arXiv:2304.11587v1 [math.QA] 23 Apr 2023

微分分次顶点算子代数及其泊松代数

ANTOINE CARADOT[1], CUIPO JIANG[2], 和 ZONGZHU LIN[3]

Abstract. 本文定义了微分分次顶点算子代数，以及其相关的 Zhu代数和 C_2-代数上的代数结构。我们还引入了相应的模的概念，并研究了不同模范畴之间的关系。

Contents

1. 引言 2 2. 微分分次复形范畴基础 4 2.1. 超辫分次向量空间范畴与分次微分（上链）复形 4 2.2. 张量积与内同态 5 2.3. 结合微分分次代数与微分分次李代数 6 2.4. 微分分次泊松代数与微分分次泊松模 8 2.5. Loop 复形及其在链复形范畴中的解释 11 2.6. 微分过滤代数 12 2.7. 微分过滤代数与泊松微分滤过代数上的权滤过 14 3. 微分分次顶点（算子）代数 15 3.1. 对称张量范畴Ch中的顶点代数 15 3.2. 共形结构 20 4. 微分分次顶点（算子）代数的微分分次模 21 4.1. 微分分次顶点代数的情形 21 4.2. 微分分次顶点算子代数的情形 22 5. C_2代数及其泊松模范畴 25 5.1.C_2代数 25 5.2. 相关微分分次泊松 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模 26 6. Zhu代数与伴随分次代数 28 6.1. Zhu代数 28 6.2. 按次数滤过 30 6.3. 按权滤过 33

日期：2023年4月25日。2020年数学主题分类：主要分类 17B69、16E45；次要分类 17B63。

6.4. 依次使用两种滤过 35 7. 伴随 $A(V^{[*]})$-双模与关联分次模 37 7.1. $A(V^{[*]})$-双模 37 7.2. 与$\mathrm{gr}^{[*]}\, A(V^{[*]})$相关的模 41 7.3. 与$\mathrm{gr}_*\, A(V^{[*]})$相关的模 43 7.4. 依次使用两种模过滤 44 8. $R^{[*]}(M^{[*]})$与关联分次模之间的关系 44 8.1. $R^{[*]}(M^{[*]})$与$\mathrm{gr}^{[*]}\, A(M^{[*]})$ 44 8.2. $R^{[*]}(M^{[*]})$与$\mathrm{gr}_*\, A(M^{[*]})$ 47 8.3. $R^{[*]}(M^{[*]})$与$\mathrm{gr}_*\mathrm{gr}^{[*]}\, A(M^{[*]})$ 48 8.4. 关于这些函子的更多信息 49 参考文献 50

1. 引言

顶点代数有许多变体，例如顶点超代数和分次顶点代数（[DH]）。微分分次顶点代数是它们的自然结合。研究微分分次顶点代数的动机既来自同调代数，也来自代数几何。在代数几何中，Joyce 的一系列工作涉及 Donaldson-Thomas 不变量的计算，其中的顶点代数实际上是某些模叠的上同调[J，L]。此外，还有量子顶点代数以及定义在正特征域上的顶点代数。微分分次顶点代数也是一种用于构造定义在更一般的编织幺半范畴上的顶点代数的试验模型（[JS]），其目标是在三角对称张量范畴和代数叠上定义导出顶点代数。

本文只需将k-向量空间（定义在特征为零的域 k 上）的对称张量范畴替换为k-向量空间的微分复形范畴。这一简单的改变已在 Zhu 代数上产生了意想不到的结构：它不仅是一个关联代数，还带有两个滤过，充当微分分次泊松代数的变形（[LWZ]）。本文聚焦于微分复形的阿贝尔范畴；与经典的向量空间范畴不同，该范畴中的态射空间和内同态对象都带有微分。我们将研究关联 C_2-代数与微分过滤代数范畴中的 Zhu 代数之间的关系；后者是替代向量空间范畴的另一种模型。

范畴论方法的一个主要目标是理解并诠释环路空间，或者更确切地说，是它的函子代数 $\mathbf{k}[t, t^{-1}]$。事实上，应将此代数理解为带有除子 $\{0\}$ 的 $\mathbb{A}^1$，而应将向量算子理解为连续分布。这样一来， C_2-代数和 Zhu代数都将具有几何诠释。这将在另一篇著作中加以阐述。

本文的结构如下：第2 节回顾微分范畴的对称张量范畴以及环复形的基本概念。由于 Zhu代数不是微分分次（dg）代数，我们引入微分过滤代数的概念（即微分过滤向量空间的对称张量范畴中的代数对象）。Zhu代数还有另一个自然滤子（按权划分），使其成为双过滤代数。此外，它几乎交换（参见[CG]），因此其伴随分次代数是一个微分分次泊松代数。我们还需要这些代数对象在相应张量范畴中的表示这一概念。

第3节旨在定义微分分次顶点代数及其性质。对于每个微分分次顶点代数，其上同调自动构成一个分次顶点代数。它是一个 $\mathbb{Z}$-分次的超顶点代数提升。本文不会给出许多例子。在一篇即将发表的论文（[CJL3]）中，我们将定义微分分次顶点李代数，并以此为基础应用标准构造，从任意微分分次李代数构造微分分次顶点算子代数。

第4 节定义了各种模范畴，这反映了我们所考察的顶点代数所处的张量范畴。

在第5节中，我们构造微分分次顶点代数 C_2-代数 $R^{[*]}(V^{[*]})$，它自然是一个微分分次泊松代数。存在一个自然函子，将微分分次顶点代数模范畴映到该 C_2-代数的泊松模范畴。

微分分次顶点代数的 Zhu代数 $A(V^{[*]})$ 将在第 6 节中研究。这个代数比预想的复杂得多。在构造过程中，dg结构被破坏了，因为微分分次没有传递到商中，这主要是由于我们没有将微分次数与共形权区分开来：我们认为 t(来自环代数) 的上同调次数为2、共形权为1。在定义中，也可以将 t 的上同调次数定义为 $2k$。选择 $k = 1$ 源于 Joyce 利用上同调Hall代数构造顶点代数的方法 [J, L], 其中代数 $\mathsf{k}[t] = H^*_{G_m}(\{pt\})$ 中 t 的上同调次数为2。如果 $k = 0$，那么 $A(V^{[*]})$ 将是一个几乎交换的过滤关联微分分次代数。对于 $k = 1$， $A(V^{[*]})$ 同时具有上同调滤过和权滤过。这个代数及其模范畴发挥着谱序列范畴的作用。

第 7 节致力于研究双过滤 Zhu 代数的左、右双过滤模，以及它们的伴随分次代数和模。相伴权分次微分分次代数与我们进行伴随分次构造的顺序无关。这种伴随分次构造正是处理谱序列时取极限的构造。

在第8节中，我们比较分次微分分次泊松代数 $R^{[*]}(V^{[*]})$与相关的（分次）微分分次泊松代数$\mathsf{gr}(A(V^{[*]}))$——以及它们的模。所得结果是范畴2-范畴中的一个图表。

如前文所述，我们所考虑的微分复形范畴是一个阿贝尔范畴。它具有自然的2-范畴结构，其中2-态射是同伦等价。因此，可以通过定义同伦李代数和同伦顶点代数、同伦泊松代数，并重复本文中的大部分构造，自然地在同伦范畴中开展工作。关于这一一般情形的处理，我们将留待今后的工作。

在 [CJL1] 和 [CJL2], 中，给出 $R(V)$ 的一个表示后，我们构造了平凡 $R(V)$-模的 Tate 分解，它是一个分次交换微分分次代数。其零次部分是多项式代数 $R(V)$，其他次数的部分都是零次部分上的自由模。在 dg 情形下， $R^{[*]}(V^{[*]})$ 是一个分次交换微分分次代数，并且可以构造 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 的 Tate 分解 $T(R^{[*]}(V^{[*]}))$。我们猜想，应该存在一个 dg 顶点代数的 Tate 分解 $T(V^{[*]})$，其 C_2-代数是一个 dg 代数的 Tate 分解。现在，取代多项式代数的应当是与一个 dg 李代数相对应的泛微分分次顶点代数。我们预期，这一构造将是有理仿射顶点代数范畴中 BGG 分解的一种形式。这应当提供一个用于分解的 dg 顶点代数，可与 [B] 中 dg 概形的分解相比较。

2. Basics of the category of differential graded complexes

本节的主要参考文献是 [SP]第12章。

2.1. 超辫分次向量空间与分次微分（上链）复形的范畴。令 Vec^s 为分次$\mathbb{C}$-向量空间的对称张量范畴。设 $V^{[*]}=\oplus_{p\in\mathbb{Z}}V^{[p]}$ 带有 Koszul 辫 $T_{V^{[*]},U^{[*]}}\colon V^{[*]}\otimes U^{[*]}\to U^{[*]}\otimes V^{[*]}$，定义如下：

$$T_{V,U}(v\otimes u)=(-1)^{|v||u|}u\otimes v$$

对所有齐次向量 $v\in V^{[|v|]}$ 和 $u\in U^{[|u|]}$，其次数分别为 $|v|$ 和 $|u|$.

给定两个分次向量空间 $V^{[*]}=\oplus_n V^{[n]}$ 和 $U^{[*]}=\oplus_n U^{[n]}$，Vec^s 中的同态定义为 $\mathrm{Hom}^{[0]}_{\mathbb{C}}(V^{[*]},U^{[*]})$，由线性映射 $f\colon V^{[*]}\to U^{[*]}$组成，满足 $f(V^{[n]})\subseteq U^{[n]}$。

我们将内部 Hom 空间 $\mathrm{Hom}^{[*]}_{\mathrm{Vec}^s}(V^{[*]},U^{[*]})=\oplus_p\mathrm{Hom}^{[0]}_{\mathbb{C}}(V^{[*]},U[p]^{[*]})$ 记作。这里，$U[p]^{[*]}$ 是同一个向量空间 $U^{[*]}$，其分次由 $U[p]^{[n]}=U^{[n+p]}$ 定义。我们注意到，如果 V 只有有限多个非零齐次分量，则对于所有分次向量空间$U^{[*]}$，作为 $\mathbb{C}$-向量空间，有 $\mathrm{Hom}^{[*]}_{\mathbb{C}}(V^{[*]},U^{[*]})=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{[*]},U^{[*]})$。如果 U 不是分次的，则等式不成立，我们将使用记号 $\mathrm{Hom}^{[*]}_{\mathbb{C}}$ 以区别于非分次的 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}$。特别地，$\mathrm{End}^{[*]}_{\mathbb{C}}(V^{[*]})=\mathrm{Hom}^{[*]}_{\mathbb{C}}(V^{[*]},V^{[*]})$ 是一个分次结合代数。

令 Ch 为 $\mathbb{C}$-向量空间的微分（上链）复形范畴，其对象为 $(V^{[*]},d^{[*]})$，其中 $V^{[*]}$ 是 Vec^s 中的一个对象，且 $d^{[*]}\in\mathrm{Hom}^{[1]}(V^{[*]},V^{[*]})$，满足 $d^{[*]}\circ d^{[*]}=0$。此处 $d^{[p]}\colon V^{[p]}\to V^{[p+1]}$ 是一个线性映射。态射

$f\colon (V^{[*]}, d_V^{[*]}) \to (W^{[*]}, d_W^{[*]})$ 在 Ch 中是链映射，即 $f = (f^{[p]}\colon V^{[p]} \to W^{[p]})$，满足 $d_W^{[p]} \circ f^{[p]} = f^{[p+1]} \circ d_V^{[p]}$。我们用 $\mathsf{Ch}((V^{[*]}, d_V^{[*]}), (W^{[*]}, d_W^{[*]}))$ 表示所有链映射构成的集合。它是一个向量空间，因此 Ch 是具有小极限和余极限的阿贝尔范畴。注意，$\mathsf{Ch}((V^{[*]}, d_V^{[*]}), (W^{[*]}, d_W^{[*]})) \subseteq \mathsf{Hom}^{[0]}(V^{[*]}, W^{[*]})$，且一般而言等号并不成立。

我们定义 $Z^{[p]}(V^{[*]}) = \text{核}(d_V^{[p]}\colon V^{[p]} \to V^{[p+1]})$，并将其元素称为 p-余循环。然后 $Z^{[*]}(V^{[*]}) \subseteq V^{[*]}$ 是微分为零的子复形。类似地，$B^{[p]}(V^{[*]}) = d^{[p-1]}(V^{[p-1]})$ 定义了 $Z^{[*]}$ 的子复形 $B^{[*]}$，而记作 $H^{[*]}(V^{[*]}, d_V^{[*]}) = Z^{[*]}/B^{[*]}$ 的上同调复形也是微分为零的复形。注意，$Z^{[*]}$、$B^{[*]}$ 和 $H^{[*]}$ 是从 Ch 到 Ch 的加性函子，其像包含于满子范畴 Vec^s 中。

次数平移函子 $[n]\colon \mathsf{Ch} \to \mathsf{Ch}$ 定义为 $(V^{[*]}, d^{[*]}) \to (V[n]^{[*]}, d[n]^{[*]})$，其中 $V[n]^{[p]} = V^{[p+n]}$，微分为 $d[n]^{[p]} = (-1)^n d^{[n+p]}$。显然，$[n]\colon \mathsf{Ch} \to \mathsf{Ch}$ 是 Ch 上的加性自函子，并且 $[n] \circ [m] = [n+m]$。由此可得 $H^{[p]}((V[n]^{[*]}, d[n]^{[*]}) = H^{[p+n]}((V^{[*]}, d^{[*]})$，但该自然同构并不是恒等映射。

2.2. 张量积与内同态。Ch 中的张量积定义如下

$$(V^{[*]}, d_V^{[*]}) \otimes (U^{[*]}, d_U^{[*]}) = (V^{[*]} \otimes U^{[*]}, d_{V\otimes U}^{[*]})$$

其中，对于齐次的 $v \in V^{[*]}$ 和 $u \in U^{[*]}$，有 $d_{V\otimes U}(v\otimes u) = d_V(v)\otimes u + (-1)^{|v|} v \otimes d_U(u)$。注意到，编织映射与 Vec^s 中的相同

$$d_{U\otimes V}(T_{V,U}(v\otimes u)) = (-1)^{|v||u|}(d_U(u)\otimes v + (-1)^{|u|} u \otimes d_V(v)) = T_{V,U}(d_{V\otimes U}(v\otimes u))$$

因此，$T_{V,U}$ 是一个链映射，因而是 Ch 范畴中的一个态射。将 Ch 构造成关于 $\mathbb{C}$ 的严格对称张量范畴所需的其他条件可作为练习验证。

设 $\mathbb{C}$为满足以下条件的复形：$\mathbb{C}$ 位于零次。则 $\mathbb{C}[n]$ 是一个复形，其中 $\mathbb{C}$ 置于次数 $-n$。函子 $[n]$ 可表示为 $\mathbb{C}[-n]$（参见下文的（3））。事实上，我们有 $V[n]^{[*]} = \mathsf{Hom}^{[*]}(\mathbb{C}[-n], V^{[*]}) = (\mathbb{C}[n]) \otimes V^{[*]}$。

类似地，$\mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]})$ 配备如下定义的微分

$$d(f)(v) = d_W(f(v)) - (-1)^{|f|} f(d_V(v)) \tag{1}$$

对于所有 $f \in \mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]})$ 以及齐次的 $v \in V^{[*]}$，它也是链复形范畴 Ch 中的一个对象。

标准的伴随线性映射诱导出

$$\mathsf{Ch}((U^{[*]}, d_U^{[*]}) \otimes (V^{[*]}, d_V^{[*]}), (W^{[*]}, d_W^{[*]})) = \mathsf{Ch}((U^{[*]}, d_U^{[*]}), \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]})).$$

更一般地，我们还有

$$\mathsf{Hom}^{[*]}(U^{[*]} \otimes V^{[*]}, W^{[*]}) = \mathsf{Hom}^{[*]}(U^{[*]}, \mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]})). \tag{2}$$

此外

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}^{[*]}(V^{[*]}[-n], W^{[*]}) = \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]}[n]) = \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]})[n]. \tag{3}$$

这也可以看作（2）在特殊情形 $U^{[*]}=\mathbb{C}[-n]$ （它是 链复形范畴 中的一个紧对象，且总空间为有限维）的特殊情形。

2.3. 结合微分分次代数和微分分次李代数。 对于任意对象（$V^{[*]}$， $d_V^{[*]}$），$\mathsf{End}_{\mathbb{C}}^{[*]}(V^{[*]})$ 也是 链复形范畴 中的一个对象，从而使 $\mathsf{End}^{[*]}(V^{[*]})$ 成为一个结合微分分次代数（参见[LWZ]）。对于齐次算子，我们将在 $\mathsf{End}^{[*]}(V^{[*]})$ 中使用分次交换子（称为超交换子） f， g 其定义为

$$[f,g]^s=f\circ g-(-1)^{|f||g|}g\circ f.$$

于是 $\mathsf{End}^{[*]}(V^{[*]})$ 成为一个度数0的微分分次李代数。微分分次李代数（零次）是一个对象（$L^{[*]}$， $d_L^{[*]}$），带有一个零余循环 $[-,-]\in Z^{[0]}(\mathsf{Hom}^{[*]}(L^{[*]}\otimes L^{[*]},\ L^{[*]}))$，即

$$d_L[x,y]=[d_L(x),y]+(-1)^{|x|}[x,d_L(y)]$$

满足

(i) (Skew symmetry) $[x,y]=-(-1)^{|x||y|}[y,x]$;

(ii)（雅可比恒等式）

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+(-1)^{|x||y|}[y,[x,z]]$$

对所有齐次的 $x,y,z\in L^{[*]}$ 均成立。

注意，$\mathsf{End}^{[*]}(L^{[*]})$ 是一个微分分次李代数。定义 $\mathsf{ad}:\ L^{[*]}\to\mathsf{End}^{[*]}(L^{[*]})$，使得$x\to\mathsf{ad}(x)=[x,-]$。雅可比恒等式等价于

$$\mathsf{ad}([x,y])=\mathsf{ad}(x)\circ\mathsf{ad}(y)-(-1)^{|\mathsf{ad}(x)||\mathsf{ad}(y)|}\mathsf{ad}(y)\circ\mathsf{ad}(x).$$

因此，在反对称性条件下，当且仅当 $\mathsf{ad}:\ L^{[*]}\to\mathsf{End}^{[*]}(L^{[*]})_{Lie}$ 是一个零次微分分次李代数同态时，括号 $[-,-]$ 在 L 上定义了微分分次李代数结构。

一般来说（参见[LWZ]），度数为 p 的微分分次李代数是链复形范畴 $L^{[*]}$中的一个对象 $d_L^{[*]}$，并且配备一个 $[-,-]\in Z^{[0]}(\mathsf{Hom}^{[*]}(L[-p]^{[*]}\otimes L[-p]^{[*]},L[-p]^{[*]})$，使得 $(L[-p]^{[*]},[-,-])$ 成为一个零次微分分次李代数。注意，对于 $x\in L^{[*]}$ 齐次元素，我们有 $|x|=|x|_{L[n]}+n$，因此 $|x|+p=|x|_{L[-p]}$。由此可知，我们需要满足以下条件：

(i) 反对称 $[x,y]=-(-1)^{(|x|+p)(|y|+p)}[y,x]$; (ii) 雅可比恒等式

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+(-1)^{(|x|+p)(|y|+p)}[y,[x,z]]$$

对所有齐次的 x、 y、 $z\in L^{[*]}$。

利用链复形同构

$$\mathsf{Hom}^{[*]}(L[-p]^{[*]}\otimes L[-p]^{[*]},L[-p]^{[*]})\cong\mathsf{Hom}^{[*]}(L^{[*]}\otimes L^{[*]},L[p]^{[*]})$$

de由 $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ 定义，并且 $\widetilde{\phi}(x \otimes y) = (-1)^{p|x|}\phi(x \otimes y)$，我们得到一个同构

$$Z^{[0]}(\mathrm{Hom}^{[*]}(L[-p]^{[*]} \otimes L[-p]^{[*]}, L[-p]^{[*]})) \xrightarrow{\cong} Z^{[0]}(\mathrm{Hom}^{[*]}(L^{[*]} \otimes L^{[*]}, L[p]^{[*]})),$$
$$\xrightarrow{\cong} Z^{[p]}(\mathrm{Hom}^{[*]}(L^{[*]} \otimes L^{[*]}, L^{[*]})).$$

~第一个同构是映射 $\phi \mapsto \phi$，第二个是（3）中的恒等映射。因此，次数为 p 的微分分次李代数是一个对象（$L^{[*]}$，$d_L^{[*]}$），其中有一个 p-余循环，属于$Z^{[p]}$（$\mathrm{Hom}^{[*]}$（$L^{[*]} \otimes L^{[*]}$，$L^{[*]}$））并满足李代数关系。

这里，$[-,-] \in Z^{[p]}(\mathrm{Hom}^{[*]}(L^{[*]} \otimes L^{[*]}, L^{[*]}))$ 是一个 p-余循环意味着 $d_L \circ [-,-] = (-1)^p[-,-] \circ d_{L\otimes L}$，即

$$d_L[x,y] = (-1)^p[d_L(x), y] + (-1)^{|x|+p}[x, d_L(y)]$$

对于所有 x、$y \in L$ 齐次。定义 $[x,y]' = (-1)^{p|x|}[x,y]$。于是

$$d_L[x,y]' = [d_L(x), y]' + (-1)^{|x|+p}[x, d_L(y)]'.$$

这里 $|x| + p = |x|_{L[-p]}$。于是 $[-,-]' \in Z^{[0]}(\mathrm{Hom}^{[*]}(L[-p]^{[*]} \otimes L[-p]^{[*]}, L[-p]^{[*]}))$。两个微分分次李代数之间的同态是满足预期条件的链映射。

微分分次李代数（$L^{[*]}, d_L^{[*]}$）的微分分次模是（$M^{[*]}, d_M^{[*]}$）链复形范畴 中的一个对象，并配有一个微分分次李代数同态（$L^{[*]}, d_L^{[*]}$）$\to \mathrm{End}^{[*]}(M^{[*]})$（详情参见 [LWZ]）。

根据定义可知，我们有

$$\mathrm{Ch}((V^{[*]}, d_V^{[*]}), (W^{[*]}, d_W^{[*]})) = Z^{[0]}(\mathrm{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]})).$$

因此，链映射是 $\mathrm{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]})$ 中的 0-余循环。

显然，通过取零微分，我们有函子 $\mathrm{Vec}^s \to$Ch。此外，还有一个上同调函子 $H^{[*]}$: Ch $\to$Vec^s。上述函子 $\mathrm{Vec}^s \to$ Ch 是上同调函子的一个截面。本文不会讨论顶点算子代数的同伦，这将在后续论文中处理。

给定域 k 上链复形范畴 Ch 中的一个复形（$V^{[*]}, d_V^{[*]}$），结合微分分次代数 $A^{[*]} = \mathrm{End}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(V^{[*]})$ 具有一个自然的微分分次李代数结构，其超李括号（度数0）定义为

$$[f,g]^s = f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f$$

对于度数分别为 $|f|$ 和 $|g|$ 的齐次线性映射 f 和 g。事实上$[-,-]^s \in Z^{[0]}(\mathrm{Hom}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(A^{[*]} \otimes A^{[*]}, A^{[*]}))$，因为

$$d_A[f,g]^s = [d_A f, g]^s + (-1)^{|f|}[f, d_A g]^s.$$

设 $R^{[*]} = \bigoplus_p R^{[p]}$ 是一个微分分次代数。乘法 $m: R^{[*]} \otimes R^{[*]} \to R^{[*]}$ 是一个度数0链映射（即链复形范畴 Ch 中的一个态射）。我们不假设乘法满足

结合律。我们将次数为 p 的分次导子 $D : R^{[*]} \to R^{[*]}$ 定义为一个元素$D \in \mathrm{End}^{[p]}(R^{[*]})$, 满足

$$D(m(x \otimes y)) = m(D(x) \otimes y) + (-1)^{p|x|} m(x \otimes D(y))$$

对所有 x齐次元素均成立。下文中我们将简单记作 $xy = m(x \otimes y)$。

令 $\mathrm{Der}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(R^{[*]})$ 为由所有分次微分 D 生成的 $\mathrm{End}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(R^{[*]})$ 的分次子空间，并令 d 为复形 $\mathrm{End}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(R^{[*]})$ 的微分。对于 $D \in \mathrm{Der}^{[p]}{}_{\mathbf{k}}(R^{[*]})$，有

$$\begin{aligned}
d(D)(xy) &= d_R(D(xy)) - (-1)^p D(d_R(xy))), \\
&= d_R(D(x)y + (-1)^{p|x|} xD(y)) - (-1)^p D(d_R(x)y + (-1)^{|x|} x d_R(y)), \\
&= d_R(D(x))y + (-1)^{p+|x|} D(x) d_R(y) + (-1)^{p|x|} d_R(x) D(y) \\
&\quad - (-1)^p D(d_R(x))y - (-1)^{p(|x|+2)} d_R(x) D(y) + (-1)^{(p+1)|x|} x d_R(D(y)) \\
&\quad - (-1)^{|x|+p} D(x) d_R(y) - (-1)^{p|x|+|x|+p} x D d_R(y)), \\
&= (d_R \circ D - (-1)^p D \circ d_R)(x)y + (-1)^{(p+1)|x|} (x(d_R \circ D - (-1)^p D \circ d_R)(y), \\
&= d(D)(x)y + (-1)^{(p+1)|x|} x d(D)(y).
\end{aligned}$$

因此 $d(D) \in \mathrm{Der}^{[p+1]}(R^{[*]})$ 以及 $\mathrm{Der}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(R^{[*]})$ 是 $\mathrm{End}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(R^{[*]})$ 的子复形。我们留给读者验证，$\mathrm{Der}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(R^{[*]})$ 是 $\mathrm{End}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(R^{[*]})$ 的一个度数0微分分次李代数子代数（参见 [B]）。

我们指出，在[LWZ], 中，可以定义具有其他次数乘法的结合代数，就像其他次数的微分分次李代数一样。我们不讨论如此一般的情形。

2.4. 微分分次泊松代数与微分分次泊松模。我们将不一定交换的微分分次泊松代数（参见 [LWZ]）定义为具有微分分次李代数结构 $\{-,-\}$ 的微分分次结合代数 $A^{[*]}$： $A^{[*]} \otimes A^{[*]} \to A^{[*]}$ （零次），使得由 $a \mapsto \{a,-\}$ 定义的映射$A^{[*]} \to \mathrm{End}^{[*]}(A^{[*]})$ 是微分分次李代数同态 $(A^{[*]}, \{-,-\}) \to \mathrm{Der}^{[*]}{}_{\mathbf{k}}(A^{[*]}_{asso})$，即，

$$\begin{aligned}
\{a,b\} &= -(-1)^{|a||b|}\{b,a\} \\
\{\{a,b\},x\} &= \{a,\{b,x\}\} - (-1)^{|a||b|}\{b,\{a,x\}\} \\
\{a,xy\} &= \{a,x\}y + (-1)^{|a||x|} x\{a,y\}.
\end{aligned}$$

在这种情况下，$\mathrm{End}^{[*]}(A^{[*]})_{Lie}$ 有两个微分分次李子代数 $\mathrm{Der}^{[*]}(A^{[*]}_{Asso})$ 和 $\mathrm{Der}^{[*]}(A^{[*]}_{Lie})$。第二个和第三个条件表明，映射 $\mathrm{ad} : A^{[*]} \to \mathrm{End}^{[*]}(A^{[*]})_{Lie}$ 的像包含于 $\mathrm{Der}^{[*]}(A^{[*]}_{Asso}) \cap \mathrm{Der}^{[*]}(A^{[*]}_{Lie})$ 中，从而使其成为一个微分分次李代数同态。

注 2.1. 如果 $A^{[*]}$ 上的李括号由超交换子给出，那么给定一个导子 $d \in \mathsf{Der}^{[*]}(A^{[*]}_{Asso})$ 以及 x、 $y \in A^{[*]}$ 齐次的，我们有

$$\begin{aligned} d([x,y]^s) &= d(xy-(-1)^{|x||y|}yx), \\ &= d(x)y+(-1)^{[x||d|}xd(y)-(-1)^{|x||y|}(d(y)x+(-1)^{|y||d|}yd(x)), \\ &= d(x)y-(-1)^{(|x|+|d|)|y|}yd(x)+(-1)^{[x||d|}xd(y)-(-1)^{|x||y|}d(y)x, \\ &= [d(x),y]^s+(-1)^{|x||d|}[x,dy]^s. \end{aligned}$$

因此 $d \in \mathsf{Der}^{[*]}(A^{[*]}_{Lie})$，并且我们有 $\mathsf{Der}^{[*]}(A^{[*]}_{Asso}) \subset \mathsf{Der}^{[*]}(A^{[*]}_{Lie})$。然而，反方向不太可能成立，因为 A_{Asso} 中关于乘积的信息比 $A^{[*]}_{Lie}$中关于李代数乘积的信息更加精细。因此， $A^{[*]}_{Lie}$ 的导子在处理 $A^{[*]}_{Asso}$中的乘积时可能表现得不够良好。

例 2.2。设 $A^{[*]}$ 是 Ch 中的一个结合微分分次代数，即存在一个结合乘法 $A^{[*]} \otimes A^{[*]} \to A^{[*]}$，且它是一个链映射。则 $(A^{[*]}, d_A^{[*]})$ 具有微分分次李代数结构，其李括号定义为

$$[a,b]^s = ab-(-1)^{|a||b|}ba$$

对所有齐次的 $a, b \in A^{[*]}$均成立。此外， $A^{[*]}$ 是一个微分分次泊松代数。

链复形范畴 Ch 中的滤结合微分分次代数是一个微分分次代数（$A^{[*]}, d_A^{[*]}$），配备了一个由子复形构成的滤子

$$\cdots \subseteq F^nA^{[*]} \subseteq F^{n+1}A^{[*]} \subseteq \cdots \subseteq A^{[*]}$$

使得 $F^mA^{[*]} \cdot F^nA^{[*]} \subset F^{n+m}A^{[*]}$。

在这种情况下，$\mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]}) = \bigoplus_n F^nA^{[*]}/F^{n-1}A^{[*]}$是一个分次微分分次代数，其中每个分量都是一个子复形。该滤子还使 $A^{[*]}_{Lie}$ 成为一个滤过的微分分次李代数。超交换子 $[-,-]^s$在 A 上诱导出 $\mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})$ 上的运算，记作 $\overline{[-,-]^s}$，从而使 $\mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})$ 成为一个分次微分分次李代数。

如果令 $A^{[*]}_n = F^nA^{[*]}/F^{n-1}A^{[*]}$，那么 $A^{[*]}_n = \bigoplus_p A^{[p]}_n$是链复形范畴 Ch 中的一个对象，并且我们有

$$A^{[p]}_n \cdot A^{[q]}_m \subseteq A^{[p+q]}_{n+m}.$$

我们称链复形范畴 Ch 中的过滤微分分次代数 $F^\bullet A^{[*]}$ 几乎交换，若

$$[F^mA^{[*]}, F^nA^{[*]}]^s \subseteq F^{n+m-1}A^{[*]},$$

即，f 或 $a \in F^mA^{[*]}$，且 $b \in F^nA^{[*]}$ 齐次（就内部微分次数而言 ），

$$[a,b]^s = ab-(-1)^{|a||b|}ba \in F^{m+n-1}A^{[*]}.$$

在此情形下，$\mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})$具有微分分次李代数结构，其微分复形结构由$(A^{[*]}, d_A^{[*]})$所诱导，并带有李括号

$$\{-,-\}^s : \mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]}) \otimes \mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]}) \to \mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})$$

gi如下给出：若我们将 $a \in F^n A^{[*]}$的像记为 $\overline{a} \in \mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})$，则

$$\{\overline{a}, \overline{b}\}^s = \overline{[a,b]^s} \in \mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})_{m+n-1}.$$

注意，$\mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})$ 是 Ch 中的一个 $\mathbb{Z}$ 分次对象，我们称之为分次复形。当存在另一种分次（例如 $\mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})$ 的情形）时，我们将微分复形中的次数称为微分次数或上同调次数。$A^{[*]}$ 上的任意滤过代数结构 $F^\bullet A^{[*]}$ 都定义了 $(A, [-,-]^s)$ 上的滤微分分次李代数结构。因此，$(\mathsf{gr}\ F^\bullet A^{[*]}, \overline{[-,-]^s})$ 是一个分次微分分次李代数。它同构于分次微分分次结合代数 $\mathsf{gr}\ F^\bullet A^{[*]}$ 的自然分次微分分次李代数结构。如果 $F^\bullet A^{[*]}$ 是几乎交换的，那么 $\mathsf{gr}\ F^\bullet A^{[*]}$ 是分次交换的，并且微分分次李代数 $(\mathsf{gr}\ F^\bullet A^{[*]}, [-,-]^s)$ 在微分分次意义下是阿贝尔的。

为与微分次数移位函子相区别，我们将 $\mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})[1]$ 表示为分次的平移，使得 $(\mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})[1])_n = \mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})_{n+1}$。在这种情况下，无需考虑微分。我们定义李括号

$$\{-,-\}_{[1]} : \mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})_{[1]} \otimes \mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})_{[1]} \to \mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})_{[1]}$$

为 $\{-,-\}^s$ 这样的线性映射。于是，$\{-,-\}_{[1]}$ 是该微分复形的链映射，并且在由 $F^\bullet A^{[*]}$ 诱导的分次中具有度数0。进一步地，$\mathsf{gr}\ F^\bullet A^{[*]}$ 和 $\mathsf{gr}(F^\bullet A^{[*]})[1]$ 关于微分次数都是分次交换的，但李括号不同。事实上，如果 $F^\bullet A^{[*]}$ 几乎交换，那么 $\{-,-\}^s$ 在由 $F^\bullet A^{[*]}$ 诱导的分次中具有 -1 次，而 $\{-,-\}_{[1]}$ 具有度数0。

例 2.3. 设 $\mathfrak{g}^{[*]}$ 是 Ch 范畴中的一个微分分次李代数。令 $\mathsf{Sym}^{[*]}{}_{\mathsf{Ch}}(\mathfrak{g}^{[*]})$ 为对称代数，它具有唯一的微分分次李代数结构，该结构扩展了 $\mathfrak{g}^{[*]}$ 上的微分分次李代数结构，使 $\mathsf{Sym}^{[*]}{}_{\mathsf{Ch}}(\mathfrak{g}^{[*]})$ 成为一个分次微分分次泊松代数。

令 $U_{\mathsf{Ch}}(\mathfrak{g}^{[*]})$ 为 $\mathfrak{g}^{[*]}$ 在 Ch 范畴中的万有包络微分分次结合代数。于是，$U_{\mathsf{Ch}}(\mathfrak{g}^{[*]})$ 是微分复形 $\mathfrak{g}^{[*]} = (\mathfrak{g}^{[*]}, d_{\mathfrak{g}}^{[*]})$ 在 Ch 范畴中的张量代数 $T_{\mathsf{Ch}}(\mathfrak{g}^{[*]})$ 的一个商。子复形 $\bigoplus_{n \le p} \mathfrak{g}^{\otimes n}$ 的像 $F^p U_{\mathsf{Ch}}(\mathfrak{g})$ 定义了一个滤过结构，使 $U_{\mathsf{Ch}}(\mathfrak{g})$ 成为 Ch 范畴中的一个几乎交换滤过微分分次结合代数。PBW 定理指出，伴随分次微分分次代数 $\mathsf{gr}(F^\bullet U_{\mathsf{Ch}}(\mathfrak{g}^{[*]}))$ 作为微分分次泊松代数与 $\mathsf{Sym}^{[*]}(\mathfrak{g}^{[*]})$ 同构。

设 $R^{[*]} = (R^{[*]}, \{-,-\})$ 是一个微分分次泊松代数。设 $M^{[*]} = (M^{[*]}, d_M^{[*]})$ 是结合微分分次代数 R 的左微分分次模。我们还可以利用 $R^{[*]}$ 的超交换性，将 $M^{[*]}$ 变为一个右 $R^{[*]}$-模。

$$xr = (-1)^{|x||r|} rx$$

对于所有齐次的 $x \in M^{[*]}$和 $r \in R^{[*]}$。因此，$M^{[*]}$ 是一个 $R^{[*]}$-微分分次双模。

定义 2.4. 微分分次泊松代数 $R^{[*]} = (R^{[*]}, \{-,-\})$ 的微分分次泊松模是一个微分分次模 $M^{[*]} = (M^{[*]}, d_M^{[*]})$，它对于 $R^{[*]}$ 作为结合代数具有一个李代数

左微分分次模结构

$$\{-,-\}: R^{[*]} \otimes M^{[*]} \to M^{[*]},$$

也就是说，由 $r \mapsto \{r,-\}$ 定义的诱导映射 $R^{[*]} \to \mathsf{End}^{[*]}(M^{[*]})$ 是微分分次李代数同态。括号 $\{-,-\}$ 的次数为 p，且是齐次的。$M^{[*]}$ 上的两种模结构满足以下导子性质：对任意齐次的 r_1、$r_2 \in R^{[*]}$ 和 $x \in M^{[*]}$，

- $\{r_1, r_2 x\} = \{r_1, r_2\}x + (-1)^{(|r_1|+p)|r_2|} r_2\{r_1, x\}$,
- $\{r_1 r_2, x\} = r_1\{r_2, x\} + (-1)^{|r_1||r_2|} r_2\{r_1, x\}$.

例 2.5. 设 R 是一个交换 k-代数，$X = \mathsf{spec}(R)$ 是相应的仿射 k-概形。$\mathsf{Der_k}(R)$ 是 X 上向量场的整体截面。R 上的泊松括号 $\{-,-\}$ 等价于结构层 $\mathcal{O}_X$ 上的李代数胚结构 $\{-,-\}$，也就是说，它由一个 k-李代数结构以及一个 k-李代数同态 $(\mathcal{O}_X, \{-,-\}) \to \mathsf{Der_k}(R)$ 构成，后者称为锚同态（参见 [P]。）

任何 R-模 M 若带有相容的$\mathsf{Der_k}(R)$-模（作为李代数），则称为 D-模。关于 $\mathcal{O}_X$-模上的泊松模结构的概念由平坦泊松联络给出（参见 [P]）。

2.5. 环复形及其在链复形范畴 Ch 中的解释。如果我们将 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ 视为带有 $|t|=2$ 的分次向量空间，那么可以将其视为一个微分复形（集中在偶数度数）。因此，$V^{[*]} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ 是一个微分复形，其微分结构为 $d(v \otimes t^n) = d_V(v) \otimes t^n$。于是 $V^{[*]} \otimes t^n = V^{[*]}[-2n]$，并且我们有

$$V^{[*]} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V^{[*]}[-2n].$$

对于任意微分复形（$W^{[*]}$，$d_W^{[*]}$），我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}], W^{[*]}) &= \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}[-2n], W^{[*]}) \\ &= \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]}[2n]) \\ &= \mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]})[[x,x^{-1}]].\end{aligned}$$

特别地，若 $W^{[*]} = V^{[*]}$，利用张量-Hom伴随性（2），可得

$$\mathsf{Hom}^{[*]}(\mathbb{C}[t,t^{-1}], \mathsf{End}^{[*]}(V^{[*]})) = \mathsf{End}^{[*]}(V^{[*]})[[x,x^{-1}]]. \tag{4}$$

这里 $|x| = -2$ 和 $V^{[*]} \otimes x^n = V^{[*]}[2n]$。事实上，每个元素 $f \in \mathsf{Hom}^{[p]}(V^{[*]} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}], W^{[*]})$ 都具有 $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 这种形式，其中

$$\begin{aligned}f_n \in \mathsf{Hom}^{[p]}(V^{[*]} \otimes \mathbb{C}t^n, W^{[*]}) &= \mathsf{Hom}^{[p]}(V^{[*]}[-2n], W^{[*]}) \\ &= \mathsf{Hom}^{[p]}(V^{[*]}, W^{[*]}[2n])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \mathsf{Hom}^{[2n+p]}(V^{[*]}, W^{[*]})\\ &= (\mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]})[2n])^{[p]}\\ &= (\mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]}) \otimes \mathbb{C}x^n)^{[p]}.\end{aligned}$$

因此，变量 x 表示集中在度数 -2 的一维向量空间复形，而变量 t 表示集中在度数2的一维向量空间复形。它们将在描述顶点算子代数时发挥作用。

由于 t 的度数为偶数，我们有

$$V^{[*]} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes V^{[*]}.$$

因此由（2）

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}], W^{[*]}) &= \mathsf{Hom}^{[*]}(\mathbb{C}[t, t^{-1}], \mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]}))\\ &= \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Hom}^{[*]}(\mathbb{C}[-2n], \mathsf{Hom}^{[*]}(V^{[*]}, W^{[*]}))\end{aligned}$$

2.6. 微分滤过代数。微分滤过向量空间 $(V, F^\bullet V, d_V)$ 是一个向量空间 V，连同一列递增的子空间滤子 $\cdots \subseteq F^iV \subseteq F^{i+1}V \subseteq \cdots \subseteq V$，满足 $\cap_i F^iV = \{0\}$，并且还带有一个线性映射d_V: $V \to V$，满足 $d_V F^iV \subseteq F^{i+1}V$和 $d_V^2 F^iV \subseteq F^{i+1}V$。

两个微分滤过向量空间 $f\colon (V, F^\bullet V, d_V) \to (V', F^\bullet V', d_{V'})$ 之间的同态是一个线性映射 $f\colon V \to V'$，满足 $f(F^iV) \subseteq F^iV'$且 $f \circ d_V = d_{V'} \circ f$。微分滤过向量空间范畴是一个加性范畴。

令 $\mathsf{gr}^{[*]}(V) = \mathsf{gr}(F^\bullet V) = \bigoplus_i F^iV/F^{i-1}V$。则 d_V在 $\mathsf{gr}^{[*]}(V)$ 上诱导出微分复形结构。

对于每个 $0 \neq v \in V$，$|v| = \min\{i \mid v \in F^iV\}$ 称为 v 的微分次数。对于每个 $0 \neq v \in V$，其像记为 $0 \neq \overline{v} \in \mathsf{gr}^{[|v|]}(V) = F^{|v|}V/F^{|v|-1}V$。因此，在微分复形 $(\mathsf{gr}^{[*]}(V)\ d_V)$ 中，次数为 $|\overline{v}| = |v|$。我们注意到，对于微分分次空间，次数仅对齐次元素定义；而对于微分滤过向量空间，次数对每个非零元素都有定义。我们注意到，当 $|v| \neq |u|$ 时，$|v+u| \leq \max\{|u|, |v|\}$，且 $|v+u| = \max\{|u|, |v|\}$。像 $\overline{v}$ 可以视为 v 的符号，这与微分算子的情形相同。

定义 2.6。微分过滤代数（A、$F^\bullet A$、d_A、$*$）是一个微分滤过向量空间（A、$F^\bullet A$、d_A），并带有结合乘法

$$* : A \otimes A \to A$$

使 $(A, F^\bullet A, *)$ 成为一个过滤结合代数，使得

$$d_A(a * b) - (d_A a * b + (-1)^{|a|} a * d_A b) \in F^{|a|+|b|}A.$$

我们注意到，如果 $|a'|<|a|$，那么 $|a+a'|=|a|$ 并且

$$\begin{aligned} d((a+a')*b)-(d(a+a') &*b+(-1)^{|a|}(a+a')*db) \\ &= d_A(a*b)-(d_Aa*b+(-1)^{|a|}a*d_Ab) \\ &\quad +d_A(a'*b)-(d_Aa'*b+(-1)^{|a|}a'*d_Ab)\in F^{|a|+|b|}A. \end{aligned}$$

因此，对于任意微分过滤代数 $(A,F^\bullet A,*,d)$，微分定义了一个微分分次代数 $(\mathrm{gr}_{F^\bullet}^{[*]}(A),*,d)$。若两个元素 $a,b\in A$ 满足

$$a*b-(-1)^{|a||b|}b*a\in F^{|a|+|b|-1}A.$$

这等价于说，相应的微分分次代数是交换的。

类似地，左微分过滤 A-模是一个微分滤过向量空间 $(V,F^\bullet V,d_V)$，满足 V 是左 A-模，且对于所有 $i,j\in\mathbb{Z}$ 和，有 $(F^iA)*F^jV\subseteq F^{i+j}V$

$$d_V(a*v)-(d_Aa*v+(-1)^{|a|}a*d_Vv)\in F^{|a|+|v|}V.$$

左微分过滤 A-模之间的态射 $f\colon M\longrightarrow N$ 是一个线性映射，满足 $f(a*m)=a*f(m)$、$f(F^iM)\subseteq F^iN$，以及 $(f\circ d_M-d_N\circ f)(F^iM)\subset F^iN$。注意，这样的态射诱导出一个微分分次模的态射 $\mathrm{gr}_{F^\bullet}^{[*]}M\longrightarrow\mathrm{gr}_{F^\bullet}^{[*]}N$。

我们可以通过给出一个线性映射 $*\colon V\otimes A\to V$，并要求它对所有 i、$j\in\mathbb{Z}$ 满足 $F^jV*F^iA\subseteq F^{i+j}V$ 和

$$d_V(v*a)-(d_Vv*a+(-1)^{|v|}v*d_Aa)\in F^{|a|+|v|}V.$$

这里我们使用左导子性质。利用相容条件，可以通过定义 $v*_ra=(-1)^{|v||a|}v*a$ 将其改写为右导子性质。事实上，我们有

$$\begin{aligned} &d_V(v*_ra)-(v*_rd_A(a)+(-1)^{|a|}(d_V(v)*_ra)) \\ &\quad=d_V((-1)^{|a||v|}v*a)-((-1)^{|d_A(a)||v|}v*d_A(a)+(-1)^{|a|}(-1)^{|a||d_V(v)|}d_V(v)*a), \\ &\quad=(-1)^{|a||v|}\big(d_v(v*a)-((-1)^{|v|}v*d_A(a)+d_V(v)*a)\big)\in F^{|a|+|v|}V. \end{aligned}$$

我们注意到，每个微分分次代数 $A^{[*]}=(\bigoplus_i A^{[i]},d_A,*)$ 自动就是一个微分过滤代数，其中 $F^pA=\oplus_{i\le p}A^i$，并且有两个乘积，分别由 $a*_lb=a*b$ 和 $a*_rb=(-1)^{|a||b|}a*b$ 给出，适用于齐次元素 a、b，然后线性延拓到所有元素 a、$b\in A^{[*]}$。然而，对于微分过滤代数 $(A,F^\bullet A,d_A,*)$，右乘法 $*_r$ 不一定有定义。因此在应用中，可以要求 $*_r$ 有定义，并满足结合条件和相容条件。

定义 2.7. 设 $(A,F^\bullet A,d_A,*)$ 是一个微分过滤代数。对于 $(A,F^\bullet A,d_A,*)$ 的双模是一个微分滤过向量空间 $(V,F^\bullet V,d_V)$，具有左、右 $(A,F^\bullet A,d_A,*)$-模结构 $*_l$ 和 $*_r$，使得

$$(a*_lv)*_rb=a*_l(v*_rb).$$

2.7. 微分过滤代数和泊松微分过滤代数上的权滤过。设 $(A, F^\bullet A, d_A, *)$ 是微分过滤代数。权过滤微分过滤结构是一个递增过滤

$$\cdots \subseteq W_n A \subseteq W_{n+1} A \subseteq \cdots$$

子空间，满足

$$d_A(W_n A) \subseteq W_n A$$

且 $F^i(W_n A) = W_n A \cap F^i A$ 在$W_n A$和 $W_n A * W_m A \subseteq W_{n+m} A$上定义了微分滤过向量空间结构。我们将 $(A, F^\bullet A, W_\bullet A, d_A, *)$ 称为权过滤微分过滤代数。

在这种情况下，$\mathrm{gr}_*(A) = \bigoplus_n \mathrm{gr}_n(A)$，其中 $\mathrm{gr}_n(A) = W_n A / W_{n-1} A$ 是一个分次微分过滤代数（$\mathrm{gr}_*(A)\ F^\bullet, d, *$），其含义是每个齐次分量都是一个微分滤过向量空间，且微分由 d_A 在每个 $\mathrm{gr}_n(A)$ 上诱导而来。它也可以理解为：微分 d 具有加权零次的齐次性，而 $F^i \mathrm{gr}_n(A)$ 是 $F^i A \cap W_n A$ 在齐次子空间 $\mathrm{gr}_n(A)$ 中的像。

类似地，我们定义 $0 \neq a \in A$ 的权次数为 $\mathrm{wt}(a) = \min\{n \mid a \in W_n A\}$。我们将 a 的像记为 $\pi(a) \in \mathrm{gr}^{\mathrm{wt}(a)}(A)$，并在 $a \neq 0$ 时记为 $\pi(a) \neq 0$ 。因此，对于 $\pi(a) \in \mathrm{gr}_n A$ ，$\mathrm{wt}(\pi(a)) = \mathrm{wt}(a) = n$ 是良定义的，并且与 $a \in W_n(A)$ 的选择无关。但是，相对于滤子 $F^i \mathrm{gr}_*(A)$ 的 $|\pi(a)|$ 通常并非良定义。我们需要这两个滤子之间满足某些相容条件。

对于 $0 \neq \pi(a) \in \mathrm{gr}_n A$，我们定义 $|\pi(a)| = \min\{p \mid \pi(a) \in F^p \mathrm{gr}_n A\}$。注意，对于$a \in A$，通常有 $|a| \geq |\pi(a)| = p.$。由定义可知，存在 $a' \in F^p A \cap W_n A$ 使得 $a - a' \in W_{n-1} A$。

类似地，我们将用 $\mathrm{gr}^{[*]}$（分别用 $\mathrm{gr}^{[*]}\mathrm{gr}_*$）来定义关于滤子 $F^\bullet A$（分别关于 $F^\bullet(W_n A / W_{n-1} A)$）的伴随分次向量空间。于是，也可以定义权分次微分分次代数 $(\mathrm{gr}^{[*]} \mathrm{gr}_*(A)\ d, *)$。我们约定，下标 gr_* 表示权分次，上标 $\mathrm{gr}^{[*]}$ 表示微分（上同调）分次。

另一方面，$F^i W_n A$ 在 $\mathrm{gr}^{[i]}(A) = F^i A / F^{i-1} A$ 中的像定义了子复形 $W_\bullet \mathrm{gr}^{[*]} A$ 的一个滤子，使得 $(\mathrm{gr}^{[*]} A, d, *)$ 成为权过滤微分分次代数。由此可以构造相伴权分次微分分次代数 $(\mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]}(A)\ d, *)$。以下结论显然成立：

引理 2.8. $(\mathrm{gr}^{[*]} \mathrm{gr}_*(A)\ d, *)$ 和 $(\mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]}(A)\ d, *)$ 是同构的权分次微分分次代数。

事实上

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_n \mathrm{gr}^{[i]}(A) &= W_n(F^i A / F^{i-1} A) / W_{n-1}(F^i A / F^{i-1} A) \\ &= W_n A \cap F^i A / (W_{n-1} A \cap F^i A + W_n A \cap F^{i-1} A) \end{aligned}$$

$$= F^i(W_nA/W_{n-1}A)/F^{i-1}(W_nA/W_{n-1}A) = \mathsf{gr}^{[i]}\,\mathsf{gr}_n(A).$$

根据这一识别关系，可以直接验证微分和乘法。类似于对于微分滤过向量空间 V，关于微分滤过 $F^\bullet V$ 的次数函数 $|\cdot|$ 的定义： $A \to \mathbb{Z}$，我们定义带权滤过微分滤过向量空间 V 关于带权滤过 $W_\bullet V$ 的权重函数 wt： $V \to \mathbb{Z}$，其定义为

$$\mathrm{wt}(v) = \min\{n \mid v \in W_nV\}.$$

类似地，对于权过滤微分过滤代数 $(A, F^\bullet, W_\bullet, d, *)$ 的左（分别地，右）模 $(V, W_\bullet, F^\bullet, d_V, *)$，除了赋予其一个权滤过 $W_\bullet V$，使得 $d_V W_nV \subseteq W_nV$ 和 $F^i(W_nV) = F^iV \cap W_nV$ 在W_nV 上定义一个微分滤过向量空间结构，并且

$$W_nA * W_mV \subseteq W_{n+m}V \quad (\text{resp. } W_mV * W_nA \subseteq W_{n+m}V\ ).$$

特别地，我们有 $F^iW_nA * F^jW_mV \subseteq F^{i+j}W_{m+n}V$。

3. DG VERTEX (OPERATOR) ALGEBRAS

3.1. 对称张量范畴 链复形范畴中的顶点代数。 在下文中，我们给出微分分次顶点（算子）代数的定义及其基本性质。证明和详细内容可见 [LL]。

定义 3.1. 链复形范畴 Ch 中的微分分次（dg）顶点代数是 $\mathbb{C}$ 上的一个上链复形 $(V^{[*]}, d_V^{[*]})$，并赋予一个 Ch 中的链映射（顶点算子映射）

$$\begin{aligned} Y(\cdot,x): \quad V^{[*]} &\longrightarrow \mathrm{End}^{[*]}(V^{[*]})[[x,x^{-1}]] \\ v &\longmapsto Y(v,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n x^{-n-1} \end{aligned}$$

次数为 -2 的 x，以及一个特定向量 $\mathbf{1} \in V^{[0]}$，它满足 $d_V\mathbf{(1)} = 0$，即真空向量，并满足以下条件：

- 对于任意 $u, v \in V^{[*]}$, $u_nv = 0$，当 n 充分大时，即 $Y(u,x)v \in V^{[*]}((x))$（截断性质），
- $Y(\mathbf{1},x) = \mathsf{id}_V$（真空性质），
- $Y(v,x)\mathbf{1} \in V[[x]]$，且 $\lim\limits_{x\to 0} Y(v,x)\mathbf{1} = v$（创生性质），
- 雅可比恒等式

$$\begin{aligned} &x_2^{-1}\delta\left(\tfrac{x_1-x_0}{x_2}\right)Y(Y(u,x_0)v,x_2) = \\ &\quad x_0^{-1}\delta\left(\tfrac{x_1-x_2}{x_0}\right)Y(u,x_1)Y(v,x_2) - (-1)^{|u||v|}x_0^{-1}\delta\left(\tfrac{x_2-x_1}{-x_0}\right)Y(v,x_2)Y(u,x_1), \end{aligned} \tag{5}$$

where $\delta(x+y) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\binom{n}{m}x^{n-m}y^m$ and $v, u \in V$ are homogeneous.

微分分次顶点代数记作（$V^{[*]}$、$d_V^{[*]}$、Y（·、x）、$\mathbf{1}$）。

注 3.2. (1) 我们首先注意到，由于 $Y(\cdot,x)$ 是链映射，若 $v\in V^{[p]}$ 的次数为 p，则 $v_n\in \mathrm{End}^{[p-2n-2]}(V^{[*]}) = (\mathrm{End}^{[*]}(V^{[*]})[-2n-2])^{[p]}$。我们将 v_n 的次数记为 $|v_n| = |v| - 2n - 2$。

(2) $\mathrm{End}^{[*]}(V^{[*]})$ 上的微分结构 d 定义为：对 $f\in \mathrm{End}^{[m]}(V^{[*]})$，$d(f) = d_V\circ f-(-1)^{|f|}f\circ d_V$（参见 (1)）。设 d' 为 $\mathrm{End}^{[*]}(V^{[*]})[[x,x^{-1}]]$ 上的微分。由于对所有 n，$d'(x^n) = 0$，我们有

$$d'(v_nx^{-n-1}) = d(v_n)x^{-n-1} = (d_V\circ v_n - (-1)^{|v|-2n-2}v_n\circ d_V)x^{-n-1}.$$

由于 $Y(\cdot,x)$ 是链映射，即对于 $v\in V^{[p]}$，$Y(d_V^{[p]}(v)\ x) = d'^{[p]}(Y(v,x))$，我们有

$$(d_V(v))_n = d(v_n) = (d_V\circ v_n - (-1)^{|v|-2n-2}v_n\circ d_V);$$

因此

$$\begin{aligned} d_V(v_n(u)) &= d(v_n)(u) + (-1)^{|v|-2n-2}v_n(d_V(u)) \\ &= d_V(v)_n(u) + (-1)^{|v|-2n-2}v_n(d_V(u)). \end{aligned} \tag{6}$$

对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，由 $v\otimes u\mapsto v_n(u)$ 定义的乘法 $V^{[*]}\otimes V^{[*]}\to V^{[*]}[-2n-2]$ 使 $V^{[*]}$ 成为一个乘积度数为 0 的分次代数，而 d_V 是该代数的导子。

引理 3.3. 对于任意满足 $d_V(u) = 0$ 的齐次 $u\in V^{[*]}$，由 $\mathcal{D}_n^u(v) = v_n(u)$ 定义的线性映射 $\mathcal{D}_n^u: V^{[*]}\to V^{[*]}[|u|-2n-2]$ 是链映射。

事实上，更一般的结论成立：

引理 3.4. 映射 $u\mapsto \mathcal{D}_n^u$ 定义了一个链映射 $V^{[*]}\to \mathrm{End}^{[*]}(V^{[*]})[-2n-2]$。

取 $u=\mathbf{1}$ 并使用 $d_V(\mathbf{1}) = 0$，我们得到

$$d_V(v_n\mathbf{1}) = d_V(v)_n\mathbf{1}.$$

特别地，由 $v\mapsto v_n\mathbf{1}$ 定义的映射 $\mathcal{D}_n$：$V^{[*]}\to V^{[*]}[-2n-2]$ 是一个链映射，即 $\mathcal{D}_n\in \mathrm{End}^{[-2n-2]}(V^{[*]})$，使得 $d(\mathcal{D}_n) = 0$。

对于 $v\in V^{[p]}$，我们有

$$Y(d_V^{[p]}(v),x) = d'^{[p]}(Y(v,x)) = \sum_n d'^{[p]}(v_nx^{-n-1}) = \sum_n d^{[p-2n-2]}(v_n)x^{-n-1}.$$

特别地，如果有 $u\in V^{[m]}$，则有

$$\begin{aligned} Y(d_V^{[p]}(v),x)u &= \sum_n d^{[p-2n-2]}(v_n)ux^{-n-1} \\ &= \sum_n \big(d_V^{[p-2n-2+m]}(v_n(u)) - (-1)^{p-2n-2}v_n(d_V^{[m]}(u))\big)x^{-n-1} \\ &= d'^{[p+m]}Y(v,x)u - (-1)^pY(v,x)d_V^{[m]}(u). \end{aligned}$$

由雅可比恒等式得到的弱结合性与经典情形中的相同，即对于 u、$w \in V^{[*]}$，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $v \in V^{[*]}$，有

$$(x_0+x_2)^k Y(Y(u,x_0)v,x_2)w = (x_0+x_2)^k Y(u,x_0+x_2)Y(v,x_2)w. \tag{7}$$

弱交换性变为：对于任意齐次元素 u、$v \in V^{[*]}$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$(x_1-x_2)^k \left(Y(u,x_1)Y(v,x_2) - (-1)^{|u||v|}Y(v,x_2)Y(u,x_1)\right) = 0. \tag{8}$$

注 3.5。我们注意到，雅可比恒等式等价于

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i \binom{l}{i}(u_{m+l-i}v_{n+i} - (-1)^l(-1)^{|v||u|}v_{n+l-i}u_{m+i}) = \sum_{i\geq 0}\binom{m}{i}(u_{l+i}v)_{m+n-i} \tag{9}$$

对于所有 l、m、$n \in \mathbb{Z}$，以及所有 v、$u \in V^{[*]}$ 分别为次数 $|u|$ 和 $|v|$的齐次元素。取 $l=0$ 我们得到

$$[u_m, v_n]^s = u_m v_n - (-1)^{|u_m||v_n|}v_n u_m = \sum_{i\geq 0}\binom{m}{i}(u_m(v))_{m+n-i} \tag{10}$$

对于所有 m、$n \in \mathbb{Z}$。取 $m=0$ 我们得到

$$(u_l(v))_n = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{l}{i}(u_{l-i}v_{n+i} - (-1)^l(-1)^{|v||u|}v_{l+n-i}u_i).$$

如果我们将雅可比恒等式左侧记为 LHS(u、x_1)、(v、x_2) x_0，那么有

$$\mathrm{LHS}((u,x_1),(v,x_2),x_0) = (-1)^{|u||v|}\,\mathrm{LHS}((v,x_2),(u,x_1),-x_0).$$

这意味着，雅可比恒等式的右侧也应满足

$$x_2^{-1}\delta(\frac{x_1-x_0}{x_2})Y(Y(u,x_0)v,x_2) = (-1)^{|u||v|}x_1^{-1}\delta(\frac{x_2+x_0}{x_1})Y(Y(v,-x_0)u,x_1). \tag{11}$$

以及斜对称性的分次版本

$$Y(u,x)v = (-1)^{|u||v|}e^{x\mathcal{D}}Y((v,-x)u$$

对于所有齐次的 u、$v \in V$ 以及 $\mathcal{D}$（v）$= v_{-2}\mathbf{1}$ 对于所有 $v \in V^{[*]}$。

例 3.6。设 $V^{[*]}$ 是一个集中在度数0的微分分次顶点代数，即 $V^{[*]} = V^{[0]}$。根据注 3.2，我们有 $a_n(V) \subseteq V^{[-2n-2]}$ 对任意 $a \in V$均成立。因此$a_n V = 0$ 对任意 $n \neq -1$均成立。此外，利用公式（10），我们有 $a_{-1}b - b_{-1}a = [a_{-1}, b_{-1}]^s\mathbf{1} = 0$。因此 V 具有交换代数结构，其乘积为

$a \cdot b = a_{-1}b$。我们看到，任意交换代数 A 都可以通过对所有 a、$b \in A$设定为集中在度数0的微分分次顶点代数，

$$a_n b = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq -1, \\ a \cdot b & \text{if } n = -1. \end{cases}$$

例3.7. 设（$A^{[*]}$、$d_A^{[*]}$、D）是一个带单位元1的分次交换微分分次代数，并赋有一个度数为2的导子，即，$D: A^{[*]} \longrightarrow A[2]^{[*]}$ 是一个度数0的链映射。利用Borcherds的经典构造，我们定义如下映射：

$$\begin{array}{rccl} Y(\cdot,x): & A^{[*]} & \longrightarrow & \mathrm{End}^{[*]}(A^{[*]})[[x,x^{-1}]] \\ & a & \longmapsto & e^{xD}a = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} D^n(a)x^n \end{array}$$

其中我们设 $|x| = -2$。那么对于任意齐次的 $a \in A^{[|a|]}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，有$|D^n(a)x^n| = |a| + 2n - 2n = |a|$。因此，$Y(\cdot,x)$是一个度数0的映射。

设 $a \in A^{[|a|]}$。则

$$\begin{aligned} Y(d_A a, x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} D^n(d_A a)x^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} d_A(D^n(a))x^n \end{aligned}$$

因为 D 和 $d^{[*]}$ 交换。类似地，我们有

$$\begin{aligned} d'(Y(a,x)) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} d'(D^n(a)x^n), \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} d(D^n(a))x^n \end{aligned}$$

因为 $d'(x^n) = 0$。此外，由于 $D^n(a)$可以看作$\mathrm{End}^{[*]}(A^{[*]})$中的一个算子，对于任意 $b \in A^{[|b|]}$，我们有

$$\begin{aligned} d(D^n(a))(b) &= d_A \circ D^n(a)(b) - (-1)^{|D^n(a)|} D^n(a) \circ d_A(b), \\ &= d_A(D^n(a)(b)) - (-1)^{|a|+2n} D^n(a) d_A(b), \\ &= d_A(D^n(a))b + (-1)^{|D^n(a)|} D^n(a) d_A(b) - (-1)^{|a|+2n} D^n(a) d_A(b), \\ &= d_A(D^n(a))b. \end{aligned}$$

由此可得 $d'(Y(a,x)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} d_A(D^n(a))x^n = Y(d_A a, x)$，并且 $Y(\cdot,x)$ 是一个链映射。在此情形下，当 $n \geq 0$ 时，$a_n = 0$，因此微分分次顶点代数的前三条公理很容易得到验证。由于 $A^{[*]}$ 是分次交换的，且 D 具有偶数度数，对于任意 a、b 齐次的，我们有

$$Y(a,x_1)Y(b,x_2) = (-1)^{|a||b|} Y(b,x_2)Y(a,x_1),$$

因此弱交换性（8）得到验证。然后我们运用[LL，例 3.4 中的相同推理。6] 从而证明弱结合性（7）也得到验证。微分分次情形下，[LL] 的命题 3.4.3 仍然适用，并且雅可比恒等式成立。因此（$A^{[*]}$，Y（·，x），1）是一个微分分次顶点代数。

引理 3.8. 由 $\mathcal{D}(v) = v_{-2}\mathbf{1}$ 给出的映射是 $Z^{[2]}\mathrm{End}^{[*]}(V^{[*]})$ 中的 2-余循环，即它满足 $d_V \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ d_V$。此外，

$$[\mathcal{D}, Y(v,x)]^s = Y(\mathcal{D}(v),x) = \frac{d}{dx}Y(v,x).$$

注 3.9. 链复形范畴 Ch 中的微分分次顶点代数也可以用以下文献中描述的 Borcherds 关系来定义：[LL，定义 3.6。5] 其中所有向量均为齐次。唯一的修改是上述的 (iv)

$$u_n(v) = (-1)^{|u||v|}\sum_{i\geq 0}(-1)^{i+n+1}\mathcal{D}^{(i)}(v_{n+i}(u))$$

和 (v)。

微分分次顶点代数同态 $f\colon (V^{[*]}, d_V, Y(\cdot,x), \mathbf{1}) \to (V'^{[*]}, d_{V'}, Y'(\cdot,x)\ \mathbf{1}')$ 是链复形范畴 $\mathrm{Ch}((V^{[*]}, d_V), (V'^{[*]}, d_{V'}))$ 中的链映射，使得

$$f(Y(v,x)u) = Y'(f(v),x)(f(u)) \quad \text{and} \quad f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}'.$$

给定任意微分复形（$V^{[*]}, d_V^{[*]}$），令 $H^{[*]}(V^{[*]})$ 表示其上同调，它可以被视为微分为零的微分复形。

定理 3.10。如果（$V^{[*]}, d_V^{[*]}, Y(\cdot,x), \mathbf{1}$）是一个微分分次顶点代数，则存在一个诱导映射 $H(Y)(\cdot,x)\colon H^{[*]}(V^{[*]}) \to \mathrm{End}^{[*]}(H^{[*]}(V^{[*]}))[[x,x^{-1}]]$，从而在 $H^{[*]}(V^{[*]})$ 上定义一个微分分次顶点代数结构，其中 1 是 $H^{[0]}(V^{[*]})$ 中 1 的像，因为 $d_V\mathbf{1} = 0$。

证明。只需验证雅可比恒等式；利用引理 3.3 和 3.4，以及雅可比恒等式的分量形式（9），即可直接验证。□

若 $f\colon (V^{[*]}, d_V, Y(\cdot,x), \mathbf{1}) \to (V'^{[*]}, d_{V'}, Y'(\cdot,x)\ \mathbf{1}')$ 是微分分次顶点代数的同态，则 $H(f)\colon H^{[*]}(V^{[*]}) \to H^{[*]}(V'^{[*]})$ 是微分分次顶点代数的同态。若 f 满足 $H(f)$ 是微分分次顶点代数的同构，则称 f 为拟同构。

注记 3.11. 微分为零的微分分次顶点代数，通过取 $V^{even} = \sum_p V^{[2p]}$ 和 $V^{odd} = \sum_p V^{[2p-1]}$，即为顶点超代数。

我们将不讨论微分分次顶点代数的同伦论方面，而是专注于微分分次语境中的顶点代数性质。

3.2. 共形结构。微分分次顶点算子代数是一个顶点代数（$V^{[*]}$、$Y(\cdot、x)$、1），并带有一个满足 $d_V^{[4]}(\omega) = 0$的元素 $\omega \in V^{[4]}$，称为共形向量（或 Virasoro元），使得 $Y(\omega、x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)x^{-n-2}$（因此$|L(n)| = -2n$），并且：

- $[L(m)\ L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,\,0}c_V$对于 $m,\ n \in \mathbb{Z}$ 其中 $c_V \in \mathbb{C}$ 是 $V^{[*]}$的中心荷。
- 线性算子 $L(0) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}^{[0]}(V^{[*]})$ 是半单的，并且 $V^{[*]} = \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} V_n^{[*]}$满足 $L(0)v = nv = \mathrm{wt}(v)v$ 对于 $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},\ v \in V_n^{[*]}$。此外，$\omega \in V_2^{[*]}$，$\dim V_n^{[*]} < \infty$，且 $V_n^{[*]} = 0$ 对于 $n \ll 0$。
- $L(-1) = \mathcal{D}$。

我们注意到，微分分次顶点算子代数 $V^{[*]} = \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} V_n^{[*]}$按权自动构成一个$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$分次向量空间。这个权重分次与按微分次数的分次结合起来，给出 $V^{[*]}$一个 $\mathbb{Z}\times\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次。如果 $v \in V_n^{[p]}$，我们将写作 $wt(v) = n$以及 $|v| = p$。因此，在这种情形下，权和次数并不互换。

L引理 3.12。在微分分次顶点算子代数 $V^{[*]}$ 中，对于任意 $v \in V^{[*]}$，我们有 ve

$$[L(-1), Y(v,x)]^s = Y(L(-1)v, x) = \frac{d}{dx}Y(v,x), \tag{12}$$

$$[L(0), Y(v,x)]^s = x\frac{d}{dx}Y(v,x) + Y(L(0)v, x). \tag{13}$$

证明。公式（12）直接由 ω 的定义以及引理 3.8得到。利用公式（10），我们有 $[L(0)\ v_n]^s = (L(-1)v)_{n+1} + (L(0)v)_n$。利用公式（12）和求和式 $Y(\cdot, x)$，改写前述等式后，我们得到公式（13）。□

微分分次顶点算子代数同态 $f\colon (V^{[*]}, Y, \mathbf{1}, \omega) \to (V'^{[*]}, Y', \mathbf{1}', \omega')$ 在链复形范畴 Ch 中是顶点代数 f 的同态，满足 $f(\omega) = \omega'$。因此，f 同时保留次数分次结构和权重分次结构。该结构具有如下性质：对于任意 $u \in V_n^{[|u|]}$，

$$u_m(V_r^{[p]}) \subseteq V_{r+n-m-1}^{[p+|u|-2m-2]}.$$

注记 3.13. 由于 $d_V(\omega) = 0$，利用 (1) 和 (6)，可得每个 $L(n) \in Z^{[-2n]}(\mathrm{End}^{[*]}(V^{[*]}))$。因此，在此语境下，由 **Vir** 生成的$L(n)$ 是分次李代数（或集中于偶数度数的微分分次李代数）。因此，$(V^{[*]}, d_V^{[*]})$ 是该微分分次李代数的微分分次模。

此外，[KW]中还讨论了 Neveu-Schwarz 代数的一个微分分次版本。Neveu-Schwarz 代数 **NS** 是 Vec^s 中的李代数，其基为 $\{L_n, G_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{C\}$

其关系描述于 [KW]中。现在假设存在一个元素 $\tau \in V^{[3]}$ 满足$d_V(\tau) = 0$ 以及

$$Y(\tau, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} G_n x^{-n-2}$$

使得 $\omega = \frac{1}{2}G_{-1}(\tau)$ 且

$$\begin{aligned} [G_m, L_n]^s &= (m + \tfrac{1}{2} + \tfrac{n}{2})G_{m+n}; \\ [G_m, G_n]^s &= 2L_{m+n-1} - \tfrac{1}{3}m(m+1)\delta_{m+n+1,0}C. \end{aligned}$$

该 G_n 是 $G_{n+\frac{1}{2}}$ 中的 [KW]。我们注意到，次数 $|G_n| = 3 - 2n - 4 = -2n - 1$. 特别地， G_{-1} 的次数为 1。因此 $\omega \in V^{[4]}$。

具有结构 $\tau \in V^{[3]}$ 并满足上述条件的微分分次顶点代数，称为 $N = 1$ 微分分次顶点代数，此定义沿用 [KW]。在此情形下， $Z^{[*]}$（$V^{[*]}$）中线性链映射的线性张成空间是具有零微分的微分分次李代数，而任意微分分次模（$M^{[*]}$， $d_M^{[*]}$）自动成为该微分分次李代数的微分分次模。

4. Difæerential graded modules for dg vertex (operator) algebras

4.1. 微分分次顶点代数的情形。

定义4.1. 设 $(V^{[*]}, Y(\cdot, x), 1)$ 是链复形范畴 Ch 中的微分分次顶点代数。一个关于$V^{[*]}$的微分分次模是 Ch 中的对象 $(M^{[*]}, d_M^{[*]})$，并配备一个链映射

$$\begin{aligned} Y_M(\cdot, x): \ V^{[*]} &\longrightarrow \mathrm{End}^{[*]}(M^{[*]})[[x, x^{-1}]] \\ v &\longmapsto Y_M(v, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n x^{-n-1} \end{aligned}$$

使得对于任意 $u, v \in V^{[*]}$，都满足以下性质:

- 对于任意 $u \in V^{[*]}, w \in M^{[*]}, u_n w = 0$，当 n 足够大时，即 $Y_M(u, x)w \in M^{[*]}((x))$。（截断性质）
- $Y_M(1, x) = \mathrm{id}_M$。（真空性质）
- 雅可比恒等式

$$\begin{aligned} &x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right)Y_M(Y(u, x_0)v, x_2) = \\ &x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_2}{x_0}\right)Y_M(u, x_1)Y_M(v, x_2) - (-1)^{|v||u|}x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2 - x_1}{-x_0}\right)Y_M(v, x_2)Y_M(u, x_1). \end{aligned}$$

对于一个微分分次齐次元素 $v \in V^{[*]}$ 和 $m \in M^{[*]}$，可以验证 t

$$d_M(v_n(u)) = d_V(v)_n(m) + (-1)^{|v|-2n-2}v_n(d_M(m)). \tag{14}$$

微分分次模之间的同态 f: $M^{[*]} \longrightarrow M'^{[*]}$ 是一个链映射 $f \in \mathrm{Ch}(M^{[*]}, M'^{[*]})$, 满足 $f(v_n m) = v_n f(m)$, 其中 $v \in V^{[*]}$、 $m \in M^{[*]}$。注意到

$$f(d_M(v_n m)) = f(d_V(v)_n m + (-1)^{|v|-2n-2}v_n(d_M(m)),$$

$$\begin{aligned}&= d_V(v)_n f(m) + (-1)^{|v|-2n-2} v_n f(d_M(m)),\\ &= d_V(v)_n f(m) + (-1)^{|v|-2n-2} v_n d_{M'} f(m),\\ &= d_{M'}(v_n f(m)).\end{aligned}$$

链映射与 v_n 的作用相容。

注意，Ker(f) 和余核 Coker(f) 都是微分分次模。所有顶点 dg 模构成的范畴是一个阿贝尔范畴，对余积封闭，记作 $V^{[*]}$-Mod^w。

注意，若 v 在 $V^{[*]}$ 中是次数为 $|v|$ 的齐次元素，则

$$v_n(M^{[p]}) \subseteq M^{[p+|v|-2n-2]}.$$

我们指出，对每个 $n \in \mathbb{Z}$，映射 $V^{[*]} \to \mathrm{End}^{[*]}(M^{[*]})[-2n-2]$（将 v 发送到 v_n）是一个链映射。

定理 4.2. 函子 $H^{[*]}(-) : V^{[*]}$-Mod $\to H^{[*]}(V^{[*]})$-Mod 是加性的。

4.2. 微分分次顶点算子代数的情形。 若 $(V^{[*]}, Y(\cdot,x)\mathbf{1}, \omega)$ 是一个微分分次顶点算子代数，则顶点代数 dg 模 $M^{[*]}$ 称为该微分分次顶点算子代数的弱 dg 模。类似于引理 3.3、 3.4。由上述定义可得:

- $Y_M(L(-1)v, x) = \frac{d}{dx} Y_M(v, x)$,
- $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} c_V$,

where $Y_M(\omega, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n x^{-n-2}$.

我们注意到，尽管算子 L_0 作用于 $M^{[*]}$，但并不要求 L_0 可对角化，甚至不要求它是局部有限的。我们只知道 L_0 是 $M^{[*]}$上的链映射。因此， L_0在 $M^{[*]}$中的广义特征空间都是子复形。

我们可以将分次微分分次模定义为弱微分分次模 $M^{[*]}$，连同一个分解 $M^{[*]} = \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} M^{[*]}(n)$，其中该分解属于链复形范畴 Ch，且对所有 $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$、 $u \in V_n$,

$$u_m(M^{[*]}(r)) \subseteq M^{[*]}(r+n-m-1)$$

对所有 $m \in \mathbb{Z}$、 $r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$均成立。注意，每个 $M^{[*]}(n) = \bigoplus_p M^{[p]}(n)$ 都是一个微分（上链）复形，即链复形范畴 Ch 中的对象。因此， $M^{[*]}$是 $\mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次的。我们将用 $M^{[*]}(\bullet)$ 表示 $M^{[*]}$上的 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次结构，它是若干微分复形的直和。同一个弱 $V^{[*]}$-微分分次模 $M^{[*]}$可以有多种不同的$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次复形分解。

令 $V^{[*]}$-Mod^{gr} 为 $V^{[*]}$上所有分次微分分次模构成的范畴。我们将使用 $(M^{[*]}, M^{[*]}(\bullet))$ 表示 $V^{[*]}$-Mod^{gr} 的对象，以指明分次结构。在 $V^{[*]}$-Mod^{gr} 中，态射 f: $(M^{[*]}, M^{[*]}(\bullet)) \longrightarrow (N^{[*]}, N^{[*]}(\bullet))$ 是一个 dg 模同态 f: $M^{[*]} \longrightarrow N^{[*]}$，满足对于所有 $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$， $f(M^{[*]}(n)) \subseteq N^{[*]}(n)$。不难验证， $V^{[*]}$-Mod^{gr} 是一个阿贝尔范畴。

更一般地，可以通过子复形的递增过滤，在微分分次模 $M^{[*]}$ 上定义滤过模结构。

$$\cdots \subseteq F^pM^{[*]} \subseteq F^{p+1}M^{[*]} \subseteq \cdots$$

满足

$$u_m(F^pM^{[*]}) \subseteq F^{p+n-m-1}M^{[*]}$$

对所有 $u \in V_n^{[*]}$和 $m \in \mathbb{Z}$均成立。令 $V^{[*]}$-Mod^{fil} 为所有滤过微分分次模构成的范畴，其对象为 $F^\bullet M^{[*]}$，态射 f: $F^\bullet M^{[*]} \to F^\bullet N^{[*]}$应当是 $V^{[*]}$-Mod^{w}中的态射，并且对所有 p 满足 $f(F^pM^{[*]}) \subseteq F^pN^{[*]}$。范畴 $V^{[*]}$-Mod^{fil} 是加性的，但一般而言不是阿贝尔的。

两个范畴 $V^{[*]}$-Mod^{gr} 和 $V^{[*]}$-Mod^{fil} 都有一个自等价函子 T，它在 $V^{[*]}$-模 $M^{[*]}$ 上是恒等的，但其分次（滤过）结构经过移位，由 $T(M^{[*]})(n) = M^{[*]}(n+1)$ 和 $F^p(T(M^{[*]})) = F^{p+1}M^{[*]}$ 定义。存在一个自然函子 gr : $V^{[*]}$-Mod^{fil} $\to$ $V^{[*]}$-Mod^{gr}，定义为 $\mathrm{gr}(F^\bullet M^{[*]})(p) = F^pM^{[*]}/F^{p-1}M^{[*]}$。该函子与自等价函子 T 交换，并且有一个截面 $(M^{[*]}, M^{[*]}(\bullet)) \mapsto F^\bullet M^{[*]}$，满足

$$F^pM^{[*]} = \oplus_{n\le p}M^{[*]}(n).$$

我们注意到， $V^{[*]}$-Mod^{gr} 不是 $V^{[*]}$-Mod^{w}的满子范畴。不过，存在一个自然的加性遗忘函子 $V^{[*]}$-Mod^{gr} $\longrightarrow$ $V^{[*]}$-Mod^w，它将$(M^{[*]}, M^{[*]}(\bullet))$映为 $M^{[*]}$，并遗忘分次结构。范畴 $V^{[*]}$-Mod^{gr}有一个满子范畴 $V^{[*]}$-Mod$^{gr}_+$，由所有满足 $M^{[*]}(n) = 0$（对 $n \ll 0$成立）的模 $M^{[*]}(\bullet)$组成。

容许微分分次模是 $M^{[*]}$ 在 $V^{[*]}$-Mod^w 中的一个对象，并且存在 $V^{[*]}$-Mod^{gr}中的一个分次结构$(M^{[*]}, M^{[*]}(\bullet))$，使得对所有 $n < 0$都有 $M^{[*]}(n) = 0$。令$V^{[*]}$-Mod^{adm} 为 $V^{[*]}$-Mod^w 的满子范畴，它由所有容许模$M^{[*]}$组成。因此， $V^{[*]}$-Mod^{adm} 中的每个对象都具有如下形式：对于某个 $V^{[*]}$-Mod$^{gr}_+$ 中的$(M^{[*]}, M^{[*]}(\bullet))$，对象为 $M^{[*]}$。作为 $V^{[*]}$-Mod^{w}的满子范畴，容许模之间的同态通常不保持分次结构。

我们想指出，对于给定的可容许模 $M^{[*]}$， $M^{[*]}$ 上可能存在许多不同的分次结构 $M^{[*]}(\bullet)$，从而使 $(M^{[*]}, M^{[*]}(\bullet))$ 成为 $V^{[*]}$-Mod$^{gr}_+$ 中的对象。因此， $M^{[*]}$ 上的分次结构在 $V^{[*]}$-Mod^{adm} 中的同态下并不保持不变。

最后，普通 dg 模是满足以下条件的微分分次模： $M^{[*]}$ L_0 是半单的，并具有特征空间分解 $M^{[*]} = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M^{[*]}_\lambda$

(i) 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\dim M^{[*]}_\lambda < \infty$；(ii) 对固定的 λ 且 n 足够小时， $M^{[*]}_{\lambda+n} = 0$；(iii) $M^{[*]}_\lambda$ 是 L_0 对应特征值 λ 的特征空间。

根据定义， $M_\lambda^{[*]} = \mathrm{Ker}(L_0 - \lambda : M^{[*]} \to M^{[*]})$ 是 $M^{[*]}$ 的子复形，因为 L_0 与微分 d_M 可交换。

我们用 $V^{[*]}$-Mod^{ord} 表示 $V^{[*]}$-Mod^{w} 中所有普通模构成的满子范畴。条件 (i) 意味着复形 $M_\lambda^{[*]}$ 的总体空间是有限维的。

一般而言，给定 $V^{[*]}$-Mod^{ord} 中的两个模 $M^{[*]}$ 和 $N^{[*]}$，短正合列中出现的模 $P^{[*]}$

$$0 \longrightarrow N^{[*]} \longrightarrow P^{[*]} \longrightarrow M^{[*]} \longrightarrow 0$$

在范畴 $V^{[*]}$-Mod^{w} 中不一定属于 $V^{[*]}$-Mod^{ord}，也就是说， $V^{[*]}$-Mod^{ord} 在 $V^{[*]}$-Mod^{w} 中不一定对扩张封闭。要求算子 L_0 在 $M^{[*]}$ 上半单地作用似乎条件过强。若弱模 $M^{[*]}$ 满足普通模的所有条件，但将条件 (iii) 放宽为假设 $M_\lambda^{[*]}$ 是关于 L_0 的广义特征空间，即 $M_\lambda^{[*]} = \bigcup_{m>0} \mathrm{Ker}((L_0 - \lambda)^m)$，则称其为对数型弱模。再一次，$M_\lambda^{[*]}$ 也是 $M^{[*]}$ 的子复形。我们用 $V^{[*]}$-Mod^{log} 表示 $V^{[*]}$-Mod^{w} 中由所有此类弱模 $M^{[*]}$ 构成的满子范畴。不过， $V^{[*]}$-Mod^{log} 对扩张封闭。

利用恒等式

$$[L_0, v_n] = (\mathrm{wt}(v) - n - 1)v_n$$

对于 $V^{[*]}$ 中的齐次 v，我们可以看到，对于任意对数模 $M^{[*]}$，子复形

$$\bigoplus_\lambda \mathrm{Ker}((L_0 - \lambda) : M_\lambda^{[*]} \to M_\lambda^{[*]})$$

$M^{[*]}$ 的子复形是 $M^{[*]}$ 的微分分次子模。因此，每个不可约对数型模都是普通模。

命题 4.3. $V^{[*]}$-Mod^{log} 中的每个模 $M^{[*]}$ 都可以唯一分解为（可能有无穷多个）不可分解微分分次模的直和，并且每个不可分解分量只出现有限次。

证明与普通模的证明类似。唯一性源于每个广义权子复形的总维数有限这一事实。

注 4.4. 函子 $H^{[*]}(–)$ 将弱（分别为分次、可容许、普通、对数型） $V^{[*]}$-模映为弱（分别为分次、可容许、普通、对数型）$H^{[*]}(V^{[*]})$-模

注 4.5. 也可以将微分分次顶点算子代数的微分分次模 $M^{[*]}$ 定义为上同调普通的，只要其上同调微分分次模 $H^{[*]}(M^{[*]})$ 是普通$H^{[*]}(V^{[*]})$-模。

命题4.3 的结果为每个对数模 $M^{[*]}$（•）定义了一个典范分次结构 $M^{[*]}$，使得（$M^{[*]}$， $M^{[*]}$（•）属于 $V^{[*]}$-模$_+^{gr}$。事实上，我们有$M^{[*]} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M^{[*]}(n)$，其中 $M^{[*]}(n) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_{\lambda+n}^{[*]}$以及 $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid M_{\lambda-m}^{[*]} =$

如果 $m \in \mathbb{N}^*\}$，则为 0。因此，每个对数微分分次模也是一个具有良好构造分次的可容许模。我们可以将所定义的不同类型模之间的关系概括如下：

$$V^{[*]}\text{-Mod}^{ord} \subseteq V^{[*]}\text{-Mod}^{log} \subseteq V^{[*]}\text{-Mod}^{adm} \subseteq V^{[*]}\text{-Mod}^{w}.$$

在结束本节之前，我们先引入以下定义：

定义 4.6. 若每个可容许$V^{[*]}$-模都是不可约可容许 $V^{[*]}$-模的直和，则称微分分次顶点算子代数 $V^{[*]}$ 为有理的。特别地，有理微分分次顶点算子代数是半单的，即它是自身不可约模的直和。若一个微分分次顶点算子的上同调顶点算子代数在 $\mathbf{Vec}^s$ 范畴中是有理的，则称该微分分次顶点算子代数是上同调有理的。

5. C_2-algebras and their Poisson module categories

5.1. C_2-代数。设 V是一个顶点代数。$\mathbf{C_2}$-代数 $R(V)$由 Y. Zhu 在 [Z] 中引入，定义为 $R(V) = V/C_2(V)$，其中 $C_2(V)$由集合 $\{a_{-2}b \mid a, b \in V\}$线性张成。该商带有如下交换泊松代数结构：

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a_{-1}b} \quad \text{and} \quad \{\overline{a}, \overline{b}\} = \overline{a_0 b} \quad \text{for } a, b \in V,$$

其中 $\overline{x}$ 是 $x \in V$在 $R(V)$中的像。若 $R(V)$是有限维的，则称 V为 $\mathbf{C_2}$-余有限。

现在假设 $V^{[*]} = (V^{[*]}, Y(\cdot, x), 1)$ 是一个微分分次顶点代数。令 $C_2^{[*]}(V^{[*]}) = \text{Span}\{u_{-2}v \mid u, v \in V^{[*]}\}$，并将 $\mathbf{C_2}$-微分分次代数定义为商 $R^{[*]}(V^{[*]}) = V^{[*]}/C_2^{[*]}(V^{[*]})$。如上所述，我们将用 $\overline{u}$ 表示 $u \in V^{[*]}$ 在 $R^{[*]}(V^{[*]})$中的等价类。我们有如下结果：

定理 5.1. 空间 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 是一个微分分次泊松代数，其乘积 $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{u_{-1}v}$为分次交换乘积，泊松括号为 $\{\overline{u}, \overline{v}\}_{R(V)} = \overline{u_0 v}$。若 $V^{[*]}$ 是一个微分分次顶点算子代数，则 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 是一个权分次微分分次泊松代数。

$$R^{[*]}(V^{[*]}) = \bigoplus_{(p,n) \in \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}} R^{[p]}(V^{[*]})_n.$$

其中 $R^{[p]}(V^{[*]})_n$ 是 $V_n^{[p]}$在 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 中的像。

证明。设 $V^{[*]}$ 是一个微分分次顶点代数，且 u、v 是 $V^{[*]}$的齐次元素。则

$$d_V(u_{-2}v) = d_V(u)_{-2}(v) + (-1)^{|u|-2(-2)+2} u_{-2}(d_V(v)) \in C_2^{[*]}(V^{[*]}).$$

此外 $u_{-2}v \in V^{[|u|+|v|+2]}$ 因此 $d_V(u_{-2}v) \in V^{[|u|+|v|+3]}$。于是 d_V：$C_2^{[k]}(V^{[*]}) \longrightarrow C_2^{[k+1]}(V^{[*]})$，且 $(C_2^{[*]}(V^{[*]}), d_V^{[*]})$ 是 $(V^{[*]}, d_V^{[*]})$ 的子复形。商空间 $(R^{[*]}(V^{[*]}), d_V^{[*]})$ 因而是一个良定义的上链复形。

我们有一个平移算子 $\mathcal{D}$，满足 $Y(\mathcal{D}v,x)=\frac{d}{dx}Y(v,x)$。由此可知，对于任意 $v\in V^{[*]}$ 和 $n\geq 2$，有

$$v_{-n}=\frac{1}{(n-1)!}(\mathcal{D}^{n-2}v)_{-2}.$$

因此可见，$C_2^{[*]}(V^{[*]})=\mathrm{Span}\{u_{-k}v\mid u,v\in V^{[*]},k\geq 2\}$。可以验证，定理陈述中给出的运算 $\overline{u}\cdot\overline{v}$ 和 $\{\overline{u},\overline{v}\}_{R(V)}$ 是良定义的，并且满足以下恒等式：

- $\{u,C_2^{[*]}(V^{[*]})\}_{R(V)}\subset C_2^{[*]}(V^{[*]})$,
- $u.C_2^{[*]}(V^{[*]})\subset C_2^{[*]}(V^{[*]})$,
- $\{u,v\}_{R(V)}+(-1)^{|u||v|}\{v,u\}_{R(V)}\in C_2^{[*]}(V^{[*]})$,
- $\{\{u,v\}_{R(V)},w\}_{R(V)}+(-1)^{|u||v|}\{v,\{u,w\}_{R(V)}\}_{R(V)}-\{u,\{v,w\}_{R(V)}\}_{R(V)}\in C_2^{[*]}(V^{[*]})$,
- $u.v-(-1)^{|u||v|}v.u\in C_2^{[*]}(V^{[*]})$,
- $u.(v.w)-(u.v).w\in C_2^{[*]}(V^{[*]})$,
- $\{u,v.w\}_{R(V)}-\{u,v\}_{R(V)}.w-(-1)^{|u||v|}v.\{u,w\}_{R(V)}\in C_2^{[*]}(V^{[*]})$,
- $d_V(u.v)-(d_V(u).v+(-1)^{|u|}u.d_V(v))\in C_2^{[*]}(V^{[*]})$,
- $d_V(\{u,v\}_{R(V)})-(\{d_V(u),v\}_{R(V)}+(-1)^{|u|}\{u,d_V(v)\}_{R(V)})\in C_2^{[*]}(V^{[*]})$.

现在假设 $V^{[*]}=\bigoplus_{(p,n)\in\mathbb{Z}\times\frac{1}{2}\mathbb{Z}}V_n^{[p]}$ 是一个微分分次顶点算子代数。因此，若 $u\in V^{[*]}$，则 $u=\sum_{(p,n)}u_n^p$，其中 $u_n^p\in V_n^{[p]}$。于是，$C_2^{[*]}(V^{[*]})$ 中的任意元素都可写为 $u_{-2}v=\sum_{p,p',n,n'}(u_n^p)_{-2}(v_{n'}^{p'})$，且 $(u_n^p)_{-2}(v_{n'}^{p'})\in V_{n+n'+1}^{[p+p'+2]}\cap C_2^{[*]}(V^{[*]})$。因此，$C_2^{[*]}(V^{[*]})$ 中元素的权齐次分量仍属于 $C_2^{[*]}(V^{[*]})$。由此可得，$C_2^{[*]}(V^{[*]})=\bigoplus_{(p,n)}C_2^{[p]}(V^{[*]})_n$，从而 $R^{[*]}(V^{[*]})=\bigoplus_{(p,n)\in\mathbb{Z}\times\frac{1}{2}\mathbb{Z}}V_n^{[p]}/C_2^{[p]}(V^{[*]})_n$。此外，我们知道 $u_{-1}v\in V^{[|u|+|v|]}$，$\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(v)$，因此 $R^{[p]}(V^{[*]})_n.R^{[p']}(V^{[*]})_{n'}\subset R^{[p+p']}(V^{[*]})_{n+n'}$。所以，$\mathbb{Z}\times\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次与乘积相容。□

注 5.2. 尽管对于任意微分分次顶点代数都可以定义 $R^{[*]}(V^{[*]})$，且其泊松结构独立于共形向量 ω 的选择，但共形结构决定了 $\mathbb{Z}\times\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次 $R^{[*]}(V^{[*]})$。

5.2. 相关的 dg Poisson $R^{[*]}(V^{[*]})$-模。设 $M^{[*]}$ 是 dg 顶点代数 $V^{[*]}$的一个 dg 模。定义 $C_2^{[*]}(M^{[*]})=\mathrm{Span}\{v_{-2}m\mid v\in V^{[*]},m\in M^{[*]}\}$ 并令$R^{[*]}(M^{[*]})=M^{[*]}/C_2^{[*]}(M^{[*]})$。由于 $Y_M(\cdot,x)$ 是一个链映射，我们有 $Y_M(\cdot,x)\circ d_V=d_{End(M)[[x,x^{-1}]]}\circ Y_M(\cdot,x)$。因此 $d_V(v)_n=d_{End(M)[[x,x^{-1}]]}(v_n)=d_M\circ v_n-(-1)^{|v_n|}v_n\circ d_M$。由此可得，$d_M(v_{-2}m)\in C_2^{[*]}(M^{[*]})$，且 $(C_2^{[*]}(M^{[*]})\ d_M^{[*]})$ 是以下对象的子复形

$(M^{[*]}, d_M^{[*]})$。因此，商 $R^{[*]}(M^{[*]})$ 是一个良定义的复形。$R^{[*]}(V^{[*]})$ 在 $R^{[*]}(M^{[*]})$ 上的作用定义为

$$\overline{v}.\overline{m} = \overline{v_{-1}m},$$

其中 $v \in V^{[*]}$, $m \in M^{[*]}$, $\overline{v} \in R^{[*]}(V^{[*]})$ $\overline{m} \in R^{[*]}(M^{[*]})$。还有另一个映射 $\{-,-\}_{R(M)}$： $R^{[*]}(V^{[*]}) \otimes R^{[*]}(M^{[*]}) \to R^{[*]}(M^{[*]})$，定义如下

$$\{\overline{v}, \overline{m}\}_{R(M)} = \overline{v_0(m)}.$$

定理 5.3. 若 $M^{[*]}$ 是微分分次顶点代数的微分分次模，则 $R^{[*]}(M^{[*]})$ 是 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 的微分分次泊松模。若 $M^{[*]} \in V^{[*]}\text{-Mod}^{gr}$ 是微分分次顶点算子代数$V^{[*]}$ 的范畴，则 $R^{[*]}(M^{[*]})$ 也是 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 的 $\mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次模。

证明。设 $M^{[*]}$ 是微分分次顶点代数 $V^{[*]}$的微分分次模。我们通过显式计算验证以下几点:

- $(R^{[*]}(M^{[*]}) \ d_M^{[*]})$ 是微分分次代数 $R^{[*]}(V^{[*]})$上的微分分次模（作用的度数为0），
- $(R^{[*]}(M^{[*]}) \{-,-\}_{R(M)} \ d_M^{[*]})$ 是微分分次李代数 $R^{[*]}(V^{[*]})$上的 DG 李代数模，其作用 $\{-,-\}$ 的度数为0。
- $\{\overline{u}, \overline{v}.\overline{m}\}_{R(M)} = \{\overline{u}, \overline{v}\}_{R(V)}.\overline{m} + (-1)^{|\overline{u}||\overline{v}|}\overline{v}.\{\overline{u}, \overline{m}\}_{R(M)}$,
- $\{\overline{u}.\overline{v}, \overline{m}\}_{R(M)} = \overline{u}.\{\overline{v}, \overline{m}\}_{R(M)} + (-1)^{|\overline{u}||\overline{v}|}\overline{v}.\{\overline{u}, \overline{m}\}_{R(M)}$.

这些性质使得 $R^{[*]}(M^{[*]})$ 成为 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 的微分分次泊松模。

现在设 $V^{[*]}$ 是一个微分分次顶点算子代数，$M^{[*]} = \bigoplus_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} M^{[*]}(n)$ 是一个分次微分分次 $V^{[*]}$-模。我们对 $R^{[*]}(M^{[*]})$ 采用此前对 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 所作的相同推理，并得到

$$R^{[*]}(M^{[*]}) = \bigoplus_{(p,n) \in \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}} R^{[p]}(M^{[*]})(n),$$

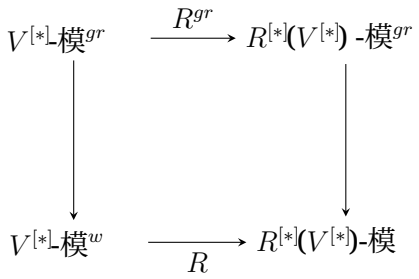
其中 $R_V^{[p]}(M^{[*]})(n) = M^{[p]}(n) / \left(M^{[p]}(n) \cap C_2^{[*]}(M^{[*]}) \right)$。同样，我们可以验证

$$R^{[p]}(V^{[*]})_n.R^{[p']}(M^{[*]})(n') \subset R^{[p+p']}(M^{[*]})(n+n').$$

□

如果 f： $M^{[*]} \longrightarrow N^{[*]}$ 是弱模同态，那么根据定义，我们有 $f(C_2^{[*]}(M^{[*]})) \subseteq C_2^{[*]}(N^{[*]})$，因此它诱导出一个线性映射 $R(f)$： $R^{[*]}(M^{[*]}) \longrightarrow R^{[*]}(N^{[*]})$，显然这是一个微分分次 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模同态。因此，我们得到一个加性函子 R： $V^{[*]}\text{-Mod}^{w} \longrightarrow R^{[*]}(V^{[*]})\text{-Mod}$，并且它是右正合的。

如果 $M^{[*]}$属于 $V^{[*]}\text{-Mod}^{gr}$，我们已经看到 $R^{[*]}(M^{[*]})$ 也自然地带有分次结构。因此，对 R 的限制给出一个函子 R^{gr}： $V^{[*]}\text{-Mod}^{gr} \longrightarrow R^{[*]}(V^{[*]})\text{-Mod}^{gr}$，并具有以下交换图:



6. Zhu algebras and associated graded algebras

6.1. **Zhu代数。** 设 $V^{[*]}$ 是一个微分分次顶点算子代数。我们考虑 dg 情形下 Zhu 代数的类比（参见 [Z]）。在$V^{[*]}$上有两个滤过：一个是

$$\cdots \subseteq F^pV^{[*]} \subseteq F^{p+1}V^{[*]} \subseteq \cdots \subseteq V^{[*]}$$

其中 $F^pV^{[*]} = \oplus_{i\leq p}V^{[i]}$使得（$V^{[*]}$、 $F^\bullet$、 d_V）成为一个微分滤过向量空间（参见第 2.6节），另一个则是权滤子

$$\cdots \subseteq W_nV^{[*]} \subseteq W_{n+1}V^{[*]} \subseteq \cdots \subseteq V^{[*]}$$

其中 $W_nV^{[*]} = \oplus_{m\leq n}V^{[*]}_m$使得（$V^{[*]}$、 $W_\bullet$、 $F^\bullet$、 d_V）成为一个权滤过微分滤过向量空间（参见第 2.7节）。显然可以注意到

$$V^{[*]} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F^pV^{[*]} = \bigcup_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} W_nV^{[*]} \text{ and } \bigcap_{p\in\mathbb{Z}} F^pV^{[*]} = \bigcap_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} W_nV^{[*]} = \{0\}.$$

对于任意 $v \in V^{[*]}$，我们按照第 $|v|$ 2.6节中的定义定义 v以及 wt(v)。特别地，如果 $v = \sum_i v_i$是一个有限和，且每个 $0 \neq v_i$ 都是权齐次的（在某个 $V^{[*]}_{n_i}$中），则 wt(v) = 等于 $\{n_i\}$ 的最大值 $\{n_i\}$。类似地，如果 $v = \sum_i v^i$ 是一个有限和，且每个 $0 \neq v^i$ 都是微分齐次的（在某个 $V^{[p_i]}$中），则 $|v|$ = 等于 $\{p_i\}$的最大值。

定义 6.1。我们在 $V^{[*]}$ 上定义如下双线性运算。对于 $u \in V^{[*]}$齐次的 $v \in V^{[*]}$,

$$u * v = \mathrm{Res}_x \left(Y(u,x)\frac{(1+x)^{\mathrm{wt}(u)}}{x}v \right) = \sum_{n\geq 0} \binom{\mathrm{wt}(u)}{n} u_{n-1}v.$$

令 $O(V^{[*]})$ 为由形如以下元素张成的 $V^{[*]}$ 子空间

$$u \circ v = \mathrm{Res}_x \left(Y(u,x)\frac{(1+x)^{\mathrm{wt}(u)}}{x^2}v \right) = \sum_{n\geq 0} \binom{\mathrm{wt}(u)}{n} u_{n-2}v.$$

定义 $A(V^{[*]}) = V^{[*]}/O(V^{[*]})$，其中我们将 $[v]$ 写作 $v \in V^{[*]}$ 在 $A(V^{[*]})$ 中的像。空间 $A(V^{[*]})$ 称为 $V^{[*]}$ 的 Zhu代数。

下面的引理将非常有用。这也是对 Zhu 的一个结果的改编（参见 [Z，引理 2.1。3]），适用于 dg 情形。

引理 6.2。对于任意 $u \in V^{[|u|]}{}_{\mathrm{wt}(u)}$ 和 $v \in V^{[|v|]}{}_{\mathrm{wt}(v)}$，有：

$$u * v - (-1)^{|u||v|} v * u \equiv \mathrm{Res}_x \left(Y(u,x)(1+x)^{\mathrm{wt}(u)-1} v \right) = \sum_{n \geq 0} \binom{\mathrm{wt}(u)-1}{n} u_n v \mod O(V^{[*]}).$$

特别地，

$$u * v - (-1)^{|u||v|} v * u \in F^{|u|+|v|-2} V^{[*]} \mod O(V^{[*]}), \tag{15}$$

$$u * v - (-1)^{|u||v|} v * u \in W_{\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(v)-1} V^{[*]} \mod O(V^{[*]}), \tag{16}$$

$$u * v - (-1)^{|u||v|} v * u - u_0(v) \in F^{|u|+|v|-4} V^{[*]} \mod O(V^{[*]}), \tag{17}$$

$$u * v - (-1)^{|u||v|} v * u - u_0(v) \in W_{\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(v)-2} V^{[*]} \mod O(V^{[*]}), \tag{18}$$

取 $u = \omega$，得到

$$\omega * v - v * \omega = (L_{-1} + L_0)(v) \in O(V^{[*]}).$$

引理 6.3. 若 v、$v' \in V^{[*]}$ 是微分分次齐次的，且 $v \equiv v'$ 模 $O(V^{[*]})$，并且$v \notin O(V^{[*]})$，则 $|v| \equiv |v'|$ 模 2。

证明。令 $V^{[*]} = V^{[odd]} \oplus V^{[ev]}$，其中$V^{[odd]} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^{[2i+1]}$ 且$V^{[ev]} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^{[2i]}$。我们记

$$v = v' + \sum_{(a,b) \in I} a \circ b$$

其中 I 是微分分次齐次非零元素 a 和b 在 $V^{[*]}$中的有限子集所构成的有序对(a,b)的集合。令 I^{odd}（分别为 I^{ev}）表示满足 $|a|+|b|$ 为奇数（分别为偶数）的有序对$(a,b) \in I$的子集。于是$\sum_{(a,b) \in I^{odd}} a \circ b \in V^{[odd]}$，且$\sum_{(a,b) \in I^{ev}} a \circ b \in V^{[ev]}$。例如，若 $|v| \not\equiv |v'|$模 2，则 $|v|$ 为奇数，于是 $v \in V^{[odd]}$ 且 $v' \in V^{[ev]}$。因此$v = \sum_{(a,b) \in I^{odd}} a \circ b \in O(V^{[*]})$，这与 $v \notin O(V^{[*]})$的假设矛盾。□

下一个定理是对 Zhu 在 dg 情形下证明的改编：

定理 6.4. ([Z]). $O(V^{[*]})$ 是乘法 $*$下的双边理想，因此 $*$在 $A(V^{[*]})$上有定义。此外：

(1) $A(V^{[*]})$ 在乘法 $*$ 下是一个结合代数。(2) 真空向量 1 的像是代数 $A(V^{[*]})$ 的单位元。(3) $A(V^{[*]})$ 是一个微分过滤代数，带有递增滤过 $(F^p A(V^{[*]}))_{p \in \mathbb{Z}}$，其中 $F^p A(V^{[*]})$ 是 $\bigoplus_{q \leq p} V_*^{[q]}$ 在 $A(V^{[*]})$ 中的像。(4) 对于超交换括号 $[-,-]^s$，共形向量 ω 的像属于 $A(V^{[*]})$ 的中心，即对于所有 $[v] \in A(V^{[*]})$，都有 $[\omega] * [v] = [v] * [\omega]$。(5) $A(V^{[*]})$ 带有权滤过 $(W_n A(V^{[*]}))_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$，其中 $W_n A(V^{[*]})$ 是 $\bigoplus_{i \leq n} V_i^{[*]}$ 在 $A(V^{[*]})$ 中的像。

注 6.5。注意，尽管 $d_V(O(V^{[*]})) \subseteq O(V^{[*]})$，空间 $O(V^{[*]})$ 并不是 $V^{[*]}$ 的子复形。事实上，它不能分解为齐次分量的直和。因此， $A(V^{[*]})$ 不是微分分次代数。稍后我们将看到如何通过后续构造恢复 dg 情形。

结合代数 $A(V^{[*]})$ 具有两种滤过结构，因此我们可以考虑范畴 $A(V^{[*]})$ -Mod，即 $A(V^{[*]})$-模的范畴，以及 $A(V^{[*]})$ -$\mathrm{Mod}_+^{F^\bullet}$（分别为 $A(V^{[*]})$ -$\mathrm{Mod}_+^{W\bullet}$）这一滤过 $A(V^{[*]})$-模的范畴，其中 $M^{[*]}$带有 $F^pM^{[*]} = 0$，适用于 $p \ll 0$（分别适用于 $W_nM^{[*]} = 0$），并且伴随自然的遗忘函子 $A(V^{[*]})$ -$\mathrm{Mod}_+^{F^\bullet} \longrightarrow A(V^{[*]})$ -Mod（分别为 $A(V^{[*]})$-$\mathrm{Mod}_+^{W\bullet} \longrightarrow A(V^{[*]})$ -Mod）。

定理 6.6。$(A(V^{[*]})\ F^\bullet A(V^{[*]})\ *, d_V)$ 是一个微分滤过交换代数。

证明。 微分滤过结构（参见第 2.6 节）已由定理 6.4 得知。现在只需证明交换性。设 $x \in F^nA(V^{[*]})$ 和$y \in F^mA(V^{[*]})$，其中 $n = |x|$ 且 $m = |y|$。存在 $u \in V^{[n]}$ 和 $v \in V^{[m]}$ 使得$[u] - x \in F^{n-1}A(V^{[*]})$ 和 $[v] - y \in F^{m-1}A(V^{[*]}$。记 $u = \sum_i u^i$和 $v = \sum_j v^j$，其中 $u^i \in V_i^{[n]}$ 且 $v^j \in V_j^{[m]}$。于是

$$\begin{aligned} x * y - (-1)^{|x||y|} y * x &= [u] * [v] - (-1)^{nm}[v] * [u] + F^{n+m-1}A(V^{[*]}), \\ &= \sum_{i,j} \left([u^i] * [v^j] - (-1)^{nm}[v^j] * [u^i]\right) + F^{n+m-1}A(V^{[*]}), \\ &= \sum_{i,j}\sum_{k\geq 0} \binom{i-1}{k} (u^i)_k v^j + O(V^{[*]}) + F^{n+m-1}V^{[*]}, \\ &\in O(V^{[*]}) + F^{n+m-1}V^{[*]}, \end{aligned}$$

这里用到了引理 6.2 以及 $|(u^i)_k v^j| = n+m-2k-2$ 这一事实。因此 $x * y - (-1)^{|x||y|} y * x \in F^{|x|+|y|-1}A(V^{[*]})$，从而 $A(V^{[*]})$ 是微分滤过交换的。 □

6.2. 按次数滤过。相对于次数滤过的伴随分次代数为 $\mathrm{gr}^{[*]}\, A(V^{[*]}) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} F^{p+1}A(V^{[*]})/F^pA(V^{[*]})$。由于 $(A(V^{[*]})\ F^\bullet, d_V)$ 是微分滤过交换的，$\mathrm{gr}^{[*]}\, A(V^{[*]})$ 在由 $*$ 诱导的乘积下是一个微分分次交换代数。若 x 是 $F^{|x|}A(V^{[*]})$ 中的一个齐次元素，我们将 $\widetilde{x} = x + F^{|x|-1}A(V^{[*]}) \in \mathrm{gr}^{[|x|]}\, A(V^{[*]})$ 记作 x 在 $\mathrm{gr}^{[*]}\, A(V^{[*]})$ 中的类。

引理 6.7. 取 $u \in V^{[p]}$ 使得 $[u] \in F^{p-1}A(V^{[*]})$。那么存在有限多个微分分次齐次 $f_i \in V^{[*]}$，满足 $|f_i| \leq p-2$，使得

$$u + \sum_i f_i \in O(V^{[*]}),$$

and

$$|f_i| \equiv p \mod 2, \ \textit{for all } i.$$

证明。取陈述中所述的 u。则 $u \in O(V^{[*]}) + F^{p-1}V^{[*]}$，因此 u 是 $O(V^{[*]})$ 中某个元素的最高次数分量。我们将此元素分解为 $\sum_{l\in L} a_l \circ b_l = \sum_{l\in L}\sum_{k\geq 0}\binom{\mathrm{wt}(a_l)}{k}(a_l)_{k-2}b_l$，其中 a_l、b_l 为微分分次齐次且权齐次。由于 $|(a_l)_{k-2}b_l| = |a_l| + |b_l| - 2k + 2$，我们看到 $a_l \circ b_l$ 的微分分次齐次分量的所有次数都模 2 同余于 $|a_l| + |b_l|$。因此，我们可以将之前的和拆分为

$$\sum_{l\in L'} a_l \circ b_l + \sum_{l\in L''} a_l \circ b_l,$$

其中，L'（分别地，L''）是满足 $|a_l| + |b_l| - p \equiv 0 \bmod 2$（分别地，$|a_l| + |b_l| - p \equiv 1 \bmod 2$）的指标集合。由此可知，第一个求和中的所有分量都具有与 p相同的奇偶性的次数，而另一个求和具有相反的奇偶性。因此，u 是对 L' 求和中的一项。此外，由于 u 是对 L 求和中的最高分量，且对 L' 和 L'' 的求和具有不同的奇偶性，因而不可能相互抵消，所以 u 是$\sum_{l\in L'} a_l \circ b_l$的最高次数项。

置 $X = \sum_{l\in L'} a_l \circ b_l$。$X - u$ 的微分分次齐次分量记为 f_i。根据我们的构造，对于每个 f_i，存在 $l \in L'$ 和 $k \geq 0$，使得$|f_i| = |(a_l)_{k-2}b_l|$，因此 $|f_i| \equiv |a_l| + |b_l| \equiv p \bmod 2$。特别地，由于 $|f_i| < p$，我们有 $|f_i| \leq p - 2$。□

我们知道，对于 $x \in F^{|x|}A(V^{[*]})$、$y \in F^{|y|}A(V^{[*]})$，存在 $u \in V^{[|x|]}, v \in V^{[|y|]}$，使得 $[u] - x \in F^{|x|-1}A(V^{[*]})$ 且 $[v] - y \in F^{|y|-1}A(V^{[*]})$。我们定义

$$\{\widetilde{x}, \widetilde{y}\}_{F^\bullet} = [u] * [v] - (-1)^{|u||v|}[v] * [u] \mod F^{|x|+|y|-3}A(V^{[*]}).$$

引理 6.8. 该映射

$$\{.,.\}_{F^\bullet} : \mathrm{gr}^{[p]}\, A(V^{[*]}) \otimes \mathrm{gr}^{[q]}\, A(V^{[*]}) \longrightarrow \mathrm{gr}^{[p+q-2]}\, A(V^{[*]})$$

是良定义的。

证明。固定 $x \in F^pA(V^{[*]})$、$y \in F^qA(V^{[*]})$，并令 $u' \in V^{[p]}$、$v' \in V^{[q]}$ 为满足 $[u'] - x \in F^{p-1}A(V^{[*]})$ 和 $[v'] - y \in F^{q-1}A(V^{[*]})$ 的其他元素。于是 $[u] - [u'] \in F^{p-1}A(V^{[*]})$。根据引理 6.7，我们可以写成 $u - u' = X - \sum_i f_i$，其中 $X \in O(V^{[*]})$，且 f_i 在 $V^{[*]}$ 中是微分分次齐次的，并具有 $|f_i| \leq p-2$ 和 $|f_i| \equiv p$ 模 2。类似地，我们分解 $v - v' = Y - \sum_j g_j$，其中 $Y \in O(V^{[*]})$、$|g_j| \leq q-2$ 和 $|g_j| \equiv q$ 模 2。

因此我们可以写成

$$\begin{aligned}[u]*[v]-(-1)^{pq}[v]*[u] &= [u'+X-\sum_i f_i]*[v'+Y-\sum_j g_j]\\ &\quad -(-1)^{nm}[v'+Y-\sum_j g_j]*[u'+X-\sum_i f_i],\\ &= u'*v'-(-1)^{pq}v'*u'\\ &\quad -\sum_j (u'*g_j-(-1)^{pq}g_j*u')\\ &\quad -\sum_i (f_i*v'-(-1)^{pq}v'*f_i)\\ &\quad +\sum_{i,j}(f_i*g_j-(-1)^{pq}g_j*f_i) \mod O(V^{[*]}).\end{aligned}$$

利用 f_i 和 g_j次数的奇偶性，我们得到

$$pq\equiv |f_i|q\equiv p|g_j|\equiv |f_i||g_j| \mod 2,$$

因此

$$(-1)^{pq}=(-1)^{|f_i|q}=(-1)^{p|g_j|}=(-1)^{|f_i||g_j|}.$$

因此，我们可以将引理 6.2 应用于先前得到的表达式，并可知

$$[u]*[v]-(-1)^{pq}[v]*[u]\equiv u'*v'-(-1)^{pq}v'*u' \mod \left(O(V^{[*]})+F^{p+q-3}V^{[*]}\right),$$

因此，映射 $\{.,.\}_{F^\bullet}$ 良定义。 □

命题 6.9. $\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$ 是 Vec^s 范畴中的分次交换微分分次泊松代数。乘积由 $*$诱导，泊松括号为 $\{.,.\}_{F^\bullet}$且次数为 -2，微分由 d_V诱导。特别地，对于 $\widetilde{x},\widetilde{y}\in \mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$ 中次数分别齐次的元素，其原像分别为 $u\in V^{[|\widetilde{x}|]}$, $v\in V^{[|\widetilde{y}|]}$，我们有

$$\widetilde{x}*\widetilde{y}=\widetilde{[u_{-1}v]} \quad and \quad \{\widetilde{x},\widetilde{y}\}_{F^\bullet}=\widetilde{[u_0 v]}.$$

证明。对于 x、y、$z\in A\ (V^{[*]})$，我们可以通过直接计算验证：

- $\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}_{F^\bullet}+(-1)^{|\widetilde{x}||\widetilde{y}|}\{\widetilde{y},\widetilde{x}\}_{F^\bullet}=0,$
- $\{\widetilde{x},\{\widetilde{y},\widetilde{z}\}_{F^\bullet}\}_{F^\bullet}=\{\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}_{F^\bullet},\widetilde{z}\}_{F^\bullet}+(-1)^{|\widetilde{x}||\widetilde{y}|}\{\widetilde{y},\{\widetilde{x},\widetilde{z}\}_{F^\bullet}\}_{F^\bullet},$
- $\{\widetilde{x},\widetilde{y}*\widetilde{z}\}_{F^\bullet}=\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}_{F^\bullet}*\widetilde{z}+(-1)^{|\widetilde{x}||\widetilde{y}|}\widetilde{y}*\{\widetilde{x},\widetilde{z}\}_{F^\bullet},$
- $\widetilde{x}*\widetilde{y}-(-1)^{|\widetilde{x}||\widetilde{y}|}\widetilde{y}*\widetilde{x}=0.$

我们在齐次元素上通过 $d_{F^\bullet}(\widetilde{x})=\widetilde{d_V x}$ 定义 $d_{F^\bullet}\colon \mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})\longrightarrow \mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$，然后将其线性扩张。接着，我们可以明确验证：

- $d_{F^\bullet}\circ d_{F^\bullet}=0,$
- $d_{F^\bullet}(\widetilde{x}*\widetilde{y})=d_{F^\bullet}(\widetilde{x})*\widetilde{y}+(-1)^{|\widetilde{x}|}\widetilde{x}*d_{F^\bullet}(\widetilde{y}),$
- $d_{F^\bullet}(\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}_{F^\bullet})=\{d_{F^\bullet}(\widetilde{x}),\widetilde{y}\}_{F^\bullet}+(-1)^{|\widetilde{x}|}\{\widetilde{x},d_{F^\bullet}(\widetilde{y})\}_{F^\bullet}.$

□

正如在经典情形中（参见 [ALY]）一样， $R^{[*]}(V^{[*]})$ 与 $\mathrm{gr}^{[*]}\, A(V^{[*]})$ 之间存在关系。我们定义如下映射：

$$\begin{aligned} \eta_{F^\bullet}: \quad R^{[*]}(V^{[*]}) \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{gr}^{[*]}\, A(V^{[*]}) \\ u + C_2^{[|u|]}(V^{[*]}) \quad &\longmapsto \quad u + O(V^{[*]}) + \bigoplus_{p<|u|} V^{[p]}. \end{aligned}$$

由于 $C_2^{[|u|]}(V^{[*]}) \subseteq O(V^{[*]}) + \bigoplus_{p<|u|} V^{[p]}$，映射 $\eta_{F^\bullet}$ 良定义。

命题 6.10。映射 $\eta_{F^\bullet}$ 是 dg 泊松代数的满射态射。

证明。由 $\mathrm{gr}^{[*]}\, A(V^{[*]})$ 的构造，满射性是显然的。通过直接计算可验证， $\eta_{F^\bullet}$ 保持代数结构以及泊松括号。最后，显然可以看出 $\eta_{F^\bullet}$ 是链映射。□

6.3. 按权滤过。如定理 6.6 中所证明的，代数 $(A(V^{[*]}), F^\bullet A(V^{[*]})\ d_V, *)$ 是一个微分过滤代数。它还具有按权滤过的微分过滤结构（参见第 2.7 节），其中 $W_n A(V^{[*]})$ 是 $\sum_{m\le n} V_m^{[*]}$ 在 $A(V^{[*]})$ 中的像。事实上，它显然是一个递增过滤，并且由于对于任意 $u \in V^{[|u|]}$， $L_0(d_V(u)) = |u| d_V(u)$，空间 $W_n A(V^{[*]})$ 在 d_V 下稳定。因此，我们可以考察伴随分次代数 $\mathrm{gr}_*\, A(V^{[*]}) = \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} W_n A(V^{[*]})/W_{n-1}A(V^{[*]})$。我们首先证明以下结果：

命题 6.11. 代数 $\mathrm{gr}_*\, A(V^{[*]})$ 是权分次的微分过滤代数。此外，乘积是微分滤过交换的。

证明. 代数 $\mathrm{gr}_*\, A(V^{[*]})$ 配备了递增滤过 $F^p\, \mathrm{gr}_n\, A(V^{[*]}) = F^p A(V^{[*]}) \cap W_n A(V^{[*]})$ 模 $W_{n-1}A(V^{[*]})$。 $V^{[*]}$ 上的微分 d_V 在 $\mathrm{gr}_*\, A(V^{[*]})$ 上诱导出一个映射，记作 d；不难验证，$(\mathrm{gr}_*\, A(V^{[*]})\ F^\bullet, d)$ 是一个微分滤过向量空间（参见第 2.6 节）。此外，权分次性质由构造显然可得。

令 $\widetilde{x} \in F^p \mathrm{gr}_n\, A(V^{[*]})$，其中 $p = |\widetilde{x}|$。我们可以写成 $\widetilde{x} = [u]$ 模 $W_{n-1}A(V^{[*]})$，其中 $u = \sum_{l\le p} u^l$ 满足 $|u^l| = l$。同理，对于 $\widetilde{y} \in F^q \mathrm{gr}_m\, A(V^{[*]})$，我们可以写成 $\widetilde{y} = [v]$ 模 $W_{m-1}A(V^{[*]})$，其中 $v = \sum_{k\le q} v^k$ 满足 $|v^k| = k$。利用这些分解，我们通过直接计算证明

$$d(\widetilde{x} * \widetilde{y}) - (d(\widetilde{x}) * \widetilde{y} + (-1)^p \widetilde{x} * d(\widetilde{y})) \in F^{|\widetilde{x}|+|\widetilde{y}|}\, \mathrm{gr}_{m+n}\, A(V^{[*]}).$$

因此（$\mathrm{gr}_*\, A$（$V^{[*]}$）是 $F^\bullet$， d， $*$）是一个微分过滤代数。对于 $\widetilde{x}$ 和 $\widetilde{y}$，利用相同的分解以及公式（15）和（16）可以验证微分过滤交换性。□

引理 6.12。令 $u \in V_n^{[*]}$，使得 $[u] \in W_{n-1}A(V^{[*]})$。我们将 $u = \sum_{q \le p} u^q$ 写作 $|u^q| = q$。那么存在有限个微分分次齐次且权齐次的$f_i \in V^{[*]}$，满足 $\mathrm{wt}(f_i) \le n$，使得

$$u^p + \sum_i f_i \in O(V^{[*]}),$$

and

$$|f_i| \equiv p \mod 2, \text{ for all } i.$$

证明。令 u 如陈述中所述。于是 $u \in O(V^{[*]}) + W_{n-1}V^{[*]}$，因此 u 是 $O(V^{[*]})$ 中某个元素的最高权分量。我们将此元素分解为 $\sum_{l\in L} a_l \circ b_l = \sum_{l\in L}\sum_{k\ge 0}\binom{\mathrm{wt}(a_l)}{k}(a_l)_{k-2}b_l$，其中 a_l、b_l 是微分分次齐次且权齐次的。由于 $|(a_l)_{k-2}b_l| = |a_l| + |b_l| - 2k + 2$，我们看到 $a_l \circ b_l$ 的微分分次齐次分量的次数模 2 均同余于 $|a_l| + |b_l|$。因此，我们可以将之前的和拆分为：

$$\sum_{l\in L'} a_l \circ b_l + \sum_{l\in L''} a_l \circ b_l,$$

其中，L'（分别地，L''）是满足 $|a_l| + |b_l| - p \equiv 0$ 模 2（分别地，$|a_l| + |b_l| - p \equiv 1$ 模 2）的指标集合。由此可知，第一项和中的所有分量的次数与 p 具有相同的奇偶性，而另一项和具有相反的奇偶性。因此，u^p 是对 L' 求和中的一个项。由于对 L' 和 L'' 求和所得各项具有不同的次数奇偶性，它们不可能相互抵消。因此，u^p 在对 L 求和中具有最高权，故它是 $\sum_{l\in L'} a_l \circ b_l$ 的最高权项中的一个项。

置 $X = \sum_{l\in L'} a_l \circ b_l$。$X - u^p$ 的微分分次齐次分量和权齐次分量分别记为 f_i。根据我们的构造，对于每个 f_i，存在 $l \in L'$ 和 $k \ge 0$，使得 $|f_i| = |(a_l)_{k-2}b_l|$，因此 $|f_i| \equiv |a_l| + |b_l| \equiv p$ 模 2。由于 n 是对 L' 求和所得项的最高权，因此可得 $|f_i| \le n$。□

注 6.13。我们无法像在引理 6.8 中那样，在 $\mathrm{gr}_* A(V^{[*]})$ 上定义泊松结构。事实上，我们有引理 6.12，它是引理 6.7 的一个变体。然而，在引理 6.12 中，我们没有 $\mathrm{wt}(f_i) < n$ 这一条件。因此，由超交换子给出的自然映射在 $\mathrm{gr}_* A(V^{[*]})$ 上不是良定义的。此外，代数 $\mathrm{gr}_* A(V^{[*]})$ 不是微分复形，因为 $d(\mathrm{gr}_n A(V^{[*]})) \subseteq \mathrm{gr}_n A(V^{[*]})$。因此，该代数上不存在微分分次泊松结构。

如同使用按上同调次数定义的滤子那样，我们定义如下映射：

$$\begin{aligned} \eta_{W_\bullet}: \quad R^{[*]}(V^{[*]}) &\longrightarrow \mathrm{gr}_* A(V^{[*]}) \\ u + C_2^{[*]}(V^{[*]})_{\mathrm{wt}(u)} &\longmapsto u + O(V^{[*]}) + \bigoplus_{n<\mathrm{wt}(u)} V_n^{[*]}. \end{aligned}$$

Be 导致 $C_2(V^{[*]})_{\mathrm{wt}(u)} \subseteq O(V^{[*]}) + \bigoplus_{m<\mathrm{wt}(u)} V_m^{[*]}$，映射 $\eta_{W_\bullet}$ 是良定义的 .

命题 6.14. 映射 $\eta_{W_\bullet}$ 是权分次、微分滤过、微分滤过交换代数的满射态射。

证明。 证明与命题 6.10类似。 □

注 6.15. 态射 $\eta_{W_\bullet}$ 没有理由是同构。例如，在单仿射顶点算子代数的经典情形下，$L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)$，其中 $\mathfrak{g}$ 属于 E_8 型，并带有伴随表示，态射 $\eta_{W_\bullet}$ 不是单射，因为 dim $R(V) > \dim A(V)$（参见 [GG，第四节。3]）。

6.4. 依次使用两种滤过。 我们分别考察了$A(V^{[*]})$上的两种分次。依次考察它们并使用引理 2.8，可得 $\mathrm{gr}_*\,\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$ 和 $\mathrm{gr}^{[*]}\mathrm{gr}_*\,A(V^{[*]})$ 是同构的权分次 dg 代数。

命题 6.16。代数 $\mathrm{gr}_*\,\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]}) \cong \mathrm{gr}^{[*]}\mathrm{gr}_*\,A(V^{[*]})$ 是一个权分次微分分次泊松代数。泊松括号关于上同调次数的次数为 -2，关于权的次数为 -1。此外，微分分次分次使其成为一个分次交换代数。

证明。伴随分次代数为：

$$\mathrm{gr}_*\,\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]}) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \left(V_n^{[p]} \mod I_n^{[p]}\right),$$

其中 $I_n^{[p]} = O(V^{[*]}) + \bigoplus_{\substack{q\le p\\ m<n}} V_m^{[q]} + \bigoplus_{\substack{q<p\\ m\le n}} V_m^{[q]}$。乘积由 $V^{[*]}$ 中的 $*$-乘积诱导。显然，根据乘积 $*$ 的性质，该代数同时按权和上同调次数分次。设 $\widetilde{x} \in \mathrm{gr}_{n_1}\,\mathrm{gr}^{[p_1]}\,A(V^{[*]})$ 和$\widetilde{y} \in \mathrm{gr}_{n_2}\,\mathrm{gr}^{[p_2]}\,A(V^{[*]})$。那么存在 $u \in V_{n_1}^{[p_1]}$, $v \in V_{n_2}^{[p_2]}$，使得它们在 $\mathrm{gr}_*\,\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$ 中的像分别为 $\widetilde{x}$ 和 $\widetilde{y}$。$\mathrm{gr}_*\,\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$ 中的括号定义如下：

$$\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}_{F^\bullet W_\bullet} = u*v - (-1)^{p_1p_2}v*u \mod I_{n_1+n_2-1}^{[p_1+p_2-2]}.$$

由引理 6.2，我们可知 $u*v-(-1)^{p_1p_2}v*u \in I_{n_1+n_2-1}^{[p_1+p_2-2]} + V_{n_1+n_2-1}^{[p_1+p_2-2]}$，因此它在 $\mathrm{gr}_*\,\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$ 中的像属于直和项 $\mathrm{gr}_{n_1+n_2-1}\,\mathrm{gr}^{[p_1+p_2-2]}\,A(V^{[*]})$。

我们需要验证 $\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}_{F^\bullet W_\bullet}$ 是良定义的。设 u'、v' 分别是 $\widetilde{x}$ 和 $\widetilde{y}$ 的其他原像。那么

$$u-u' \in I_{n_1}^{[p_1]}.$$

因此我们可以写成 $X = u-u'+z+\sum_i f_i$ 其中 $X \in O(V^{[*]})$，$z \in \bigoplus_{m<n_1} V_m^{[p_1]}$，且$f_i$ 均为关于上同调次数和权的齐次元，并满足 $|f_i| < p_1$，$\mathrm{wt}(f_i) \le n_1$。由此可得 $u-u'+z$ 满足引理 6.7的假设，因此可以假设 $|f_i| \equiv p_1$ 模 2。类似地，我们可以写成 $Y = v-v'+w+\sum_j g_j$,

其中 $Y \in O(V^{[*]})$、$w \in \bigoplus_{m<n_2} V_m^{[p_2]}$ 以及 g_j 均满足 $|g_j| \equiv p_2$ 模 2。于是我们得到：

$$\begin{aligned} u*v-(-1)^{p_1p_2}v*u &= (u'+X-z-\sum_i f_i)*(v'+Y-w-\sum_j g_j) \\ &\quad -(-1)^{p_1p_2}(v'+Y-w-\sum_j g_j)*(u'+X-z-\sum_i f_i), \\ &= u'*v'-(-1)^{p_1p_2}v'*u' \\ &\quad -\sum_j (u'*g_j-(-1)^{p_1p_2}g_j*u') \\ &\quad -\sum_i (f_i*v'-(-1)^{p_1p_2}v'*f_i) \\ &\quad +\sum_{i,j}(f_i*g_j-(-1)^{p_1p_2}g_j*f_i) \\ &\quad -(z*v'-(-1)^{p_1p_2}v'*z) \\ &\quad +z*w-(-1)^{p_1p_2}w*z \\ &\quad +\sum_j (z*g_j-(-1)^{p_1p_2}g_j*z) \\ &\quad -(u'*w-(-1)^{p_1p_2}w*u') \\ &\quad +\sum_i (f_i*w-(-1)^{p_1p_2}w*f_i) \mod O(V^{[*]}). \end{aligned}$$

利用 $|f_i| \equiv p_1$ 模 2 且 $|g_j| \equiv p_2$ 模 2 这一事实，引理 6.2 中的公式（15）和（16）表明，右侧除第一个表达式外的所有表达式都属于 $I_{n_1+n_2-1}^{[p_1+p_2-2]}$。因此我们得到

$$u*v-(-1)^{p_1p_2}v*u \equiv u'*v'-(-1)^{p_1p_2}v'*u' \mod I_{n_1+n_2-1}^{[p_1+p_2-2]},$$

因此，映射 $\{.,.\}_{F^\bullet W_\bullet}$ 是良定义的。显然，该映射关于上同调次数的次数为 -2，关于权的次数为 -1。证明的其余部分与命题 6.9 的证明类似。□

我们在定理 5.1 中已经看到，$R^{[*]}(V^{[*]})$ 是一个权分次 dg 泊松代数，前述伴随分次代数也是如此。我们定义如下映射：

$$\begin{aligned} \eta_{F^\bullet W_\bullet}: \quad R^{[*]}(V^{[*]}) &\longrightarrow \mathsf{gr}_*\,\mathsf{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]}) \\ u+C_2^{[p]}(V^{[*]})_n &\longmapsto u+O(V^{[*]})+\bigoplus_{\substack{q\le p\\ m<n}} V_m^{[q]}+\bigoplus_{\substack{q<p\\ m\le n}} V_m^{[q]} \end{aligned}$$

对于 $u \in V_n^{[p]}$。采用与命题 6.10类似的推理，可以直接证明如下结论：

命题 6.17。映射 $\eta_{F\bullet W_\bullet}$ 是权分次微分分次泊松代数的满射态射。

7. Associated $A(V^{[*]})$-bimodules and associated graded modules

我们已经看到，可以将一个 $V^{[*]}$-模与一个 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模联系起来。对于 Zhu代数，我们也可以进行类似的处理。事实上，正如我们将在本节中描述的，对于微分分次顶点算子代数 $V^{[*]}$，有如下图表：

$$\begin{array}{ccccc} & & A(V^{[*]})\text{-双模}_+^{fil} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ V^{[*]}\text{-模}^{gr} & + & & \xrightarrow{\mathrm{gr}} & A(V^{[*]})\text{-模}_+^{gr} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & R^{[*]}(V^{[*]})\text{-泊松}_+ & & \end{array} \tag{19}$$

其中，Poiss 是泊松模范畴，Mod^{gr} 是 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次模范畴，biMod^{fil} 是滤过双模范畴。最后，指标 $+$ 表示当 $n \ll 0$ 时，分次（或滤子）的第 n 项为零。

实际上，根据在 $A(V^{[*]})$-模上考虑的滤过结构不同，共有三种这样的图表，即次数滤过、权滤过，或二者兼有。因此，$\mathrm{gr}\, A(V^{[*]})$ 可以是 $\mathrm{gr}^{[*]}\, A(V^{[*]})$、$\mathrm{gr}_*\, A(V^{[*]})$，或 $\mathrm{gr}^{[*]}\,\mathrm{gr}_*\, A(V^{[*]})$。

7.1. $A(V^{[*]})$-双模。设 $V^{[*]}$ 是一个微分分次顶点算子代数，且 $M^{[*]}$ 是 $V^{[*]}$-模^w 中的一个对象。对于权齐次的 $u \in V^{[*]}$、$m \in M^{[*]}$，定义

$$u \circ m = \mathrm{Res}_z \left(Y_M(u,z) \frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}}{z^2} m \right).$$

由公式（14）可知，对于 $u \in V^{[|u|]}$ 权齐次且 $m \in M^{[*]}$，我们有

$$\begin{aligned} d_M(u \circ m) &= d_M \left(\sum_{n \geq 0} \binom{\mathrm{wt}(u)}{n} u_{n-2} m \right), \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{\mathrm{wt}(u)}{n} d_V(u)_{n-2} m + (-1)^{|u|} \sum_{n \geq 0} \binom{\mathrm{wt}(u)}{n} u_{n-2}(d_M(m)). \end{aligned}$$

根据定义，我们知道 $d_V(\omega) = 0$，因此 $\mathrm{wt}(u) d_V(u) = d_V(L(0)u) = d_V(\omega)_1 u + (-1)^4 L(0)(d_V(u)) = L(0)(d_V(u))$，从而 $\mathrm{wt}(d_V(u)) = \mathrm{wt}(u)$。由此可得

$$d_M(u \circ m) = d_V(u) \circ m + (-1)^{|u|} u \circ d_M(m) \in O(M^{[*]}).$$

因此， $O(M^{[*]})$ 在 d_M 下稳定。然而，它不是 $M^{[*]}$ 的子复形，因为 $u \circ m$ 的每个微分分次齐次分量不一定属于 $O(M^{[*]})$。

对于关于微分分次和权重分次均为齐次的 $u \in V^{[*]}$和 $m \in M^{[*]}$，我们定义 $M^{[*]}$的以下运算：

$$\begin{cases} u *_l m &= \operatorname{Res}_z \left(Y_M(u,z) \dfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}}{z} m \right), \\ m *_r u &= (-1)^{|u||m|} \operatorname{Res}_z \left(Y_M(u,z) \dfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z} m \right). \end{cases}$$

我们将 $*$ 在 $V^{[*]}$ 上的乘积记为 $*_l$，并定义另一个乘积如下：

$$u *_r v = (-1)^{|v||u|} \operatorname{Res}_z \left(Y_M(v,z) \frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{z} u \right).$$

通过对 [Z，引理 2.1，3], 进行类似推理，我们得到以下引理：

引理7.1. 对于关于权重分次和微分分次均为齐次的 u、$v \in V^{[*]}$，有

$$u *_l v \equiv u *_r v \mod O(V^{[*]}).$$

我们将需要以下引理，其中第一个引理的证明与 [FZ，引理 1.5，3]中的证明相同：

引理7.2. 设 $u \in V^{[*]}$ 权齐次，且 $m \in M^{[*]}$。对于任意 $k \geq n \geq 0$，有

$$\operatorname{Res}_z \left(Y_M(u,z) \frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)+n}}{z^{2+k}} m \right) \in O(M^{[*]}).$$

引理 7.3. 设 $u \in V^{[*]}$ 权齐次，且 $n \geq 1$。则

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}_z \left(Y_M(u,z) \frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z^n} m \right) \\ &\qquad \equiv (-1)^{n-1} \operatorname{Res}_z \left(Y_M(u,z) \frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z} m \right) \mod O(M^{[*]}). \end{aligned}$$

证明。如果 $n = 1$，则无需证明。假设 $n \geq 2$。我们有 $\dfrac{1}{z^n} + \dfrac{1}{z^{n-1}} = 1 + z$因此：$z^n$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}_z \left(Y_M(u,z) \tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z^n} m \right) + \operatorname{Res}_z \left(Y_M(u,z) \tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z^{n-1}} m \right) \\ &\qquad = \operatorname{Res}_z \left(Y_M(u,z) \tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}}{z^n} m \right). \end{aligned}$$

根据引理 7.2，方程的右端属于 $O(M^{[*]})$ 。如果 $n=2$，那么我们就证明了该引理。假设 $n\geq 3$，我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_z\left(Y_M(u,z)\tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z^{n-1}}m\right)+\mathrm{Res}_z\left(Y_M(u,z)\tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z^{n-2}}m\right)\\ =\mathrm{Res}_z\left(Y_M(u,z)\tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}}{z^{n-1}}m\right),\end{aligned}$$

且右边仍属于 $O(M^{[*]})$。我们不断重复这一过程，直到右边的分母为 z^2 ，且该项再次属于 $O(M^{[*]})$。然后沿着所得的方程链向上回溯，可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_z\left(Y_M(u,z)\tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z}m\right) &\equiv (-1)\,\mathrm{Res}_z\left(Y_M(u,z)\tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z^2}m\right),\\ &\equiv (-1)^2\,\mathrm{Res}_z\left(Y_M(u,z)\tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z^3}m\right),\\ &\vdots\\ &\equiv (-1)^{n-1}\,\mathrm{Res}_z\left(Y_M(u,z)\tfrac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z^n}m\right)\bmod O(M^{[*]}).\end{aligned}$$

□

令 $A(M^{[*]})$ 表示商 $M^{[*]}/O(M^{[*]})$。与 $A(V^{[*]})$ 的情形一样，它不具有 dg结构，因为 $O(M^{[*]})$ 不是 $M^{[*]}$ 的子复形。

定理 7.4. 空间 $A(M^{[*]})$ 配备运算 $*_l$ 和 $*_r$ 后，是一个 $A(V^{[*]})$-双模。

证明. 对于 u、$v\in V^{[*]}$ 和 $m\in M^{[*]}$，我们需要证明以下性质：

$$\begin{aligned}&(1)\ O(V^{[*]})*_l m\subset O(M^{[*]}) \qquad (2)\ m*_r O(V^{[*]})\subset O(M^{[*]})\\ &(3)\ u*_l O(M^{[*]})\subset O(M^{[*]}) \qquad (4)\ O(M^{[*]})*_r u\subset O(M^{[*]})\\ &(5)\ u*_l(m*_r v)-(u*_l m)*_r v\in O(M^{[*]})\\ &(6)\ u*_l(v*_l m)-(u*_l v)*_l m\in O(M^{[*]})\\ &(7)\ (m*_r u)*_r v-m*_r(u*_r v)\in O(M^{[*]})\end{aligned}$$

我们只证明（7），因为这是技术性最强的一项。其余性质的证明与 [FZ定理 1.5 的证明类似。1]。

利用引理7.1，我们得到

$$(-1)^{(|u|+|v|)|m|}m*_r(u*_r v)=(-1)^{(|u|+|v|)|m|}m*_r(u*_l v),$$

$$=(-1)^{(|u|+|v|)|m|}\sum_{i\geq 0}\binom{\mathrm{wt}(u)}{i}m*_r(u_{i-1}v),$$

$$=\sum_{i\geq 0}\binom{\mathrm{wt}(u)}{i}\mathrm{Res}_w\left(Y_M(u_{i-1}v,w)\frac{(1+w)^{\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(v)-i-1}}{w}m\right),$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\geq 0}\binom{\mathrm{wt}(u)}{i}\operatorname{Res}_w\operatorname{Res}_{z-w}\left(Y_M(Y_V(u,z-w)v,w)(z-w)^{i-1}\frac{(1+w)^{\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(v)-i-1}}{w}m\right),\\
&= \operatorname{Res}_w\operatorname{Res}_{z-w}\left(Y_M(Y_V(u,z-w)v,w)\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w(z-w)}m\right),\\
&= \operatorname{Res}_z\operatorname{Res}_w\left(Y_M(u,z)Y_M(v,w)\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w(z-w)}m\right)\\
&\quad-(-1)^{|u||v|}\operatorname{Res}_w\operatorname{Res}_z\left(Y_M(v,w)Y_M(u,z)\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w(z-w)}m\right),\\
&= \sum_{i\geq 0}\operatorname{Res}_z\operatorname{Res}_w\left(Y_M(u,z)Y_M(v,w)z^{-1-i}w^i\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w}m\right)\\
&\quad+(-1)^{|u||v|}\sum_{i\geq 0}\operatorname{Res}_w\operatorname{Res}_z\left(Y_M(v,w)Y_M(u,z)w^{-1-i}z^i\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w}m\right),\\
&\equiv \operatorname{Res}_z\operatorname{Res}_w\left(Y_M(u,z)Y_M(v,w)\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{zw}m\right)\\
&\quad+(-1)^{|u||v|}\sum_{i\geq 0}\operatorname{Res}_w\operatorname{Res}_z\left(Y_M(v,w)Y_M(u,z)z^i\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w^{2+i}}m\right),\\
&= (-1)^{|v||m|}u*_l(m*_r v)\\
&\quad+(-1)^{|u||v|}\sum_{i\geq 0}\operatorname{Res}_w\operatorname{Res}_z\left(Y_M(v,w)Y_M(u,z)z^i\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w^{2+i}}m\right),\\
&\equiv (-1)^{|v||m|}(u*_l m)*_r v\\
&\quad+(-1)^{|u||v|}\sum_{i\geq 0}(-1)^{i-1}\operatorname{Res}_w\operatorname{Res}_z\left(Y_M(v,w)Y_M(u,z)z^i\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w}m\right),
\end{aligned}
$$

其中的同余式模 $O(M^{[*]})$成立，最后一个来自式（5）和引理7.3。我们知道

$$
\begin{aligned}
&u*_l m-(-1)^{|u||m|}m*_r u\\
&=\operatorname{Res}_z\left(Y_M(u,z)\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}}{z}m\right)-\operatorname{Res}_z\left(Y_M(u,z)\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}}{z}m\right),\\
&=\operatorname{Res}_z\left(Y_M(u,z)(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}m\right).
\end{aligned}
$$

因此，我们可以将 $u *_l m$ 代入先前的方程，得到

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{(|u|+|v|)|m|} m *_r (u *_r v) \\
&\equiv (-1)^{(|u|+|v|)|m|}(m *_r u) *_r v + (-1)^{|v||m|}\left(\mathrm{Res}_z(Y_M(u,z)(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}m)\right) *_r v \\
&\quad - (-1)^{|u||v|}\sum_{i\geq 0}\mathrm{Res}_w\,\mathrm{Res}_z\left(Y_M(v,w)Y_M(u,z)(-1)^i z^i \frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w} m\right), \\
&= (-1)^{(|u|+|v|)|m|}(m *_r u) *_r v \\
&\quad + (-1)^{|u||v|}\,\mathrm{Res}_w\,\mathrm{Res}_z\left(Y_M(v,w)Y_M(u,z)(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}\frac{(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w} m\right) \\
&\quad - (-1)^{|u||v|}\,\mathrm{Res}_w\,\mathrm{Res}_z\left(Y_M(v,w)Y_M(u,z)(1+z)^{-1}\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(u)}(1+w)^{\mathrm{wt}(v)-1}}{w} m\right), \\
&= (-1)^{(|u|+|v|)|m|}(m *_r u) *_r v.
\end{aligned}
$$

□

7.2. 与 $\mathrm{gr}^{[*]}A(V^{[*]})$ 相关的模。对于一个 $V^{[*]}$-模 $M^{[*]}$，$A(V^{[*]})$-模 $A(M^{[*]})$ 带有一个（微分）滤子（$F^pA(M^{[*]})_{p\in\mathbb{Z}}$其中 $F^pA(M^{[*]})$ 是 $\bigoplus_{q\leq p} M_*^{[q]}$在 $A(M^{[*]})$ 中的像。令 $u\in V^{[|u|]}$ 权齐次且 $m\in M^{[|m|]}$。那么 $[u]*_l[m]$和 $[m]*_r[u]$属于 $F^{|u|+|m|}A(M^{[*]})$。但我们还知道

$$
\begin{aligned}
[u]*_l[m]-(-1)^{|u||m|}[m]*_r[u] &= \mathrm{Res}_z(Y_M(u,z)(1+z)^{\mathrm{wt}(u)-1}m) \mod O(M^{[*]}), \\
&= \textstyle\sum_{i\geq 0}\binom{\mathrm{wt}(u)-1}{i}u_i m \mod O(M^{[*]}), \\
&\in F^{|u|+|m|-2}A(M^{[*]}),
\end{aligned}
$$

因为 $|u_i m| = |u|+|m|-2i-2$。由于 $A(M^{[*]})$ 上的（微分）滤子在 $A(V^{[*]})$ 上的滤子作用下保持不变（包括右作用和左作用），伴随分次模 $\mathrm{gr}^{[*]}A(M^{[*]})$ 是 $\mathrm{gr}^{[*]}A(V^{[*]})$ 的右模和左模。令 $x\in F^pA(V^{[*]})$ 且 $w\in F^qA(M^{[*]})$。那么存在 $u\in V^{[p]}$和 $m\in M^{[q]}$，使得 $[u]-x\in F^{p-1}A(V^{[*]})$ 且 $[m]-w\in F^{q-1}A(M^{[*]})$。我们用 $\widetilde{w}=w \mod F^{q-1}A(M^{[*]})$ 表示 w 在 $\mathrm{gr}^{[*]}A(M^{[*]})$ 中的类。因此可知

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x}*_l\widetilde{w}-(-1)^{|\widetilde{x}||\widetilde{w}|}\widetilde{w}*_r\widetilde{x} &= [u]*_l[m]-(-1)^{|u||m|}[m]*_r[u] \mod F^{p+q-1}A(M^{[*]}), \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

基于上述计算。因此，我们得到

$$\widetilde{x}*_l\widetilde{w} = (-1)^{|\widetilde{x}||\widetilde{w}|}\widetilde{w}*_r\widetilde{x}.$$

引理 6.7 的证明可以调整后得到以下结果：

引理 7.5. 设 $m \in M^{[p]}$ 使得 $[m] \in F^{p-1}A(M^{[*]})$。那么存在有限个微分分次齐次 $h_i \in M^{[*]}$，满足 $|h_i| \leq p-2$，使得

$$m + \sum_i h_i \in O(M^{[*]}),$$

and

$$|h_i| \equiv p \mod 2, \text{ for all } i.$$

我们知道，对于 $x \in F^{|x|}A(V^{[*]})$、$w \in F^{|w|}A(M^{[*]})$，存在 $u \in V^{[|x|]}$, $m \in M^{[|w|]}$ 使得 $[u] - x \in F^{|x|-1}A(V^{[*]})$ 和 $[m] - w \in F^{|w|-1}A(M^{[*]})$。我们定义

$$\{\widetilde{x}, \widetilde{w}\}_{F^\bullet} = [u] *_l [m] - (-1)^{|x||w|}[m] *_r [u] \mod F^{|x|+|y|-3}A(M^{[*]}).$$

引理 7.6. 映射

$$\{.,.\}_{F^\bullet} : \mathsf{gr}^{[p]} A(V^{[*]}) \otimes \mathsf{gr}^{[q]} A(M^{[*]}) \longrightarrow \mathsf{gr}^{[p+q-2]} A(M^{[*]})$$

是良定义的。

证明。 证明与引理 6.8的证明相同，此外还需对 7.5 中的元素使用引理 $M^{[*]}$。 □

命题 7.7. 模 $\mathsf{gr}^{[*]} A(M^{[*]})$ 是微分分次泊松代数 $\mathsf{gr}^{[*]} A(V^{[*]})$ 上的微分分次泊松模。该作用由 $*_l$ 诱导，泊松括号为 $\{.,.\}_{F^\bullet}$，其次数为 -2，而微分由 d_M 诱导。特别地，对于 $\widetilde{x} \in \mathsf{gr}^{[*]} A(V^{[*]})$、$\widetilde{w} \in \mathsf{gr}^{[*]} A(M^{[*]})$ 这两个微分分次齐次元素，其对应的原像分别为 $u \in V^{[|\widetilde{x}|]}$、$m \in M^{[|\widetilde{w}|]}$，有

$$\widetilde{x} *_l \widetilde{w} = \widetilde{[u_{-1}m]} \quad \text{and} \quad \{\widetilde{x}, \widetilde{w}\}_{F^\bullet} = \widetilde{[u_0 m]}.$$

存在一个函子

$$\begin{array}{ccc} V^{[*]}\text{-Mod}^w & \longrightarrow & \mathsf{gr}^{[*]} A(V^{[*]})\text{-Poiss} \\ M^{[*]} & \longmapsto & \mathsf{gr}^{[*]} A(M^{[*]}). \end{array}$$

证明。与命题 6.9 类似，我们定义 $d_{F^\bullet}$: $\mathsf{gr}^{[*]} A(M^{[*]}) \longrightarrow \mathsf{gr}^{[*]} A(M^{[*]})$，其定义为$d_{F^\bullet}(\widetilde{w}) = \widetilde{d_M w}$，其中 w 是 $F^{|\widetilde{w}|}A(M^{[*]})$ 中的一个元素，其在 $\mathsf{gr}^{[*]} A(M^{[*]})$ 中的像为 $\widetilde{w}$。对于 $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in \mathsf{gr}^{[*]} A(V^{[*]})$ 中的微分分次齐次元素以及 $\widetilde{w} \in \mathsf{gr}^{[|\widetilde{w}|]} A(M^{[*]})$，通过直接计算可验证：

- $\{\widetilde{x}, \{\widetilde{y}, \widetilde{w}\}_{F^\bullet}\}_{F^\bullet} = \{\{\widetilde{x}, \widetilde{y}\}_V, \widetilde{w}\}_{F^\bullet} + (-1)^{|\widetilde{x}||\widetilde{y}|}\{\widetilde{y}, \{\widetilde{x}, \widetilde{w}\}_{F^\bullet}\}_{F^\bullet}$,
- $\{\widetilde{x}, \widetilde{y} *_l \widetilde{w}\}_{F^\bullet} = \{\widetilde{x}, \widetilde{y}\}_{F^\bullet} *_l \widetilde{w} + (-1)^{|\widetilde{x}||\widetilde{y}|}\widetilde{y} *_l \{\widetilde{x}, \widetilde{w}\}_{F^\bullet}$.
- $\{\widetilde{x} *_l \widetilde{y}, \widetilde{w}\}_{F^\bullet} = \widetilde{x} *_l \{\widetilde{y}, \widetilde{w}\}_{F^\bullet} + (-1)^{|\widetilde{x}||\widetilde{y}|}\widetilde{y} *_l \{\widetilde{x}, \widetilde{w}\}_{F^\bullet}$.
- $d_{F^\bullet} \circ d_{F^\bullet} = 0$,
- $d_{F^\bullet}(\widetilde{x} *_l \widetilde{w}) = d_{F^\bullet}(\widetilde{x}) *_l \widetilde{w} + (-1)^{|\widetilde{x}|}\widetilde{x} *_l d_{F^\bullet}(\widetilde{w})$,
- $d_{F^\bullet}(\{\widetilde{x}, \widetilde{w}\}_{F^\bullet}) = \{d_{F^\bullet}(\widetilde{x}), \widetilde{w}\}_{F^\bullet} + (-1)^{|\widetilde{x}|}\{\widetilde{x}, d_{F^\bullet}(\widetilde{w})\}_{F^\bullet}$.

上述关系证明了微分分次泊松模的陈述。关于 $*_l$和 $\{\cdot,\cdot\}_{F^\bullet}$的表达式，以及函子性陈述，都可通过直接计算得出。□

7.3. 与 $\mathrm{gr}_*A(V^{[*]})$ 相关的模。我们可以采用与上一节类似的方法，但改用权过滤，从一个模 $M^{[*]}\in V^{[*]}\text{-}\mathrm{Mod}^{gr}$ 出发。

命题 7.8。模 $\mathrm{gr}_*A(M^{[*]})$ 是一个权分次的左微分过滤模，其对应的微分过滤代数为 $\mathrm{gr}_*A(V^{[*]})$。

证明。 证明与命题 6.11 中的基本相同，我们将在定义中逐一明确验证每条公理。 □

$A(M^{[*]})$ 上的左右 $A(V^{[*]})$-模结构在 $\mathrm{gr}_*A(M^{[*]})$ 上诱导出两个 $\mathrm{gr}_*A(M^{[*]})$-模结构，它们满足某种微分过滤交换关系：

P命题 7.9。对于任意 $\widetilde{x}\in F^p\mathrm{gr}_nA(V^{[*]})$、 $\widetilde{w}\in F^q\mathrm{gr}_mA(M^{[*]})$，有

$$\widetilde{x}*_l\widetilde{w}-(-1)^{pq}\widetilde{w}*_r\widetilde{x}\in F^{p+q-1}\mathrm{gr}_{n+m}A(M^{[*]}).$$

证明。取 $x\in W_nA(V^{[*]})$ 作为 $\widetilde{x}$ 的代表元，并将 $x=u+O(V^{[*]})$ 写作 $u\in\bigoplus_{\substack{i\le p\\ j\le n}}V_j^{[i]}$。我们将 $u=\sum_{\substack{i\le p\\ j\le n}}u_j^i$ 分解为 $|u_j^i|=i$，且 $\mathrm{wt}(u_j^i)=j$。同样地，取 $w\in W_mA(M^{[*]})$ 作为 $\widetilde{w}$ 的代表元，并将 $w=\sum_{\substack{i\le q\\ j\le m}}m_j^i+O(M^{[*]})$ 分解为 $|m_j^i|=i\le q$，且 $\mathrm{wt}(m_j^i)=j\le m$。我们有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}*_l\widetilde{w}-(-1)^{pq}\widetilde{w}*_r\widetilde{x}\\
&=x*_lw-(-1)^{pq}w*_rx+W_{m+n-1}A(M^{[*]}),\\
&=\sum_{\substack{i,j\\ s,t}}u_j^i*_lm_t^s-(-1)^{pq}m_t^s*_ru_j^i+O(M^{[*]})+W_{m+n-1}M^{[*]},\\
&=\sum_{\substack{j\le n\\ t\le m}}\left(u_j^p*_lm_t^q-(-1)^{pq}m_t^q*_ru_j^p\right)\\
&\quad+\sum_{i<p\text{ or }s<q}\left(u_j^i*_lm_t^s-(-1)^{pq}m_t^s*_ru_j^i\right)+O(M^{[*]})+W_{m+n-1}M^{[*]}.
\end{aligned}$$

基于 左作用和右作用的定义表明，对于任意 j、t，我们有 e

$$u_j^p*_lm_t^q-(-1)^{pq}m_t^q*_ru_j^p=\mathrm{Res}_z(Y_M(u_j^p,z)(1+z)^{j-1}m_t^q)\in F^{p+q-1}M^{[*]}.$$

然后，当 $i<p$ 或 $s<q$ 时，我们有

$$u_j^i*_lm_t^s-(-1)^{pq}m_t^s*_ru_j^i\in F^{i+s}V^{[*]}\subseteq F^{p+q-1}M^{[*]}.$$

由于 $\mathrm{wt}(u_j^i)\le n$ 且 $\mathrm{wt}(m_t^s)\le m$，可得

$$\widetilde{x}*_l\widetilde{w}-(-1)^{pq}\widetilde{w}*_r\widetilde{x}\in F^{p+q-1}A(M^{[*]})\cap W_{m+n}A(M^{[*]})\bmod W_{m+n-1}A(M^{[*]}),$$

这正是所需的结论。 □

7.4. 依次使用两个模过滤。 在命题 6.16 中，我们使用 $A(V^{[*]})$ 上的两个滤过来定义 $\mathrm{gr}_*\,\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$。 如果 $M^{[*]}$ 是 $V^{[*]}$ 的普通 dg 模，我们可以对 $A(M^{[*]})$ 上自然的两个滤过执行相同操作，并构造一个新的模 $\mathrm{gr}_*\,\mathrm{gr}^{[*]}\,A(M^{[*]})$。 下一个结果的证明类似于命题 6.16 的证明，但我们不取 $\widetilde{y}\in \mathrm{gr}_{n_2}\,\mathrm{gr}^{[p_2]}\,A(V^{[*]})$，而是处理 $\widetilde{w}\in \mathrm{gr}_{n_2}\,\mathrm{gr}^{[p_2]}\,A(M^{[*]})$。

命题 7.10。对于 $M^{[*]}\in V^{[*]}$-模，空间 $\mathrm{gr}_*\mathrm{gr}^{[*]}\,A(M^{[*]})$ 是权分次微分分次泊松模，其对应的权分次微分分次泊松代数为 $\mathrm{gr}_*\,\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$。作用由 $*_l$ 诱导，泊松括号关于上同调次数的次数为 -2，关于权的次数为 -1，而微分由 d_M 诱导。

8. Relations between $R^{[*]}(M^{[*]})$ and the associated graded modules

8.1. $R^{[*]}(M^{[*]})$ 和$\mathrm{gr}^{[*]}\,A(M^{[*]})$。在命题 6.10中，我们考察了一个满射微分分次代数态射。对于伴随模，我们也可以得到类似的结果。下一个结果的证明与命题 6.10的证明类似。

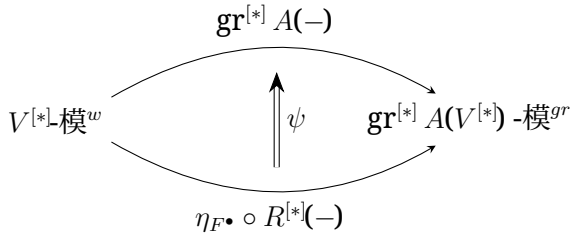
命题8.1. 该映射

$$\begin{array}{ccc} R^{[*]}(M^{[*]}) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^{[*]}\,A(M^{[*]}) \\ m+C_2^{[|m|]}(V^{[*]}) & \longmapsto & m+O(M^{[*]})+\bigoplus_{p<|m|} M^{[p]} \end{array}$$

是微分分次泊松 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模的满射态射，其中 $\mathrm{gr}^{[*]}\,A(M^{[*]})$ 被视为通过 $\eta_{F^\bullet}$ 作用的 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模。

我们已在命题6.10中看到，$\eta_{F^\bullet}\colon R^{[*]}(V^{[*]})\longrightarrow \mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$ 是微分分次泊松代数的满射态射。因此，对于一个 $R^{[*]}(V^{[*]})$-微分分次泊松模 W，空间 $\eta_{F^\bullet}(W):=\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})\otimes_{R^{[*]}(V^{[*]})} W\cong W/((\text{核 }\eta_{F^\bullet})W)$ 是一个 $\mathrm{gr}^{[*]}\,A(V^{[*]})$-微分分次泊松模。若 $(W,W(\bullet))$ 是分次的，则 $\eta_{F^\bullet}(W)$ 也自然地带有分次，其中 $\eta_{F^\bullet}(W)(n)$ 对所有 $n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 都是 $W(n)$ 的像。考察图表（19）中的两条路径，可得以下结果：

命题 8.2. 存在一个自然变换 $\psi\colon \eta_{F^\bullet}\circ R^{[*]}(-)\longrightarrow \mathrm{gr}^{[*]}\,A(-)$，如下图表所示：



使得，对于任意 $M^{[*]} \in V^{[*]}$-模^{w}，态射 $\psi_{M^{[*]}}$ 是以下微分分次泊松 $\mathsf{gr}^{[*]}\, A(V^{[*]})$-模的满射态射：

$$\begin{array}{ccc} \eta_{F^\bullet}(R^{[*]}(M^{[*]})) & \xrightarrow{\psi_{M^{[*]}}} & \mathsf{gr}^{[*]}\, A(M^{[*]}) \\ m + C_2^{[|m|]}(M^{[*]}) + \left((\operatorname{Ker}\eta_{F^\bullet})(R^{[*]}(M^{[*]}))\right)^{[|m|]} & \longmapsto & m + O(M^{[*]}) + \bigoplus_{p<|m|} M^{[p]}. \end{array}$$

证明。固定 $M^{[*]} \in V^{[*]}$-Mod^{w}和 $p \in \mathbb{Z}$。空间 $C_2^{[p]}(M^{[*]}) = C_2^{[*]}(M^{[*]}) \bigcap M^{[p]}$由形如 $v_{-2}m$ 的元素张成，其中 $v \in V^{[*]}, m \in M^{[*]}$是微分分次齐次的，且满足 $|v|+|m|+2 = p$。我们知道 $|v_{i-2}m| = |v|+|m|+2-2i$，因此如果 $v_{-2}m \in C_2^{[p]}(M^{[*]})$，那么 $|v_{i-2}m| = p-2i$。因此，如果 $i \geq 1$，则有 $|v_{i-2}m| < p$ 和 $v_{i-2}m \in \bigoplus_{q<p} M^{[q]}$。由此可得 $v \circ m = \sum_{i\geq 0} \binom{\mathrm{wt}(v)}{i} v_{i-2}m \equiv v_{-2}m$ 模 $\bigoplus_{q<p} M^{[q]}$。因此 $C_2^{[p]}(M^{[*]}) \subseteq O(M^{[*]}) + \bigoplus_{q<p} M^{[q]}$。

取 $v \in V^{[*]}$ 微分分次齐次，并考虑 $\overline{v} \in R^{[*]}(V^{[*]})$。那么 $\overline{v} \in$核 $\eta_{F^\bullet}$ 当且仅当 $v \in O(V^{[*]}) + \bigoplus_{q<|v|} V^{[q]}$。因此，存在 $x \in O(V^{[*]})$ 和某个微分分次齐次的 $v^i \in V^{[*]}$，使得 $|v^i| < |v|$，并且 $v = x + \sum_{|v^i|<|v|} v^i$。

由于核 $\eta_{F^\bullet}$是 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 的 dg泊松子模，且 $R^{[*]}(M)$ 是 $R^{[*]}(V^{[*]})$ 的微分分次泊松模，因此 (核 $\eta_{F^\bullet}$)$R^{[*]}(M^{[*]})$ 是$R^{[*]}(M^{[*]})$ 的 dg泊松子模。$\left((\text{核 } \eta_{F^\bullet})R^{[*]}(M^{[*]})\right)^{[p]}$中的一个元素可写为 $\sum_i a^i_{-1}m^i + C_2^{[p]}(M^{[*]})$，其中 $a^i + C_2^{[|a^i|]}(V^{[*]}) \in$核 $\eta_{F^\bullet}$、$m^i + C_2^{[|m^i|]}(M^{[*]}) \in R^{[*]}(M^{[*]})$，并且对所有 i，都有 $|a^i| + |m^i| = p$。然而，我们刚才已经看到，对每个 i，都有 $a^i = x^i + \sum_{|a^{i,\ j}|<|a^i|} a^{i,\ j}$，其中某个 $x^i \in O(V^{[*]})$ 和微分分次齐次的 $a^{i,\ j} \in V^{[*]}$满足这些条件。因此，可以写作 $a^i_{-1}m^i = x^i_{-1}m^i + \sum_{|a^{i,\ j}|<|a^i|} a^{i,\ j}_{-1}m^i$。另一方面，根据 $*_l$-乘积的定义，有：

$$\begin{aligned} x^i *_l m^i &= a^i *_l m^i - \sum_{|a^{i,j}|<|a^i|} a^{i,j} *_l m^i, \\ &= \sum_{n\geq 0} \binom{\mathrm{wt}(a^i)}{n} a^i_{n-1}m^i - \sum_{|a^{i,j}|<|a^i|} \sum_{n\geq 0} \binom{\mathrm{wt}(a^{i,j})}{n} a^{i,j}_{n-1}m^i, \\ &= x^i_{-1}m^i + \sum_{n\geq 1} \left(\binom{\mathrm{wt}(a^i)}{n} a^i_{n-1}m^i - \sum_{|a^{i,j}|<|a^i|} \binom{\mathrm{wt}(a^{i,j})}{n} a^{i,j}_{n-1}m^i \right). \end{aligned}$$

由此可得 $x^i *_l m^i \equiv x^i_{-1}m^i \bmod \bigoplus_{q<p} M^{[q]}$。如定理 7.4 中所述，对于所有 $m \in M^{[*]}$，$O(V^{[*]}) *_l m \subseteq O(M^{[*]})$，因此 $x^i_{-1}m^i \in O(M^{[*]}) + \bigoplus_{q<p} M^{[q]}$，这又意味着 $\sum_i a^i_{-1}m^i \in O(M^{[*]}) + \bigoplus_{q<p} M^{[q]}$。我们在上文看到，$C_2^{[p]}(M) \subseteq O(M^{[*]}) + \sum_{q<p} M^{[q]}$，因此 $C_2^{[p]}(M) + \left((\text{核 } \eta_{F^\bullet})R^{[*]}(M^{[*]})\right)^{[p]} \subseteq O(M^{[*]}) + \bigoplus_{q<p} M^{[q]}$，且映射 $\psi_{M^{[*]}}$ 是良定义的满射。

在 $\eta_{F^\bullet}(R^{[*]}(M^{[*]}))$ 上有一个自然的微分 $\widehat{d}$，其定义如下：

$$\widehat{d}(\widehat{m}) = \widehat{d_M(m)}$$

其中，对于任意微分分次齐次的 $m \text{in} M^{[*]}$，$\widehat{m} = m + C_2^{[|m|]}(M) + \big((\text{核 } \eta_{F^\bullet})R^{[*]}(M^{[*]})\big)^{[|m|]}$。显然可以验证 $\psi_{M^{[*]}} \circ \widehat{d} = d_{F^\bullet} \circ \psi_{M^{[*]}}$。由于态射$\psi_{M^{[*]}}$ 显然是度数0的，因此它是一个链映射。

令 $v \in V^{[*]}$为微分分次齐次的，并定义 $\widehat{v} = \overline{v}+$核 $\eta_{F^\bullet} \in R^{[*]}(V^{[*]})/$核 $\eta_{F^\bullet}$。同样地，令 $m \in M^{[*]}$为微分分次齐次的，并令 $\widehat{m} = m+C_2^{[|m|]}(M)+\big((\text{核 } \eta_{F^\bullet})R^{[*]}(M^{[*]})\big)^{[|m|]} \in \eta_{F^\bullet}(R^{[*]}(M^{[*]}))$。我们有：

$$\begin{aligned}
\widehat{v}.\widehat{m} &= (\overline{v} + (\operatorname{Ker}\eta_{F^\bullet})^{[|v|]})_{-1}(m + C_2^{[|m|]}(M^{[*]}) + ((\operatorname{Ker}\eta_{F^\bullet})R^{[*]}(M^{[*]}))^{[|m|]}), \\
&= v_{-1}m + C_2^{[|v|+|m|]}(M^{[*]}) + \big((\operatorname{Ker}\eta_{F^\bullet})R^{[*]}(M^{[*]})\big)^{[|v|+|m|]}.
\end{aligned}$$

于是我们可以写成：

$$\begin{aligned}
\psi_{M^{[*]}}(\widehat{v}.\widehat{m}) &= v_{-1}m + O(M^{[*]}) + \bigoplus_{q<|v|+|m|} M^{[q]}, \\
&= v *_l m + O(M^{[*]}) + \bigoplus_{q<|v|+|m|} M^{[q]}, \\
&= [v] *_l [m] + F^{|v|+|m|-1}A(M^{[*]}), \\
&= \left(v + O(V^{[*]}) + \bigoplus_{q<|v|} V^{[q]}\right) *_l \left(m + O(M^{[*]}) + \bigoplus_{q<|m|} M^{[q]}\right), \\
&= \overline{\eta_{F^\bullet}}(\widehat{v}) *_l \psi_{M^{[*]}}(\widehat{m}),
\end{aligned}$$

其中 $\overline{\eta_{F^\bullet}}$ 是同构 $R^{[*]}(V^{[*]})/$ 核 $\eta_{F^\bullet} \cong \text{gr}^{[*]} A(V^{[*]})$。

$\eta_{F^\bullet}(R^{[*]}(M^{[*]}))$ 上存在一个泊松括号，它由 $R^{[*]}(M^{[*]})$ 上的泊松括号诱导而来，并且定义为：

$$\begin{aligned}
\{\widehat{v}, \widehat{m}\} &= (\overline{v} + (\operatorname{Ker}\eta_{F^\bullet})^{[|v|]})_0(m + C_2^{[|m|]}(M^{[*]}) + \big((\operatorname{Ker}\eta_{F^\bullet})R^{[*]}(M^{[*]})\big)^{[|m|]}), \\
&= v_0 m + C_2^{[|v|+|m|-2]}(M^{[*]}) + \big((\operatorname{Ker}\eta_{F^\bullet})R^{[*]}(M^{[*]})\big)^{[|v|+|m|-2]},
\end{aligned}$$

因此我们可以写成：

$$\begin{aligned}
\psi_{M^{[*]}}(\{\widehat{v}, \widehat{m}\}) &= v_0 m + O(M^{[*]}) + \bigoplus_{q<|v|+|m|-2} M^{[q]}, \\
&= \widetilde{[v_0 m]}, \\
&= \{\widetilde{[v]}, \widetilde{[m]}\}_{F^\bullet}, \\
&= \{\overline{\eta_{F^\bullet}}(\widehat{v}), \psi_{M^{[*]}}(\widehat{m})\}_{F^\bullet},
\end{aligned}$$

根据命题7.7可知，$\psi_{M^{[*]}}$ 是微分分次泊松$\text{gr}^{[*]} A(V^{[*]})$-模的满射态射。

作为范畴 $V^{[*]}$-Mod^w 中的态射是一个链映射，可以直接验证，对于任意 $f\colon M^{[*]} \longrightarrow N^{[*]}$属于 $V^{[*]}$-Mod^w，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \eta_{F^\bullet}(R^{[*]}(M^{[*]})) & \xrightarrow{\psi_{M^{[*]}}} & \mathsf{gr}^{[*]}\, A(M^{[*]}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \eta_{F^\bullet}(R^{[*]}(f))} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{gr}^{[*]}\, A(f)} \\ \eta_{F^\bullet}(R^{[*]}(N^{[*]})) & \xrightarrow[\psi_{N^{[*]}}]{} & \mathsf{gr}^{[*]}\, A(N^{[*]}) \end{array}.$$

因此 ψ 是一个自然变换。 □

8.2. $R^{[*]}(M^{[*]})$ 和 $\mathsf{gr}_*\, A(M^{[*]})$。 下一个结果是命题 6.14关于伴随模的类似结果。

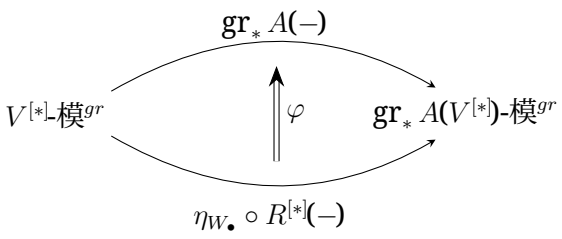
命题 8.3. 该映射

$$\begin{array}{ccc} R^{[*]}(M^{[*]}) & \longrightarrow & \mathsf{gr}_*\, A(M^{[*]}) \\ m + C_2^{[*]}(V^{[*]})_{\mathrm{wt}(m)} & \longmapsto & m + O(M^{[*]}) + \bigoplus_{n<\mathrm{wt}(m)} M_n^{[*]} \end{array}$$

是微分分次滤过 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模的满射态射，其中 $\mathsf{gr}_*\, A(M^{[*]})$ 被视为一个 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模，其模结构通过 $\eta_{W^\bullet}$ 给出。

与上一节中的论证类似，对于一个权分次微分滤过 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模 W，空间 $\eta_{W^\bullet}(W) = \mathsf{gr}_*\, A(V^{[*]}) \otimes_{R^{[*]}(V^{[*]})} W \cong W/((\text{核 } \eta_{W^\bullet})W)$ 是一个权分次微分滤过 $\mathsf{gr}_*\, A(V^{[*]})$-模。通过与命题 8.2类似的证明，我们得到：

命题 8.4。存在一个自然变换 $\varphi\colon \eta_{W^\bullet} \circ R^{[*]}(-) \longrightarrow \mathsf{gr}_*\, A(-)$，如下图表所示：



使得，对于任意 $M^{[*]} \in V^{[*]}$-模^{gr}，态射 $\varphi_{M^{[*]}}$ 是如下权分次微分滤过 $\mathrm{gr}_* A(V^{[*]})$-模的满射态射：

$$\begin{array}{ccc} \eta_{W_\bullet}(R^{[*]}(M^{[*]})) & \xrightarrow{\varphi_{M^{[*]}}} & \mathrm{gr}_* A(M^{[*]}) \\ m + C_2(M^{[*]})_{\mathrm{wt}(m)} + \big((\mathrm{Ker}\,\eta_{W_\bullet})(R^{[*]}(M^{[*]})\big)_{\mathrm{wt}(m)} & \longmapsto & m + O(M^{[*]}) + \bigoplus_{n<\mathrm{wt}(m)} M_n^{[*]}. \end{array}$$

8.3. $R^{[*]}(M^{[*]})$ 以及$\mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]} A(M^{[*]})$。通过修改命题6.17 的证明，可以得到一个类似于命题6.10的结果，但针对的是伴随模：

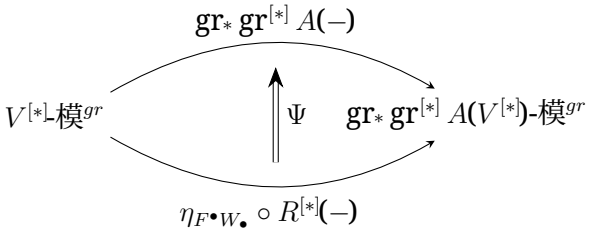
命题8.5。映射

$$\begin{array}{ccc} R^{[*]}(M^{[*]}) & \longrightarrow & \mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]} A(M^{[*]}) \\ m + C_2^{[|m|]}(V^{[*]})_{\mathrm{wt}(m)} & \longmapsto & m + O(M^{[*]}) + \bigoplus_{\substack{q\le|m| \\ n<\mathrm{wt}(m)}} M_n^{[q]} + \bigoplus_{\substack{q<|m| \\ n\le\mathrm{wt}(m)}} M_n^{[q]} \end{array}$$

是权分次微分分次 dg 泊松 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模的满射态射，其中 $\mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]} A(M^{[*]})$ 被视为一个 $R^{[*]}(V^{[*]})$-模，其结构通过 $\eta_{F^\bullet W_\bullet}$ 给出。

与命题 8.2 中一样，对于权分次微分分次模 W for $R^{[*]}(V^{[*]})$，我们可以定义 $\eta_{F^\bullet W_\bullet}(W) = \mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]} A(V^{[*]}) \otimes_{R^{[*]}(V^{[*]})} W \cong W/((\text{核 } \eta_{F^\bullet W_\bullet})W)$ 并证明：

命题8.6. 存在一个自然变换 Ψ： $\eta_{F^\bullet W_\bullet} \circ R^{[*]}(-) \longrightarrow \mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]} A(-)$，如下图表所示：

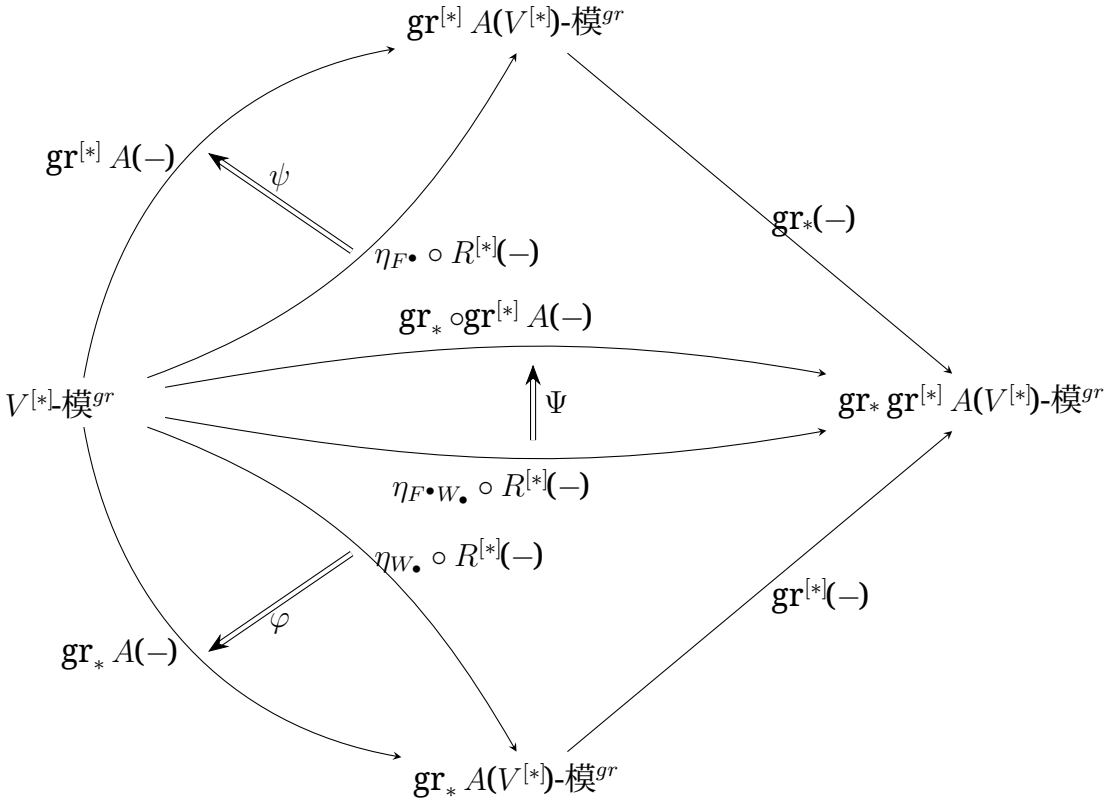


使得对于任意 $M^{[*]} \in V^{[*]}$-模^{gr}，态射 $\Psi_{M^{[*]}}$

$$\eta_{F^\bullet W_\bullet}(R^{[*]}(M^{[*]})) \xrightarrow{\Psi_{M^{[*]}}} \mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]} A(M^{[*]})$$

发送 $m + C^{[|}{}_2{}^{m|]}(M^{[*]})_{\mathrm{wt}(m)} + \big((\text{核 } \eta_{F^\bullet W_\bullet})(R^{[*]}(M^{[*]})\big)^{[|m|]}$权$(m)$到 $m + O(M^{[*]}) + \bigoplus_{\substack{q\le|m| \\ n<\text{权}(m)}} M_n^{[q]} + \bigoplus_{\substack{q<|m| \\ n\le\text{权}(m)}} M_n^{[q]}$是权分次微分分次 Poisson $\mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]} A(V^{[*]})$-的满射态射模。

8.4. 态射 函子的相关信息。我们得到了以下图表 :



我们可以定义另外两个自然变换。令 $M^{[*]} \in V^{[*]}\text{-Mod}^{gr}$，并考虑 $\psi_{M^{[*]}}$。$M^{[*]}$上的权重分次在 $\eta_{F^\bullet} \circ R^{[*]}(M^{[*]})$ 和 $\mathrm{gr}^{[*]} A(M^{[*]})$ 上诱导出滤过，我们可以验证 $\psi_{M^{[*]}}$ 保持这些滤过。因此，我们可以在这些伴随分次代数之间构造一个态射 $\mathrm{gr}_*(\psi_{M^{[*]}})$，并得到自然变换

$$\mathrm{gr}_* \psi : \mathrm{gr}_* \circ \eta_{F^\bullet} \circ R^{[*]}(-) \longrightarrow \mathrm{gr}_* \, \mathrm{gr}^{[*]} A(-)$$

由 $(\mathrm{gr}_* \psi)_{M^{[*]}} = \mathrm{gr}_*(\psi_{M^{[*]}})$ 给出。由于 $\psi_M^{[*]}$ 是满射，所以 $(\mathrm{gr}_* \psi)_{M^{[*]}}$ 也是满射。利用 $\varphi_{M^{[*]}}$ 以及由 $M^{[*]}$的上同调分次产生的滤过，我们可以进行类似的构造，并构造出一个自然变换

$$\mathrm{gr}^{[*]} \varphi : \mathrm{gr}^{[*]} \circ \eta_{W^\bullet} \circ R^{[*]}(-) \longrightarrow \mathrm{gr}_* \, \mathrm{gr}^{[*]} A(-)$$

并且 $(\mathrm{gr}^{[*]} \varphi)_{M^{[*]}}$ 是一个满射态射。

我们需要以下引理:

引理 8.7. 设 A 和 B 为滤过代数，满足 $F^n A = \{0\} = F^n B$ 对于 $n \ll 0$，并设 $f\colon A \longrightarrow B$ 为满足 $f(F^n A) \subset F^n B$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立的滤过代数态射。则有:

$$f \text{ is an isomorphism} \Longleftrightarrow \mathrm{gr}_F f \text{ is an isomorphism.}$$

证明。一方面显然。另一方面，假设 $\mathrm{gr}_F f$ 是一个同构。令 i，使得对于 $j < i$ 和 F^iA， $F^jA = F^jB = \{0\}$，或者 F^iB 不为零。我们有以下图表：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F^{i-1}A & \longrightarrow & F^iA & \longrightarrow & F^iA/F^{i-1}A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}_F f} & & \\ 0 & \longrightarrow & F^{i-1}B & \longrightarrow & F^iB & \longrightarrow & F^iB/F^{i-1}B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中各行均为正合列。最左侧的向下箭头是 $\{0\} \longrightarrow \{0\}$，最右侧的向下箭头根据假设是向量空间的同构。由五引理， $f\colon\ F^iA \longrightarrow F^iB$ 是向量空间的同构。对 i 作归纳并重复上述推理，可知 $f:\ A \longrightarrow B$ 是代数的同构。□

现在我们将 $V^{[*]}$ 视为伴随 $V^{[*]}$-模。

定理 8.8. 设 $V^{[*]}$ 是一个微分分次顶点算子代数。则 $\Psi_{V^{[*]}}$、$(\mathrm{gr}_* \psi)_{V^{[*]}}$、$(\mathrm{gr}^{[*]} \varphi)_{V^{[*]}}$ 和 $\psi_{V^{[*]}}$ 均为同构。若对 $p \ll 0$ 有 $V^{[p]} = \{0\}$，则 $\varphi_{V^{[*]}}$ 是一个同构。

证明。由于我们考虑的是伴随模，定理中的所有态射实际上都是自同态。根据 $V^{[*]}$ 的定义，我们知道对于所有 n 和 p， $V_n^{[p]}$ 的维数都是有限的，因此 $\mathrm{gr}_* \mathrm{gr}^{[*]} A(V^{[*]})$ 的每个直和项都是有限维的。由于 $\Psi_{V^{[*]}}$ 保持分次且为满射，因此它是同构。同样，$(\mathrm{gr}_* \psi)_{V^{[*]}}$ 和 $(\mathrm{gr}^{[*]} \varphi)_{V^{[*]}}$ 也是如此。在微分分次顶点算子代数的定义中，对于 $n \ll 0$，有 $V_n^{[*]} = \{0\}$。我们可以将引理 8.7 应用于 $(\mathrm{gr}_* \psi)_{V^{[*]}}$，从而看到 $\psi_{V^{[*]}}$ 是同构。若对于 $p \ll 0$ 有 $V^{[p]} = \{0\}$，则同样的推理表明 $\varphi_{V^{[*]}}$ 是同构。□

References

[ALY] T. Arakawa、C. H. Lam 和 H. Yamada，Zhu代数、 C_2-代数以及 parafermion顶点算子代数的 C_2-余有限性，Adv. Math. 264（2014），261–295。[B] K. Behrend，微分分次概形 I：完美消解代数，预印本 arXiv:math/0212225。[CJL1] A. Caradot、C. JIANG 和 Z. LIN，三重态顶点算子代数的 Yoneda代数，预印本 arXiv:2204.01650v3。[CJL2] A. Caradot、C. JIANG 和 Z. LIN，与顶点算子代数相关的上同调簇，预印本 arXiv:2207.11550v2。[CJL3] A. Caradot、C. JIANG 和 Z. LIN，微分分次顶点李代数，准备中。

[CG] N. Chriss 和 V. Ginzburg，表示论与复几何，Birkh¨auserBoston, Inc.，Boston，MA，1997。[DH] C. Dong 和 J. Han，顶点算子超代数的一些有限性性质，Pacific J. Math. 258（2012），第2期，269–290。[FZ] I. B. Frenkel 和 Y. Zhu，与仿射代数和 Virasoro代数的表示相关的顶点算子代数，Duke Math. J. 66（1992），第1期，123–168。[GG] M. Gaberdiel 和 T. Gannon，Zhu代数、C_2 代数以及扭模，《顶点算子代数及相关领域》，65–78，Contemp. Math.，497，Amer. Math. Soc.，Providence，RI，2009。[JS] A. Joyal 和 R. Street，编织张量范畴，Advances in Mathematics 102（1993），20–78。[J] D. Joyce，Ringel–Hall型顶点代数以及模空间同调上的李代数结构。准备中。https://people.maths.ox.ac.uk/joyce/hall.pdf[KW] V. Kac 和 W. Wang，顶点算子超代数及其表示，《共形场论、拓扑场论和量子群的数学方面》（South Hadley，MA，1992），161–191，Contemp. Math.，175，Amer. Math. Soc.，Providence，RI，1994。[L] Alexei Latyntsev，上同调Hall代数和顶点代数，arXiv:2111.04616。[LL] J. Lepowsky 和 H. Li，顶点算子代数及其表示导论，Progress in Mathematics，第227卷，Birkh¨user Boston, Inc.，Boston，MA，2004。[LWZ] J. L¨u、X. Wang 和 G. Zhuang，微分分次泊松代数及其泛包络代数，Sci. China Math. 59（2016），第5期，849–860。[P] A. Polishchuck，泊松括号的代数几何，Journal of Mathematical Sciences，第84卷，第5期，1997。[SP] The Stacks Project作者，Stacks Project，https://stacks.math.columbia.edu，2022。[Z] Y. Zhu，顶点算子代数特征标的模不变性，J. Amer. Math. Soc. 9（1996），第1期，237–302。

[1]School of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng, Henan, CHINA电子邮箱地址：caradot@henu.edu.cn
[2]School of Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, CHINA电子邮箱地址：cpjiang@math.sjtu.edu.cn[3]Department of Mathematics, Kansas State University, Manhattan, KS 66506, USA电子邮箱地址：zlin@math.ksu.edu