arXiv:2304.11575v1 [econ.TH] 23 Apr 2023

博弈中的选择结构

Paolo Galeazzi 和 Johannes Marti

2023年4月25日

摘要

遵循博弈论的决策理论方法，我们将 [EW96]和 [DT08] 的分析从偏好关系层级扩展到选择函数层级。随后，我们构造了包含所有这些选择层级的普适选择结构，并展示了 [DT08] 中的普适偏好结构如何嵌入其中。

1 引言

本文聚焦于博弈理论中研究博弈者交互信念和主观偏好的那部分内容的基础。我们采用最广泛的一般框架，在其中，博弈者的信念和偏好以选择函数表示，而不对其作进一步假设。这推广了文献中的现有方法；在这些方法中，博弈者的信念和偏好由概率函数和效用函数或偏好关系表示。我们证明，即使在我们的一般框架下，也可以构造一个普遍类型结构——我们称之为普适选择结构——其中包含所有相容的选择函数层级。所谓普适，是指该结构在范畴论意义上是终对象，并且在 [Bra03] 的意义上具有完备性。此外，普适选择结构是非冗余的（依照 [MZ85] 的定义），且无拓扑性（依照 [HS98] 的定义）。第 5 节将更详细地讨论所有这些概念。

本文的研究动机源于使用序关系表示博弈者偏好所带来的局限性，正如 [Eps97] 已经指出的那样。概率类型结构的推广形式——称为偏好结构——已由 [EW96, DT08] 和 [GHL16], 提出；在这些结构中，类型被定义为交互偏好关系的层级，而非交互概率信念的层级。然而，并非所有重要的决策准则都能用序关系表示，因此，当理性是依据此类准则定义时，偏好结构并不能帮助我们研究其行为含义。一个著名的例子是后悔最小化，它违反无关选项独立性原则，因而也违反传递性（见下文第 1.2 节）。因此，后悔最小化偏好无法用序关系表示，并且已通过选择函数予以公理化（见 [Hay08] 和 [Sto11]）。

本文旨在构建所需的交互认识论结构，以纳入诸如后悔最小化这类决策准则的情形；在这些情形中，偏好序不足以表示博弈者的理性。这一动机促使我们从交互偏好序的层级转向交互选择函数的层级。

除了本文的概念动机之外，选择结构还被证明是迄今为止为交互认知论和认识论博弈论所引入的最一般模型。由于偏好序是选择函数的特殊情形，普适选择结构嵌入普适偏好结构，而后者又嵌入普适概率类型结构。

在更为技术性的方面，我们运用余代数理论和范畴论中的概念证明本文的形式化结果。这使得我们能够采用模块化方法，也可能为普适概率类型结构和普适偏好结构的构造带来新的认识。

本文的结构如下。接下来的第 1.1 和第 1.2 小节分别综述相关文献，并为本文提供一个动机性示例。第 2 节介绍第 3 节中用于构造选择函数层级和普适选择结构的研究设定及预备概念。第 4 节展示普适偏好结构如何嵌入普适选择结构，第 5 节作总结。

1.1 相关文献

如上文已经指出的， [EW96] 将类型的概念从概率信念的层级推广到交互偏好关系的层级，并据此引入偏好结构。 [Che10] 随后证明，任何按照 `a la [EW96] 构造的结构都可以通过一个唯一的态射嵌入其偏好结构中。从不同于 [EW96],[DT08] 的前提出发，也构造了一个偏好结构，并证明该结构是泛的且非冗余的。本着与 [EW96] 和 [DT08], [相同的精神，16] GHL [证明了：对于比96]EW中更大的一类偏好，泛结构是存在的。因此，我们的结果是将偏好结构进一步概括为一般意义上的选择结构，从而对博弈者的理性和决策准则采取更加宽松的要求。

其他相关工作与本文的联系，更多体现在所采用的形式技术上，而非研究精神上，其中包括 [Hei14]。在该文中，作者借助范畴论工具构造了一个带不知情的普遍类型结构。然而，与我们的情形不同的是，要使其构造成功，只需证明其带不知情的类型结构是某个适当定义的函子的余代数；对于该函子， [Hei14] 中的结果可以直接由 [MV04, Vig05]中的结果推出。相反，在我们的情形中则需要更加广泛地使用范畴论，因为我们的选择结构是一个全新函子的余代数，而该函子的范畴性质尚未得到研究。

这一最后的观察也使我们的结果与 [MV04、Vig05], 的研究相关联，因为他们首次将经典概率类型结构表述为概率测度函子的余代数，并证明在适当定义的概率类型结构范畴中，普遍类型结构是终余代数。我们在此证明，选择结构也存在终余代数。

1.2 缺乏动机的例子

考虑下面这个博弈，其中 Ida 是行参与者，Joe 是列参与者。

	l	r
u	5;1	0;0
m	3;2	0;1
c	1;1	3;0
d	1;2	2;3

Ida 有两个被支配的行动： m 和 d。具体来说，混合行动 pu +$(1-p)c$ 对 m 而言在 $p \in (1/2,$ 1)下严格占优；对 d 而言在 $p \in (0, 1/3)$下严格占优。因此，就期望效用最大化而言，Joe 的行动上不存在任何概率信念能够证明选择 m 或 d 是合理的：对于 Ida 的每一种概率信念， u 或 c 的期望效用都高于 m 和 d。图 1a 清楚地展示了这一点：横轴表示 Joe 选择 r 的概率，纵轴表示 Ida 的期望效用。与博弈者的理性以及对理性的共同信念相一致的行动称为可理性化行动。在这个例子中，在期望效用最大化下，唯一可理性化的行动组合是（u, l），因为消去 d 后，行动 r 不再理性。

当决策理论发展将经典的概率信念推广为可能的非概率信念时（例如 [GS89、Sch89]），博弈论中的理性、支配和均衡等概念也必须相应地重新审视。在博弈论中，这些进展的例子可见于 [Kli96、Lo96、Mar00、KU05、RS10、HP12、BCVMM15、Tro19] 等文献。为便于说明，让我们考虑信念由.....表示的情形



图1：左侧表示Ida在上方博弈中各行动对应的期望效用。右侧表示Ida对同一组行动的期望负后悔。

由概率分布集合来表示，如 [GS89] 的多重先验（以下简称 MP）模型所示。在这种情况下，每个行动都对应一组期望效用，而理性选择的一种自然定义，是选择最小期望效用最高的行动。当在存在非概率信念的情形下，以最大最小期望效用取代期望效用最大化，作为理性的定义时，一个问题便自然产生：在这种情形下，如何定义支配?

[Eps97], 给出了一个答案，他建立了迭代剔除MP支配行动与MP理性化之间的对应关系。作为示例，再次考虑上方Ida与Joe之间的博弈，并假设两位博弈者都是期望效用最大最小化者：那么，理性和理性的共同信念具有什么行为含义？图1a表明，行动 u、c 和 d 对Ida而言是有依据的： u 和 c 仍然是对某种概率信念的最佳回应，而 d 现在则可能是对某种非概率信念的最佳回应，例如，与Joe的行动上的单纯形相重合的概率分布集合。因此，MP理性化的行动组合就是笛卡尔积 $\{u, c, d\} \times \{l, r\}$的成员。

[Eps97] 中关于 MP 支配和 MP理性化的结果建立在偏好结构之上，也就是说，类型结构的元素由关于萨维奇式行为的交互式、自反且传递的偏好关系层级构成。因此，所有相干偏好层级构成的空间，也就是普适偏好结构，是关于迭代支配和可理性化结果的基础；这些结果涉及的决策准则可由关于行为的自反且传递的偏好关系表示，例如最大最小期望效用以及 [Eps97]中的其他所有重要准则。如上所述， [EW96] 和 [DT08]都构造了普适偏好结构。

一旦在单人问题中引入多种决策准则，自然也会想到这样的情形：不同个体在参与博弈时遵循不同的准则。例如，Ida 可能按照准则 A 参与博弈并选择行动，而 Joe 则按照准则 B 作出选择。因此，对手所遵循准则的不确定性会进入博弈者的认知状态，并扩展到更高阶层面：Ida 可能不确定 Joe 遵循什么准则，也不确定 Joe 对她所遵循准则的看法，诸如此类。偏好结构提供了一个形式化框架，用以表达关于博弈者决策准则的这种交互式高阶不确定性。

再次考虑上述博弈，但现在假设 Ida 和 Joe 都是遗憾最小化者。图 1b 有助于描绘这一情形，其中每个行动都根据其期望负遗憾进行标示。利用最小化最大（正）遗憾等价于最大最小负遗憾这一事实，图 1b 显示，行动 m 现在是一个可能的最佳回应（例如，对于与 Joe 的行动之上的单纯形重合的概率分布而言），而



图2：左侧展示了在上方博弈中，Ida 对各项行动的期望负后悔。右侧展示了在行动 u 不再可选时，Ida 在上方博弈中对各项行动的期望负后悔。

行动 d 不再是对 Ida 的任何可能信念的最佳回应。因此，Joe 不会采取行动 r，唯一的后悔可理性化策略组合便是（u，l）。

然而，正如前面所指出的，后悔最小化违反了无关选项独立性，因此无法用偏好关系来表示。我们可以再次利用上方的博弈来说明这一点。例如，假设 Ida 是一位后悔最小化者，其信念由一个概率分布的凸紧集表示，该集合将行动 r 的概率下限设为 0.25、上限设为 1（见图2）。对于这一特定信念，在可以从原有的四项行动中进行选择时，Ida 对行动 u、m 和 c 无差异（图2a）。然而，当行动 u 不再可选时，Ida 会选择行动 c （图2b）：行动 m 和 c 不再等价，这违反了无关选项独立性。这种选择模式无法用偏好序编码，而选择函数 C 因而

$$C(\{u,m,c,d\}) = \{u,m,c\} \qquad C(\{m,c,d\}) = \{c\}$$

必须改为采用选择函数。在最大最小期望效用中，这些情况从不会出现，因为添加或移除行动时，可能备选项之间的相对序不会改变。这本质上解释了为什么最大最小期望效用之类的判据可以通过偏好序（[GS89]）进行公理化，而后悔最小化这类依赖情境的判据则需要使用选择函数（[Hay08] 和 [Sto11]）。在交互情境中，这促使我们将偏好结构推广为选择结构。

2 预备知识

本节介绍以下各节将在博弈论语境中使用的数学概念。

2.1 不确定性空间

我们讨论不确定性空间，或简称空间 $(X,\mathcal{B})$，其中 X 是任意集合，其元素称为状态；$\mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}X$ 是 X 的子集代数，我们用 $\mathbb{P}X$ 表示 X 的幂集。$\mathcal{B}$ 的元素称为可测集或事件。[1] 对于不确定性空间 $(X,\mathcal{B})$，我们通常简写为 X。任意集合 X 都可以看作一个平凡的不确定性空间 $(X,\mathcal{B})$，其中每个子集都是可测的，也就是说，$\mathcal{B} = \mathbb{P}X$ 是包含 X 所有子集的离散代数。

[1]称 $\mathcal{B}$ 为代数，意味着它对有限交集和补集运算封闭。因此，不确定性空间（X，$\mathcal{B}$）几乎是一个可测空间，只是不要求对可数交封闭。

从不确定性空间 X 到不确定性空间 Y 的态射 φ 是任意可测函数 $\varphi\colon X \to Y$，也就是说，只要 E 在 Y 中可测，$\varphi^{-1}[E] = \{x \in X \mid \varphi(x) \in E\}$ 就在 X 中可测。对于每个不确定性空间 $X = (X, \mathcal{B})$，我们用 id_X 表示 X 上的可测恒等函数，即 $\mathrm{id}_X\colon X \to X, x \mapsto x$。

两个不确定性空间 X 和 Y 同构，记作 $X \simeq Y$，当且仅当存在一个双射函数 $\varphi\colon X \to Y$，使得 φ 及其逆 $\varphi^{-1}\colon Y \to X$ 均为可测函数，并且$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_Y$和 $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_X$。

给定两个不确定性空间 X 和 Y，我们可以将它们的积定义为不确定性空间$X \times Y$，其状态是所有有序对 (x, y)，其中第一个分量是 X 中的一个状态，第二个分量是 Y中的一个状态。状态的可测集由柱集的有限并和补集生成，即形如 $U \times Y$和 $X \times V$的集合，其中 U在 X 中可测，且 V在 Y中可测。显然，在这个代数下，投影 $\pi_1\colon X \times Y \to X$，$(x, y) \mapsto x$ 以及$\pi_2\colon X \times Y \to Y$，$(x, y) \mapsto y$都是可测函数。此外，给定两个可测函数$\varphi\colon X \to X'$和 $\psi\colon Y \to Y'$，我们用 $\varphi \times \psi\colon X \times Y \to X' \times Y'$表示可测函数，该函数定义为：对于所有 $(x, y) \in X \times Y$，$(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x)\ \psi(y))$。不难验证，这个 $\varphi \times \psi$ 确实是可测的。

2.2 萨维奇行为

固定一个非空结果集 Z。对于不确定性空间 X，萨维奇行为，或简称行为，是一个可测的有限阶梯函数 $f\colon X \to Z$。f 是有限阶梯函数，意味着其值域 $f[X] = \{f(x) \in Z \mid x \in X\}$ 是有限的。我们还假设集合 Z带有离散代数，其中所有集合都是可测的。利用 X 中的可测集对有限并封闭这一点，可以很容易地验证，有限阶梯函数 $f\colon X \to Z$ 可测，当且仅当对于所有 $z \in Z$，$f^{-1}[\{z\}]$都是可测的。对于某个不确定性空间 X，我们用 FX 表示所有行为的集合。对于每个可测函数 $\varphi\colon X \to Y$，我们都得到一个函数 $F\varphi\colon FY \to FX, f \mapsto f \circ \varphi$。

我们的萨维奇行为概念中，Z 可以是任意集合，而 $f\colon X \to Z$ 是有限阶梯函数，因此与 [DT08] 和 [Sto11]这两种设定都兼容。在 [DT08], 关于偏好结构的研究中，假设 Z 是有限的，因此所有行为自动都是有限阶梯函数。在 [Sto11], 的框架中，行为是可测的有限阶梯函数 $f\colon X \to \Delta\mathcal{Z}$，其中 $\Delta\mathcal{Z}$ 是集合 $\mathcal{Z}$ 上具有有限支撑的所有概率分布的集合，$\mathcal{Z}$ 是一个结果集。通过在我们的设定中令集合 Z 为 $\Delta\mathcal{Z}$，即可还原这种做法。

下面我们沿用 [DT08] 的做法，假设 Z 是有限的。不过，我们关于普适选择结构存在性的结果也适用于任意集合 Z，包括可能是无限的集合。我们将在附录 D.2 节的注释 3 中更详细地讨论这一问题。

2.3 选择函数

集合 X 上的选择函数是一个函数 C，它将每个有限子集 $F \subseteq X$ 映射到其中一个子集 $C(F) \subseteq F$。对于任意集合 X，我们用 $\mathcal{C}X$ 表示 X 上所有选择函数构成的集合。即使 X 只是一个集合，并未定义可测子集的概念，我们仍将 $\mathcal{C}X$ 视为不确定性空间，其中一个集合可测，当且仅当它可以由以下形式的集合经过有限交集和取补运算生成：

$$B_L^K = \{C \in \mathcal{C}X \mid C(K) \subseteq L\},$$

其中某个有限 K、$L \subseteq X$ 满足 $L \subseteq K$。

给定任意函数 $f\colon X \to Y$，我们通过令 $\mathcal{C}f(C) = C^f$ 来定义函数 $\mathcal{C}f\colon \mathcal{C}Y \to \mathcal{C}X$，其中 C^f 是将有限 $K \subseteq X$ 映射到以下对象的选择函数：

$$C^f(K) = f^{-1}[C(f[K])] \cap K.$$

我们用 $f[K] \subseteq Y$表示 K的直接像 $f[K] = \{f(x) \in Y \mid x \in K\}$。可以证明函数 $\mathcal{C}f\colon \mathcal{C}Y \to \mathcal{C}X$ 是可测的。为此，首先检查所有形如 $f[K] \subseteq Y$且满足 $f[K] = \{f$的可测

形式为 B_L^K 且含有 $K \subseteq L$ 的集合

$$\begin{aligned}(\mathcal{C}f)^{-1}[B_L^K] &= \{C \in \mathcal{C}Y \mid f^{-1}[C(f[K])] \cap K \subseteq L\} \\ &= \{C \in \mathcal{C}Y \mid C(f[K]) \subseteq \hat{L}\} = B_{\hat{L}}^{f[K]},\end{aligned}$$

其中 $\hat{} L = \{y \in f[K] \mid f^{-1}[\{y\}] \cap K \subseteq L\}$。由于交集和补集在取逆像时保持不变，因此这一性质也适用于任意可测集。

2.4 萨维奇行为上的选择函数

接下来，我们考虑某个不确定性空间 X 上萨维奇行为的选择函数。对于每个不确定性空间 X，我们将不确定性空间 $\Gamma X = \mathcal{C}FX$ 定义为 X 上所有萨维奇行为选择函数所构成的不确定性空间。此外，对于每个可测函数 $\varphi\colon X \to Y$，我们可以定义可测函数 $\Gamma\varphi = \mathcal{C}F\varphi\colon \Gamma X \to \Gamma Y$。展开 $\mathcal{C}$ 和 F 的定义后，我们可以更具体地描述任意 $C \in \Gamma X$ 下的选择函数 $\Gamma\varphi(C) = C^\varphi$：它将萨维奇行为的有限集 $K \subseteq FY$ 映射到集合

$$C^\varphi(K) = \{f \in K \mid f \circ \varphi \in C(\{g \circ \varphi \mid g \in K\})\}.$$

3 选择结构

本节将上述引入的概念应用于我们感兴趣的博弈论语境。为了使记号尽量简单，这里我们聚焦于仅有两位博弈者 Ida 和 Joe 的互动情境。将我们的设定推广到两位以上的博弈者并不困难，但这会带来额外的记号复杂性。

3.1 选择结构

由于我们研究的是双人博弈，Ida 的基本不确定性仅涉及 Joe 的行动所构成的固定有限集 A_j，类似地，Joe 的基本不确定性涉及 Ida 的行动所构成的固定有限集 A_i。因此，我们得到选择结构的如下定义：

定义 1. 选择结构是一个元组 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$，由以下部分组成：

- Ida 和 Joe 的类型不确定性空间 T_i 和 T_j，以及
- measurable functions $\theta_i : T_i \to \Gamma(A_j \times T_j)$ and $\theta_j : T_j \to \Gamma(A_i \times T_i)$.

从选择结构 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$ 到选择结构 $\mathcal{X}' = (T_i', T_j', \theta_i', \theta_j')$ 的一个态射 $\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ 由两个可测函数 $\alpha_i\colon T_i \to T_i'$ 和 $\alpha_j\colon T_j \to T_j'$ 组成，使得

$$\theta_i' \circ \alpha_i = \Gamma(\mathsf{id}_{A_j} \times \alpha_j) \circ \theta_i \text{ and } \theta_j' \circ \alpha_j = \Gamma(\mathsf{id}_{A_i} \times \alpha_i) \circ \theta_j.$$

$\mathcal{X}$中的状态是一个元组（a_i、a_j、t_i、t_j）$\in A_i \times A_j \times T_i \times T_j$。我们还说，Ida 的状态是一个二元组（$a_i$、$t_i$）$\in A_i \times T_i$，而 Joe 的状态是一个二元组（$a_j$、$t_j$）$\in A_j \times T_j$。请注意，Ida 的选择函数 $\theta_i(t_i)$ 在状态（a_i、a_j、t_i、t_j）下所规定的行动，可能与 Ida 在该状态下实际采取的行动 a_i 完全无关（Joe 也是如此）。例如，在第 1 节的示例中，某一给定状态下，Ida 的类型可能规定选择 u，而 Ida 实际选择的是 d（更多详情请参见下面的示例 1）。这是选择结构与偏好结构所共有的特征。在这里，我们暂不深入讨论解释层面的问题，只将选择层级和偏好层级都视为表达选择态度或心理状态，而不是实际行为。因此，参与者的状态由她实际采取的一个行动和代表其心理态度的一个类型构成。[2]

[2] [BDV21] 在另一个不同的框架下指出了类似观点，在该框架中，博弈者对自己的行动持有信念。

因此，Ida 的一个萨维奇行为是一个映射 $f\colon\ A_j \times T_j \to Z$，它将 Joe 的状态映射到结果集元素；Joe 也是如此。因此，我们通过参与者在萨维奇行为之间的选择来刻画其类型，其中萨维奇行为的结果取决于另一位参与者的状态，而不取决于她自身的状态。这种建模假设参与者对自身类型不存在不确定性。这不同于[DT08], 的设定，后者允许参与者对自身类型存在不确定性。我们将在第 5.3 节更详细地讨论这种建模差异。

示例1。我们为引言中的博弈提供一个选择结构 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$ 的示例。在本例中，Ida 只有一个类型 $T_i = \{t_i\}$，而 Joe 有两种可能的类型$T_j = \{t_{Mm}, t_{EU}\}$。这里，我们将 Ida 的类型 t_i解释为一个后悔最小化者，其信念如图2所示，即一个概率分布的凸紧集：对行动 r 赋予的概率下界为 0.25、上界为 1；而 Joe 的类型 t_{Mm} 是一个具有完全不确定性的最大最小化者，即不排除 Ida 的行动上的任何概率分布；Joe 的类型 t_{EU}则是一个期望效用最大化者，赋予 Ida 采取 u 的概率 $1/2$，赋予 Ida 采取d的概率 $1/2$。该选择结构的状态由笛卡尔集 $A_i \times A_j \times T_i \times T_j$ 给出，即:

$$\{u, m, c, d\} \times \{l, r\} \times \{t_i\} \times \{t_{Mm}, t_{EU}\}.$$

于是，Ida 的状态是集合 $\{u, m, c, d\} \times \{t_i\}$ 的成员，而 Joe 的状态是集合$\{l, r\} \times \{t_{Mm}, t_{EU}\}$的成员。结果集 Z自然由该博弈的结果给出，

$$Z = \{(5,1), (3,2), (1,1), (1,2), (0,0), (0,1), (3,0), (2,3)\}.$$

Th该映射 θ_i 随后将 Ida 的每种类型与定义在萨维奇行为上的一个选择函数相关联 on JoeJoe 的状态。在当前示例中，这些萨维奇行为是

$$\begin{array}{lll} f_u(l,t) = (5,1) & f_u(r,t) = (0,0) & \text{for both } t \in T_j \\ f_m(l,t) = (3,2) & f_m(r,t) = (0,1) & \text{for both } t \in T_j \\ f_c(l,t) = (1,1) & f_c(r,t) = (3,0) & \text{for both } t \in T_j \\ f_d(l,t) = (1,2) & f_d(r,t) = (2,3) & \text{for both } t \in T_j \end{array}$$

类似地，Joe 的萨维奇行为如下:

$$\begin{array}{ll} f_l(u,t_i) = (5,1) & f_r(u,t_i) = (0,0) \\ f_l(m,t_i) = (3,2) & f_r(m,t_i) = (0,1) \\ f_l(c,t_i) = (1,1) & f_r(c,t_i) = (3,0) \\ f_l(d,t_i) = (1,2) & f_r(d,t_i) = (2,3) \end{array}$$

当 Ida 的类型 t_i 是如上所述的后悔最小化者时，与 t_i 相关联的选择函数 $C_i = \theta_i(t_i)$ 按如下方式将上述萨维奇行为集合的子集映射为:

$$\begin{array}{ll} C_i(\{f_u, f_m, f_c, f_d\}) = \{f_u, f_m, f_c\} & C_i(\{f_m, f_d\}) = \{f_d\} \\ C_i(\{f_u, f_m, f_c\}) = \{f_u, f_m\} & C_i(\{f_c, f_d\}) = \{f_c\} \\ C_i(\{f_u, f_m, f_d\}) = \{f_u, f_m\} & C_i(\{f_u, f_m\}) = \{f_u\} \\ C_i(\{f_u, f_c, f_d\}) = \{f_u\} & C_i(\{f_u, f_d\}) = \{f_u\} \\ C_i(\{f_m, f_c, f_d\}) = \{f_c\} & C_i(\{f_u, f_c\}) = \{f_u, f_c\} \\ C_i(\{f_m, f_c\}) = \{f_c\} & \end{array}$$

其中，在单元素集合等平凡情况下，我们不再明确说明选择函数。选择结构的定义还要求 C_i在 $F(A_j \times T_j)$ 的所有其他子集上都有定义。为简洁起见，我们仅给出 C_i 在 $\{f_u, f_m, f_c, f_d\}$的子集上的定义；这些子集是博弈中各项行动所对应的萨维奇行为。至于 Joe，我们有：类型 t_{Mm} 与选择函数相关联

$$C_{Mm}(\{f_l, f_r\}) = \{f_l\}$$

类型 t_{EU} 与选择函数相关联

$$C_{EU}(\{f_l, f_r\}) = \{f_l, f_r\}.$$

同样，我们省略对不对应博弈中行动的萨维奇行为集合上的选择函数的定义。

3.2 选择层级与普遍选择结构

现在，我们引入表示博弈者高阶态度的选择函数层级。为此，我们通过对 i 和 j进行相互归纳，定义表示博弈者第 n 阶态度的不确定性空间。在基例中，我们设 $\Omega_{i,1} = \Gamma A_j$ 和 $\Omega_{j,1} = \Gamma A_i$；在归纳步骤中，设 $\Omega_{i,n+1} = \Gamma(A_j \times \Omega_{j,n})$ 和 $\Omega_{j,n+1} = \Gamma(A_i \times \Omega_{i,n})$。其直观含义是，博弈者的一阶态度由他们在萨维奇行为之间的选择来表示，这些行为的结果仅取决于对手实际采取的行动。博弈者的（$n+1$）阶态度由他们在行为之间的选择来表示，这些行为的结果取决于对手实际采取的行动以及对手的第 n 阶态度。

请注意，博弈者的第 $n+1$ 阶态度决定了其第 n 阶态度。在第一层，这意味着，参与者在 $\Omega_{i,1}$ 中对取决于对手行动的萨维奇行为所做的选择，与她在 $\Omega_{i,2}$中对萨维奇行为所做的选择相同，后者被视为还平凡地取决于对手的一阶态度。我们可以用一个可测的相容态射 $\xi_{i,1} = \Gamma\pi_1 : \Omega_{i,2} \to \Omega_{i,1}$来精确表达这一点，其中 $\pi_1 : A_j \times \Omega_{j,1} \to A_j$ 是到第一分量的投影。当 $o_2 \in \Omega_{i,2}$ 表示 Ida 的二阶态度时，那么$\xi_{i,1}(o_2) \in \Omega_{i,1}$ 表示她的一阶态度。

类似地，我们通过设定 $\xi_{j,1} = \Gamma\pi_1 : \Omega_{j,2} \to \Omega_{j,1}$，为 Joe 定义一个相容态射，其中 $\pi_1 : A_j \times \Omega_{j,1} \to A_j$。从现在起，我们不再费心为 Ida 和 Joe 分别明确写出每个方程。我们只写 Ida 对应的版本，然后写“Joe 的情形类似”，这表示将 i 与 j 互换后，该方程同样成立。

通过归纳法，我们可以将相容性的概念扩展到更高层次。取决于对手的行动以及对手的第 n 阶态度的行为之间的选择，由取决于对手的行动及其第（$n+1$）阶态度的相同行为之间的选择所决定。因此，我们通过相互归纳定义

$$\xi_{i,n+1} = \Gamma(\mathsf{id}_{A_j} \times \xi_{j,n}) : \Gamma(A_j \times \Omega_{j,n+1}) \to \Gamma(A_j \times \Omega_{j,n})$$

Joe 也同样如此 $\xi_{j,n+1} = \Gamma(\mathsf{id}_{A_i} \times \xi_{i,n})$。

取极限后，我们可以考虑可数序列 $o = (o_1, o_2, \ldots, o_n, \ldots)$，其中 $o_n \in \Omega_{i,n}$对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。此外，我们要求这些序列相容，即 $\xi_{i,n}(o_{n+1}) = o_n$对所有 n 均成立。这样一个序列就完整描述了 Ida 在所有层次上的高阶态度所构成的相干状态。令 Ω_i 为所有此类相干序列组成的无限集。每个层次 $n \in \mathbb{N}$ 都有投影$\zeta_{i,n} : \Omega_i \to \Omega_{i,n}$。由形如 $(\zeta_{i,n})^{-1}[O_n]$ 的所有子集生成的代数赋予集合 Ω_i 后，它便成为一个不确定性空间；其中 $n \in \mathbb{N}$，且可测$O_n \subseteq \Omega_{i,n}$。所有这些概念也都可以类似地为 Joe 定义。

在附录中，我们证明了关于这一构造的中心结果，即存在以下同构：

定理 1。$\Omega_i \simeq \Gamma(A_j \times \Omega j)$ 和 $\Omega_j \simeq \Gamma(A_i \times \Omega_i)$。

利用定理 1 中的同构 $\mu_i : \Omega_i \to \Gamma(A_j \times \Omega j)$ 和 $\mu_j : \Omega_j \to \Gamma(A_i \times \Omega_i)$，我们随后定义普适选择结构：

定义 2。普适选择结构 $\mathcal{U} = (\Omega_i, \Omega j, \mu_i, \mu_j)$ 由不确定性空间 Ω_i 和 Ωj 、所有相干序列的选择态度，以及定理 1 中的可测函数 $\mu_i : \Omega_i \to \Gamma(A_j \times \Omega j)$ 和 $\mu_j : \Omega_j \to \Gamma(A_i \times \Omega_i)$ 组成。

我们的表述与文献中通常采用的方法（例如 [MZ85、BD93、EW96、DT08]）之间存在一个技术上的差异。通常会将第 $n+1$ 层 $\Omega_{i,n+1}$ 定义为由所有有序对 $(x, y) \in \Omega_{i,n} \times \Gamma\Omega_{j,n}$ 组成，这些有序对在如下意义上是相容的：x 所表示的态度与 y所表示的态度相一致，其含义与我们的相容态射 $\xi_{i,n}$类似。然后，在极限 Ω_i 中，考虑满足对所有 $n \in \mathbb{N}$，均有 $o_n \in \Gamma\Omega_{j,n}$ 的序列 $(o_1, o_2, \ldots) \in \Omega_i$。一旦将整个无限序列的相容性纳入考虑，我们的方法就与这种方法等价。

3.3 普适选择结构的普遍性

任何选择结构 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$ 中的每个类型 $t \in T_i$ 都会在 Ω_i中生成一个相容的态度序列。为此，我们先定义 $\upsilon_{i,\ 1} = \Gamma\pi_1 \circ \theta_i$： $T_i \to \Omega_{i,\ 1}, t \mapsto \Gamma\pi_1(\theta_i(t))$，其中 π_1： $A_j \times T_j \to A_j$ 是投影。类似地，我们定义 $\upsilon_{j,\ 1}$： $T_j \to \Omega_{j,\ 1}$。然后，我们可以通过相互归纳继续定义，并令

$$\upsilon_{i,n+1} = \Gamma(\mathsf{id}_{A_j} \times \upsilon_{j,n}) \circ \theta_i : T_i \to \Omega_{i,n+1}$$
$$t \mapsto \Gamma(\mathsf{id}_{A_j} \times \upsilon_{j,n})(\theta_i(t)).$$

类似地，我们定义 $\upsilon_{j,n+1}$： $T_j \to \Omega_{j,n+1}$。

容易验证，对于所有 n，$\upsilon_{i,n} = \xi_{i,n} \circ \upsilon_{i,n+1}$。因此，对于每个 $t \in T_i$，无限序列 $(\upsilon_{i,1}(t)\, \upsilon_{i,2}(t)\ldots)$ 都是相容的，由此得到一个可测映射 υ_i： $T_i \to \Omega_i$。类似地，我们也得到一个可测映射 υ_j： $T_j \to \Omega_j$。在附录中，我们证明 υ_i 和 υ_j 共同定义了一个唯一的态射 υ，映入普适选择结构：

定理 2. 对于每个选择结构 $\mathcal{X}$，都存在唯一的选择结构态射 $\upsilon : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$，从 $\mathcal{X}$ 映至普适选择结构 $\mathcal{U}$。

3.4 普适选择结构的非冗余性

我们还可以证明，我们的普适选择结构是非冗余的。非冗余这一概念可追溯至 [MZ85], ，他们证明了其普遍类型空间具有这一性质。我们的非冗余定义是对 [DT08]中定义 3 的改编。

在定义非冗余性时，我们考虑这样的情形：希望为选择结构 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$ 中的类型集合 T_i 和 T_j 配备一个代数，而该代数可能不同于它们作为 $\mathcal{X}$ 中类型空间时所具有的代数。为此，我们需要澄清记号。回想一下，我们将不确定性空间 X 写作 $(X, \mathcal{B})$，其中符号 X 同时表示点的底层集合和不确定性空间本身，后者还包括代数 $\mathcal{B}$。给定一个可能不同于 $\mathcal{B}$ 的代数 $\mathcal{B}' \subseteq \mathbb{P}X$，我们用 $(X, \mathcal{B}')$ 表示这样一个不确定性空间：它以集合 X 为底层集合，并以代数 $\mathcal{B}'$ 为其代数。

定义 3. 设 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$ 是某个选择结构。将可观测事件的代数 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i} \subseteq \mathbb{P}T_i$ 和 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},j} \subseteq \mathbb{P}T_j$ 定义为满足以下条件的最小代数：$\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i}$ 包含所有有限 $K, L \subseteq F(A_j \times (T_j, \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},j}))$ 对应的集合 $B^{ob}_{\mathcal{X},i}(K, L)$；而 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},j}$ 包含所有有限 $K, L \subseteq F(A_i \times (T_i, \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i}))$ 对应的集合 $B^{ob}_{\mathcal{X},j}(K, L)$，其中我们记作

$$B^{ob}_{\mathcal{X},i}(K, L) = \{t \in T_i \mid \theta_i(t)(K) \subseteq L\} \quad \text{and} \quad B^{ob}_{\mathcal{X},j}(K, L) = \{t \in T_j \mid \theta_j(t)(K) \subseteq L\}.$$

我们在附录 D.4.1 中更仔细地说明了为什么这些可观测事件的代数是定义良好的。

定义 4. 集合 X 上的代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}X$ 在 X 上是分离的，当且仅当对于任意满足 $x \neq y$的 x、$y \in X$，都存在某个 $E \in \mathcal{B}$，使得 $x \in E$ 和 $y \notin E$。选择结构 $\mathcal{X}$ 是非冗余的，当且仅当 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\ i}$ 在 T_i 上是分离的，并且 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\ j}$ 在 T_j上是分离的。

我们在附录中证明，选择结构 $\mathcal{X}$ 是非冗余的，当且仅当从 $\mathcal{X}$ 到普适选择结构 $\mathcal{U}$ 的唯一态射 υ 在两个分量上都是单射。 [MZ85], 中的命题 2.5、 [Liu09] 中的命题 2 以及 [DT08] 中的命题 2，针对概率类型空间和偏好结构给出了类似的结果。

命题 1. 选择结构 $\mathcal{X}$ 是非冗余的，当且仅当从 $\mathcal{X}$ 到普适选择结构 $\mathcal{U}$ 的唯一选择结构态射 υ 的两个分量 υ_i 和υ_j 都是单射。

由于从普适选择结构 $\mathcal{U}$ 到其自身的唯一态射在两个分量上都是恒等函数，因而是单射，因此可立即由命题1得出 $\mathcal{U}$是非冗余的。

推论 1. 普适选择结构 $\mathcal{U}$ 是非冗余的。

4 嵌入偏好结构

本节讨论我们的选择函数层级如何与 [DT08] 中引入的偏好关系层级相关。

4.1 Di Tillio 的偏好结构

我们首先用我们的记号回顾 [DT08] 的方法。[DT08] 的基本概念是集合 X 上的偏好关系。下文中，集合 X 上的关系 4 是 X 上的一个偏序集，即自反、传递且反对称的关系。我们要求偏好关系具有反对称性。这与 [DT08]，不同，后者只要求偏好关系是预序，即自反且传递，但不一定是反对称关系。我们将在下文的注1中说明这种看似失去了一般性的做法是合理的。在我们的大多数论证中，反对称性并不起作用，因此这些论证对预序同样适用。我们要求反对称性的原因是，在预序的情况下，从偏好关系到选择函数的嵌入未必是单射。

用 $\mathcal{P}X$ 表示集合 X 上所有偏好关系的集合。通过由形如 $B_{x_1 \preccurlyeq x_2} = \{\preccurlyeq \in \mathcal{P}X \mid x_1 \preccurlyeq x_2\}$ 的集合生成可测事件代数，可以将集合 $\mathcal{P}X$ 转化为不确定性空间，其中 x_1、$x_2 \in X$ 满足相应条件。

每个函数 $f\colon X \to Y$ 都会导出可测函数 $\mathcal{P}f\colon \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X$，其中将 Y 上的偏好关系 4 映射为 X 上的偏好关系 $\mathcal{P}f(4) = \preccurlyeq^f$，其定义如下：

$$x_1 \preccurlyeq^f x_2 \qquad \text{iff} \qquad f(x_1) \preccurlyeq f(x_2). \tag{1}$$

然后，我们可以使用 $\mathcal{P}$ 代替 $\mathcal{C}$，重新进行第 3 节中的所有构造。下面简要说明其做法。对于每个不确定性空间X，考虑空间 $\Pi X = \mathcal{P}FX$，从而考察行为上的偏好关系。对于每个可测函数 $\varphi\colon X \to Y$，我们都能得到可测函数 $\Pi\varphi = \mathcal{P}F\varphi\colon \Pi X \to \Pi Y$，它将 FX 上的偏好关系 4 映射为 FY 上的偏好关系 $\preccurlyeq^\varphi$，其定义满足：$f \preccurlyeq^\varphi g$ 当且仅当 $f \circ \varphi \preccurlyeq g \circ \varphi$。

最后，将偏好结构定义为一个元组 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$，其中 $\theta_i\colon T_i \to \Pi(A_j \times T_j)$ 和 $\theta_j\colon T_j \to \Pi(A_i \times T_i)$ 是可测函数。从偏好结构 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$ 到偏好结构 $\mathcal{X}' = (T_i', T_j', \theta_i', \theta_j')$ 的态射 $\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ 由两个可测函数 $\alpha_i\colon T_i \to T_i'$ 和 $\alpha_j\colon T_j \to T_j'$ 组成，且满足

$$\theta_i' \circ \alpha_i = \Pi(\mathsf{id}_{A_j} \times \alpha_j) \circ \theta_i \text{ and } \theta_j' \circ \alpha_j = \Pi(\mathsf{id}_{A_i} \times \alpha_i) \circ \theta_j.$$

请注意，这一定义的偏好结构与 [DT08] 中给出的定义不同，区别在于对第 3.1 节所述内省的假设。

普适偏好结构 $\mathcal{U}' = (\Omega_i', \Omega_j', \mu_i', \mu_j')$ 可以根据序列 $(\Omega_{i,n}', \xi_{i,n}')_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\Omega_{j,n}', \xi_{j,n}')_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限 Ω_i' 和 Ω_j' 来定义，这些序列类似于上一节中用于逼近普适选择结构的序列。因此，令 $\Omega_{i,1}' = \Pi A_j$，$\Omega_{j,1}' = \Pi A_j$，然后归纳地令 $\Omega_{i,n+1}' = \Pi(A_j \times \Omega_{j,n}')$ 和 $\Omega_{j,n+1}' = \Pi(A_i \times \Omega_{i,n}')$。相容态射满足 $\xi_{i,1}' = \Pi\pi_1$，$\xi_{j,1}' = \Pi\pi_2$，并且归纳地满足 $\xi_{i,n+1}' = \Pi(\mathsf{id}_{A_j} \times \xi_{j,n}')$ 和 $\xi_{j,n+1}' = \Pi(\mathsf{id}_{A_i} \times \xi_{i,n}')$。适当的 μ_i' 和 μ_j' 的存在性，以及 $\mathcal{U}'$ 的普适性由一个类似于附录 D 中所给构造的构造推出，其中以 Π 代替 Γ。该构造成功所需的 Π 的性质在 [DT08] 的第 3 节中陈述。

4.2 最大化

我们使用最大化将偏好序映射为选择函数。给定一个有限的备选项集，具有给定偏好关系的参与者会选择该集合中偏好程度最高的备选项。形式上，这意味着给定集合 X 上的偏好关系 $\preccurlyeq \in \mathcal{P}X$，我们将其映射为选择函数 $m_X(4) \in \mathcal{C}X$，该函数为有限集 $K \subseteq X$ 指定其极大元素的集合 $m_X(4)(K)$，其定义如下：

$$m_X(\preccurlyeq)(K) = \{m \in K \mid \text{there is no } k \in K \text{ with } m \prec k\},$$

其中，$x \prec y$ 当且仅当 $x \preccurlyeq y$ 且非 $y \preccurlyeq x$ 时成立。对于每个集合 X，该定义产生一个可测函数 $m_X\colon \mathcal{P}X \to \mathcal{C}X$。要证明它是可测的，只需证明对于 $\mathcal{C}X$ 的每个基本事件 $B_L^K = \{C \in \mathcal{C}X \mid C(K) \subseteq L\}$，其原像 $m_X^{-1}[B_L^K]$ 在 $\mathcal{P}X$ 中是可测的。为了解释这一点，首先注意，在偏好关系 4 中，集合 K 的极大元素集合是 L 的子集，当且仅当对于每个元素 $k \in K \setminus L$，都存在某个 $l \in L$，使得 $k \preccurlyeq l$ 且非 $l \preccurlyeq k$。因此我们可以写成

$$m_X^{-1}[B_L^K] = \bigcap_{k \in K \setminus L} \bigcup_{l \in L} (B_{k \preccurlyeq l} \setminus B_{l \preccurlyeq k})\,.$$

Since K, L，因此 $K \setminus L$ 也是有限的，上述等式右侧是一个有限交集 on of 基本事件与基本事件的补集之交的有限并。

注1。按照我们从偏好关系 4 定义选择函数 $m_X(4)$ 的方式，将范围限制在偏序集而非预序，并不会损失一般性。对于每个预序 4，我们都可以通过设定 $x \preccurlyeq' x'$ 当且仅当 $x = x'$ 或 $x \preccurlyeq x'$ 且非 $x' \preccurlyeq x$，来定义偏序集 $\preccurlyeq'$。可以证明，$\preccurlyeq'$ 是反对称的，并且任意有限集 $K \subseteq X$ 在 $\preccurlyeq'$ 中的极大元素，与 K 在 4 中的极大元素相同，也就是说，$m_X(\preccurlyeq')(K) = m_X(4)(K)$。由此可知，在某个预序中通过最大化得到的任何选择函数，也可以在某个偏序集中通过最大化得到。因此，将范围限制在偏序集，并不会缩小我们能够解释的选择行为类别。

存在一些例子，其中预序 4 和 $\preccurlyeq'$ 是不同的。例如，我们可以令 $X = \{x_1, x_2\}$ 为一个含两个元素的集合，并令 4 为全关系，其中 X 的两个元素偏好相同，也就是说，$x_1 \preccurlyeq x_2$ 和 $x_2 \preccurlyeq x_1$。根据上文的定义 $\preccurlyeq'$，可知此时 $\preccurlyeq'$ 是一个偏序集，其中 x_1 和 x_2 不可比较，也就是说，$x_1 \preccurlyeq' x_2$ 和 $x_2 \preccurlyeq' x_1$ 均不成立。因此，对于每个 $K \subseteq X$，都有 $m_X(4)(K) = K = m_X(\preccurlyeq')(K)$。由此可见，存在两个预序能够解释相同的选择行为。下一个命题将证明，如果将范围限制在偏序集内，这种冗余就会消失。

下一个命题表明，任意两个不同的偏好关系经由最大化都会产生不同的选择函数。我们在附录中证明这一命题。该证明依赖于我们的假设，即偏好关系是反对称的。

命题 2。可测函数 $m_X\colon \mathcal{P}X \to \mathcal{C}X$ 对所有集合 X 都是单射。

我们可以通过为每个空间 X 定义可测函数 $\lambda_X = m_{FX}\colon \Pi X \to \Gamma X$，将最大化扩展到行为上的偏好关系和选择函数。$\lambda_X$ 的一个关键性质在下面的命题中给出，我们将在附录中证明该命题：

命题 3。映射 λ_X 在 X 中是自然的。这意味着，对于每个可测函数 $\varphi\colon X \to Y$，都有 $\lambda_Y \circ \Pi\varphi = \Gamma\varphi \circ \lambda_X$。

4.3 将偏好结构嵌入选择结构

我们可以使用映射 λ_X 将偏好结构转换为选择结构。对于每个偏好结构 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$，定义选择结构 $\lambda(\mathcal{X}) = (T_i, T_j, \lambda_{A_j \times T_j} \circ \theta_i, \lambda_{A_i \times T_i} \circ \theta_j)$。由命题 3 可直接推出，该嵌入保持态射：只要 $\chi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ 是偏好结构的态射，则同一对可测函数也是选择结构 $\chi\colon \lambda(\mathcal{X}) \to \lambda(\mathcal{X}')$ 的态射。

也可以刻画由某个偏好结构 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$ 产生的选择结构类 $\lambda(\mathcal{X}) = (T_i, T_j, \lambda_{A_j \times T_j} \circ \theta_i, \lambda_{A_i \times T_i} \circ \theta_j)$。为此，可以采用任意一种公理化，来公理化由偏序集中的最大化产生的选择函数类 $\mathbb{P}$。例如，[ABM07] 的定理 2.9 给出了一种这样的公理化。因此，选择结构 $\mathcal{X}' = (T_i', T_j', \theta_i', \theta_j')$ 等于 $\lambda(\mathcal{X})$，当且仅当对于所有类型 $t_i \in T_i'$ 和 $t_j \in T_j'$，选择函数 $\theta_i'(t_i) \in \Gamma(A_j \times T_j')$ 和 $\theta_j'(t_j) \in \Gamma(A_i \times T_i')$ 都属于 $\mathbb{P}$。

由于对于每个空间 X， λ_X 都是单射，因此，对于偏好结构 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}'$ ，只要 $\lambda(\mathcal{X}) = \lambda(\mathcal{X}')$，就有 $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$。因此，偏好结构之间的任何差异都会在选择结构中保留下来。我们还可以定义一个从普适偏好结构到普适选择结构的单射嵌入。考虑根据定理 2 存在的、从 $\lambda(\mathcal{U}')$ 到 $\mathcal{U}$ 的唯一选择结构态射 υ。该态射由两个可测函数 $\upsilon_i : \Omega'_i \to \Omega_i$ 和 $\upsilon_j : \Omega'_j \to \Omega_j$ 组成；我们将在附录中论证，当且仅当 A_i 和 A_j 有限时，该态射是单射。因此，我们得到以下定理：

定理 3。所有偏好层级的不确定性空间 Ω'_i 和 Ω'_j 分别同构于所有选择层级空间 Ω_i 和 Ω_j 的两个子空间。

5 讨论

5.1 普适选择结构的普遍性

本文定义的普适选择结构具备文献中与“普遍性”一词相关联的所有性质。在范畴意义下，它是终对象，这意味着对于每个选择结构，都存在唯一一个指向该普适选择结构的态射。在完备性意义下，它是完备的，即普适选择结构的可测函数 μ_i 和 μ_j 是满射。正如我们上文所讨论的，普适选择结构也是非冗余的。特别地，由于我们是在余代数范畴中进行研究，完备性和非冗余性可直接由终对象性推出。

5.2 拓扑假设与相干性

我们对普适选择结构的构造基于选择函数层级，其中层级中的各层通过我们称为相干态射的态射相互连接。我们使用这一术语，是类比于通过边缘化构造相干概率层级。不过，我们的结果是无拓扑性的，也就是说，我们不需要对这些空间施加拓扑假设。这不同于经典概率框架：在该框架中，如果没有额外的拓扑假设，就无法从相干信念层级 [HS98、HS99、Vig05]构造普适结构。不同于 [HS98] 和 [HS99], ，在我们的情形中，直接从无拓扑框架下的相干选择层级构造普适结构之所以能够成功，是因为与 [DT08], 一样，我们所处理的所有集合都赋有一个子集的代数，而不是一个σ-代数。因此，我们不会遇到 [HS99], 中的同类问题，因为所有选择层级的空间都赋有一个子集的代数，而不是一个 σ-代数；于是，将相干选择层级扩展到这样的空间并不存在问题。

5.3 内省

文献中类型结构定义的一个重要差异，在于如何处理参与者对自身类型的认识。与 [EW96], 类似，我们遵循 [BD93], 的思路，假设参与者对自己的类型不存在不确定性。这种处理方式不同于 [DT08], ，后者允许博弈者对自身类型存在不确定性。我们可以采用类似的方法，只考虑基于一个不确定性空间 X的选择结构，其元素可视为等同于第 3.1 节中的状态，然后定义具有可测函数 σ: $X \to A_i \times A_j$ 和 ϑ: $X \to \Gamma X \times \Gamma X$ 的选择结构。 $\vartheta(x) = (\vartheta_i(x)\ \vartheta_j(x))$ 的第一个分量指定 Ida 的类型，第二个分量指定 Joe 的类型。对于我们的证明，这意味着我们将考虑 Unc 中的自函子余代数：该自函子将一个不确定性空间 X 映射到积 $(A_i \times A_j) \times (\Gamma X \times \Gamma X)$，并在态射上具有显然的作用。

为避免混淆，需要说明的是， [DT08] 的方法不同于 [MZ85], 的方法，尽管这两种设定都使用了类似的数学结构。区别在于， [MZ85] 施加了内省条件，要求博弈者确信

自身类型，而 [DT08] 则没有。如 [Vig05，第 7 节4], 所述，对于 [MZ85] 和 [DT08]中的结构，尚不清楚如何用余代数术语表述这一条件。

5.4 余代数方法

附录中的技术性证明大量使用了余代数中的概念，而余代数又运用了范畴论中的一些概念，例如基范畴、余代数函子、终对象以及函子之间的自然变换。余代数方法为我们提供了一种模块化语言，用于描述普适选择结构的构造。这带来了以下优势：首先，将理论调整到新的不确定性表示会更加容易。由于终余代数的一般构造对于函子是参数化的，因此只需定义适当的函子，并检查它是否保持适当图表的极限即可。其次，范畴论提供了一种包容性语言，可用于比较不同类型结构之间的性质，例如完备性、非冗余性等概念。第三，余代数方法能够抽象掉记号上的复杂性，例如表示包含多个参与者的博弈时所涉及的索引问题。在表述终序列构造时，索引问题可以方便地交由基范畴和余代数函子处理。

5.5 框架的解释

选择层级和偏好层级的解释都值得进一步探讨。由于对这类层级作严格的行为解释，似乎会与对状态下博弈者实际行为的描述相冲突，因此我们目前将层级视为选择态度，而非选择行为。关于这一点的深入分析留待未来的哲学研究；本文主要致力于构建必要的技术工具，以便在互动认识论情境中引入选择函数层级。

参考文献

[ABM07] Fuad Aleskerov、Denis Bouyssou 和 Bernard Monjardet。《效用最大化、选择与偏好》。Springer-Verlag，柏林、海德堡，2007年。[Awo06] S. Awodey。《范畴论》。牛津大学出版社，2006年。[BCVMM15] Pierpaolo Battigalli、Simone Cerreia-Vioglio、Fabio Maccheroni 和 Massimo Marinacci。自我确认均衡与模型不确定性。《美国经济评论》，105:2:646–677，2015年。[BD93] A. Brandenburger 和 E. Dekel。信念层级与共同知识。《经济理论杂志》，59:189–198，1993年。[BdRV02] Patrick Blackburn、Maarten de Rijke 和 Yde Venema。《模态逻辑》。剑桥大学出版社，2002年。[BDV21] Pierpaolo Battigalli 和 Nicodemo De Vito。动态博弈中的信念、计划与感知到的意图。《经济理论杂志》，第105283页，2021年。[Bra03] Adam Brandenburger。论“完备”可能性结构的存在。《认知过程与经济行为》，第30–34页，2003年。[Che10] Yi-Chun Chen。Epstein–Wang 类型结构的普遍性。《博弈与经济行为》，68(1):389–402，2010年。[DT08] Alfredo Di Tillio。博弈中的主观期望效用。《理论经济学》，3(3)，2008年。

[Eps97] Larry Epstein。偏好、可理性化与均衡。《经济理论杂志》，73(1):1–29，1997年。[EW96] Larry Epstein 和 Tan Wang。没有概率的“关于信念的信念”。《计量经济学》，64(6):1343–73，1996年。[FHMV03] Ronald Fagin、Joseph Y. Halpern、Yoram Moses 和 Moshe Y. Vardi。《关于知识的推理》。麻省理工学院出版社，2003年。[GHL16] Jayant Ganguli、Aviad Heifetz 和 Byung Soo Lee。普遍互动偏好。《经济理论杂志》，162:237–260，2016年。[GS89] Itzhak Gilboa 和 David Schmeidler。具有非唯一先验的最大最小期望效用。《数学经济学杂志》，18:141–153，1989年。[Hay08] Takashi Hayashi。后悔厌恶与机会依赖。《经济理论杂志》，139(1):242–268，2008年3月。[Hei14] Sander Heinsalu。具有不知情的普遍类型结构。《博弈与经济行为》，83:255–266，2014年。[HP12] Joseph Y. Halpern 和 Rafael Pass。迭代后悔最小化：一种新的解概念。《博弈与经济行为》，74:1:194–207，2012年。[HS98] A. Heifetz 和 D. Samet。具有任意高秩的知识空间。《博弈与经济行为》，22:260–273，1998年。[HS99] Aviad Heifetz 和 Dov Samet。相干信念并不总是类型。《数学经济学杂志》，32(4):475–488，1999年。[Jac16] Bart Jacobs。《余代数导论》，《剑桥理论计算机科学丛书》第59卷。剑桥大学出版社，2016年。[Kli96] Peter Klibanoff。不确定性、决策与标准形博弈，1996年。手稿。[KU05] Atsushi Kajii 和 Takashi Ui。具有多个先验的不完全信息博弈。《日本经济评论》，56:332–351，2005年。[Lan98] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。施普林格，1998年。[Liu09] Qingmin Liu。论冗余类型与不完全信息的贝叶斯表述。《经济理论杂志》，144(5):2115–2145，2009年。[Lo96] Kin Chung Lo。不确定性下的信念均衡。《经济理论杂志》，71(2):443–484，1996年。[Mar00] Massimo Marinacci。模糊博弈。《博弈与经济行为》，31(2):191–219，2000年。[MV04] Lawrence S. Moss 和 Ignacio D. Viglizzo。由满足理论构造的海萨尼类型空间与终余代数。Electronic Notes in Theoretical Computer Science，106:279–295，2004年。[MZ85] J. F. Mertens 和 S. Zamir。不完全信息博弈的贝叶斯分析表述。《国际博弈论杂志》，14:1–29，1985年。[RS10] Ludovic Renou 和 Karl H. Schlag。极小极大后悔与策略不确定性。《经济理论杂志》，145(1):264–286，2010年。[Rut00] J.J.M.M. Rutten。普遍余代数：一种系统理论。《理论计算机科学》，249(1):3–80，2000年。

[Sch89] David Schmeidler.《非加性条件下的主观概率与期望效用》。Econometrica，57：571–589，1989。[Sto11] J¨org Stoye。《极小极大遗憾选择对应的公理》。《经济理论杂志》，146：2226–2251，2011。[Tro19] Michael Trost。《选择规则的迭代应用与应用这些规则的共同信念之间的等价性》。《博弈与经济行为》，116：1–37，2019。[Vig05] Ignacio Dar´ıo Viglizzo。《可测空间上的余代数》。博士论文，Indiana University，2005。[Wor99] James Worrell。《可达自函子的终端序列》。Electronic Notes in Theoretical Computer Science，19：24–38，1999。

A 附录概述

本附录包含关于第 3 节中普适选择结构的构造，以及第 4 节中将普适偏好结构嵌入普适选择结构的技术性证明。我们将这些构造视为余代数理论中更一般构造的实例。因此，我们沿用 [MV04、Vig05], 所提出的方法，他们展示了如何将经典概率类型空间视为余代数。余代数理论本身运用了范畴论中的概念。我们在本附录的 B 节回顾范畴论中所有相关概念。感兴趣的读者可以在 [Lan98] 和 [Awo06] 中找到更深入的范畴论论述。关于余代数理论的介绍，请参阅 [Jac16] ，或经典入门读物 [Rut00]。

本附录结果的基石如下：

将选择结构视为余代数：首先，选择结构是余代数，而选择结构的态射是余代数态射。余代数的定义是相对于范畴 $\mathcal{D}$上的一个固定自函子 G 而言的。范畴 $\mathcal{D}$ 称为“基范畴”，函子 G 通常称为“类型函子”，但为了避免混淆，我们称之为“余代数”函子。我们将在 B.1 和 B.2 节介绍范畴的定义和函子的概念。与我们最相关的是不确定性空间及可测函数构成的范畴 Unc，以及 Unc 上的函子 Γ ；我们已在第 2.4 节中对其作了隐式定义。然而，由于技术原因——选择结构表示的是两个参与者而非单个参与者的不确定性——我们必须使用 Unc^2 作为基范畴。与 Unc 中仅涉及一个不确定性空间的情形不同，该范畴本质上刻画的是同时涉及两个不确定性空间的情形。此外，我们还必须使用函子 $\Gamma^{\heartsuit}$。它是将 Γ 改造为适用于 Unc^2 的版本，用以刻画一位参与者的不确定性对另一位参与者的不确定性的依赖关系。

终余代数的存在性：接下来的观察是，普适选择结构对应于余代数理论中所谓的终余代数。因此，我们的目标是利用一般的余代数构造，证明选择结构范畴中终余代数的存在性。这一构造称为终端序列构造，详见 [Wor99], ；它可以被视为一种余代数对应物，即从相容信念层级空间构造普遍类型空间。对于给定函子的所有余代数范畴，都可以执行这一构造；并且在余代数函子满足某些相当温和的条件时，可以保证该构造产生终余代数。这些充分条件有不同的版本，但大多要求余代数函子保持基范畴中某些图表的极限。我们在 B.5 节回顾所需的极限概念。对于函子 $\Gamma^{\heartsuit}$ 而言，其余代数就是选择结构；我们只能证明它保持某一类特殊图表的极限，我们称之为可数满射余链。在 D 节，我们回顾终端序列构造，以检验保持可数满射余链的极限足以使该构造产生终余代数。

保持可数满余链的极限：为了保证终余代数的存在性，我们随后在 C.3 节证明函子 $\Gamma^{\heartsuit}$ 保持可数满余链的极限。相对容易看出，这归结为证明 Γ 保持这些极限。函子 Γ 可以看作两个更简单函子的复合：函子 F将不确定性空间 X 映射为其上的所有萨维奇行为 X所组成的集合 FX；函子 $\mathcal{C}$则将集合 X 映射为其上所有选择函数 X构成的不确定性空间 $\mathcal{C}X$ 。随后我们证明，F 和 $\mathcal{C}$ 都保持适当的极限，从而其复合 Γ 保持可数满余链的极限。对于 F 而言，这是一个相对容易的观察，在 [DT08]的证明中已经隐含地包含了这一点。$\mathcal{C}$ 保持适当类型的极限，是定理 4 的内容；该定理是本文的核心技术贡献。

偏好结构的嵌入：我们还使用余代数方法，证明第 4 节中关于将 [DT08] 的普适偏好结构嵌入普适选择结构的结果。只需将上文提到的函子 $\mathcal{C}$ 替换为捕捉偏好关系的函子 $\mathcal{P}$，偏好结构的设置也可以用余代数术语重新表述。随后，根据从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{P}$ 存在一个在所有分量上均为单射的自然变换这一观察，即可得到偏好结构到选择结构的嵌入。我们在 B.6 节讨论自然变换的概念。在 E 节中，我们解释这种从 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{C}$ 的自然变换的存在，如何产生将普适偏好结构嵌入普适选择结构的结果。

B 预备知识

我们首先回顾范畴论和余代数理论的基础知识。

B.1 范畴

范畴 $\mathcal{D}$ 是对象的集合（可能是真类），并且在任意两个对象 X 和 Y 之间都有一个态射集合，记作 $f\colon X \to Y$，满足：对于 $\mathcal{D}$ 中的每个对象 X，都存在一个恒等态射 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$；对于所有对象 X、Y 和 Z，以及态射$f\colon X \to Y$（从 X 到 Y）和 $g\colon Y \to Z$（从 Y 到 Z），它们的复合 $g \circ f\colon X \to Z$ 是 $\mathcal{D}$ 中从 X 到 Z 的一个态射。恒等态射和复合必须满足恒等律，即对于所有态射 $f\colon X \to Y$，$f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$；还必须满足结合律，即对于所有 $f\colon X \to Y$、$g\colon Y \to Z$ 和 $h\colon Z \to U$，$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$。对于 $\mathcal{D}$ 中的态射 $f\colon X \to Y$，我们将对象 X 称为 f 的定义域，将对象 Y 称为 f 的陪域。

本文所使用的范畴示例包括集合范畴 Set，其中所有集合都是其对象，集合之间的函数是其态射；以及不确定性空间范畴 Unc，其中不确定性空间是其对象，可测函数是其态射。显然，如果使用标准恒等函数作为恒等态射，并使用函数的标准复合作为复合，它们就满足恒等关系和复合律。另一个不同类型的示例是范畴 CS，它由第 3 节中定义的所有选择结构组成，其间的态射是选择结构之间的态射。本文的结果主要涉及范畴 CS 的结构。

一个更具技术性的范畴示例是 $\mathbf{Unc}^{2,}$，它以不确定性空间 X_0 和 X_1 的有序对 $X = (X_0, X_1)$ 作为对象，并且从 $X = (X_0, X_1)$ 到 $Y = (Y_0, Y_1)$ 的态射是可测函数的有序对 $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$。可以验证，只要对恒等态射和复合给出显然的按分量定义，这就是一个范畴。我们将范畴 $\mathbf{Unc}^2$ 用作本附录技术结果的便利抽象，因为它简洁地表示了涉及两个博弈者不确定性的情形。在 $\mathbf{Unc}^{2,}$ 的对象 $X = (X_0, X_1)$ 中，不确定性空间 X_0 表示 Ida 的不确定性，而 X_1 表示 Joe 的不确定性。

B.2 函子

从一个范畴 $\mathcal{D}$ 到另一个范畴 $\mathcal{E}$ 的函子 G，是将 $\mathcal{E}$ 中的每个对象 X 分配给 GX 中的一个对象，并将 $\mathcal{E}$ 中的每个态射$f\colon X \to Y$分配给 $Gf\colon GX \to GY$，且保持恒等态射和复合不变，这意味着对于所有 X和 G，$G\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{GX}$，并且对于所有 g和 f，$G(g \circ f) = Gg \circ Gf$。如果 G是从一个范畴 $\mathcal{D}$到同一个范畴$\mathcal{D}$ 的函子，也称 G 为自函子。

幂集函子 $\mathbb{P}$ from Set to Set 是一个简单的函子示例。它将集合 X 映射为其幂集 $\mathbb{P}X$，并将函数 $f\colon X \to Y$映射为直接像映射 $\mathbb{P}f\colon \mathbb{P}X \to \mathbb{P}Y$，其定义为：对于所有 $U \subseteq X$，$\mathbb{P}f(U) = f[U] = \{f(x) \in Y \mid x \in U\}$。函子 $\mathbb{P}$是集合范畴上的自函子。

Set 中的另一个自函子示例是有限分布函子 $\mathbb{D}$。它将集合X 映射为集合 $\mathbb{D}X$，即所有定义在 X 上且具有有限支撑的概率分布所组成的集合。函数$f\colon X \to Y$ 被映射为函数 $\mathbb{D}f\colon \mathbb{D}X \to \mathbb{D}Y$，该函数满足：$\mathbb{D}f(\mu) = \mu^f$ 是定义在 Y上的概率分布 μ^f，并且对于 $x \in f^{-1}[V]$，$\mu^f(V) = \sum_x \mu(x)$。

从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{E}$ 的逆变函子，是一个从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$的函子，其中 $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ 与 $\mathcal{E}$类似，只是所有态射的方向都反了过来。当 G 是一个从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{E}$的逆变函子时，通常可以将其理解为反转态射的方向，也就是说，对于所有 $f\colon X \to Y$，都有 $Gf\colon GY \to GX$。如果要强调一个从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{E}$ 的函子 G 不是逆变的，就称 G 为协变。

本文中逆变函子的一个例子是映射 F：它将不确定性空间 X 映射到 Savage 行为的集合 FX（对应于 X），并将可测函数 $\varphi\colon X \to Y$映射到函数$Ff\colon FY \to FX$。这是一个从不确定性空间范畴到集合范畴的逆变函子。

另一个逆变函子的例子是第 2.3 节中的映射 $\mathcal{C}$：它将集合 X 映射到该集合上的选择函数所构成的不确定性空间 $\mathcal{C}X$，并将函数 $f\colon X \to Y$映射到可测函数 $\mathcal{C}f\colon \mathcal{C}Y \to \mathcal{C}X$。这定义了一个从集合范畴到不确定性空间范畴的逆变函子。显然，它保持恒等态射。要了解 $\mathcal{C}$ 如何保持态射的复合，只需根据定义检查以下等式：

$$f^{-1}[g^{-1}[C(g[f[K]])]] \cap K = f^{-1}[g^{-1}[C(f[g[K]])] \cap g[K]] \cap K,$$

对于所有有限集 $K \subseteq Y$，以及函数 $f\colon X \to Y$和 $g\colon Y \to W$。

第 2.4 节中的映射 Γ 是不确定性空间范畴上的协变自函子。它先将不确定性空间映射到集合的逆变函子 F，再通过逆变函子 $\mathcal{C}$ 返回不确定性空间。形式上，这意味着 Γ 将不确定性空间 X 映射为空间 $\Gamma X = \mathcal{C}FX$，并将可测函数 $\varphi\colon X \to Y$ 映射为可测函数 $\Gamma\varphi = \mathcal{C}F\varphi\colon \Gamma X \to \Gamma Y$。由于两个逆变函子 F 和 $\mathcal{C}$ 的作用相互抵消，因此 Γ 是协变函子。

我们将在第 4.1 节中考察的映射 $\mathcal{P}$ 和 Π（来自 [DT08], ），也可以看作与 $\mathcal{C}$ 和 Γ 类似的函子。也就是说，$\mathcal{P}$ 是从 Set 到 Unc 的逆变函子，而 Π 是 Unc 上的协变自函子，它先将 Unc 映射到 Set 的逆变函子 F，再应用函子 $\mathcal{P}$。

B.3 余代数

现在，我们将解释如何将选择结构视为某个范畴中自函子的余代数这一更一般概念的一个实例。

要定义余代数的概念，我们需要确定一个范畴 $\mathcal{D}$ 以及其上的一个自函子 G，也就是说，一个从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}$的函子 G。一个 G-余代数（X，ξ）是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象 X，并连同一个态射 $\xi\colon X \to GX$，其中该态射属于 $\mathcal{D}$。所有 G-余代数构成的类可以通过如下方式转化为一个范畴：从一个 G-余代数（X，ξ）到一个 G-余代数（Y，υ）的态射，取范畴 $\mathcal{D}$ 中满足性质 $\upsilon \circ f = Gf \circ \xi$的所有态射 $f\colon X \to Y$。

幂集函子 $\mathbb{P}$ 在 Set 范畴中的余代数范畴是一个相对简单的例子。可以看出，$\mathbb{P}$-余代数本质上与 Kripke 框架相同 [FHMV03，BdRV02]。对于任意 Kripke 框架（W，R），其中包含一个集合 W和一个关系 $R \subseteq W^2$，我们可以定义一个$\mathbb{P}$-余代数（W，α），其中 $\alpha\colon\ W \to \mathbb{P}W$满足：对于所有 $w \in W$，$\alpha(w) = R[\{w\}] = \{v \in W \mid (w,\ v) \in R\}$。反过来，每个 $\mathbb{P}$-余代数（W，α）也定义了一个 Kripke 框架（W，R），使得$R = \{(w,\ v) \mid v \in \alpha(w)\}$。还可以验证，$\mathbb{P}$-余代数之间的余代数态射恰好对应于 Kripke 框架之间的态射。

固定行动集合 A_i 和 A_j 的选择结构可以定义为范畴 $\mathbf{Unc}^2$上的特定函子 $\Gamma^\heartsuit$ 的余代数。函子 $\Gamma^\heartsuit$ 将对象 (X_0, X_1)映射为对象 $(\Gamma(A_j \times X_1)\ \Gamma(A_i \times X_0))$。分量中索引的变化是有意为之的，因为它对应于对对手的态度进行编码。对于态射，函子 $\Gamma^\heartsuit$ 将从 (X_0, X_1)到 (Y_0, Y_1) 的一对可测函数 (φ_0, φ_1)映射为从 $(\Gamma(A_j \times X_1)\ \Gamma(A_i \times X_0))$ 到 $(\Gamma(A_j \times Y_1)\ \Gamma(A_i \times Y_0))$ 的一对可测函数 $(\Gamma(\mathrm{id}^{A_j} \times \varphi_1)\ \Gamma(\mathrm{id}_{A_i} \times \varphi_0))$。

我们可以将按照定义 1 定义的每个选择结构 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$视为对象 (T_i, T_j)上的一个 $\Gamma^\heartsuit$-余代数 $((T_i, T_j), (\theta_i, \theta_j))$，其中对象属于 $\mathbf{Unc}^2$，且态射 $(\theta_i, \theta_j) : (T_i, T_j) \to \Gamma^\heartsuit(T_i, T_j)$。反过来，每个 $\Gamma^\heartsuit$-余代数 $((X_0, X_1), (\xi_0, \xi_1))$ 都包含可测函数 $\xi_0\colon\ X_0 \to \Gamma(A_j \times X_1)$ 和 $\xi_1\colon\ X_1 \to \Gamma(A_i \times X_0)$，因而产生一个选择结构 (X_0, X_1, ξ_0, ξ_1)。还可以验证，按照定义 1 定义的选择结构态射，恰好对应于 $\Gamma^\heartsuit$-余代数之间的余代数态射。

与选择结构类似，可以将偏好结构视为某个函子的余代数。为此，考虑函子 $\Pi^\heartsuit$ 从 $\mathbf{Unc}^2$ 到 $\mathbf{Unc}^2$，其定义方式是将 $\Gamma^\heartsuit$ 的定义中所有出现的 Γ 替换为 Π。这意味着，$\Pi^\heartsuit$ 将对象 (X_0, X_1) 映射为 $(\Gamma(A_j \times X_1)\ \Gamma(A_i \times X_0))$，并将态射 (φ_0, φ_1) 映射为 $(\Pi(\mathrm{id}^{A_j} \times \varphi_1)\ \Pi(\mathrm{id}_{A_i} \times \varphi_0))$。

B.4 同构与满态射或单态射

范畴 $\mathcal{D}$ 中的态射 $f\colon\ X \to Y$ 是同构，如果存在态射 $g\colon\ Y \to X$，使得 $g \circ f = \mathrm{id}_X$ 且 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$。如果存在同构$f\colon\ X \to Y$，则记作 $X \simeq Y$。可以验证，在集合范畴中，同构恰好是双射函数；在范畴 Unc 中，同构恰好是逆函数也可测的双射可测函数，这与拓扑空间之间的同胚类似。$\mathbf{Unc}^2$ 中的同构是这样的态射有序对 (φ_0, φ_1)：其中 φ_0 和 φ_1 都是 Unc 中的同构。

态射 $f\colon\ X \to Y$ 是满态射，当且仅当对于所有后续态射 $g, h\colon\ Y \to T$，若 $g \circ f = h \circ f$，则必有 $g = h$。态射 $f\colon\ X \to Y$ 是单态射，当且仅当对于所有后续态射$g, h\colon\ T \to X$，若 $f \circ g = f \circ h$，则必有 $g = h$。容易验证，在集合范畴中，满态射恰好是满射函数，单态射恰好是单射函数。类似地，在不确定性空间范畴中，满态射和单态射分别是满射可测函数和单射可测函数。$\mathbf{Unc}^2$ 中的满态射和单态射在两个分量中也分别都是满态射和单态射。也就是说，(φ_0, φ_1) 是满态射，当且仅当 φ_0 和 φ_1 都是满态射；单态射的情形也类似。

函子 F 从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{E}$ 保持 $\mathcal{D}$ 中的满态射 f，是指 Ff 在 $\mathcal{E}$ 中是满态射；保持单态射 f，是指 Ff 是单态射。注意，由于 $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ 中的满态射在 $\mathcal{E}$ 中是单态射，因此从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{E}$ 的逆变函子 F 保持满态射 f，是指 Ff 在 $\mathcal{E}$ 中是单态射；保持单态射的情形也类似。

我们在 C.1 节和 C.2 节中证明，Γ 保留所有满态射，并且保留所有单态射 $\varphi\colon\ Y$为离散空间的 $X \to Y$。

B.5 终对象、积和链的极限

我们使用极限这一概念的三种不同实例：终对象、积和链的极限。下文将分别定义这三个概念，但需要指出的是，对于感兴趣的读者而言，它们都是图表的极限这一更一般概念的实例；上述引用的所有范畴论著作都讨论了这一概念。

范畴中的终对象 $\mathcal{D}$ 是指具有如下性质的任意对象 $\top$：对于 $\mathcal{D}$ 中的每个对象 T，都存在唯一的态射 $!_T\colon T \to \top$。由此定义可以直接推出，在某个范畴中的任意两个终对象必然同构。为说明这一点，假设我们还有第二个终对象 $\top'$。由于 $\top'$ 是终对象，我们有态射 $!'_\top\colon \top \to \top'$。由于$\top$是泛的，因此存在态射 $!_{\top'}\colon \top' \to \top$。我们有 $\mathrm{id}_\top = !_\top = !_{\top'} \circ !'_\top$，因为 $!_\top$ 是从 $\top$ 到 $\top$的唯一态射。类似的论证表明，$\mathrm{id}_{\top'} = !'_\top \circ !_{\top'}$。因此可以认为，如果一个范畴具有终对象，那么它就是唯一的，至少当我们只关心对象在同构意义下的恒等关系时是如此。

范畴 Unc 中的终对象可以定义为不确定性空间 $\top = (\{\star\}, \{\emptyset, \{\star\}\})$，它只包含一个点。范畴 Unc^2 中的终对象可以按分量定义为对象 $(\top, \top)$，其中 $\top$ 是 Unc 的终对象。一个更有趣的终对象例子是普适选择结构。定理 2 的普遍性性质准确地表明，普适选择结构是选择结构范畴中的终对象。

给定范畴 $\mathcal{D}$中的两个对象 X 和 Y，X 和 Y 的积是 $\mathcal{D}$中的一个对象，记作 $X \times Y$，并配有两个态射 $\pi_1\colon X \times Y \to X$ 和 $\pi_2\colon X \times Y \to Y$，它们满足以下泛性质：对于任意对象 T 以及态射 $f\colon T \to X$ 和 $g\colon T \to Y$，存在一个态射 $u\colon T \to X \times Y$，通常记作 (f, g)，且它是唯一满足$f = \pi_1 \circ u$ 和 $g = \pi_2 \circ u$的态射。

与终对象的情形类似，可以看出，相对于固定的 X 和 Y，任何两个具有此泛性质的对象都必定同构。因此，我们常常把 X 和 Y 的积当作唯一的来谈论。

在范畴 Unc 中，可以将两个不确定性空间 X 和 Y 的积 $X \times Y$ 定义为一个不确定性空间，其状态是所有有序对 (x, y)，其中 x 是 X 的一个状态，而 y 是 Y 的一个状态。状态的可测集由柱集的有限并与补集生成，也就是说，是形如 $U \times Y$ 和 $X \times V$ 的集合，其中 U 是 X 中的可测集，且 V 在 Y 中可测。显然，借助这一代数，投影 $\pi_1\colon X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$ 和 $\pi_2\colon X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$ 都是可测函数。此外，可以验证，这个积的定义具有如下泛性质：对于每个空间 T，连同可测函数 $\varphi\colon T \to X$ 和 $\psi\colon T \to Y$，都存在唯一的可测函数 $\mu\colon T \to X \times Y, t \mapsto (\varphi(t)\ \psi(t))$，使得 $\varphi = \pi_1 \circ \mu$ 和 $\psi = \pi_2 \circ \mu$。

我们还需要引入一个与积相关的记号：给定 $f\colon X \to Z$ 和 $g\colon Y \to U$，我们将 $f \times g\colon X \times Y \to Z \times U$ 记作态射 $f \times g = (f \circ \pi_1, g \circ \pi_2)$。不难检查，对于第 2.1 节中的可测函数 φ 和 ψ，这个定义推广了我们先前对 $\varphi \times \psi$ 的定义。

构造普适选择结构所需的一个关键范畴论概念，是可数余链的极限。范畴 $\mathcal{D}$ 中的一个可数余链 $(X_n, f_n)_{n\in\omega}$，对于每个自然数 $n \in \omega$，由 $\mathcal{D}$ 中的一个对象 X_n 以及对于每个 $n \in \omega$ 的一个态射 $f_n\colon X_{n+1} \to X_n$ 组成。在这里以及下文中，我们用 ω 表示包含 0 在内的所有自然数的集合。f_n 也称为该余链的相容态射。

显然，我们可以复合态射 f_n，从而对所有 n、$m \in \omega$（满足 $n \le m$）得到态射 $f_n^m = f_n \circ \cdots \circ f_{m-1}\colon X_m \to X_n$，其中 $f_n^n = \mathrm{id}_{X_n}\colon X_n \to X_n$只是 X_n上的恒等关系。若所有态射 f_n 都是满态射，我们就称可数余链 $(X_n, f_n)_{n\in\omega}$ 为满态射的。

可数余链 $(X_n, f_n)_{n\in\omega}$ 的一个极限，是一个对象 X_ω，连同投影态射 $p_n\colon X_\omega \to X_n$，使得对所有 $n \in \omega$都有 $p_n = f_n \circ p_{n+1}$，并满足以下泛性质：对于每个对象 T，连同态射 $g_n\colon T \to X_n$，且对所有 $n \in \omega$满足 $g_n = f_n \circ g_{n+1}$，都存在一个态射 $u\colon T \to X_\omega$，它是唯一具有如下性质的态射：对所有 $n \in \omega$都有 $g_n = p_n \circ u$。与积和终对象一样，可以利用这一泛性质证明，给定余链的任意两个极限都是同构的。

对于范畴 Unc 中的每个余链 $(X_n, \xi_n)_{n\in\omega}$，我们都可以将其极限 X_ω 定义为这样的不确定性空间：其状态是所有序列 $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$，其中对于所有 $n \in \omega$，x_n都是来自 X_n 的状态，并且它们满足相容性条件，即对于所有 $n \in \omega$都有 $x_n = \xi_n(x_{n+1})$。随后，我们可以考虑每个 $n \in \omega$对应的投影 $\zeta_n\colon X_\omega \to X_n, x \mapsto x_n$。极限 X_ω 的可测集定义为形如 $\zeta_n^{-1}[E]$ 的所有集合，其中 $n \in \omega$ 为某个集合，E 为

X_n。显然，这一定义使投影 ζ_n： $X_\omega \to X_n$ 成为可测函数。此外，利用所有 ξ_n 都是可测的这一事实，可以证明以这种方式定义的可测集对有限并和交集封闭。为了检验这一定义的极限具有泛性质，注意对于任意带有可测函数φ_n： $T \to X_n$的可测空间 T，且对于每个 $n \in \omega$都满足 $\varphi_n = \xi_n \circ \varphi_{n+1}$，我们可以定义唯一的态射$\mu$： $T \to X_\omega$，使得对于所有 $t \in T$都有 $\mu(t) = (\varphi_0(t)\ \varphi_1(t) \ldots,\ \varphi_n(t) \ldots)$。

也可以为每个余链 $((X_{0,n},X_{1,n}), (\xi_{0,n},\xi_{1,n}))_{n\in\omega}$ in $\mathbf{Unc}^2$定义极限。可以逐分量进行构造，也就是说，对于表示 $\mathbf{Unc}^2$ 中对象和态射的有序对的每个分量，我们只需采用上一段所述的 Unc 构造即可。例如，极限本身就是对象 $(X_{0,\omega},X_{1,\omega})$，其中 $X_{0,\omega}$ 和 $X_{1,\omega}$分别是 Unc 中 $(X_{0,n}, \xi_{0,n})_{n\in\omega}$ 和 $(X_{1,n},\xi_{1,n})_{n\in\omega}$ 的极限。不难看出，这仍具有所需的泛性质。

函子 G 从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{E}$，若将可数余链 $(X_n, f_n)_{n\in\omega}$ 的极限 X_ω 映为可数余链 $(GX_n, Gf_n)_{n\in\omega}$的极限 GX_ω，则称其保持该极限。本附录的主要技术结果是，函子 Γ 保持可数满余链的极限。在 C.3 节证明这一论断时，我们将考察逆变函子 F （从 Unc 到 Set）和 $\mathcal{C}$ （从 Set 到 Unc）对余链极限的保持性。为此，我们需要理解 $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$中的余链极限。由于 $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ 中的态射只是交换了定义域与陪域的 Set 中态射，因此，$\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ 中的可数余链 $(X_n, f_n)_{n\in\omega}$ 就是所谓的 Set 中的可数链，也就是说， X_n 都是集合，而 f_n： $X_n \to X_{n+1}$ 是函数，其方向现在是从X_n 到 X_{n+1}。此外，$\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ 中该余链的极限 X_ω 实际上就是 Set 中链的余极限。Set 中链 $(X_n, f_n)_{n\in\omega}$ 的余极限 X_ω 可以具体描述为所有 X_n 的不交并，再对识别关系取商：若存在某个 $k \geq n, m$，使得 $f_k^n(x_n) = f_k^m(x_m)$，则将来自 X_n 的 x_n 与来自 X_m的 x_m 识别。显然，对于所有 $n \in \omega$，我们可以定义包含映射 p_ω^n： $X_n \to X_\omega$。该余极限的泛性质与 $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ 中极限的泛性质完全相同，只需将所有态射反向：对于任意集合T及函数 h_n： $X_n \to T$，若对每个 $n \in \omega$都有 $h_n = h_{n+1} \circ f_n$，则存在唯一函数u： $X_\omega \to T$，使得对所有 $n \in \omega$都有 $h_n = u \circ p_\omega^n$。

B.6 自然变换

设 F 和 G 都是从范畴 $\mathcal{D}$ 到范畴 $\mathcal{E}$的函子。那么，从 F 到 G 的自然变换 η，是为 $\mathcal{D}$中的每个对象 X指定 $\mathcal{E}$ 中的一个态射 η_X： $FX \to GX$，并且对于 $\mathcal{D}$中的所有态射 f: $X \to Y$，都有 $Gf \circ \eta_X = \eta_Y \circ Ff$；其中， η_Y是 η 为对象 Y指定的态射。

从离散分布函子到幂集函子的一个自然变换示例，是将有限分布映射到其支撑集。更形式化地说，对于每个集合X，我们都有一个函数 supp_X： $\mathbb{D}X \to \mathbb{P}X$，它将 X 上的离散分布 μ 映射到 μ的支撑集 $\mathrm{supp}_X(\mu)$。自然性条件 $\mathbb{P}f \circ \mathrm{supp}_X = \mathrm{supp}_Y \circ \mathbb{D}f$ 对所有函数 f: $X \to Y$都成立，这意味着对于 X 上的每个离散分布 μ，都存在某个 $x \in X$，使得 $f(x) = y$且 $\mu(x) \neq 0$，当且仅当 $\mu^f(y) \neq 0$，其中 $\mu^f = \mathbb{D}f(\mu)$。

本文中的一个自然变换示例是可测函数 $\lambda_X : \Pi X \to \Gamma X$，它为每个不确定性空间 X定义。命题 3（已在 E.3 节中证明）表明， λ 是从函子 Π 到函子 Γ的自然变换。

C Γ的性质

在本附录部分中，我们证明函子 Γ 的关键性质，这些性质对于普适选择结构的余代数构造是必需的。如果读者希望先大致了解普适选择结构的构造过程，可以跳过本节，并在阅读第 D 节和第 E 节时根据需要返回查阅。

C.1 Γ 保满态射

我们证明 Γ 保持满态射，而在 Unc 中，满态射就是满可测函数。由于 Γ 是 F 与 $\mathcal{C}$ 的复合，因此只需证明 F 将满可测函数映射为 Set 中的单射函数，并证明 $\mathcal{C}$ 将单射函数映射为满可测函数。根据 F 的定义以及满态射的消去性质，前者很容易验证。至于 $\mathcal{C}$ 将单射函数映射为满可测函数，则由下面的引理证明:

引理 1. 若 $f\colon X \to Y$ 是单射的，则 $\mathcal{C}f\colon \mathcal{C}Y \to \mathcal{C}X$ 是满射的。

证明. 易见，若 f 是单射的，则 $f^{-1}[f[U]] = U$ 对所有 $U \subseteq X$ 都成立。为验证 $\mathcal{C}f$ 是满射，任取 $C \in \mathcal{C}X$。我们需要找到一个 $C' \in \mathcal{C}Y$，使得 $\mathcal{C}f(C') = C$。定义 C'，使得对于所有有限的 $K \subseteq Y$，都有 $C'(K) = f[C(f^{-1}[K])]$。于是，对所有 $L \subseteq X$，有以下等式:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}f(C')(L) &= f^{-1}[C'(f[L])] \cap L \\ &= f^{-1}[f[C(f^{-1}[f[L]])]] \cap L \\ &= C(L) \cap L = C(L).\end{aligned}$$

□

C.2 Γ 保持到离散空间的单态射

我们证明，当陪域具有离散代数时，Γ 保持单态射。我们再次将问题分为两步。首先证明，F 将每个陪域为离散空间的满可测函数映为单射函数；然后证明，$\mathcal{C}$ 将单射函数映为满可测函数。

引理 2。如果可测函数 $\varphi\colon X \to Y$ 是单射的，并且 Y 具有离散代数，那么函数 $F\varphi\colon FY \to FX$ 是满射的。

证明。任取 $f \in FX$。我们希望找到一个 $f' \in FY$ 使得 $f = f' \circ \varphi$。我们定义 $f'(y) = f(x)$: 如果存在某个 $x \in X$ 使得 $\varphi(x) = y$；否则，对于任意 $z' \in Z$，定义 $f'(y) = z'$。这是良定义的，因为 φ 是单射的。函数 f' 显然是可测的，因为 Y 具有离散代数，并且根据 f' 的定义有 $f = f' \circ \varphi$。

□

引理 3。如果 $f\colon X \to Y$ 是满射的，那么 $\mathcal{C}f\colon \mathcal{C}Y \to \mathcal{C}X$ 是单射的。

证明。容易看出，由于 f 是满射的，对于所有 $U \subseteq Y$ 都有 $f[f^{-1}[U]] = U$。为检查 $\mathcal{C}f$ 是单射的，任取两个 C、$C' \in \mathcal{C}Y$，使得 $\mathcal{C}f(C) = \mathcal{C}f(C')$。我们必须证明，对于所有有限的 $K \subseteq Y$，都有 $C(K) = C'(K)$。利用 $f[f^{-1}[U]] = U$，我们可以计算:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}f(C)(f^{-1}[K]) &= f^{-1}[C(f[f^{-1}[K]])] \cap f^{-1}[K] \\ &= f^{-1}[C(K)] \cap f^{-1}[K] = f^{-1}[C(K) \cap K] = f^{-1}[C(K)]\end{aligned}$$

同样，对于 C'，我们也得到 $\mathcal{C}f(C')(f^{-1}[K]) = f^{-1}[C'(K)]$。由假设 $\mathcal{C}f(C) = \mathcal{C}f(C')$ 可知，$f^{-1}[C(K)] = f^{-1}[C'(K)]$。因为 f 是满射，所以 $C(K) = C'(K)$。

□

C.3 Γ 保持可数满余链的极限

本节将证明本文的主要技术结果:

定理 4。Γ 保持可数满余链的极限。这意味着，每当我们有一个极限 X_ω，其投影 $\zeta_n\colon X_\omega \to X_n$ 对所有 $n \in \omega$ 均成立，且一个可数余链 $(X_n, \xi_n)_{n\in\omega}$，其中相容态射 ξ_n 对所有 n 均为满态射时，那么 ΓX_ω 及其投影 $\Gamma\zeta_n\colon \Gamma X_\omega \to \Gamma X_n$,

满足余链 $(\Gamma X_n, \Gamma\xi_n)_{n\in\omega}$的极限的泛性质，即对于每个不确定性空间 T，连同可测函数 $\varphi_n\colon\ T \to \Gamma X_n$ 对所有 $n \in \omega$ 均成立且满足 $\varphi_n = \Gamma\xi_n \circ \varphi_{n+1}$，存在唯一的可测函数 $\mu\colon\ T \to \Gamma X_\omega$，使得 $\varphi_n = \Gamma\zeta_n \circ \mu$ 对所有 $n \in \omega$均成立。

对于本附录后续章节中的证明，我们需要定理的以下推论 4.

推论 2. $\Gamma^\heartsuit$ 保可数满射余链的极限。

我们将定理 4 的证明分为两个步骤。首先，我们证明 F 将 Unc 中满余链的极限转化为 Set 中链的余极限。其次，我们证明 $\mathcal{C}$ 将 Set 中链的余极限转化为 Unc 中余链的极限。因此， Γ 保满余链的极限，因为 Γ 定义为 F 与 $\mathcal{C}$的复合。

为了证明关于 F 的保极限结果，我们需要两个技术引理。第一个引理联系了行为与可测函数。这在很大程度上依赖于我们的假设：行为是有限阶梯函数。

引理 4. 设 $\varphi\colon\ X \to Y$是一个可测函数， $f \in FX$是一个值域为 $f[X] =\{z_1, \ldots, z_k\}$ 的行为，并且对每个 $n \in \{1, \ldots, k\}$，都存在一个 Y中的可测集 E_n，使得$f^{-1}[\{z_n\}] = \varphi^{-1}[E_n]$。那么存在一个行为 $f' \in FY$，使得 $f = f' \circ \varphi$。

证明。我们使用归纳法来定义 $H_1 = E_1$和 $H_{n+1} = E_{n+1}\setminus\bigcup_{m=1}^{n} H_m$，以得到 $n \in \{1, \ldots, k-1\}$。我们还定义了 $H_0 = Y \setminus \bigcup_{m=1}^{k} H_k$。显然，所有这些集合 H_0、H_1、.....、H_k 在 Y 中都是可测的。此外，根据定义，它们显然也划分了集合 Y。令 $z_0 \in Z$ 为非空结果集中的任意元素。定义行为 $f' \in FY$，使得当 $y \in H_n$ 时， $f'(y) = z_n$。由于集合 H_0、H_1、.....、H_k 划分了 Y，因此这作为一个函数是定义良好的。它是可测函数，因为集合 H_0、H_1、.....、H_k 都是可测的。为证明 $f = f' \circ \varphi$，固定任意 $x \in X$，并令 n 满足 $f(x) = z_n$。由于 $f^{-1}[\{z_n\}] = \varphi^{-1}[E_n]$，我们于是得到 $x \in \varphi^{-1}[E_n]$。此外，对于每个 $m \neq n$，集合 $f^{-1}[\{z_n\}]$ 和 $f^{-1}[\{z_m\}] = \varphi^{-1}[E_m]$ 不相交，因此 $x \notin \varphi^{-1}[E_m]$。由此可得 $\varphi(x) \in H_n$，从而 $f'(\varphi(x)) = z_n = f(x)$。 □

下一个引理陈述了一个性质，该性质在 [DT08] 的命题 1 中也发挥着重要作用：

引理5. 设有一个可数余链 $(X_n, \xi_n)_{n\in\omega}$，其相干态射为 $\xi_n\colon\ X_{n+1} \to X_n$，并设 X_ω 是它的极限，投影为 $\zeta_n\colon\ X_\omega \to X_n$。那么，对每个行为 $f \in FX_\omega$，都存在一个自然数 $n \in \omega$，使得对每个自然数 $m \geq n$，都存在一个行为 $f' \in FX_m$，满足 $f = f' \circ \zeta_m$。

证明. 由于 $f\colon\ X_\omega \to Z$ 是有限阶梯函数，我们可以将其值域枚举为 $f[X] =\{z_1, \ldots, z_k\}$。接着注意到，对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，集合 $f^{-1}[\{z_i\}]$ 在 X_ω 中都是可测的，因为 f 是可测的，而 Z 具有离散代数。根据 X_ω 上代数的定义，这意味着对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，都存在某个 $n_i \in \omega$，使得对于某个可测集 E_i（属于 X_{n_i}），有 $f^{-1}[\{z_i\}] = \zeta_{n_i}^{-1}[E_i]$。令 n 为所有满足 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 的 n_i 的最大值。

于是，任取 $m \geq n$，并对所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 定义 $E_i^m =(\xi_{n_i}^m)^{-1}[E_i] \subseteq X_m$。由于 $\xi_{n_i}^m$是可测函数，这些E_i^m在 X_m中是可测的。根据余链极限的定义，我们还可以得到，对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$都有 $\zeta_{n_i} = \xi_{n_i}^m \circ \zeta_m$。因此， $f^{-1}[\{z_i\}] = \zeta_{n_i}^{-1}[E_i] =(\xi_{n_i}^m \circ \zeta_m)^{-1}[E_i] = \zeta_m^{-1}[(\xi_{n_i}^m)^{-1}[E_i]] = \eta_m^{-1}[E_i^m]$。由此，根据引理 4可知，存在一个行为$f' \in X_m$使得 $f = f' \circ \zeta_m$。 □

命题 4. F 保持可数满余链的极限不变。也就是说，它将不确定性空间余链的极限映射为集合链的余极限。

证明。考虑一个不确定性空间的余链 $(X_n, \xi_n)_{n\in\omega}$，并设 X_ω 与投影 $\zeta_n\colon\ X_\omega \to X_n$ 一起构成其极限。我们证明， FX_ω 与包含映射 $F\zeta_n\colon\ FX_n \to FX_\omega$ 一起满足余链 $(FX_n, F\xi_n)_{n\in\omega}$ 的余极限泛性质。为此，考虑任意集合 T 及函数 $h_n\colon\ X_n \to T$，使得对每个 $n \in \omega$ 都有 $h_n = h_{n+1} \circ F\xi_n$。我们需要定义函数 $u\colon\ FX_\omega \to T$，使得对所有 $n \in \omega$ 都有 $h_n = u \circ F\zeta_n$，并证明该函数具有这一性质且唯一。

为了定义某个行为 $f \in FX_\omega$ 的 $u(f)$，我们使用引理5。由该引理可知，存在某个 k 和行为 $f' \in FX_k$，使得 $f = f' \circ \zeta_k = F\zeta_k(f')$。于是我们令 $u(f) = h_k(f')$。

为了检查这满足对于所有 $n \in \omega$ 和 $g \in FX_n$ 的 $h_n(g) = u \circ F\zeta_n(g)$，考虑行为 $F\zeta_n(g) \in FX_\omega$。根据 u 的定义，对于某个 $f' \in FX_k$，使得 $F\zeta_n(g) = F\zeta_k(f')$，我们有 $u(F\zeta_n(g)) = h_k(f')$。我们需要证明 $h_k(f') = h_n(g)$。假设 $n \leq k$。这不失一般性，因为我们只使用了完全对称的事实，即 $F\zeta_n(g) = F\zeta_k(f')$。由于 $\zeta_n = \xi_n^k \circ \zeta_k$，由 $F\zeta_n(g) = F\zeta_k(f')$ 可知 $f' \circ \zeta_k = g \circ \zeta_n = g \circ \xi_n^k \circ \zeta_k$。我们得到 $f' = g \circ \xi_n^k = F\xi_n^k(g)$，因为 ζ_k 是满态射。由此我们可以得出 $h_k(f') = h_n(g)$，因为 $h_k = h_n \circ F\xi_n^k$。

u 的唯一性也可由引理5推出。$u(f)$ 的可能取值已完全确定，因为对于某个 n 和 $f' \in X_n$，有 $f = F\zeta_n(f')$，而我们需要确保 $h_n(f') = u \circ F\zeta_n(f')$。 □

引理 6. 设 $(X_n, \xi_n)_{n\in\omega}$ 是由集合构成的链，并令 X_ω 为其余极限，其中对于所有 n，包含映射 $\iota_n : X_n \to X_\omega$。那么，对于每个有限的 $K \subseteq X_\omega$，都存在一个 $m \in \omega$ 和一个 $K' \subseteq X_m$，使得$\iota_m[K'] = K$。

证明. 根据可数链的余极限定义，对于每个 $k \in X_\omega$，都存在某个 $k' \in X_{m_k}$，使得 $\iota_{m_k}(k') = k$。令 m 为所有 $k \in K$ 对应的有限多个 m_k 中的最大值，并令 $K' = \{\xi_m^{m_k}(k') \in X_m \mid k \in K\}$。于是有 $\iota_m[K'] = K$，因为对于每个 $k \in K$，$\iota_m \circ \xi_m^{m_k}(k') = \iota_{m_k}(k') = k$。 □

定理 5. $\mathcal{C}$ 保持可数链的余极限。也就是说，它将集合链的余极限映射为不确定性空间余链的极限。

证明。考虑一个集合链 $(X_n, \xi_n)_{n\in\omega}$，并令 X_ω 为其余极限，其中包含映射 $\iota_n : X_n \to X_\omega$ 对所有 n 均成立。我们证明，以 $\mathcal{C}\iota_n : \mathcal{C}X_\omega \to \mathcal{C}X_n$ 为投影的 $\mathcal{C}X_\omega$ 具有余链 $(\mathcal{C}X_n, \mathcal{C}\xi_n)_{n\in\omega}$ 的极限的泛性质。因此，考虑任意不确定性空间 T，以及满足对所有 $n \in \omega$ 均有 $\varphi_n = \mathcal{C}\xi_n \circ \varphi_{n+1}$ 的可测函数 $\varphi_n : T \to \mathcal{C}X_n$。我们需要证明，存在唯一的可测函数 $\mu : T \to \mathcal{C}X_\omega$，使得对所有 $n \in \omega$ 均有 $\mathcal{C}\iota_n \circ \mu = \varphi_n$。

我们首先说明如何在有限集 $K \subseteq X_\omega$ 上定义选择函数 $\mu(t) \in \mathcal{C}X_\omega$。令 $m \in \omega$ 为满足存在某个 $K' \subseteq X_m$ 使得 $\iota_m[K'] = K$ 成立的最小数。根据引理 6，这样的数确实存在。另请注意，m 和 K' 的选择只取决于 K，而不取决于 t。我们将在下文利用这一性质来证明 μ 可测。随后，我们将选择函数 $\mu(t)$ 在 K 上的值设为

$$\mu(t)(K) = \iota_m[\varphi_m(t)(K')], \tag{2}$$

其中 $\varphi_m(t)(K') \subseteq K'$ 表示由选择函数 $\varphi_m(t) \in \mathcal{C}X_m$从 K' 中选出的元素。这一定义良好，因为我们有 $\iota_m[\varphi_m(t)(K')] \subseteq \iota_m[K'] = K$

要证明 μ 可测，只需验证基本可测集 $B_L^K = \{C \in \mathcal{C}X_\omega \mid C(K) \subseteq L\}$ 的原像 $\mu^{-1}[B_L^K] \subseteq T$ 在 T中可测。因此，固定有限的 K 和 L，使得 $L \subseteq K$，并令 $m \in \omega$ 和 K' 由 K 按上述方式定义。现在我们将证明 $\mu^{-1}[B_L^K] = \varphi_m^{-1}[B_{L'}^{K'}]$，其中 $L' = \iota_m^{-1}[L]$。由于 φ_m：假设 $T \to \Gamma X_m$ 可测，因此也可得出 $\mu^{-1}[B_L^K]$ 可测。展开定义后可知，$\mu^{-1}[B_L^K] = \varphi_m^{-1}[B_{L'}^{K'}]$ 等价于对所有 $t \in T$

$$\mu(t)(K) \subseteq L \qquad \text{iff} \qquad \varphi_m(t)(K') \subseteq \iota_m^{-1}[L].$$

根据上述 $\mu(t)$ 的定义，我们看到，这个等价关系的左侧与 $\iota_m[\varphi_m(t)(K')] \subseteq L$ 相同，而后者显然等价于 $\varphi_m(t)(K') \subseteq \iota_m^{-1}[L]$。

我们需要验证 $\varphi_n = \mathcal{C}\iota_n \circ \mu$ 对所有 $n \in \omega$ 都成立。这要求对于每个 $t \in T$，选择函数 $\varphi_n(t)$ 和 $\mathcal{C}\iota_n \circ \mu(t)$ 都相同。因此，它们在每个有限集 $L' \subseteq X_n$ 上的取值必须相同。

首先令 $K = \iota_n[L']$，并回顾定义可知

$$(\mathcal{C}\iota_n \circ \mu(t))(L') = \iota_n^{-1}[\mu(t)(\iota_n[L'])] \cap L' = \iota_n^{-1}[\iota_m[\varphi_m(t)(K')]] \cap L', \tag{3}$$

对于如上所述由 K 定义的 $m \in \omega$ 和有限集 $K' \subseteq X_m$。我们在上文对 K' 的选择确保了 $\iota_m[K'] = K = \iota_n[L']$。因此，对于每个 $k' \in K'$，都存在某个 $l' \in L'$，使得 $\iota_m(k') = \iota_n(l')$；反过来，对于每个 $l' \in L'$，也存在一个 $k' \in K'$，使得 $\iota_m(k') = \iota_n(l')$。根据余极限 X_ω 中元素的恒等关系定义可知，对于每一对这样的有序对 $k' \in X_m$ 和 $l' \in X_n$，若 $\iota_m(k') = \iota_n(l')$，则存在某个 $j \in \omega$，使得 $\xi^m_j(k') = \xi^n_j(l')$。令 i 为所有这些 $j \in \omega$ 中的最大值；由于有序对 $(k', l') \in K' \times L'$ 的数量有限，这个最大值存在。显然，只要对于 $(k', l') \in K' \times L'$ 有 $\iota_m(k') = \iota_n(l')$，就有 $\xi^m(k') = \xi^n(l')$。于是定义 $L \subseteq X$ 为有限集

$$L = \xi^m[K'] = \xi^n[L'].$$

因为 $\varphi_n = \mathcal{C}\xi^n \circ \varphi$ 我们得到

$$\varphi_n(t)(L') = (\xi^n)^{-1}[\varphi(t)(\xi^n_i[L'])] \cap L' = (\xi^n)^{-1}[\varphi(t)(L)] \cap L'.$$

同理，因为 $\varphi_m = \mathcal{C}\xi^m \circ \varphi$ 我们得到

$$\varphi_m(t)(K') = (\xi^m)^{-1}[\varphi_m(t)(\xi^m[K'])] \cap K' = (\xi^m)^{-1}[\varphi(t)(L)] \cap K'.$$

要证明 $\varphi_n(t)(L') = (\mathcal{C}\iota_n \circ \mu(t))(L')$，因此根据 (3)，只需证明

$$(\xi^n)^{-1}[U] \cap L' = \iota_n^{-1}[\iota_m[(\xi^m)^{-1}[U] \cap K']] \cap L' \tag{4}$$

对于集合 $U = \varphi(t)(L) \subseteq L$。

对于 (4) 中从左到右的包含关系，任取 $l' \in L'$ 使得 $\xi^n(l') \in U$。我们需要 $l' \in \iota_n^{-1}[\iota_m[(\xi^m)^{-1}[U] \cap K']]$。根据 L 的定义，我们可知存在某个 $k' \in K'$，使得 $\xi^m(k') = \xi^n(l')$。因此，$k' \in (\xi^m)^{-1}[U] \cap K'$ 且 $\iota_n(l') = \iota_m(k')$。后两个条件直接推出 $l' \in \iota_n^{-1}[\iota_m[(\xi^m)^{-1}[U] \cap K']]$。

对于 (4) 中从右到左的包含关系，任取 $l' \in L'$，使得对于某个 $k' \in (\xi^m)^{-1}[U] \cap K'$，有 $\iota_n(l') = \iota_m(k')$。根据上文的 i 定义，由 $\iota_n(l') = \iota_m(k')$ 可得 $\xi^n(l') = \xi^m(k') \in U$。因此，$l' \in (\xi^m)^{-1}[U]$，证毕。

最后，我们证明，$\mu(t)$ 完全由以下要求确定：对于所有 $n \in \omega$，$\varphi_n(t) = \mathcal{C}\iota_n \circ \mu(t)$。任取 $\nu : T \to \mathcal{C}X_\omega$，使得对于所有 $n \in \omega$，$\varphi_n(t) = \mathcal{C}\iota_n \circ \nu(t)$。我们将证明，对于如上定义的 μ 以及所有有限的 $K \subseteq X_\omega$，均有 $\nu(t)(K) = \mu(t)(K)$。令 $m \in \omega$ 和$K' \subseteq X_m$ 如上文 μ 的定义所述，即满足 $\iota_m[K'] = K$。要求 $\varphi_m(t) = \mathcal{C}\iota_m \circ \nu(t)$ 意味着

$$\varphi_m(t)(K') = \iota_m^{-1}[\nu(t)(\iota_m[K'])] \cap K' = \iota_m^{-1}[\nu(t)(K)] \cap K'.$$

可以看出，这意味着

$$\iota_m[\varphi_m(t)(K')] = \nu(t)(K).$$

从左到右的包含关系是显然的，而另一个包含关系成立是因为 $\nu(t)(K) \subseteq K$ and$\iota_m[K'] = K$。因此，我们已经证明 $\nu(t)(K)$ 等于我们在 (2) 中用于定义 $\mu(t)(K)$ 的表达式。

□

作为前两个命题的直接推论，我们得到了本节的主要结果。

D 第 3 节的证明

定理 1 和定理 2 源自关于 Γ 以及关于终余代数的著名结果 [Wor99] 。下面，我们概述余代数理论中的这些一般性结果如何应用于选择结构这一框架。

D.1 初步观察

定理 1 和定理 2 涉及通过第 3.2 节所述的选择层级得到的普适选择结构。我们先来看看它如何符合余代数框架。

可以将选择层级第 n 层的两个不确定性空间 $\Omega_{i,\,n}$ 和 $\Omega_{j,\,n}$ 视为范畴 $\mathbf{Unc}^2$ 中的一个对象 $\Omega_n = (\Omega_{i,\,n}, \Omega_{j,\,n})$。事实上，只需使用函子 $\Gamma^\heartsuit$，就可以直接定义这些对象：我们从 $\Omega_0 = \top$ 开始，其中 $\top$ 是 $\mathbf{Unc}^2$ 中的终对象，然后归纳地定义 $\Omega_{n+1} = \Gamma^\heartsuit\Omega_n$。容易看出，除去第 0 层（正文讨论中省略了该层）之外，这会得到与第 3.2 节中定义的相同的不确定性空间有序对序列。类似地，相容态射 $\xi_{i,\,n}$ 和 $\xi_{j,\,n}$ 也可以在 $\mathbf{Unc}^2$ 中直接定义，其中 $\xi_0 = !_{\Gamma^\heartsuit\top} : \Gamma^\heartsuit\top \to \top$，并归纳地定义 $\xi_{n+1} = \Gamma^\heartsuit\xi_n : \Gamma^\heartsuit\Omega_{n+1} \to \Gamma^\heartsuit\Omega_n$。因此，序列 $(\Omega_n, \xi_n)_{n\in\Omega}$ 在 $\mathbf{Unc}^2$ 中构成一个可数余链。

第 3.2 节中普适选择结构里的类型不确定性空间 Ω_i 和 Ω_j 的定义，使它们恰好是 $\mathbf{Unc}$ 中可数余链 $(\Omega_{i,\,n}, \xi_{i,\,n})_{n\in\omega}$ 和 $(\Omega_{j,\,n}, \xi_{j,\,n})_{n\in\omega}$ 的极限。由于 $\mathbf{Unc}^2$ 中的极限是逐分量计算的，因此对象 $\Omega = (\Omega_i, \Omega_j)$ 属于 $\mathbf{Unc}^2$，且是可数余链 $(\Omega_n, \xi_n)_{n\in\omega}$ 的极限。还要注意，极限带有投影 $\zeta_n = (\zeta_{i,\,n}, \zeta_{j,\,n}) : \Omega \to \Omega_n$，它们指回链中，并满足 $\zeta_n = \xi_n \circ \zeta_{n+1}$。

定理 1 和定理 2 背后的关键观察是，函子 $\Gamma^\heartsuit$ 在 $\mathbf{Unc}^2$ 上保持满余链 (Ω_n, ξ_n) 的极限。这由推论 2 得出；推论 2 指出，$\Gamma^\heartsuit$ 保持可数满射余链的极限。要将推论 2 应用于余链 $(\Omega_n, \xi_n)_{n\in\omega}$，我们需要验证对所有 $n \in \omega$，相容态射 ξ_n 都是满态射。通过对 ξ_n 的定义进行归纳法，可以直接验证这一点。在基步中，$\xi_0 = (\xi_i, 0, \xi_j, 0)$，且 $\xi_{i,0} = \Gamma\pi_1$，其中 π_1 是积投影。由于该投影是满态射，并且根据第 C.1 节中的论证，函子 Γ 保持满态射，因此 $\xi_i, 0$ 是满态射。对于 $\xi_j, 0$，我们可以用类似的推理。$\xi_{n+1} = (\xi_{i,n+1}, \xi_{j,n+1}) = (\Gamma(\mathrm{id}_{A_j} \times \xi_{j,n})\ \Gamma(\mathrm{id}_{A_i} \times \xi_{i,n}))$ 是满态射，也很容易得出，因为 Γ 保持满态射。

D.2 定理 1

接下来考虑 $\mathbf{Unc}^2$ 中的对象 $\Gamma^\heartsuit\Omega$。对于这个对象，我们可以通过设定 $\tau_0 = !_{\Gamma^\heartsuit\Omega} : \Gamma^\heartsuit\Omega \to \Omega_0$ 和 $\tau_{n+1} = \Gamma^\heartsuit\zeta_n : \Gamma^\heartsuit\Omega \to \Gamma^\heartsuit\Omega_n$，定义到余链 $(\Omega_n, \xi_n)_{n\in\omega}$ 的态射，并且对所有 n 都满足 $\tau_n = \xi_n \circ \tau_{n+1}$。由定理 4 可知，$\Gamma^\heartsuit\Omega$ 连同投影 $\Gamma^\heartsuit\zeta_n = \tau_{n+1}$ 是余链 $(\Gamma^\heartsuit\Omega_n, \Gamma^\heartsuit\xi_n)_{n\in\omega}$ 的余极限；根据定义，这与链 $(\Omega_{n+1}, \xi_{n+1})_{n\in\omega}$ 相同。我们可以利用这一观察证明，$\Gamma^\heartsuit\Omega$ 连同 τ_n 也满足余链 $(\Omega_n, \xi_n)_{n\in\omega}$ 的极限的泛性质。为此，取 $\mathbf{Unc}^2$ 中任意另一个对象 T，以及满足对所有 $n \in \omega$ 都有 $g_n = \xi_n \circ g_{n+1}$ 的态射 $g_n : T \to \Omega_n$。现在，我们只需将这个 g_n 视为到链 $(\Gamma^\heartsuit\Omega_n, \Gamma^\heartsuit\xi_n)_{n\in\omega}$ 的态射，不带 g_0，并且它对所有 $n \in \omega$ 都满足 $g_{n+1} = \xi_{n+1} \circ g_{n+2} = \Gamma^\heartsuit\xi_n \circ g_{n+1}$。由于 $\Gamma^\heartsuit\Omega$ 是这个链的极限，因此必定存在唯一态射 $u : T \to \Gamma^\heartsuit\Omega$，使得对所有 $n \in \omega$ 都有 $g_{n+1} = \Gamma^\heartsuit\zeta_n \circ u = \tau_{n+1} \circ u$。此外，$g_0 = \tau_0 \circ u$ 显然成立，因为等式两边都是到 $\mathbf{Unc}^2$ 的终对象 $\top = \Omega_0$ 的态射。

我们现在已经看到，Ω 和 $\Gamma^\heartsuit\Omega$ 都满足余链 $(\Omega_n, \xi_n)_{n\in\omega}$ 的极限泛性质。定理 1 随即成立，因为这样的对象在同构意义下至多只有一个。

更准确地说，该同构由唯一的态射 $\mu = (\mu_i, \mu_j) : \Omega \to \Gamma^\heartsuit\Omega$ 给出，并且满足 $\zeta_n = \tau_n \circ \mu$ 对所有 $n \in \omega$，该态射存在是因为 Ω 是一个极限。考虑此态射的各个分量，可得到同构 $\mu_i : \Omega_i \to \Gamma(A_j \times \Omega_j)$ 和 $\mu_j : \Omega_j \to \Gamma(A_i \times \Omega_i)$，它们就是定理 1 表述中提到的同构。

备注 2。可以将事件代数作为基，在 Ω_i 上生成一个拓扑。根据我们的假设，Z、A_i 和 A_j 是有限的，因此所有 $\Omega_{i,\,n}$ 都是有限的。因此，Ω_i 是所谓的有限空间的滤过极限，它众所周知是一个 Stone 空间，也就是说，它是紧致的、豪斯多夫的，并且具有由既开又闭集构成的基。还可以证明，这个拓扑具有可数基，因为对于可数多个空间 $\Omega_{i,\,n}$ 中的每一个，只有有限多个

Ω_i 中的事件是 Ω_i, $_n$ 中集合的原像。具有可数基的紧豪斯多夫空间在 [DT08] 中称为简单空间。

注释 3. 对于本节的结果，以及下一节证明的普适选择结构的普遍性，不要求不确定性空间 Z、A_i 和 A_j 是有限的。对满余链的极限的保持是这些结果的核心，而这一性质对任意不确定性空间都成立。不过，在引理 4 的证明中，我们需要行为被定义为有限阶梯函数，并且 Z 携带离散代数。Z、A_i 和 A_j 的有限性是第 3.4 节关于非冗余性的结果以及 4.3 节中普适偏好结构的嵌入所必需的。

D.3 定理 2

现在我们证明定理 2。考虑任意一个选择结构 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$，它表示为针对 $\Gamma^\heartsuit$ 的余代数 $(T, \theta) = ((T_i, T_j), (\theta_i, \theta_j))$。我们需要证明，存在一个从 (T, θ) 到普适选择结构 $(\Omega\ \mu)$ 的唯一态射υ。

为证明 υ 的存在，首先考虑可测函数 $\upsilon_0 = !_T \colon T \to \Omega_0$，以及通过归纳法定义的 $\upsilon_{n+1} = \Gamma^\heartsuit \upsilon_n \circ \theta \colon T \to \Omega_{n+1}$。通过对 n 进行归纳，我们可以证明这些可测函数满足 $\upsilon_n = \xi_n \circ \upsilon_{n+1}$。基例显然成立，因为从 T 到终对象 $\Omega_0 = \top$ 只有一个态射。对于归纳步骤，我们计算如下:

$$\upsilon_{n+1} = \Gamma^\heartsuit \upsilon_n \circ \theta = \Gamma^\heartsuit(\xi_n \circ \upsilon_{n+1}) = \Gamma^\heartsuit \xi_n \circ \Gamma^\heartsuit \upsilon_{n+1} \circ \theta = \xi_{n+1} \circ \upsilon_{n+2}.$$

由于 Ω 被定义为序列 $(\Omega_n, \xi_n)_{n\in\Omega}$ 的极限，因此存在唯一的态射 $\upsilon \colon T \to \Omega$，使得对所有 $n \in \omega$

$$\upsilon_n = \zeta_n \circ \upsilon. \tag{5}$$

剩下要证明的是，υ 是选择结构的态射，且它在这方面是唯一的 is pro泛性质。

要证明 $\upsilon \colon T \to \Omega$ 是从 (T, θ) 到 $(\Omega\ \mu)$ 的态射，我们需要验证 $\mu \circ \upsilon = \Gamma^\heartsuit \upsilon \circ \theta$。我们通过证明对所有 $n \in \omega$，$\upsilon_n = \tau_n \circ \mu \circ \upsilon$ 和 $\upsilon_n = \tau_n \circ \Gamma^\heartsuit \upsilon \circ \theta$ 都成立来说明这一点。等式$\mu \circ \upsilon = \Gamma^\heartsuit \upsilon \circ \theta$ 随即由序列 $(\Omega_n, \xi_n)_{n\in\omega}$ 的极限 $\Gamma^\heartsuit\Omega$ 的泛性质得出，其投影为 $\tau_n \colon \Gamma^\heartsuit\Omega \to \Omega_n$。

为了证明 $\upsilon_n = \tau_n \circ \mu \circ \upsilon$，我们利用其在 D 节中的定义。2 μ 满足 $\tau_n \circ \mu = \zeta_n$。于是，该断言归结为（5）。

为了证明 $\upsilon_n = \tau_n \circ \Gamma^\heartsuit \upsilon \circ \theta$，我们区分两种情况。若 $n = 0$，则 υ_0 和 $\tau_0 \circ \Gamma^\heartsuit \upsilon \circ \theta$ 都是从 T 到终对象 $\Omega_0 = \top$（属于 Unc^2）的态射。根据终对象的泛性质，它们必然相等。

如果 n 严格为正，我们可以展开 υ_{n+1} 的定义，使用（5），然后展开 t he defi定义 τ_{n+1}，从而得到以下计算

$$\upsilon_{n+1} = \Gamma^\heartsuit \upsilon_n \circ \theta = \Gamma^\heartsuit(\zeta_n \circ \upsilon) \circ \theta = \Gamma^\heartsuit \zeta_n \circ \Gamma^\heartsuit \upsilon \circ \theta = \tau_{n+1} \circ \Gamma^\heartsuit \upsilon \circ \theta.$$

为了证明 υ 是从 (T, θ) 到 $(\Omega\ \mu)$ 的选择结构态射中唯一的一个，考虑 Unc^2 中任意另一个选择结构态射 $\upsilon' \colon T \to \Omega$，使得 $\mu \circ \upsilon' = \Gamma^\heartsuit \upsilon' \circ \theta$。我们证明，对所有 $n \in \omega$，都有 $\upsilon_n = \zeta_n \circ \upsilon'$; 由此可得 $\upsilon' = \upsilon$，因为 υ 被定义为满足性质 (5) 的唯一态射。为了证明 $\upsilon_n = \zeta_n \circ \upsilon'$，我们对 n使用归纳法。在基例中，我们同样有 υ_0 和 $\zeta_0 \circ \upsilon'$ 必定相等，因为它们都是从 T 到 Unc^2 的终对象 $\Omega_0 = \top$ 的态射。在归纳步骤中，我们进行如下计算:

$$\begin{aligned}
\upsilon_{n+1} &= \Gamma^\heartsuit \upsilon_n \circ \theta && \text{definition of } \upsilon_{n+1} \\
&= \Gamma^\heartsuit(\zeta_n \circ \upsilon') \circ \theta && \text{induction hypothesis} \\
&= \Gamma^\heartsuit \zeta_n \circ \Gamma^\heartsuit \upsilon' \circ \theta && \Gamma^\heartsuit \text{ functor} \\
&= \tau_{n+1} \circ \Gamma^\heartsuit \upsilon' \circ \theta && \text{definition of } \tau_{n+1} \\
&= \tau_{n+1} \circ \mu \circ \upsilon' && \text{assumption on } \upsilon' \\
&= \zeta_{n+1} \circ \upsilon' && \text{uniqueness property of } \mu
\end{aligned}$$

D.4 第 3.4 节的结果

在本附录的这一部分，我们证明关于非冗余性的结果。

D.4.1 定义 3 的良定义性

为更详细地说明可观测事件代数的定义，固定选择结构 $\mathcal{X}=(T_i,T_j,\theta_i,\theta_j)$，并考虑代数有序对 $(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)$，其中 $\mathcal{B}_i$ 是集合 T_i 上的代数，$\mathcal{B}_j$ 是集合 T_j上的代数。定义这些代数有序对上的序 $\leq$，使得 $(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)\leq(\mathcal{B}'_i,\mathcal{B}'_j)$ 当且仅当 $\mathcal{B}_i\subseteq\mathcal{B}'_i$且 $\mathcal{B}_j\subseteq\mathcal{B}'_j$。于是，定义 3 将满足以下条件的序 $\leq$中的最小元素 $(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)$ 定义为 $(\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i},\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,j})$:

1. $B^{ob}_{\mathcal{X},\,i}(K,F)\in\mathcal{B}_i$对所有有限的 K，$L\subseteq F(A_j\times(T_j,\mathcal{B}_j))$，且

2. $B^{ob}_{\mathcal{X},\,j}(K,F)\in\mathcal{B}_i$对所有有限的 K，$L\subseteq F(A_i\times(T_i,\mathcal{B}_i))$。

令 O 是满足这两个条件的所有代数有序对的 Set。的良定义性 of $(\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i},\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},j})$ 现在相当于以下论断:

命题 5。 O 包含一个（唯一的）最小元素。

证明。定义集合族对 $(\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_j)$，其中 $\mathcal{L}_i=\bigcap\{\mathcal{B}_i\mid(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)\in O\}$ 且 $\mathcal{L}_j=\bigcap\{\mathcal{B}_j\mid(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)\in O\}$。不难看出，对所有 $(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)\in O$，都有 $(\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_j)\leq(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)$。我们论证 $(\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_j)$ 仍然是一对代数，且它属于 O。因此，$(\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_j)$ 是 O 的最小元素。我们把验证 $(\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_j)$ 仍然是一对代数的任务留给读者。这本质上归结为一个众所周知的事实：任意多个代数的交仍然是一个代数。

为了证明 $(\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_j)\in O$，我们需要证明它满足上述列表中的两个条件。这里只检查第一个条件，即对于所有有限的 $K,L\subseteq F(A_j\times(T_j,\mathcal{L}_j))$，都有 $B^{ob}_{\mathcal{X},i}(K,F)\in\mathcal{L}_i$。为此，任取有限的 $K,L\subseteq F(A_j\times(T_j,\mathcal{L}_j))$。为了证明 $B^{ob}_{\mathcal{X},i}(K,F)\in\mathcal{L}_i$，我们需要证明对于所有 $(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)\in O$，都有$B^{ob}_{\mathcal{X},i}(K,F)\in\mathcal{B}_i$。如果能够证明 $K,L\subseteq F(A_j\times(T_j,\mathcal{B}_j))$，那么这便可由 $(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)$ 同样满足上述列表中的第一项推出。为得到后者，我们论证如下： $F(A_j\times(T_j,\mathcal{L}_j))\subseteq F(A_j\times(T_j,\mathcal{B}_j))$。由于 $\mathcal{L}_j\subseteq\mathcal{B}_j$，可知 $A_j\times(T_j,\mathcal{L}_j)$ 中的每个可测集在 $A_j\times(T_j,\mathcal{B}_j)$ 中也是可测的。因此，对于定义域 $A_j\times(T_j,\mathcal{L}_j)$ 可测的函数，对于定义域 $A_j\times(T_j,\mathcal{B}_j)$ 也可测。 □

D.4.2 命题 1 的证明

为了证明命题 1，我们需要针对定义普适选择结构 $\mathcal{U}$ 时所依据的终端序列定义，再进行一次归纳论证。首先回顾 D.1 节和 D.3 节中的相关事实，这些事实将在接下来的论证中用到。对于每个 n，我们都有一个逼近项 Ω_n，它属于 $\mathbf{Unc}^2$，且 Ω_0 是 $\mathbf{Unc}^2$ 中的终对象，并且 $\Omega_{n+1}=\Gamma^{\heartsuit}\Omega_n$。具体而言，这意味着 $\Omega_{i,\,0}=\top$ 是仅含一个元素的不确定性空间，而 $\Omega_{i,\,n+1}=\Gamma(A_j\times\Omega_{j,\,n})$; 交换 i和 j后也同样成立。给定任意选择结构 $\mathcal{X}=(T,\theta)$，其中 $T=(T_i,T_j)$ 和 $\theta=(\theta_i,\theta_j)$ 属于 $\mathbf{Unc}^2$,，我们随后定义了映射 $\upsilon_n\colon T\to\Omega_n$，使得 $\upsilon_0=!_T$是映入 $\mathbf{Unc}^2$ 中终对象 Ω_0 的唯一态射，而 $\upsilon_{n+1}=\Gamma^{\heartsuit}\upsilon_n\circ\theta$。如果将后者用可测函数表述，则有

$$\upsilon_{i,n+1}=\Gamma(\mathsf{id}_{A_j}\times\upsilon_{j,n})\circ\theta_i\quad\text{and}\quad\upsilon_{j,n+1}=\Gamma(\mathsf{id}_{A_i}\times\upsilon_{i,n})\circ\theta_j.\tag{6}$$

然后，我们利用极限 Ω 的性质得到了一个态射 $\upsilon\colon T\to\Omega$，其由性质 $\upsilon_n=\zeta_n\circ\upsilon$ 唯一确定。这里，$\zeta_n:\Omega\to\Omega_n$ 是从极限到余链的投影。对于可测函数，这一性质意味着

$$\upsilon_{i,n}=\zeta_{i,n}\circ\upsilon_i\quad\text{and}\quad\upsilon_{j,n}=\zeta_{j,n}\circ\upsilon_j.\tag{7}$$

引理 7. 设 $\mathcal{X}=(T_i,T_j,\theta_i,\theta_j)$ 是任意选择结构，并对每个 $n\in\omega$ 考虑 $\upsilon_{i,\,n}\colon T_i\to\Omega_{i,\,n}$，如上所定义。那么，对每个集合 $A\subseteq\Omega_{i,\,n}$，都有 $\upsilon_i^{-1}{}_{,\,n}[A]\in\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$。将 j 替换为 i时也同样成立。

证明。证明采用关于 n 的归纳法。在基例中，$\Omega_{i,\,0}$ 是只有一个元素的不确定性空间。因此，$\upsilon_i^{-1}{}_{,\,0}[A]$ 要么是空集，要么是 T_i 中所有类型构成的全集。因此，它属于代数 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$。

为了证明归纳步骤，我们将在下面证明，对于所有 $K, L \subseteq F(A_j \times \Omega_{j,n})$，其中 $B_L^K = \{C \in \Omega_{j,n+1} \mid C(K) \subseteq L\}$，都有 $\upsilon_i^{-1}{}_{,n+1}[B_L^K] \in \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i}$。首先来看如何由此推出，对于任意集合 $A \subseteq \Omega_{n+1,i}$，都有 $\upsilon_i^{-1}{}_{,n+1}[A] \in \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i}$：由于 $\Omega_{i,n+1}$ 是有限的，并且 $\Omega_{i,n+1} = \Gamma(A_j \times \Omega_{j,n})$ 中任意两个不同的选择函数都可以由某个这样的集合 B_L^K 区分，根据标准论证，每个集合 $A \subseteq \Omega_{n+1,i}$ 都可以写成若干交集的有限并，其中各集合具有 B_L^K 这种形式或为这类集合的补集。由于取原像时，这些并、交和补集都保持不变，并且 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i}$ 是一个代数，因此 $\upsilon_i^{-1}{}_{,n}[A] \in \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i}$。

现在证明，对于所有 $K, L \subseteq F(A_j \times \Omega_{j,n})$，$\upsilon_i^{-1}{}_{,\,n+1}[B_L^K] \in \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$ 成立。首先注意，根据归纳假设，如果 $f \in F(A_j \times \Omega_{j,n})$，$f \circ (\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_{j,n}) \in \Omega_i$，那么 $(\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_{j,n}) \in F(A_j \times (\Omega_j, \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},j}))$。这是因为根据归纳假设，$\Omega_{j,n}$ 中任意集合在 $\upsilon_{j,n}$ 下的原像，在不确定性空间 $(T_j, \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},j})$ 中都是可测的。因此，即使将函数 $f \circ (\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_{j,n})$ 的定义域取为 $A_j \times T_j$，$\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X}\,j}$ 仍然是可测的。接着，固定集合 $K, L \subseteq F(A_j \times \Omega_{j,n})$，并定义有限集

$$K' = \{f \circ (\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_{j,n}) \mid f \in K\} \quad \text{and} \quad L' = \{f \circ (\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_{j,n}) \mid f \in L\}.$$

根据段落开头的观察可知，$K', L' \subseteq F(A_j \times (T_j, \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},j}))$。

要证明 $\upsilon_i^{-1}{}_{,\,n+1}[B_L^K] \in \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$，根据 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$ 的定义，只需证明 $\upsilon_i^{-1}{}_{,\,n+1}[B_L^K] = B^{ob}_{\mathcal{X},\,i}(K', L')$。展开定义可知，这等价于断言：对于所有 $t \in T_i$，都有 $\upsilon_{i,\,n+1}(t)(K) \subseteq L$ 当且仅当 $\theta_i(t)(K') \subseteq L'$。为说明这一点，请看下面的等价关系链：

$$\begin{aligned}
&\upsilon_{i,n+1}(t)(K) \subseteq L \text{ iff } (\Gamma(\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_{j,n}) \circ \theta_i(t))(K) \subseteq L && \text{by (6)}\\
&\qquad \text{iff } \{f \in K \mid f \circ (\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_{j,n}) \in \theta_i(t)(K')\} \subseteq L && \text{definition of } \Gamma\\
&\qquad \text{iff } \theta_i(t)(K') \subseteq L'
\end{aligned}$$

这条链中的最后一个等价关系，可以利用 K' 和 L' 的定义轻松验证。 □

命题 6. 设 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$ 是任意一个选择结构，$\upsilon = (\upsilon_i, \upsilon_j)$ 是指向终端选择结构 $\mathcal{U} = (\Omega_i, \Omega_j, \mu_i, \mu_j)$ 的唯一态射。设 $\mathcal{B}_i$ 是 Ω_i 的代数。那么 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i} = \{\upsilon_i^{-1}[E] \mid E \in \mathcal{B}_i\}$。将 j 替换为 i，也有类似结论。

证明。令 $\mathcal{I}_i = \{\upsilon_i^{-1}[E] \mid E \in \mathcal{B}_i\}$ 和 $\mathcal{I}_j = \{\upsilon_j^{-1}[E] \mid E \in \mathcal{B}_j\}$。由于取原像保持交集和补集，因此可知 $\mathcal{I}_i$ 和 $\mathcal{I}_j$ 是代数。在论证 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i} \subseteq \mathcal{I}_i$ 之前，定义

$$\mathcal{J}_j = \{(\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_j)^{-1}[E] \mid E \text{ measurable in } A_j \times \Omega_j\}.$$

注意，$A_j \times (T_j, \mathcal{I}_j) = (A_j \times T_j, \mathcal{J}_j)$。可以通过考察积空间 $A_j \times (T_j, \mathcal{I}_j)$ 和 $A_j \times \Omega_j$ 中的生成柱集，证明该等式的两个包含关系。接着，考虑任意行为 $f \in F(A_j \times (T_j, \mathcal{I}_j)) = F(A_j \times T_j, \mathcal{J}_j)$。我们使用附录 C.3 中的引理 4 来证明，存在某个行为 $f' \in F(A_j \times \Omega_j)$，使得

$$f = f' \circ (\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_j). \tag{8}$$

为了说明引理 4 的所有假设都得到满足，首先根据 $\mathcal{J}_j$ 的定义，注意到函数 $(\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_j)$ 是从 $(A_j \times T_j, \mathcal{J}_j)$ 到 $A_j \times \Omega_j$ 的可测函数。此外，由于 f 是从 $(A_j \times T_j, \mathcal{J}_j)$ 到离散不确定性空间 Z 的可测函数，因此对于每个 $z \in Z$，$f^{-1}[\{z\}]$ 在 $(A_j \times T_j, \mathcal{J}_j)$ 中是可测的。根据 $\mathcal{J}_j$ 的定义，这意味着对于每个 $z \in Z$，在 $A_j \times \Omega_j$ 中存在某个可测集 E_z，使得 $f^{-1}[\{z\}] = (\mathrm{id}_{A_j} \times \upsilon_j)^{-1}[E_z]$。

为了证明 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i} \subseteq \mathcal{I}_i$，我们证明对于所有有限的 K， $L \subseteq F(A_j \times (T_j, \mathcal{I}_j))$ 中的集合 $B^{ob}_{\mathcal{X},i}(K, L)$ 都属于 $\mathcal{I}_i$。这一点，再加上交换 i 和 j 后得到的类似陈述，表明 $\mathcal{I}_i$ 和 $\mathcal{I}_j$ 满足定义 3 中的性质。由于 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i}$ 和 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},j}$ 被定义为满足这些性质的最小代数，因此 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},i} \subseteq \mathcal{I}_i$ 的结论随即成立。

考虑任意有限的 $K, L \subseteq F(A_j \times (T_j, \mathcal{I}_j))$。定义有限集 $K', L' \subseteq F(A_j \times \Omega_j)$，使得 $K' = \{f' \mid f \in K\}$和 $\{f' \mid f \in L\}$，其中 f'根据（8）由 f定义。由（8）立即可得

$$K = \{g \circ (\mathsf{id}_{A_j} \times \upsilon_j) \mid g \in K'\} \quad \text{and} \quad L = \{g \circ (\mathsf{id}_{A_j} \times \upsilon_j) \mid g \in L'\}. \tag{9}$$

接下来我们将证明

$$B^{ob}_{\mathcal{X},i}(K, L) = (\Gamma(\mathsf{id}_{A_j} \times \upsilon_j) \circ \theta_i)^{-1}[B^{K'}_{L'}], \tag{10}$$

其中$B^{K'}_{L'} = \{C \in \Gamma(A_j \times \Omega_j) \mid C(K') \subseteq L'\}$ 是生成 $\Gamma(A_j \times \Omega_j)$上代数的基本可测集之一。由于 υ 是选择结构的态射，因此可得$B^{ob}_{\mathcal{X},\,i}(K, L) = (\mu_i \circ \upsilon_i)^{-1}[B^{K'}_{L'}] = \upsilon_i^{-1}[\mu_i^{-1}[B^{K'}_{L'}]]$。由此我们得到$B^{ob}_{\mathcal{X},\,i}(K, L) \in \mathcal{I}_i = \{\upsilon_i^{-1}[E] \mid E \in \mathcal{B}_i\}$，因为 $\mu_i : \Omega_i \to \Gamma(A_j \times \Omega_j)$是可测的，因此$\mu_i^{-1}[B^{K'}_{L'}] \in \mathcal{B}_i$。

为证明 (10)，我们展开定义，可知这等价于断言：对所有 $t \in T_i$， $\theta_i(t)(K) \subseteq L$ 当且仅当 $(\Gamma(\mathsf{id}_{A_j} \times \upsilon_j)(\theta_i(t)))(K') \subseteq L'$ 成立。根据 Γ 的定义，这一断言中等价关系右侧展开后得到如下陈述

$$\{g \in K' \mid g \circ \Gamma(\mathsf{id}_{A_j} \times \upsilon_j) \in \theta_i(t)(\{g \circ \Gamma(\mathsf{id}_{A_j} \times \upsilon_j) \mid g \in K'\})\} \subseteq L'.$$

利用 K' 和 L' 的定义以及 (9) 中的等式，可以很容易看出，这等价于 $\theta_i(t)(K) \subseteq L$。

为证明另一个包含关系，取一个可测集 $E \in \mathcal{B}_i$。我们需要证明 $\upsilon_i^{-1}[E] \in \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$。根据极限 Ω_i 上代数 $\mathcal{B}_i$ 的定义可知，存在某个 n ，使得$E = \zeta_{i,\,n}^{-1}[A]$ 对某个 $A \subseteq \Omega_{i,\,n}$ 成立。由引理 7 可知 $\upsilon_{i,\,n}^{-1}[A] \in \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$。由 (7) 可得 $\upsilon_{i,\,n} = \zeta_{i,\,n} \circ \upsilon_i$ ，因此

$$\upsilon_{i,n}^{-1}[A] = (\zeta_{i,n} \circ \upsilon_i)^{-1}[A] = \upsilon_i^{-1}[\zeta_{i,n}^{-1}[A]] = \upsilon_i^{-1}[E].$$

由此我们可以得出 $\upsilon_i^{-1}[E] \in \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$。 □

由于恒等态射是从普适选择结构到其自身的唯一态射，因此作为命题 6 的一个简单推论可知，$\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{U},\,i}$ 等于 Ω_i的代数 $\mathcal{B}_i$。这一性质已在其他情境中被观察到，并在 [DT08] 中称为“极小性”。

在给出命题 1 的证明之前，我们想指出，该命题表明非冗余性与余代数理论中的可观测性概念相同。在 [Jac16] 中，如果从一个余代数到终余代数的唯一态射是单态射，那么这个余代数就称为“可观测的”。在 [Rut00] 中，这类余代数称为“简单的”。

命题 1 的证明。对于从左到右的方向，假设 $\mathcal{X}$ 是非冗余的，并考虑从 $\mathcal{X} = (T_i, T_j, \theta_i, \theta_j)$ 到普适选择结构 $\mathcal{U}$ 的唯一态射 $\upsilon = (\upsilon_i, \upsilon_j)$。为了证明 υ_i 是单射，取满足 $t \neq t'$ 的 $t, t' \in T_i$ 。由于 $\mathcal{X}$ 是非冗余的，$\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$是分离的，因此存在某个 $E \in \mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$，使得 $t \in E$且 $t' \notin E$。根据命题 6，存在某个在 Ω_i 中可测的 E' ，使得 $E = \upsilon_i^{-1}[E']$。但这时必有 $\upsilon_i(t) \neq \upsilon_i(t')$，否则 $\upsilon_i(t') = \upsilon_i(t) \in E'$ ，从而$t' \in \upsilon_i^{-1}[E'] = E$。用 i 替换 j ，同样的推理也成立。

对于反方向，假设 $\upsilon_i\colon T_i \to \Omega_i$ 是单射。为证明 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$ 在 T_i 上是分离的，任取满足 $t \neq t'$的 t, $t' \in T_i$。由于 υ_i 是单射，因此有 $\upsilon_i(t) \neq \upsilon_i(t')$。$\Omega_i$上的代数定义为离散空间 $\Omega_{i,\,n}$所构成的余链 $(\Omega_{i,\,n}, \xi_{i,\,n})_{n \in \omega}$ 的极限代数；该代数是分离的，因为任意两个不同的无限序列在某个有限层 n上的投影都不同，因此可在那里将它们分离。因此，Ω_i中必有一个可测集 E ，使得 $t \in E$ 且 $t' \notin E$。根据命题 6，集合 $\upsilon_i^{-1}[E]$ 属于 $\mathcal{B}^{ob}_{\mathcal{X},\,i}$ ，并且显然该集合能分离 t 和 t'。将 i替换为 j ，也可使用同样的论证。 □

E 第 4 节证明

E.1 初步观察

容易验证 $\mathcal{P}$，因此 Π 和 $\Pi^{\heartsuit}$ 也都是函子，也就是说，它们保持恒等态射和复合。随后，可以仿照上述普适选择结构的构造，构造普适偏好结构。事实上，只需为函子 $\mathcal{P}$重新证明定理 5 的一个变体；这一点已在 [DT08] 的第 3 节证明中隐含完成。

E.2 命题 2

现在我们论证映射 m_X： $\mathcal{P}X \to \mathcal{C}X$ 在每个 Set X上都是单射。为此，假设我们有两个定义在 X上的偏好关系 4 和 $\preccurlyeq'$，使得 $m_X(4) = m_X(\preccurlyeq')$。我们需要论证，对于所有 x、$x' \in X$，$x \preccurlyeq x'$ 当且仅当 $x \preccurlyeq' x'$。由于情况具有对称性，只需检验一个方向。因此，假设 $x \preccurlyeq x'$。我们希望证明 $x \preccurlyeq' x'$。只需考虑 $x \neq x'$ 的情形，因为否则由 $\preccurlyeq'$ 是自反的可推出 $x \preccurlyeq' x'$。

由于 $x \neq x'$ 和 $x \preccurlyeq x'$，可知不可能出现 $x' \preccurlyeq x$，否则将与 4 的反对称性矛盾。正如我们在注1中解释的，对反对称性的这一使用至关重要。由于 $x \preccurlyeq x'$ 且 $x' \preccurlyeq x$ 不成立，可知 x' 是 Set $\{x, x'\}$ 在关系 4 下唯一的极大元。因此， $m_X(4)(\{x, x'\}) = \{x'\}$。

根据 $m_X(4) = m_X(\preccurlyeq')$ 的假设可知， $m_X(\preccurlyeq')(\{x, x'\}) = \{x'\}$。但这只有在 $x \preccurlyeq' x'$ 的情况下才可能，而这正是我们需要证明的内容。

E.3 命题 3

命题 3 表明， λ 是从函子 Π 到函子 Γ 的自然变换。容易检查得出，这归结为证明 m 是从 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{C}$ 的自然变换。这意味着我们需要证明，对于每个函数 $f\colon\ X \to Y$，都有 $m_X \circ \mathcal{P}f = \mathcal{C}f \circ m_Y$。注意，这里的 Y 和 X 发生了交换，因为 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{C}$ 是逆变函子。

固定任意函数 $f\colon\ X \to Y$、偏好关系 $\preccurlyeq \in \mathcal{P}Y$ 和有限集 $K \subseteq X$。我们需要证明

$$m_X(\mathcal{P}f(\preccurlyeq))(K) = \mathcal{C}f(m_Y(\preccurlyeq))(K).$$

对于从左到右的包含关系，任取 $x \in m_X(\mathcal{P}f(4))(K)$。我们需要证明 $x \in \mathcal{C}f(m_Y(4))(K)$。这意味着我们希望证明 $x \in f^{-1}[m_Y(4)(f[K])] \cap K$。我们的假设 $x \in m_X(\mathcal{P}f(4))(K)$ 意味着 x 是集合 K 在序 $\preccurlyeq^f = \mathcal{P}f(4)$ 下的极大元。因此 $x \in K$，接下来只需证明 $x \in f^{-1}[m_Y(4)(f[K])],$，这意味着 $f(x)$ 是集合 $f[K]$ 在序 4 下的极大元。因此，考虑 $f[K]$ 的任意其他元素，它必定可写成 $f(x')$ 的形式，其中某个 $x' \in K$ 满足 $f(x) \preccurlyeq f(x')$。我们需要证明，那么同样有 $f(x') \preccurlyeq f(x)$。根据第 4.1 节中定义 $\preccurlyeq^f$ 的公式（1）可知， $x \preccurlyeq^f x'$。接着利用 x 是 $\preccurlyeq^f$ 中的极大元这一事实，可以得出 $x' \preccurlyeq^f x$。再次使用公式（1），便得到所需的 $f(x') \preccurlyeq f(x)$。

现在考虑从右到左的包含关系。任取 $x \in f^{-1}[m_Y(4)(f[K])] \cap K$。我们需要证明 $x \in m_X(\mathcal{P}f(4))(K)$，这意味着 x是集合 K在序$\preccurlyeq^f = \mathcal{P}f(4)$下的极大元。显然， $x \in K$。为了证明 x是 $\preccurlyeq^f$-极大元，取 K中的任意另一个 x'，满足 K 且 $x \preccurlyeq x'$。我们需要证明 $x' \preccurlyeq x$。由 $x \preccurlyeq x'$，结合 (1) 可得 $f(x) \preccurlyeq f(x')$。现在利用 $x \in f^{-1}[m_Y(4)(f[K])]$。由此可得 $f(x) \in m_Y(4)(f[K])$。这意味着 $f(x)$ 是集合 $f[K]$中的极大元。由于 $x' \in K$， $f(x')$ 也属于集合$f[K]$。根据 $f(x)$ 在 $f[K]$中的极大性，由 $f(x) \preccurlyeq f(x')$ 可得 $f(x') \preccurlyeq f(x)$。结合 (1)，我们得到 $x' \preccurlyeq x$。

E.4 定理 3

在定理 3 的证明中，我们还需要一个来自范畴论的概念，它是单态态射的推广。对于任意指标集 J，若一族态射 $(f_j\colon Y \to X_j)_{j\in J}$ 满足：对于所有进一步的态射 $g,h\colon T \to Y$，只要对所有 $j \in J$ 都有 $f_j \circ g = f_j \circ h$，就必有$g = h$，则称其为联合单态。

单态态射族与余链的极限密切相关。利用余链 $(X_n, f_n)_{n\in\omega}$ 的极限 X_ω 连同其投影 ζ_n 的泛性质，很容易证明所有投影 $(p_n)_{n\in\omega}$ 构成的族是联合单态的。此外，若另有一个对象 T，它带有一个联合单态族 $(g_n\colon T \to X_n)_{n\in\omega}$，满足对所有 n 都有 $g_n = f_n \circ g_{n+1}$，那么由于极限 X_ω 的泛性质，存在唯一态射 $u\colon T \to X_\omega$，且该态射是单态射。

为了证明定理 3，令 $\mathcal{U}' = (\Omega', \mu')$ 为普适偏好结构，并将其表示为 $\Pi^\heartsuit$ 的余代数。我们假设 Ω', μ'、Ω'_n, ζ'_n、.....的定义方式与 D 节中普适选择结构的对象 Ω、 μ、Ω_n, ζ_n、.....相同，只是使用 $\Pi^\heartsuit$ 而不是 $\Gamma^\heartsuit$。

接下来考虑选择结构 $\lambda(\mathcal{U}') = (\Omega', \lambda^\heartsuit{}_{\Omega'} \circ \mu')$，其中 $\lambda^\heartsuit$ 是从 $\Pi^\heartsuit$ 到 $\Gamma^\heartsuit$ 的自然变换，其定义使其逐分量作用。请注意，这一定义中的$\lambda(\mathcal{U}')$与 4.3 节给出的定义相对应。根据定理 2，存在从 $\lambda(\mathcal{U}')$到普适选择结构 $\mathcal{U}$ 的唯一态射 υ。

定理 3 的主张是，这个 υ 是单态射。由于定理 2 υ 中使用极限 Ω 的泛性质，由逼近族 $(\upsilon_n : \Omega'_n \to \Omega_n)_{n\in\omega}$ 构造得出，因此只需证明这个族是联合单态的。

定义态射 $\delta_0 = !^{\Omega'_0}\colon \Omega'_0 \to \Omega_0$，并归纳地定义 $\delta_{n+1} = \Gamma^\heartsuit\delta_n \circ \lambda^\heartsuit{}_{\Omega'_n}\colon \Omega'_{n+1} \to \Omega_{n+1}$。通过对 n 进行归纳，可以证明所有这些 δ_n 都是单态射。基例成立，因为 Ω'_0 是 $\mathbf{Unc}^2$ 中的终对象；在归纳步骤中，我们使用命题 2，以及 $\Gamma^\heartsuit$ 保单态射这一事实，这一点将在 C.2 节证明。后者要求被保留的单射可测函数 $\delta_n\colon \Omega'_n \to \Omega_n$ 的像具有离散代数。之所以如此，是因为可以证明，若 A_i 和 A_j 是有限的，那么所有 Ω'_n也都是有限的。

接下来，我们对 n 进行归纳，证明

$$\upsilon_n = \delta_n \circ \zeta'_n. \tag{11}$$

由此可知，υ_n 是联合单态，因为 ζ'_n 是从极限 Ω' 出发的投影，因此联合单态；而且 δ_n 全都是单态射。

对于 (11) 的基例，我们有 $\upsilon_0 = \delta_0 \circ \zeta'_0$，因为这两个态射都映射到 $\mathbf{Unc}^2$的终对象 Ω_0。

对于归纳步骤，我们使用下面的计算：

$$\begin{aligned}
\upsilon_{n+1} &= \Gamma^\heartsuit\upsilon_n \circ \lambda^\heartsuit_{\Omega'} \circ \mu' && \text{definition of } \upsilon_{n+1}\\
&= \Gamma^\heartsuit(\delta_n \circ \zeta'_n) \circ \lambda^\heartsuit_{\Omega'} \circ \mu' && \text{induction hypothesis}\\
&= \Gamma^\heartsuit\delta_n \circ \Gamma^\heartsuit\zeta'_n \circ \lambda^\heartsuit_{\Omega'} \circ \mu' && \Gamma^\heartsuit \text{ functor}\\
&= \Gamma^\heartsuit\delta_n \circ \lambda^\heartsuit_{\Omega'_n} \circ \Pi^\heartsuit\zeta'_n \circ \mu' && \lambda^\heartsuit \text{ natural transformation}\\
&= \Gamma^\heartsuit\delta_n \circ \lambda^\heartsuit_{\Omega'_n} \circ \tau'_{n+1} \circ \mu' && \text{definition of } \tau'_{n+1}\\
&= \Gamma^\heartsuit\delta_n \circ \lambda^\heartsuit_{\Omega'_n} \circ \zeta'_{n+1} && \text{uniqueness property of } \mu'\\
&= \delta_{n+1} \circ \zeta'_{n+1} && \text{definition of } \delta'_{n+1}
\end{aligned}$$