.7}$$

那么 v 是(5.4)的经典解。

证明。 首先注意，函数 v 由 (5.5) 给出，在 $\mathbb{R}^n_{++}$上连续可微，其偏导数为

$$v_{k_i}(k) = \left[\frac{\gamma}{\mu(1-\gamma)}\right]^\gamma \langle k, u\rangle^{-\gamma} u_i, \quad k \in \mathbb{R}^n_{++},\ i = 1, \ldots, n. \tag{5.8}$$

由于 $\mathrm{D}v(k) \in \mathbb{R}^n_{++}$，对所有 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$，我们可以利用 (4.7) 将 HJB 方程 (5.4) 改写为

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{1-\gamma}\left[\frac{\gamma}{\mu(1-\gamma)}\right]^\gamma \langle k, u\rangle^{1-\gamma} = {} & \left[\frac{\gamma}{\mu(1-\gamma)}\right]^\gamma \langle k, u\rangle^{-\gamma}\langle (L+A)k, u\rangle \\ & + \frac{\gamma}{1-\gamma}\left[\frac{\gamma}{\mu(1-\gamma)}\right]^{\gamma-1} \langle k, u\rangle^{1-\gamma}\Phi(u), \quad k \in \mathbb{R}^n_{++}.\end{aligned}$$

利用 $L+A$ 的对称性，上述表达式可简化为

$$\langle k, (L+A)u\rangle = \left[\frac{\rho}{1-\gamma} - \mu\Phi(u)\right]\langle k, u\rangle, \quad k \in \mathbb{R}^n_{++},$$

显然，当 $(\mu,\ u)$ 是 (5.6) 的一个解时，该式成立。 □

备注 5.6： 有趣的是，5.6）可以看作图上的非线性薛定谔方程（例如参见 [20, 25]）。像（5.6）这样的非线性特征值问题本身就很有研究价值，例如可以采用基于临界点理论的变分方法进行研究，正如 [21]所示。

T矩阵 $L+A$的弗罗贝尼乌斯特征值-特征向量对 (λ_0, b^0)，参见命题 5.2-（ii i), prov为我们提供了非线性特征值问题（5.6）的一个特定解，其形式为 by

$$\mu = \frac{1}{\Phi(b^0)}\left(\frac{\rho}{1-\gamma} - \lambda_0\right), \qquad u = b^0. \tag{5.9}$$

这一观察促使我们采用5.2中的方法研究优化问题，即 [12], 通过引入半空间 $X_{++} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b^0\rangle > 0\}$ 以及辅助优化问题

$$V_{b^0}(k) := \sup_{C \in \mathcal{A}^{b^0}_{++}(k)} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\rho t}\left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{C_i(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)\mathrm{d}t, \quad k \in X_{++}, \tag{5.10}$$

其中，可容许策略的集合为

$$\mathcal{A}^{b^0}_{++}(k) := \{C \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);\mathbb{R}^n_+) \text{ s.t. } \langle K^{k,C}(t), b^0\rangle > 0, \forall t \geq 0\}.$$

与辅助问题相关的HJB方程为

$$\rho v(k) = \langle (L+A)k, \mathrm{D}v(k)\rangle + H_\gamma(\mathrm{D}v(k)), \quad k \in X_{++}, \tag{5.11}$$

其中，哈密顿量 H_γ 见（4.6）中的定义。我们有以下结果。

定理 5.7。 假设*5.3* 成立，则有

(i) 定义为 v 的函数

$$v(k) := \frac{\alpha^\gamma}{1-\gamma}\langle k, b^0\rangle^{1-\gamma}, \quad k \in X_{++}, \tag{5.12}$$

其中

$$\alpha = \frac{\gamma\Phi(b^0)}{\rho - \lambda_0(1-\gamma)}, \tag{5.13}$$

且 Φ 是在 (5.7)中给出的函数，是 (5.11)的解。

(ii) 对于每个 $k \in X_{++}$， $H_\gamma(\mathrm{D}v(k))$ 的唯一最大化元由 $\widehat{c}(\mathrm{D}v(k)) = Fk$给出，其中$F$是元素为以下各项的 $n \times n$ 矩阵

$$f_{ij} := \frac{1}{\alpha}\left(\frac{p_i}{b^0_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} b^0_j, \quad i,j \in \mathscr{V}. \tag{5.14}$$

(iii) 值 $g := \frac{\lambda_0 - \rho}{\gamma}$是 $(L+A-F)^T$的一个特征值，其对应的特征向量为 b^0。*(iv)* 闭环方程，即常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) = (L+A-F)K(t), & t \geq 0, \\ K(0) = k, \end{cases} \tag{5.15}$$

对于每个 $k \in \mathbb{R}^n$都有唯一解 $\widehat{K}^k$。此外，如果 $k \in X_{++}$，则

$$\langle \widehat{K}^k(t), b^0\rangle = \langle k, b^0\rangle \mathrm{e}^{gt}, \quad t \geq 0,$$

其中 g 在点 *(iii)*给出，因此 $\widehat{K}^k(t) \in X_{++}$，对所有 $t \geq 0$均成立。

(v) 令 $k \in X_{++}$。控制 $C(t)$， $t \geq 0$，其分量为

$$\widehat{C}_i(t) := [F\widehat{K}^k(t)]_i = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{p_i}{b^0_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \langle k, b^0\rangle \mathrm{e}^{gt}, \quad t \geq 0,\ i \in \mathscr{V}, \tag{5.16}$$

属于 $\mathcal{A}^{b^0}_{++}(k)$，并且对于从 k 出发的问题 *(5.10)* 而言是最优的。此外，辅助问题 *(5.10)* 的值函数 V_{b^0} 满足 $V_{b^0}(k) = v(k)$，其中 v 是函数 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，见式 *(5.12)*。如果另外还有 $C \in \mathcal{A}_+(k)$，那么 C 对问题 *(5.2)* 是最优的，并且 $V(k) = V_{b^0}(k)$。

(vi) 控制 C 对于问题 (5.2) 是最优的，当且仅当对于任意 $k \in \mathbb{R}^n_+$ 当且仅当

$$w_{ij} \geq f_{ij}, \quad \textit{for all } i,j \in \mathscr{V},\ i \neq j. \tag{5.17}$$

在这种情况下，值函数 V 和 V_{b^0} 原问题和辅助问题的值函数在 $\mathbb{R}^n_+$ 和 V_{b^0} 满足*HJB*方程 (5.4)。

证明。

（i）采用命题 5.5 证明中使用的相同论证，并经过一些简化后，我们可以将 HJB方程（5.11）改写为

$$\frac{\rho}{1-\gamma}\langle k,b^0\rangle = \langle (L+A)k,b^0\rangle + \frac{\gamma}{\alpha(1-\gamma)}\langle k,b^0\rangle \Phi(b^0), \quad k\in X_{++}.$$

由于 $(L+A)b^0=\lambda_0 b^0$、$\langle k_0,b^0\rangle>0$ 和 $\alpha>0$，上式可简化为

$$\frac{\rho}{1-\gamma} = \lambda_0 + \frac{\gamma\Phi(b^0)}{\alpha(1-\gamma)},$$

这给出了 α 在（5.13）中给出的值。因此，v 是（5.11）的一个解。

（ii）注意到 v 关于 X_{++} 连续可微，其偏导数由 $v_{k_i}(k)$ 给出 $=\alpha^\gamma\langle k,b^0\rangle^{-\gamma}b_i^0$，$k\in X_{++}$，$i\in\mathscr{V}$。由于 $\mathrm{D}v(k)\in\mathbb{R}^n_{++}$，对所有 $k\in X_{++}$，我们可以使用（4.8）得到，$H_\gamma(\mathrm{D}v(k))$ 的唯一最大化元为

$$\widehat{c}_i(\mathrm{D}v(k)) = \left(\frac{p_i}{\alpha^\gamma\langle k,b^0\rangle^{-\gamma}b_i^0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{p_i}{b_i^0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\langle k,b^0\rangle, \quad i\in\mathscr{V}, k\in X_{++}.$$

显然，最后一个方程右端的表达式对所有 $k\in\mathbb{R}^n$ 都有定义，并且是线性的。因此，它可以表示为一个 $n\times n$ 矩阵 F。为确定其各项，我们对所有 $i\in\mathscr{V}$ 以及所有 $k\in\mathbb{R}^n$，令

$$[Fk]_i = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{p_i}{b_i^0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\langle k,b^0\rangle \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{j\in\mathscr{V}} f_{ij}k_j = \sum_{j\in\mathscr{V}}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{p_i}{b_i^0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} b_j^0 k_j.$$

(iii) 我们首先验证，b^0 是 F^T 的一个特征向量。对于任意 $i\in\mathscr{V}$，有

$$[F^Tb^0]_i = \sum_{j\in\mathscr{V}}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{p_j}{b_j^0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} b_i^0 b_j^0 = \frac{\rho-\lambda_0(1-\gamma)}{\gamma\Phi(b^0)}\Phi(b^0)\,b_i^0 = \frac{\rho-\lambda_0(1-\gamma)}{\gamma}b_i^0.$$

因此，

$$(L+A-F)^Tb^0 = (L+A)^Tb^0 - F^Tb^0 = \lambda_0 b^0 - \frac{\rho-\lambda_0(1-\gamma)}{\gamma}b^0 = gb^0.$$

(iv) 标准结果保证，对于任意初始条件 $\widehat{K}^k$，常微分方程（5.15）的解具有唯一性 $k\in\mathbb{R}^n$，其可写为

$$\widehat{K}^k(t) = \mathrm{e}^{t(L+A-F)}k, \quad t\geq 0.$$

由上文证明的 (iii) 可知

$$\langle\widehat{K}^k(t),b^0\rangle = \langle \mathrm{e}^{t(L+A-F)}k,b^0\rangle = \langle k,(\mathrm{e}^{t(L+A-F)})^Tb^0\rangle = \mathrm{e}^{gt}\langle k,b^0\rangle, \quad t\geq 0.$$

由于 $k\in X_{++}$，我们有 $\langle k,b^0\rangle>0$，因此对于所有 $t\geq 0$，$\widehat{K}^k(t)\in X_{++}$。

(v) 通过构造，带有初始条件 $k\in X_{++}$ 和控制 C 的方程（2.1）的解与 $\widehat{K}^k$ 对（5.15）的解一致。因此，由于对于所有 $t\geq 0$，$\widehat{K}^k(t)\in X_{++}$，我们有 $\widehat{C}\in\mathcal{A}^{b^0}_{++}(k)$。利用类似于 [12, 定理 3.1], 中给出的验证定理，我们得到 $V_{b^0}(k) = v(k)$。第（v）点的最后一个陈述源于以下事实：$\mathcal{A}_+(k)\subseteq\mathcal{A}^{b^0}_{++}(k)$。

（vi）控制 C 对于问题（5.2）是最优的，当且仅当 $k\in\mathbb{R}^n_+$ 当且仅当 $C\in\mathcal{A}_+(k)$ 对所有$k\in\mathbb{R}^n_+$，即，当且仅当 $\widehat{K}^k(t)\in\mathbb{R}^n_+$，对所有 $t\geq 0$ 且对所有 $k\in\mathbb{R}^n_+$。反过来，这等价于验证线性系统 $(\mathrm{e}^{t(L+A-F)})_{t\geq 0}$为（5.15）提供唯一解，且该解为正，即 $L+A-F$是一个Metzler矩阵。当且仅当对所有 $i,\ j\in\mathscr{V},\ i\neq j$，我们有

$$[L-A-F]_{ij}\geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad w_{ij}-f_{ij}\geq 0,$$

这给出了所述条件。 □

注 5.8。 值 $g:=\frac{\lambda_0-\rho}{\gamma}$ 是经济的最优增长率。

注记 5.9. 条件（5.17）是隐式的，因为 F 的各项取决于 λ_0 （通过 α），而 b^0又取决于图权重 w_{ij}。

定理 5.7 表明，辅助问题的值函数 V_{b^0} 在 $\mathbb{R}^n_+$ 上与问题（5.2）的值函数 V 相同，当且仅当图连通性足够强，也就是说，当且仅当权重 w_{ij} 足够大，从而条件（5.17）成立。作为对比，我们来讨论图权重全部等于 0，即网络中没有资本扩散的极端情形。这意味着矩阵 L 的各项满足 $\ell_{ij}=0$，对所有 $i,\ j\in\mathscr{V}$。由于（5.2）中的目标泛函是各节点消费效用的折现和，而当所有图权重均为零时，各节点彼此孤立，因此显然，这种极端情形等价于在每个节点求解一个标准的拉姆齐问题。更确切地说，假设$\rho>A_i(1-\gamma)$对所有 $i=1,\ \ldots\ldots,\ n$，不难直接证明值函数为

$$V(k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{1-\gamma}\left[\frac{\gamma}{\rho-A_i(1-\gamma)}\right]^{\gamma}k_i^{1-\gamma},\quad k\in\mathbb{R}^n_+, \tag{5.18}$$

并且，对于每个经济体 $i=1,\ldots,n$ 以及任意初始资本禀赋 $k\in\mathbb{R}^n_+$，最优消费 $\widehat{C}_i$ 和最优资本路径 $\widehat{K}^{k,\widehat{C}}_i$ 由下式给出

$$\widehat{C}_i(t)=\frac{\rho-A_i(1-\gamma)}{\gamma}k_i\mathrm{e}^{g_it},\quad \widehat{K}^{k,\widehat{C}}_i(t)=k_i\mathrm{e}^{g_it}, \tag{5.19}$$

其中，$g_i=\frac{A_i-\rho}{\gamma}$ 是每个经济体的最优增长率。

注 5.10。 需要特别强调的是，除非满足条件（5.17），或者图的权重全部为零，否则问题 V（5.2）的值函数没有显式形式。这些情形无论从经济学角度还是数学角度来看都显然具有重要意义。特别是，本节所述结果未涵盖的情形是状态约束具有约束力的情形，因此需要进行更详细的分析。这留待未来研究。

现在我们希望研究去趋势化最优资本路径$\widehat{K}^k_g$向稳态的收敛，该路径定义为

$$\widehat{K}^k_g(t):=\mathrm{e}^{-gt}\widehat{K}^k(t),\quad t\geq 0,\ k\in\mathbb{R}^n_+, \tag{5.20}$$

其中 $\widehat{K}^k$ 是闭环方程（5.15）在初始条件 $k\in\mathbb{R}^n_+$下的唯一解。显然，$\widehat{K}^k_g$ 满足常微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t)=(B-g)K(t),\quad t\geq 0,\\ K(0)=k\in\mathbb{R}^n_+,\end{cases} \tag{5.21}$$

其中 $B:=L+A-F$。从经济学角度来看，分析 $\widehat{K}^k_g$的渐近行为十分重要，因为它能让我们了解所研究经济的长期行为。特别是，稳态是否存在是一个值得关注的问题。不过，必须记住，$\widehat{K}^k_g$ 是辅助问题（5.10）的去趋势最优资本路径，它可能与原问题（5.2）的去趋势最优资本路径不一致。事实上，我们要求后者非负，即从经济学角度来看是合理的。

显然，我们需要研究与（5.21）相关的动力线性系统的稳定性问题。以下是一个初步结果。

命题 5.11。 假设假设条件 5.3 成立，且 $g>\lambda_1$ （最后两个断言等价于说 $\lambda_0>g>\lambda_1$）。定义向量

$$y:=\alpha b^0+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\beta_m}{\lambda_m-g}b^m, \tag{5.22}$$

其中 $\beta_m := \langle \widehat{c}\ (b^0)\ \ b^m \rangle$，$m = 1, \ldots, n-1$，且 $\widehat{c}$ 是定义于 (4.8) 中的函数。

那么，$\{y, b^1, \ldots, b^{n-1}\}$ 是由 B 的特征向量构成的 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，其对应的特征值为 g、λ_1、……、λ_{n-1}。特别地，g 是 B 的主特征值，且为单特征值。

证明。由定理 5.7-(iii) 可立即得到，g 是 B 的一个特征值。回顾命题 5.2-(ii)，可知，对于任意的 $m = 1$、……、$n-1$，

$$[Fb^m]_i = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{p_i}{b_i^0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \langle b^m, b^0 \rangle = 0, \quad i \in \mathscr{V},$$

由此我们推得，B 的其余特征值为 λ_1、……、λ_{n-1}，其对应的特征向量为 b_1、……、b_{n-1}。这一事实与假设 $g > \lambda_1$ 一起表明，g 是 B 的主特征值，且为单特征值。最后，直接计算可得，y 是对应于 g 的特征向量。由于 $\alpha > 0$，y 与 b_1、……、b_{n-1} 线性无关，因此 $\{y, b^1, \ldots, b^{n-1}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。□

定理 5.12。假设 5.3 成立，且 $g > \lambda_1$。那么，闭环方程 (5.15) 的唯一解 $\widehat{K}^k$，在初始条件 $k \in \mathbb{R}^n$ 下，由下式给出：

$$\widehat{K}^k(t) = \frac{\langle k, b^0 \rangle}{\alpha} \mathrm{e}^{gt} y + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\langle k, b^m \rangle - \frac{\beta_m \langle k, b^0 \rangle}{\alpha(\lambda_m - g)} \right) \mathrm{e}^{\lambda_m t} b^m, \quad t \geq 0. \tag{5.23}$$

因此，对于任意 $k \in \mathbb{R}^n_+$，在 (5.20) 中定义的去趋势最优资本路径 $\widehat{K}^k_g$ 满足

$$\widehat{K}^k_g(t) \longrightarrow \overline{K}^k_g := \frac{\langle k, b^0 \rangle}{\alpha} y, \quad as\ t \to +\infty. \tag{5.24}$$

此外，若 $w_{ij} \geq f_{ij}$，则对于所有 $k \in \mathbb{R}^n_+$，都有 $K^k_g \in \mathbb{R}^n_+$。

证明。根据命题 5.11，关于线性常微分方程的标准结果保证，闭环方程（5.15）的任意解都可以写成

$$K^k(t) = c_0 \mathrm{e}^{gt} y + \sum_{m=1}^{n-1} c_m \mathrm{e}^{\lambda_m t} b^m, \quad t \geq 0,$$

对于适当的常数 c_0，……，$c_{n-1} \in \mathbb{R}$。施加 $K^k(0) = k$，得到（5.23）。由此方程还可得到

$$K^k_g(t) = \mathrm{e}^{-gt} K^k(t) = \frac{\langle k, b^0 \rangle}{\alpha} y + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\langle k, b^m \rangle - \frac{\beta_m \langle k, b^0 \rangle}{\alpha(\lambda_m - g)} \right) \mathrm{e}^{(\lambda_m - g)t} b^m, \quad t \geq 0,$$

因此，根据这些假设，我们得到（5.24）。最后一个断言是定理 5.7-(vi) 的直接推论。□

我们以一个与经济视角下一个有趣问题相关的结果结束本节：是否可以选择图 $\mathscr{G}$，使得式（g）中给出的最优消费路径的增长率 5.16 达到最大值？由于 $g = \frac{\lambda_0 - \rho}{\gamma}$，该值对图结构，即其权重的依赖，仅通过弗罗贝尼乌斯特征值 λ_0 体现。因此，上述问题归结为确定使 λ_0 达到最大值的图权重。显然（参见备注 5.10），我们可以将 g 解释为经济的增长率，前提是条件（5.17）得到验证，即式（5.16）中给出的最优控制对于问题（5.2）同样是最优的。在这种情况下，最优资本路径由式（5.23）给出，并且定理 5.12 保证经济中各节点的增长率从长期来看都将收敛于 g。

我们通过研究通过修改单个图权重来优化 λ_0 的情形，给出这方面的第一个答案。在下文中，我们任意固定 h、$\ell \in \mathscr{V}$、$h \neq \ell$，并定义 $\omega := w_{h\ell} \geq 0$。我们将 ω 视为参数，同时保持其他所有图权重不变。我们用 $\lambda_0(\omega)$ 表示对应于每个可能的 $\omega \geq 0$ 的 $L + A$ 的弗罗贝尼乌斯特征值。

命题 5.13。映射 $\omega \mapsto \lambda_0(\omega)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递减。

*Pro*关于。 令我们固定 $0 \le \omega_1 < \omega_2$ 并将 L_1 （分别为 L_2）记作其元素如（5.）所示的矩阵 1) and $w_{h\ell} = \omega_1$ （分别为 $w_{h\ell} = \omega_2$）。那么，对于每个 $i,\ j \in \mathscr{V}$，

$$(L_2 - L_1)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq h, j \neq \ell, \text{ or } i = h, j \neq \ell, \text{ or } j = h, i \neq \ell, \\ \omega_2 - \omega_1, & \text{if } i = h, j = \ell, \\ \omega_1 - \omega_2, & \text{if } i = j = h, \text{ or } i = j = \ell. \end{cases}$$

不难证明， $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1}[\lambda - 2(\omega_1 - \omega_2)]$ 是$L_2 - L_1$的特征多项式，由此我们推得 $L_2 - L_1$ 只有两个不同的特征值：零和 $2(\omega_1 - \omega_2) < 0$。因此， $L_2 - L_1$ 是负半定的，即对于所有 $z \in \mathbb{R}^n$，都有 $z^T L_2 z \le z^T L_1 z$。这也意味着，对于所有 $z \in \mathbb{R}^n$，都有$z^T(L_2 + A)z \le z^T(L_1 + A)z$。

令 $b^0(\omega_2)$ 为 $L_2 + A$ 的单位弗罗贝尼乌斯特征向量。那么，根据瑞利原理

$$\begin{aligned} \lambda_0(\omega_2) &= \max_{\substack{z \in \mathbb{R}^n \\ \|z\| = 1}} z^T(L_2 + A)z = b^0(\omega_2)^T(L_2 + A)b^0(\omega_2) \le b^0(\omega_2)^T(L_1 + A)b^0(\omega_2) \\ &\le \max_{\substack{z \in \mathbb{R}^n \\ \|z\| = 1}} z^T(L_1 + A)z = \lambda_0(\omega_1), \end{aligned}$$

由此得证。 □

这一结果表明，当只能调整一个图权重时，应选择能够确保（5.17）成立的最低可能权重，以最大化经济增长率 g，也就是经济中每个节点的渐近增长率。这说明，顶点之间过强的连接会产生拥堵效应，从经济视角来看，这是不利的。

5.2. **双节点情形**。 本节进一步分析图 $\mathscr{G}$ 在第5 节开头引入的情形下，问题（5.2），其中图 $n = 2$ 只有两个节点，即 A_1 和 A_2。不失一般性，我们假设技术水平 $A_1 \le A_2$ 满足（若不满足，只需重新标记图中的两个节点即可）。为简单起见，我们还假设 $p_1 = p_2 = 1$，其中 $p_1,\ p_2$ 是收益泛函（5.2）中出现的参数。在此情形下，只有一个图权重，记为 $w \ge 0$，矩阵 $L + A$ 如下

$$L + A = \begin{bmatrix} A_1 - w & w \\ w & A_2 - w \end{bmatrix}.$$

通过一些直接计算，我们可以将弗罗贝尼乌斯特征值和特征向量显式表示为图权重 w 的函数：

$$\lambda_0(w) = \begin{cases} A, & \text{if } A_1 = A_2 = A, \\ -w + \frac{A_1 + A_2}{2} + \sqrt{w^2 + \frac{(A_1 - A_2)^2}{4}}, & \text{if } A_1 \neq A_2, \end{cases} \tag{5.25}$$

$$b^0(w) = \begin{cases} (1, 1), & \text{if } A_1 = A_2 = A, \\ (b_1^0(w), b_2^0(w)), & \text{if } A_1 \neq A_2, \end{cases} \tag{5.26}$$

其两个分量之比 b^0 满足$\frac{b_2^0(w)}{b_1^0(w)} = \frac{A_2 - A_1}{A_2 - \lambda_0(w)} - 1$。值得注意的是，根据命题 5.13，对于所有 $w \ge 0$，我们有

$$\lim_{w \to +\infty} \lambda_0(w) = \frac{A_1 + A_2}{2} < \lambda_0(w) \le A_2 = \lambda_0(0). \tag{5.27}$$

在双节点情形下，我们可以更精确地研究优化问题（5.2）的值函数 V 与辅助问题（5.10）的值函数 V_{b^0} 之间的联系，下面的命题5.14 对此进行了说明。下文中，为了强调 V 和 V_{b^0} 对参数w 的依赖关系，我们将 $V(w;\ k)$ 和 $V_{b^0}(w;\ k)$分别记作，其中每个固定的 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$。为确保可以应用定理5.7，我们假设

$$w > 0, \qquad \rho > A_2(1 - \gamma). \tag{5.28}$$

条件（5.28）等价于以下表述：假设5.3 对所有 $w > 0$均得到验证。

Pro命题 5.14。 假设图 $\mathscr{G}$ 只有两个节点，即 $n=2$，并且 $p_1=p_2=1$. *Fix* $k\in\mathbb{R}^n_{++}$。

(i) 在 $A_1=A_2=A$ 的情况下， $V(w;k)=V_{b^0}(w;k)$ 当且仅当 $w\geq \rho-A(1-\gamma)2\gamma$。*(ii)* 在 $A_1<A_2$ 的情况下，存在 $w>w>0$，使得对于所有 $w\in[w,+\infty$， $V(w;k)=V_{b^0}(w;k)$，并且对于所有 $w\in(0,w)$， $V(w;k)\neq V_{b^0}(w;k)$。

证明。 情形 (i) 是条件（5.17）以及以下事实的直接推论： $f_{12}(w)=f_{21}(w)=\rho-A(1-\gamma)2\gamma$，对所有 $w\geq 0$，其中 f_{12} 和 f_{21} 是矩阵 F的非对角元素，该矩阵在（5.14）中引入，并且取决于图权重 w。

为证明情形 (ii) 结论的第一部分，我们首先证明存在 $\widetilde{w}>0$ 使得不等式组

$$\begin{cases} f_{12}(w)\leq \frac{\rho-A_1(1-\gamma)}{2\gamma} \\ f_{21}(w)\leq \frac{\rho-A_1(1-\gamma)}{2\gamma} \end{cases}$$

对所有 $w\in(\widetilde{w},\ \infty)$ 均成立。上面的两个不等式可重新整理为

$$\begin{cases} \Psi(w)\leq \frac{1}{2}\left(G(w)^{-1}+G(w)^{-\frac{1}{\gamma}}\right) \\ \Psi(w)\leq \frac{1}{2}\left(G(w)+G(w)^{\frac{1}{\gamma}}\right) \end{cases} \tag{5.29}$$

其中，对所有 $w>0$,

$$G(w):=\frac{b_2^0(w)}{b_1^0(w)}=\frac{A_2-A_1}{A_2-\lambda_0(w)}-1,\qquad \Psi(w):=\frac{\rho-\lambda_0(w)}{\rho-A_1(1-\gamma)}. \tag{5.30}$$

通过常规计算可以证明， Ψ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，并且

$$\lim_{w\to 0}\Psi(w)=1,\qquad \lim_{w\to+\infty}\Psi(w)=\frac{2\rho-(A_1+A_2)}{2[\rho-A_1(1-\gamma)]}<1,$$

而函数 $w\mapsto\frac{1}{2}\left(G(w)+G(w)^{\frac{1}{\gamma}}\right)$ 和 $w\mapsto\frac{1}{2}\left(G(w)^{-1}+G(w)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)$ 分别在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减和单调递增，其中

$$\lim_{w\to 0}\frac{1}{2}\left(G(w)+G(w)^{\frac{1}{\gamma}}\right)=+\infty,\qquad \lim_{w\to+\infty}\frac{1}{2}\left(G(w)+G(w)^{\frac{1}{\gamma}}\right)=1, \tag{5.31}$$

$$\lim_{w\to 0}\frac{1}{2}\left(G(w)^{-1}+G(w)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)=0,\qquad \lim_{w\to+\infty}\frac{1}{2}\left(G(w)^{-1}+G(w)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)=1. \tag{5.32}$$

我们得出，(5.29) 中的第一个不等式对所有 $w>0$ 均成立，而第二个不等式对某个 $\widetilde{w}>0$ 的所有 $w\geq\widetilde{w}$ 均成立。因此，如果 $w\geq\rho-A_1(1-\gamma)2\gamma$ 和 $w\geq\widetilde{w}$，则条件 (5.17) 得以满足。由此，我们推得，对所有 $w\geq w$： $V(w)=V_{b_0}(w)=\max\left\{\rho-A_1(1-\gamma)2\gamma,\ \widetilde{w}\right\}$。

矩阵 F 的条目 f_{12} 可以改写为

$$f_{12}(w)=\frac{\rho-\lambda_0(w)(1-\gamma)}{\gamma\left[G(w)^{-1}+G(w)^{-\frac{1}{\gamma}}\right]},\quad w>0.$$

可以通过标准计算证明函数 $w\mapsto f_{12}(w)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减；此外，利用命题5.13、方程（5.25）以及映射 $w\mapsto G(w)^{-1}+G(w)^{-\frac{1}{\gamma}}$ 的上述性质，可得

$$\lim_{w\to 0}f_{12}(w)=+\infty.$$

因此，注意到不等式 (ii) 情形陈述的第二部分 $f_{12}(w)\leq w$ 对于 $w<w$中的某些 $0<w<w$不成立，故□

我们的最终结果确立了优化问题（5.2）的值函数 V关于图权重 w的一些单调性性质。我们分别用 $A:=\frac{A_1+A_2}{2}$和 $k:=\frac{k_1+k_2}{2}$表示技术水平和初始资本禀赋的平均值，并用 $g_\infty:=A(1-\gamma)_\gamma^{-\rho}$ 表示。注意，由条件（5.28）可知 $g_\infty<0$，且 $g_\infty=\lim_{w\to+\infty}g(w)=\lambda_0(w)_\gamma^{-\rho}$，

whe关于 $g(w)$ 是经济的最优增长率，如备注5.8中定义，是 t 的函数 he graph 权重 $w>0$。

命题 5.15。 假设图 $\mathscr{G}$ 只有两个节点，即 $n=2$，并且 $p_1=p_2=1$。固定 $k\in\mathbb{R}^n_{++}$。

1. 当 $A_1=A_2=A$ 时，映射 $w\mapsto V(w;k)$ 在 $[\frac{\rho-A(1-\gamma)}{2\gamma},+\infty$ 上为常数；*2.* 当 $A_1<A_2$ 时，映射 $w\mapsto V(w;k)$：（*i*）若 $k_1\le k_2$，则在 $[w,+\infty$ 上单调递减，其中 $w>0$ 是命题 *5.14* 中出现的常数；（*ii*）若 $k_1>k_2$ 且 $\frac{A_2-A_1}{g_\infty}>\frac{k_2-k_1}{k}$，则对某个 $w_\star>0$，在 $[w_\star,+\infty$ 上单调递减；（*iii*）若 $k_1>k_2$ 且 $\frac{A_2-A_1}{g_\infty}<\frac{k_2-k_1}{k}$，则对某个 $w^\star>0$，在 $[w^\star,+\infty$ 上单调递增。

证明。 参见附录B。 □

5.3. 三节点情形：数值研究。为阐明第 5 节的结果，我们给出一个包含三个地区的数值示例。为校准模型，我们选择折现率$\rho=0.03$ 以及出现在 (2.4) 中的参数 γ和 p_i，如下所示：$\gamma=3$，$p_i=\frac{1}{3}$，对于 $i=1$、2、3。我们假设[3] 初始资本禀赋为 $k_i=1$，对于 $i=1$、2、3。设各地区的资本边际生产率为 $(A_1,A_2,A_3)=(0.10,0.12,0.08)$。注意，这些参数满足条件 $\rho>A_i(1-\gamma)$，对于 $i=1$、2、3。

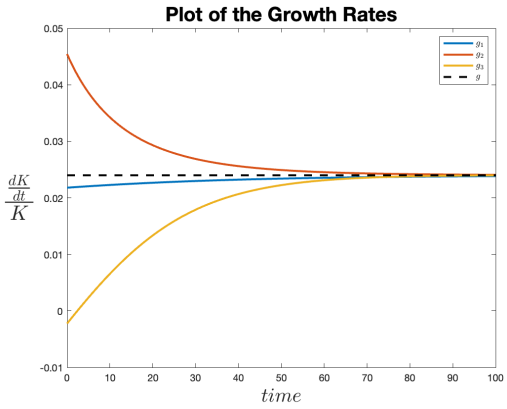
如果这三个地区彼此隔离，即图权重均为零，那么根据 (5.19)，每个地区的最优资本存量 K_i、产出 A_iK_i和最优消费 C_i，对于 $i=1$、2、3，分别以恒定速率 $\bar{g}_i=\frac{A_i-\rho}{\gamma}$ 增长，其中 $i=1$、2、3。采用上述参数后，我们得到 $(\bar{g}_1,\bar{g}_2,\bar{g}_3)\simeq(0.0233,0.03,0.0166)$。我们还注意到，在这种情况下不存在过渡动态。这与标准文献一致（例如，参见 [4, 第 4]章）。

我们通过指定图权重 $(w_{12},w_{13},w_{23})=(0.04,0.03,0.05)$ 并设定 $w_{ij}=w_{ji}$（对于 $i,j=1$、2、3、$i\neq j$），在各区域之间引入对称连接。在这一选择下，我们有：矩阵 $L+A$ 的弗罗贝尼乌斯特征值 λ_0，弗罗贝尼乌斯特征向量 b^0 为$\lambda_0\simeq0.1019$, $b^0\simeq(0.5707,0.6584,0.4908)$，经济的最优增长率（参见备注 5.8）为 $g=\frac{\lambda_0-\rho}{\gamma}\simeq0.02398$，且 $\lambda_1\simeq-0.005$。因此，定理 5.7 和定理 5.12 的所有假设均得到验证。此外，我们可以通过数值方法验证条件 (5.17) 得到满足，并且因此可以断言，区域资本存量 K_i 的最优路径以及区域最优消费路径 C_i（对于 $i=1$、2、3）分别是公式 (5.23) 和 (5.16) 给出的路径。我们还可以计算区域增长率的最优路径，其定义为 $g_i(t):=\frac{1}{\hat{K}_i}(t)\,\mathrm{d}\hat{K}_i(t)\,\mathrm{d}t$。资本存量从其初始值开始增长，而区域增长率从不同的初始值出发，并收敛于共同增长率 g，正如第 5 节的结果所预测的那样。如图 1(a) 所示，具有相互连接区域的模型呈现出过渡动态，因为区域增长率 g_i 收敛于共同的长期增长率 g。特别是，我们可以通过数值方法验证，三个增长率均达到区间 $(0.99g,1.01g)$，即在 $t\simeq81.72$ 时达到 $\pm1\%$ 的 g值。

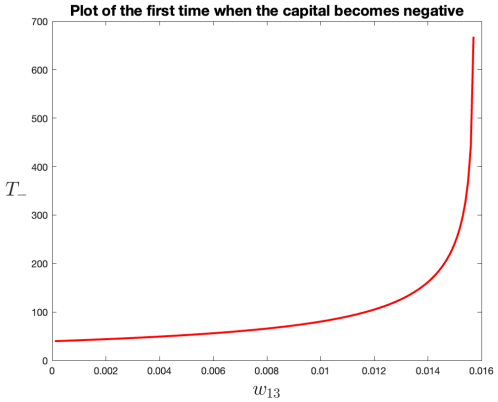
根据2.4给出的最优消费路径（5.16）计算得到的总贴现效用在数值上被证实是有限的，正如理论所预测的那样（参见命题3.3），并且与（5.12）给出的值一致；从经济视角来看，对这一事实进行验证十分重要。

从政策启示来看，结果表明，社会规划者通过连接各区域，可以提高资本边际生产率较低区域的长期增长率。代价是，这种连接会降低生产率较高区域的长期增长率。我们的数值模拟还表明，连通性增加（体现为图权重的变化）会降低各区域趋于一致的共同增长率 g，以及收敛时间；这里的收敛时间指三个增长率达到足够

[3] ρ 和 γ 的取值符合经济理论。 A_1、 A_2和 A_3 所采用的取值与 ρ 和 γ相结合后，会使三个地区相互隔离的模型中产生符合现实的增长率，而我们将该模型用作基准。



(a) 区域增长率。



(b) 时间 T_-。

图1. (a)：区域增长率的收敛；(b)：时间 T_-，此时至少有一个资本存量变为负值。

接近长期增长率的小邻域 g，例如，$\pm 1\%$ 上述 g的值。特别是，如果规划者只提高一对区域之间的连通性，同时保持其他区域之间的连通性不变，那么 g 的降低是命题5.13的推论。

根据定理5.7-(v)，控制 C 由式(5.16)给出，对问题(5.10)而言是最优的，即对辅助问题而言是最优的，但对原问题(5.2)而言可能不可容许。事实上，可能会出现最优轨迹 K 由式(5.23)给出，却离开正正交象限，也就是说，至少一条资本路径变为负值。若出现这种情况，我们称之为解崩溃，以强调辅助问题与原问题的解并不一致。当连接参数（即图权重）的取值低于某个阈值时，就会发生这种情况。为数值研究这一问题，我们评估资本路径 K 的演化，同时保持参数 w_{12} 和 w_{23} 如上所述固定，并改变 w_{13}。具体而言，对于固定网格中的每个可能取值 w_{13}，我们计算解崩溃发生的时间，即以下量：

$$T_- := \inf\{t > 0 \colon \widehat{K}(t) \notin \mathbb{R}^n_+\},$$

按照通常约定 $\inf \emptyset = +\infty$。图1(b)展示了 T_- 与 w_{13}的关系图。显然，w_{13} 的值越低，解崩溃就越早发生。注意，当 w_{13}趋近于阈值 $w^\star_{13}$时，$T_- \to +\infty$；在本例中，该阈值略低于 0.016。这表明，对于所有高于$w^\star_{13}$ 的 w_{13} 值，资本路径 K 都保持在正正交象限内，因此 C 对于从 k开始的原问题是可容许的（因而也是最优的），如定理 5.7-(v) 所述。因此，我们的研究为我们提供了一种数值方法：对于每个固定的初始资本禀赋，求出图连通性的阈值；高于该阈值时，最优消费计划和最优资本路径分别由 (5.16) 和 (5.23) 给出。换言之，我们正在事后验证原问题与辅助问题的解在 k处重合。最后，注意 $w^\star_{13}$ 的值低于阈值w_{13}；高于该阈值时，条件 (5.17) 成立，而本例中的该阈值为 $w_{13} \simeq 0.0274$。事实上，在条件 (5.17) 下，也就是说，对于 $w_{13} \geq w_{13}$，辅助问题与原问题的解对所有 $k \in \mathbb{R}^n_+$都重合；而对于 $w^\star_{13} \leq w_{13} \leq w_{13}$，这两个解在上述初始资本禀赋 k 处重合，但在其他 k值处则未必如此。例如，令 $w_{13} = 0.02$、$k = (1, 0.1, 0.05)$，并将其余参数固定为上述值，我们通过数值计算验证了 $T_- \simeq 9.0295$，因此对于这组特定参数会发生解崩溃。

附录 A。技术结果

此处给出第3节中用到的一些技术结果。

Le题 A.1. 假设条件 *3.1* 成立，并令 C 为 $k \in \mathbb{R}$的一个可容许控制 $^{n}_{+}$，即，$C \in \mathcal{A}_+(k)$。那么，存在一个与 k 和 C 无关的 $\Gamma > 0$，使得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\lambda_\star} \|C(s)\| \,\mathrm{d}s \le \Gamma \langle k, b^\star \rangle. \tag{A.1}$$

证明。令 $K^{k,\ C}$ 为满足初始条件 $k \in \mathbb{R}^n_+$ 和控制 $C \in \mathcal{A}_+(k)$ 的 (2.1) 的唯一解。则，$K^{k,\ C}(t) \in \mathbb{R}^n_+$对所有 $t \ge 0$均成立。对 (2.2) 中的 $b^\star$ 取内积，得到

$$\begin{aligned} 0 \le \langle K^{k,C}(t), b^\star \rangle &= \langle \mathrm{e}^{t(L+A)} k, b^\star \rangle - \int_0^t \langle \mathrm{e}^{(t-s)(L+A)} NC(s), b^\star \rangle \,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{t\lambda_\star} \left[\langle k, b^\star \rangle - \int_0^t \mathrm{e}^{-s\lambda_\star} \langle C(s), N^T b^\star \rangle \,\mathrm{d}s \right], \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

因此，对所有 $t \ge 0$,

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-s\lambda_\star} \langle C(s), N^T b^\star \rangle \,\mathrm{d}s \le \langle k, b^\star \rangle .$$

根据假设 2.1- (ii)，有 $N^T b^\star \in \mathbb{R}^n_{++}$。因此，回忆 $C(s) \in \mathbb{R}^n_+$ 对所有 $s \ge 0$ 均成立，并令 $\chi := \min_{i=1,\ \ldots,\ n} [N^T b^\star]_i > 0$，可得

$$\langle C(s), N^T b^\star \rangle \ge \chi \sum_{i=1}^n |C_i(s)| \ge \chi \|C(s)\|, \quad s \ge 0.$$

因此，对所有 $t \ge 0$,

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-s\lambda_\star} \|C(s)\| \,\mathrm{d}s \le \frac{1}{\chi} \int_0^t \mathrm{e}^{-s\lambda_\star} \langle C(s), N^T b^\star \rangle \,\mathrm{d}s \le \frac{1}{\chi} \langle k, b^\star \rangle,$$

由此可得 (A.1)。 □

我们需要引入以下函数空间，对所有 $p \ge 1$ 定义为

$$\mathrm{L}^p_{\lambda_\star}([0,+\infty); \mathbb{R}^n) := \left\{ f \colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\lambda_\star} \|f(t)\|^p \,\mathrm{d}t < +\infty \right\}, \tag{A.2}$$

其中，$\lambda_\star \in \mathbb{R}$ 是 $(L+A)^{\ T}$ 的弗罗贝尼乌斯特征值，并赋予范数

$$\|f\|_{p,\lambda_\star} := \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\lambda_\star} \|f(t)\|^p \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L引理 A.2。 令 $\gamma \in (0、1)$，并考虑一个族 $(C_m)_{m \ge 1} \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty); \mathbb{R}^n_+)$，使得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\lambda_\star} \|C_m(s)\| \,\mathrm{d}s \le \Psi, \tag{A.3}$$

其中，$\Psi > 0$ 是一个与 $(C_m)^{m \ge 1}$ 无关的常数。

那么，对所有 $t \ge 0$，存在 $C_0 \in \mathrm{L}^1_{\lambda_\star}([0,+\infty);\ \mathbb{R}^n)$，其中 $C_0(t) \in \mathbb{R}^n_+$，使得在取子列后，

$$C_m^{1-\gamma} \to C_0^{1-\gamma}, \quad \textit{weakly in } \mathrm{L}^{\frac{1}{1-\gamma}}_{\lambda_\star}([0,+\infty); \mathbb{R}^n), \ \textit{as } m \to \infty. \tag{A.4}$$

此外，对于所有 $w \in \mathbb{R}^n$ 和所有 $t > 0$,

$$\int_0^t \langle \mathrm{e}^{(t-s)(L+A)} NC_0(s), w \rangle \mathrm{d}s \le \liminf_{m \to \infty} \int_0^t \langle \mathrm{e}^{(t-s)(L+A)} NC_m(s), w \rangle \mathrm{d}s, \tag{A.5}$$

并且，如果假设 *3.1-(ii)* 成立（回顾 J 是定义于 (2.4)中的函数），

$$\lim_{m \to \infty} J(C_m) = J(C_0). \tag{A.6}$$

证明。 固定 $\gamma \in (0,\ 1)$。根据詹森不等式，对于任意 $\|x^{1-\gamma}\| \le n^{\frac{\gamma}{2}}\|x\|^{1-\gamma},\quad x \in \mathbb{R}^n_+$，其中 $x^{1-\gamma}$是其分量为 $x_i^{1-\gamma}$、 $i = 1$.....、 n的向量。因此，由（A.3）可得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\lambda_\star}\|C_m(s)^{1-\gamma}\|^{\frac{1}{1-\gamma}}\,\mathrm{d}s \le n^{\frac{\gamma}{2(1-\gamma)}}\Psi < +\infty.$$

这意味着，对于所有 $m \ge 1,\quad C_m^{1-\gamma} \in \mathrm{L}^{\frac{1}{1-\gamma}}_{\lambda_\star}([0,+\infty);\,\mathbb{R}^n)$，且 $\|C_m^{1-\gamma}\|_{\frac{1}{1-\gamma},\,\lambda_\star}$是一致有界的。由于对于所有 $\gamma \in (0,\ 1)$，$\mathrm{L}^{\frac{1}{1-\gamma}}_{\lambda_\star}([0,+\infty);\,\mathbb{R}^n)$ 是一个自反巴拿赫空间，因此存在$f_0 \in \mathrm{L}^{\frac{1}{1-\gamma}}_{\lambda_\star}([0,+\infty);\,\mathbb{R}^n)$，满足对于所有 $t \ge 0,\quad f_0(t) \in \mathbb{R}^n_+$，以及一个子列（仍记为 $C_m^{1-\gamma}$），使得

$$C_m^{1-\gamma} \to f_0,\quad \text{weakly in } \mathrm{L}^{\frac{1}{1-\gamma}}_{\lambda_\star}([0,+\infty);\mathbb{R}^n),\ \text{as } m \to \infty.$$

令 $C_0(t) := f_0(t)^{\frac{1}{1-\gamma}},\ t \ge 0$，可得（A.4）。

为证明（A.5），对固定的 $w \in \mathbb{R}^n$ 和 $t > 0$，定义泛函

$$R_w(f) := \int_0^t \langle \mathrm{e}^{(t-s)(L+A)}Nf(s)^{\frac{1}{1-\gamma}}, w\rangle\,\mathrm{d}s,\quad f \in \mathrm{L}^{\frac{1}{1-\gamma}}_{\lambda_\star}([0,+\infty);\mathbb{R}^n)$$

不难证明， R_w 是凸且强连续的。因此，根据 [10, 推论 3。9]R_w 是弱下半连续的，即对每个 $w \in \mathbb{R}^n$,

$$R_w(C_0^{1-\gamma}) \le \liminf_{m\to\infty} R_w(C_m^{1-\gamma}),$$

这与（A.5）一致。

最后，为证明（A.6），注意到对任意 $m \ge 1$,

$$J(C_m) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\rho t}\left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{C_{m,i}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\gamma}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_\star t}\langle C_m(t)^{1-\gamma}, \mathrm{e}^{(\lambda_\star-\rho)t}p\rangle\,\mathrm{d}t,$$

其中 $p := (p_1,\ ..,\ p_n)$。根据假设3.1-（ii），函数 $t \mapsto \mathrm{e}^{(\lambda_\star-\rho)\,t}p$属于$\mathrm{L}^{\gamma}_{\lambda_\star}([0,+\infty);\ \mathbb{R}^n)$，它是$\mathrm{L}^{1-\gamma}_{\lambda_\star}([0,+\infty)$的对偶空间；$\mathbb{R}^n)$。因此，根据（A.4），

$$\lim_{m\to\infty} J(C_m) = \frac{1}{1-\gamma}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_\star t}\langle C_0(t)^{1-\gamma}, \mathrm{e}^{(\lambda_\star-\rho)t}p\rangle\,\mathrm{d}t = J(C_0). \qquad \square$$

附录 B. 命题 5.15的证明

固定 $k \in \mathbb{R}^n_{++}$。在 $A_1 = A_2 = A$ 的情况下，我们有

$$V_{b^0}(w;k) = \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\rho - A(1-\gamma)}\right)^{\gamma}(k_1+k_2)^{1-\gamma},\quad \forall w \ge 0.$$

因此，点 1. 直接由命题5.14-(i)得出。

为证明第 2.点，我们首先研究辅助问题的值函数V_{b^0} 关于图权重 w的单调性。从（5.12）出发，并回顾函数 G 在（5.30）中的定义，我们可以将 V_{b^0} 重写为

$$V_{b^0}(w;k) = \frac{\gamma^\gamma}{1-\gamma}F_1(w)F_2(w)F_3(w;k),$$

其中

$$F_1(w) = \left(\frac{1}{\rho - \lambda_0(w)(1-\gamma)}\right)^{\gamma},\quad F_2(w) = \left(1+G(w)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{\gamma},\quad F_3(w;k) = (k_1+k_2G(w))^{1-\gamma}.$$

对 w 求导并经过一些计算后，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial w}V_{b^0}(w;k) = \gamma^\gamma F_1(w)F_2(w)F_3(w)\lambda_0'(w)\times$$
$$\times \underbrace{\left\{\frac{\gamma}{\rho-\lambda_0(w)(1-\gamma)} + \frac{A_2-A_1}{\left[A_2-\lambda_0(w)\right]^2}\frac{k_2G(w)^{\frac{1}{\gamma}}-k_1}{\left[k_1+k_2G(w)\right]\left[G(w)+G(w)^{\frac{1}{\gamma}}\right]}\right\}}_{=:X(w)}.$$

根据命题 5.13、条件（5.28），并且由于 $G(w) > 1$，对于所有 $w > 0$，我们推得 at

$$\gamma^\gamma F_1(w)F_2(w)F_3(w)\lambda_0'(w) < 0, \qquad \frac{\gamma}{\rho-\lambda_0(w)(1-\gamma)} > 0,$$
$$\frac{A_2-A_1}{\left[A_2-\lambda_0(w)\right]^2} > 0, \qquad \left[k_1+k_2G(w)\right]\left[G(w)+G(w)^{\frac{1}{\gamma}}\right] > 0,$$

对于所有 $w > 0$。此外，

$$k_2G(w)^{\frac{1}{\gamma}} - k_1 > 0 \iff G(w) > \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^\gamma. \tag{B.1}$$

如果 $k_1 \le k_2$，那么对于所有 $w > 0$，式（B.1）均得到验证，因为对于所有 $w > 0$，$G(w) > 1$。在这种情况下，我们得到对于所有 $w > 0$，$X(w) > 0$，从而 $w \mapsto V_{b^0}(w;k)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减。因此，将这一事实与命题 5.14-(ii) 相结合，我们推得第 2.-(i) 点。反之，如果 $k_1 > k_2$，则随着 w 的变化，$X(w)$ 的符号可能发生改变，相应地，$w \mapsto V_{b^0}(w;k)$ 的单调性也可能发生改变。注意，

$$\lim_{w\to+\infty} X(w) = \frac{2\gamma}{2\rho-(A_1+A_2)(1-\gamma)} + \frac{2}{A_2-A_1}\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2} =: \overline{X}.$$

如果 $X > 0$，即如果 $\frac{A_2-A_1}{g_\infty} > \frac{k_2-k_1}{k}$，那么存在 $\widehat{w} > 0$，使得 $w \mapsto V_{b^0}(w;k)$ 在 $(\widehat{w},+\infty)$ 上递减。因此，将这一事实与命题 5.14-(ii) 相结合，我们推得 $w \mapsto V(w;k)$ 在 $(w_\star,+\infty)$ 上单调递减，其中 $w_\star = \max\{w,\widehat{w}\}$，而 w 是命题 5.14 中出现的常数。第 2.-(iii) 点可类似地证明。□

参考文献

[1] P. Acquistapace 和 F. Bartaloni。带状态约束和非凹动力学的最优控制：一个源自经济增长的模型。应用数学与优化，76(2):323–373，2017。doi: 10.1007/s00245-016-9353-5。[2] T. Allen 和 C. Arkolakis。贸易与空间经济地形。《经济学季刊》，129(3):1085–1140，2014。[3] M. Bardi 和 I. Capuzzo-Dolcetta。*Hamilton-Jacobi-Bellman*方程的最优控制与黏性解。《系统与控制：基础与应用》。Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1997。doi: 10.1007/978-0-8176-4755-1。[4] R. Barro 和 X. Sala-i Martin。经济增长（第二版）。美国马萨诸塞州剑桥：麻省理工学院出版社，2004。[5] F. Bartaloni。非紧控制空间上的无限时域最优控制问题：存在性结果与动态规划。博士论文，比萨大学，2019。[6] T. Bıyıkoğlu、J. Leydold 和 P. F. Stadler。图的拉普拉斯特征向量，第1915卷，收入《数学讲义》。Springer，柏林，2007。doi: 10.1007/978-3-540-73510-6。[7] R. Boucekkine、C. Camacho 和 B. Zou。弥合增长理论与新经济地理学之间的鸿沟：空间拉姆齐模型。《宏观经济动态》，13(1):20–45，2009。[8] R. Boucekkine、C. Camacho 和 G. Fabbri。空间动态与收敛：空间 AK 模型。数学经济学杂志，148(6):2719–2736，2013。doi: 10.1016/j.jet.2013.09.013。[9] R. Boucekkine、G. Fabbri、S. Federico 和 F. Gozzi。异质空间中的增长与集聚：广义 AK 方法。《经济地理学杂志》，19(6): 1287–1318，2018。doi: 10.1093/jeg/lby041。

[10] H. Brezis。泛函分析、Sobole夫空间与偏微分方程。Universitext。Springer，纽约，2011。[11] P. Brito。空间异质世界中的增长与分配动力学。经济学系工作论文，ISEG-UTL，2004。URL http://ideas.repec.org/ p/ise/isegwp/wp142004.html。[12] A. Calvia、S. Federico 和 F. Gozzi。Banach格上的状态约束控制问题及其应用。SIAM控制与优化杂志，59(6):4481–4510，2021。doi: 10.1137/20M1376959。[13] P. Cannarsa 和 C. Sinestrari。半凹函数、Hamilton-Jacobi方程与最优控制，第58卷，收入非线性微分方程及其应用进展。Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，2004。[14] P. Cannarsa 和 H. M. Soner。关于Hamilton-Jacobi-Bellman方程黏性解的奇异性。Indiana大学数学杂志，36(3):501–524，1987。doi: 10.1512/iumj. 1987.36.36028。[15] G. Fabbri。地理结构与收敛：关于空间增长模型中几何的注记。《经济理论杂志》，162:114–136，2016。[16] L. Farina 和 S. Rinaldi。正线性系统。纯粹与应用数学（纽约）。Wiley-Interscience，纽约，2000。理论与应用。[17] G. Freni、F. Gozzi 和 N. Salvadori。线性多部门模型中最优策略的存在性。经济理论，29(1):25–48，2006。doi: 10.1007/s00199-005-0025-y。[18] G. Freni、F. Gozzi 和 C. Pignotti。线性多部门模型中的最优策略：值函数与最优性条件。数学经济学杂志，44(1):55–86，2008。doi: 10.1016/j. jmateco.2007.05.002。[19] F. Gozzi 和 M. Leocata。时空经济增长的随机模型。SIAM控制与优化杂志，60(2):620–651，2022。doi: 10.1137/21M1414206。[20] N. I. Karachalios 和 A. N. Yannacopoulos。离散非线性薛定谔方程的整体存在性与紧吸引子。微分方程杂志，217(1):88–123，2005。doi: 10.1016/j.jde.2005.06.002。[21] D. C. Kravvaritis 和 A. N. Yannacopoulos。非线性分析中的变分方法——及其在优化和偏微分方程中的应用。De Gruyter 教科书。De Gruyter，柏林，2020。[22] R. T. Rockafellar。凸分析。普林斯顿数学经典。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1997。重印1970年原版，普林斯顿平装书。[23] A. Seierstad 和 K. Sydsæter。具有经济学应用的最优控制理论，第24卷，收入经济学高级教材。North-Holland出版公司，阿姆斯特丹，1987。[24] H. M. Soner。带状态空间约束的最优控制。I。SIAM控制与优化杂志，24(3):552–561，1986。[25] P. W. Sy 和 T. Sunada。图上的离散薛定谔算子。名古屋数学杂志，125:141–150，1992。doi: 10.1017/S0027763000003949。[26] A. Xepapadeas 和 A. N. Yannacopoulos。具有外生储蓄率的空间增长。《数学经济学杂志》，67:125–137，2016。[27] A. Xepapadeas 和 A. N. Yannacopoulos。空间增长理论：最优性与空间异质性。经济动态学与控制杂志，146:104584，2023。[28] J. Yong 和 X. Y. Zhou。随机控制，第43卷，收入数学应用。Springer-Verlag，纽约，1999。doi: 10.1007/978-1-4612-1466-3。