arXiv:2304.11613v1 [cs.LO] 23 Apr 2023

单子二阶逻辑中的树上量化

Massimo Benerecetti、Laura Bozzelli、Fabio Mogavero，的里雅斯特大学 Federico II：电子邮箱：{massimo.benerecetti,laura.bozzelli,fabio.mogavero}@unina.it

Adriano Peron，的里雅斯特大学：电子邮箱：adriano.peron@units.it

摘要——单子二阶逻辑（MSO）通过引入取值范围为集合的变量以及对这些变量的量化，扩展了一阶逻辑（FO）。我们介绍并研究单子树逻辑（MTL），这是 MSO 的一个片段，解释于无限树模型之上，其中变量的取值范围是原始模型的任意子树。我们分析 MTL 与 MSO 和 MPL 的各种变体相比的表达能力；具体而言，MPL 是指对路径进行量化的 MSO。我们还讨论它与时序逻辑的联系：一方面给出可嵌入 MTL 的非平凡分级 μ-C演算 片段，另一方面证明 MTL 足以编码用于策略推理的时序逻辑，其目标是一阶可定义目标。

I. 引言

单子二阶逻辑（MSO），即扩展了变量和量词、使其能够遍历集合的一阶逻辑（FO），多年来一直受到广泛关注，主要原因在于其强大的表达能力和良好的计算性质，尤其是在词和树上进行解释时。反过来，这使其非常适合作为一种形式化框架，用于推理正则语言以及一般意义上的计算系统；后者的可能动态演化集合通常表示为一种树结构。

该领域的一项开创性成果最初由 Büchi 提出 [11], , 他证明了带有一个后继关系、变量取值范围为有限集的单子二阶逻辑与有限词上的有限状态自动机 [48],之间的等价性，并利用这一结果为该逻辑设计了一个判定过程。随后，该结果被扩展到变量取值范围为任意集合以及无限词上的有限状态自动机的情形，见[12], [13]。Rabin [46] 后来通过对二叉树上的MSO 的表达能力进行自动机理论刻画，证明了其可判定性。随后，Walukiewicz [51], [52], 提供了一个通用框架，用于借助一类自动机研究MSO ；这类自动机能够刻画MSO 在具有任意（有限或无限）分支度的树上的表达能力。利用 Rabin 的结果，Muller 和 Schupp [43], [44] 证明了MSO 在树宽有界的图上是可判定的，而 Courcelle [20], [19], [21] 则对图上的MSO 进行了相当广泛的研究，涉及图论和复杂性理论。

树模型上的 MSO 变体也已得到研究。弱单子二阶逻辑（WMSO）就是其中一种变体，其中二阶变量只能取值于有限集。Rabin [47] 提出了二叉树上 WMSO 的自动机理论刻画，以证明在这一类结构上，WMSO 的表达能力严格弱于 MSO。[41], [42], 中提出了适用于这些树上 WMSO 的自动机，并引入了弱交替树自动机。此外，研究表明，当可以直接访问节点的左、右子节点时，WMSO 等价于模态 μ-演算 演算 [33], 的无交替片段 [3]。 [26], [14], [15]最近对这一联系进行了更深入的分析，并考察了双模拟不变片段。

另一个值得注意的变体是一元路径逻辑 [28],[29] (MPL)，其中二阶变量被限制为仅对路径取值。这一限制使其表达能力严格低于树上的完整 MSO。MPL 之所以受到关注，是因为许多时序逻辑，尤其是 CTL*，都可以嵌入 MPL [29], [50], [39], [40]。

然而，要完整表达模态 μ-C演算 [32] 及其计数扩展 [34]，就必须直接跳到 MSO。原因之一是，在 μ-C演算 中可以表达一些路径性质，而这些性质无法用 FOL 表达，且其见证可能是由互不连通（即非凸）的节点集合构成的。其中一种性质在这样的节点处为真 t ：沿某条路径从 t 开始，所有偶数位置上的节点都满足给定的原子命题p。例如，能够收集所有这些见证的 μ-C演算 公式为 $\nu X.(p \wedge \Diamond\Diamond X)$；如果某个节点的一个后继满足 φ，那么模态公式 $\Diamond\varphi$就在该节点处成立。树中那些沿某条路径出现在偶数位置上的节点彼此并不连通，而且它们全都是该性质的见证。更重要的是，这些互不连通的见证彼此依赖：要使节点 t 成为该性质的见证，前方两步处的某个节点也必须是见证；若从中移除 p ，就会导致 t 无法成为见证。见证可能互不连通，正是 MSO 对集合进行量化的能力能够处理可能互不连通的节点集合这一特性至关重要的原因。与此形成对比的是，另一种在节点t 处为真的性质：从该节点出发存在一条路径及其某个前缀 π ，使得 q 在前缀的末尾节点处成立，而 p 在此前的所有节点处成立。该性质可以用 CTL* 公式 $\mathrm{E}(p\,\mathrm{U}\,q)$ 表达。在这种情况下，如果节点 t 满足该性质，那么沿见证前缀直至满足q 的节点为止的所有节点，也都满足该性质。然而，这种性质也可能存在互不连通的见证，但它们彼此独立；也就是说，从某个前缀 π中移除该性质（例如，从构成 π的连通见证的标记中移除 p 和 q ），不会对 π之外的其他见证产生任何影响。所有可用 CTL* 表达的性质都属于这一类；而对路径（即连通的节点集合）进行量化，

就足以在 MPL 中表达所有这些性质。

事实证明，即使对于比 CTL*表达能力更强的逻辑，例如用于策略与博弈推理的语言，如交替时序逻辑 (ATL*) [1], [2], 策略逻辑 (SL) [16], [17], [38], [36], [37],和 子结构时序逻辑 (STL*) [5], [6], 类似的连通性仍然成立。例如，已有研究表明，STL*是 CTL* 的一种扩展，它隐式地允许对子树进行量化，其表达能力严格强于 CTL*，因为后者具有双模拟不变性，而前者不具有。借助子树量化，STL*能够对策略进行建模，因此可以编码具有 FO可定义目标的博弈。

受这些观察结果的启发，研究 MSO 中这一看似缺失的片段似乎是很自然的：其中的量化范围是子树。在本文中，我们精确研究了这一语义限制，并将其称为单子树逻辑，简称 MTL；该逻辑解释于非阻塞树上。我们完整刻画了该逻辑的表达能力，并研究了若干变体：将二阶变量的取值范围限制为有限树，从而得到弱 MTL（WMTL）；或仅限制为无限树，从而得到余弱 MTL（coWMTL）；此外，我们还将它们与 MSO 和 MPL 的相应变体进行了比较。事实证明，每个变体的表达能力都严格弱于相应的 MSO 变体，同时严格强于类似的 MPL 变体。我们还表明，当解释于有限分支树上时，MTL（分别为 MSO、MPL）与 coWMTL（分别为 coWMSO、coWMPL）等价，并且表达能力强于 WMTL（分别为 WMSO、WMPL）。然而，有趣的是，当我们在允许具有无限分支度的任意树上解释 MSO 和 MTL 时，情况会发生根本变化。在这种情况下，每种逻辑的余弱变体都严格包含相应的完整版本和弱版本，而后两者彼此不可比较。

文章的第二部分分析了 MTL 的不同变体与时序逻辑之间的联系。具体而言，我们找到了分级 μ-C演算的一个非平凡片段，称为单步分级 μ-C演算(Gμ-C演算[1s])。该片段可由 MTL 刻画，并能表达 MPL 无法表达的树性质。我们还证明，Gμ-C演算[1s] (AFGμ-C演算[1s])的无交替片段（AFGμ-C演算[1s]）可由 WMTL 刻画，而无法由 WMPL 刻画。最后，我们给出了将 STL* 编码为 MTL 的方法，表明树量化足以推理具有 FO 可定义目标的博弈。

II. 背景

令 $\mathbb{N}$ 为自然数集。对于字母表上的有限或无限词 w，$|w|$ 表示 w 的长度（若 w 为无限，则 $|w| = \infty$），并且对所有 $0 \le i < |w|$，$w(i)$ 表示 w 的第 $(i+1)$ 个字母。

树。树 T 是 $\mathbb{N}^*$ 的一个子集，并且存在一个元素$\tau_0 \in T$，称为 T的根节点，满足：

- 对于每个 $\tau \in T$，τ都具有 $\tau_0 \cdot \tau'$的形式，其中某个 $\tau' \in \mathbb{N}^*$;
- 对于所有 τ、$\tau' \in \mathbb{N}^*$，如果 $\tau_0 \cdot \tau \in T$且 τ'是 τ的前缀，那么 $\tau_0 \cdot \tau' \in T$。

T 的元素称为节点。对于 $\tau \in T$，即 τ 在 T中的子节点，它是 T中某个形如 $\tau \cdot n$ 的节点，其中 $n \in \mathbb{N}$。 τ在 T中的后代节点是 T中某个形如 $\tau \cdot \tau'$的节点，其中 $\tau' \in \mathbb{N}^*$。 T 的子树是 T 的一个子集，并且本身是一棵树。 T 中以节点 $\tau \in T$ 为根的子树，是由 τ 在 T中的所有后代节点组成的树。 T 的森林是 T的若干子树的并集。 T 的路径是 T 的一个子树 π，它在子节点关系下是全序的（即，π 的每个节点在 π中至多有一个子节点）。在下文中，T的一条路径 π 也被视为 T上的一个词，其顺序遵循由子关系在 π 上诱导的全序。一棵树 T 被称为：

- 有限分支：如果 T 中的每个节点在 T 中都有有限个子节点（否则为无限分支）；
- 阻塞：如果 T 中的某个节点在 T 中没有子节点（否则为非阻塞）；
- 链：如果它从根节点出发有唯一的极大路径（每个节点至多有一个子节点）。注意，树的一条路径对应一条链。
- 完全二叉树：如果每个节点恰好有两个子节点；
- 稠密：如果它包含一个子树 T'，使得T'中的每个节点在 T'中都有一个后代节点，且该后代节点至少有两个不同的子节点 T'。

注意，稠密树具有不可数数量的无限路径，或者等价地，包含一个完全二叉树作为图 minor。稠密树对应于 [10], [30]中的厚树。

标记树和 Kripke 树。对于字母表 Σ， Σ-标记树是一个二元组 $\mathcal{T} = (T, \mathrm{Lab})$，由一棵树和一个标记 $\mathrm{Lab} : T \mapsto \Sigma$ 构成，该标记为 T中的每个节点分配 Σ中的一个符号。注意，从初始状态开始的系统动态行为可以用一棵 2^{AP}-标记树建模，其中 AP 是一个有限的原子命题集。树 T中的一个节点表示系统的一个状态，而根节点对应于初始状态。从根节点出发的树中的极大路径对应于系统从初始状态开始的可能执行。此外，树中的一个节点由 AP 中的元素标记，表示在该计算状态下成立的原子谓词。由于我们考虑的是对反应式系统动态行为建模的标记树，而这类系统的执行通常是无限的，因此我们将所考虑逻辑的解释限制在非阻塞的标记树上。非阻塞树 T是无限的，并且 T 中的极大路径也都是无限的。

给定一个原子命题的有限集合 AP，AP 上的 Kripke 树是一个非阻塞 2^{AP}标记树。

相对表达力。设 $\mathcal{M}$ 是一个模型集合，L 和 L′ 是两种在 $\mathcal{M}$ 中的模型上进行解释的逻辑语言。给定两个公式 $\varphi \in$ L 和 $\varphi' \in$ L′，如果对于每个模型 $M \in \mathcal{M}$，M 满足 φ 当且仅当 M 满足 φ'，则称 φ 和 φ' 等价。如果 L 中的每个公式在 L′ 中都有一个等价公式，则称语言 L 被语言 L′ 包含，记作 L ≤L′。如果 L ＜ L′，则称语言 L 的表达能力严格弱于语言 L，

$\mathrm{L} \leq \mathrm{L}'$，并且存在一个 L' 公式在 L 中没有等价公式。若两个逻辑 L 和 L' 的表达能力不可比，则记作 $\mathrm{L} \not\sim \mathrm{L}'$，即 $\mathrm{L} \not\leq \mathrm{L}'$ 且 $\mathrm{L}' \not\leq \mathrm{L}$。最后，如果两个逻辑 L 和 L' 的表达能力等价，则记作 $\mathrm{L} \equiv \mathrm{L}'$，即 $\mathrm{L} \leq \mathrm{L}'$ 且 $\mathrm{L}' \leq \mathrm{L}$。

计数型CTL*。 我们回顾计数型CTL* (CCTL* 简称 [40]) 的语法和语义。它是在经典分支时序逻辑 CTL* [24] 的基础上加入计数算子扩展而成。CCTL* 的语法通过归纳定义给出：在给定的有限原子命题集 φ 上，定义状态公式 ψ 集合和原子命题集 AP 上的路径公式集合：

$$\varphi ::= \top \mid a \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathrm{E}\psi \mid \mathrm{D}^n\varphi$$
$$\psi ::= \varphi \mid \neg\psi \mid \psi \wedge \psi \mid \mathrm{X}\psi \mid \psi \mathrm{U} \psi$$

其中 $a \in$AP、X 和 U 分别是标准的“下一步”和“直到”时态模态，E 是存在路径量词，而 D^n是计数算子，其含义为 $n \in \mathbb{N}$。CCTL* 的语言由 CCTL* 的状态公式构成。我们还采用标准简写 $\mathrm{A}\varphi, \neg\mathrm{E}\neg\varphi$ （“全称路径量词”）和 $\mathrm{F}\psi, \top \mathrm{U} \psi$ （“最终”）。

语义是相对于 Kripke 树 $\mathcal{T} = (T,\mathrm{Lab})$（在 AP 上）给出的。对于 T 的一个节点 τ、 T 的一条路径 π 以及 $0 \leq i < |\pi|$, 状态公式 φ 的满足关系 $\mathcal{T}, \tau \models \varphi$（表示 φ 在 $\mathcal{T}$ 的节点 τ 处成立），以及路径公式 ψ 的满足关系 $\mathcal{T}, \pi, i \models \psi$（表示 ψ 在 $\mathcal{T}$ 中路径 π 的位置 i 处成立），均按归纳方式定义如下（布尔联结词按通常方式处理）：

$\mathcal{T}, \tau \models a \quad \Leftrightarrow a \in \mathrm{Lab}(\tau); \mathcal{T}, \tau \models \mathrm{E}$
$\psi \quad \Leftrightarrow \mathcal{T}, \pi, 0 \models \psi$ 对于从节点 τ 出发的某条路径 π，在 $\mathcal{T}$ 中至少存在 n 个不同的子节点 τ' 属于 τ，使得 $\mathcal{T}, \tau' \models \varphi$
$\mathcal{T}, \tau \models \mathrm{D}^n\varphi \quad \Leftrightarrow \mathcal{T}, \pi(i) \models \varphi$
$\mathcal{T}, \pi, i \models \varphi$
$i \models \mathrm{X}\psi \quad \Leftrightarrow i+1 < |\pi|$ 且 $\mathcal{T}, \pi, i+1 \models \psi$
$\mathcal{T}, \pi,$
$i \models \psi_1 \mathrm{U}\ \psi_2 \quad \Leftrightarrow$ 对于某个 $i \leq j < |\pi|$: $\mathcal{T}, \pi, j \models \psi_2$ 且 $\mathcal{T}, \pi, k \models \psi_1$ 对于所有 $i \leq k < j$.

Kripke 树 $\mathcal{T}$ 满足状态公式 φ，记作 $\mathcal{T} \models \varphi$，当且仅当 $\mathcal{T}, \tau_0 \models \varphi$，其中 τ_0 是 $\mathcal{T}$ 的根节点。给定一棵非阻塞树 T，我们记 $T \models \varphi$ 表示 $T, \mathrm{Lab}_\emptyset \models \varphi$，其中对于所有 $\tau \in T$，$\mathrm{Lab}_\emptyset(\tau) = \emptyset$。

我们还考虑 CCTL* 的两种语义变体，分别称为弱 CCTL*（WCCTL*）和共弱 CCTL*（共弱WCCTL*）；其中路径量词 E 和 A 分别从当前节点开始，取值范围为有限路径和无限路径。标准 CTL* [24] 是 共弱WCCTL* 的一个语法片段，其中不允许使用计数算子。

III. 单子树逻辑

我们首先在第 III-A节定义将要讨论的三种主要逻辑：MSO、MTL 和 MPL。这三种语言在语法层面并无差异，区别仅在于二阶变量的量化范围。不过，为方便起见，我们提供一种统一的语言（MSOL），其中二阶量词带有一个符号，

α 该符号明确指出被量化变量的论域：S 表示集合，T 表示树，P 表示路径。

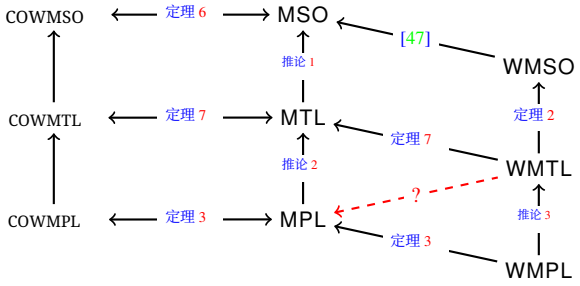


图 1：有限分支 Kripke 树上 MSOL 的表达能力结果。此

节 ion is mainly d致力于d to th分析 lysis of th各种语义片段在 MSOL非阻塞树上的表达能力。在第 III-B 节中，我们比较了 MPL、MTL 和 MSO 在一般情形下的表达能力；此时，二阶变量分别取值于所考虑模型树的有限和无限路径、子树及集合。然后，在第 III-C 和 III-D 节中，我们探讨弱语义变体 （二阶变量分别取值于有限路径、有限子树和有限集合）以及余弱语义变体 （二阶变量分别取值于无限路径、无限子树和无限集合）的类似表达能力问题。

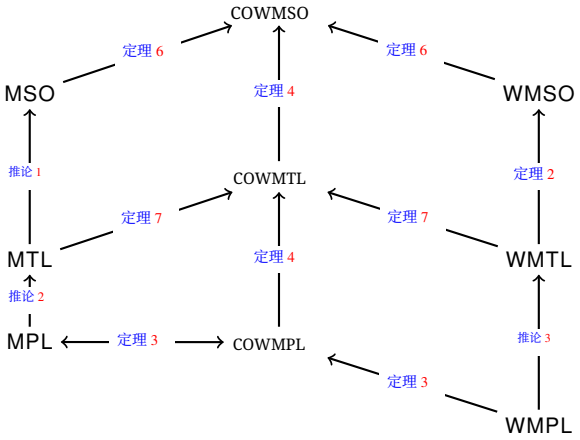


图 2：MSOL 在任意 Kripke 树上的表达能力结果。

最后，在第 III-E 节中，我们讨论 Weak语义与 co-week 语义之间的表达能力问题。对于有限分支 Kripke 树，完整的结果总结于图 1 中；对于一般情形，则总结于图 2 中。这两幅图应按如下方式解读。连接两个逻辑的边表示如下：如果边带有单个箭头，则目标逻辑的表达能力强于源逻辑；否则，两个逻辑表达能力等价。如果两个不同的逻辑之间没有边，且无法由其他边推导出二者之间的关系，则这两个逻辑表达能力不可比。带问号标记的红色边表示当前尚未解决的开放问题。

A. 单子二阶逻辑

对于给定的原子命题集有限集合 AP，MSOL 是一种定义在签名 $\{\leq\} \cup \{P_a \mid a \in \text{AP}\}$ 上的语言，其中二阶量化仅限于单子谓词，$\leq$ 是二元谓词，并且对于每个 $a \in \text{AP}$，都有一个单子谓词 P_a 。

定义 1（MSOL 语法）。给定一个由原子命题组成的有限集合 AP、一个由一阶变量（或节点变量）组成的有限集合 Vr_1，以及一个由二阶变量（或集合变量）组成的有限集合 Vr_2，单子二阶逻辑/树逻辑/路径逻辑（简称 MSO/MTL/MPL）的语法，是按照以下文法构造的公式集合，其中 $p \in \text{AP}$、x、$y \in \text{Vr}_1$，和 $X \in \text{Vr}_2$:

$$\varphi := P_a(x) \mid x \leq y \mid x \in X \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \exists x.\varphi \mid \exists^{\alpha} X.\varphi,$$

其中 $p \in \text{AP}$、x、$y \in \text{Vr}_1$、$X \in \text{Vr}_2$，，并且 α 在 MSO 中取 S，在 MTL 中取 T，在 MPL 中取 P。

注意，MSO（相应地，MTL、MPL）对应于 MSOL 的语法片段，其中二阶存在量化仅采取 $\exists^{\text{S}}$（相应地，$\exists^{\text{T}}$、$\exists^{\text{P}}$）的形式。我们还将标准逻辑连接词 $\vee$ 和 $\rightarrow$ 作为缩写，并使用一阶全称量词 $\forall x$，其定义为 $\forall x.\varphi$ 、$\neg\exists x.\neg\varphi$，以及二阶全称量词 $\forall^{\alpha} X$，其定义为 $\forall^{\alpha} X.\varphi$、$\neg\exists^{\alpha} X.\neg\varphi$。我们还可以使用以下简写：（i）$x = y$ 表示 $x \leq y \wedge y \leq x$；（ii）$x < y$ 表示 $x \leq y \wedge \neg(y \leq x)$；（iii）$\exists x \in X.\varphi$ 表示 $\exists x.(x \in X \wedge \varphi)$；（iv）$\forall x \in X.\varphi$ 表示 $\forall x.(x \in X \rightarrow \varphi)$。

通常，公式 φ 的自由变量是指在 φ 中出现且未被量词约束的变量。句子是不含自由变量的公式。MSOL的语言由其句子组成。我们还考虑 MSOL的一阶片段 FO，其中不允许使用二阶量词和二阶变量。

MSOL的语义。MSOL 的公式在基于原子命题集 AP 的 Kripke 树上解释。Kripke 树 $\mathcal{T} = (T, \text{Lab})$ 导出一个论域为 T 的关系结构，其中二元谓词 $\leq$ 对应于 T中的后代关系，而 P_a 表示集合 $\{\tau \in T : a \in \text{Lab}(\tau)\}$ 的 a标记节点。

固定一个基于原子命题集 AP 的 Kripke 树 $\mathcal{T} = (T, \text{Lab})$。树 T 上的一阶赋值是一个映射 $\mathcal{V}_1 : \text{Vr}_1 \mapsto T$，它为每个一阶变量指定 T中的一个节点。树 T 上的二阶赋值是一个映射 $\mathcal{V}_2 : \text{Vr}_2 \mapsto 2^T$，它为每个二阶变量指定 T 的一个子集。

定义 2（MSOL 语义）。给定一个 MSOL 公式 φ、一个定义在 AP 上的 Kripke 树 $\mathcal{T} = (T, \text{Lab})$、一个针对 T 的一阶赋值 $\mathcal{V}_1$，以及一个针对 T的二阶赋值 $\mathcal{V}_2$，满足关系 $\mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \models \varphi$表示 $\mathcal{T}$在赋值 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$下满足公式φ，其定义如下（布尔联结词的处理方式是标准的）：

$\mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \models P_a(x) \Leftrightarrow a \in \text{Lab}(\mathcal{V}_1(x))$；$\mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \models x \leq y \Leftrightarrow \mathcal{V}_1(y)$ 是 T 中 $\mathcal{V}_1(x)$ 的后代节点；$\mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \models x \in X \Leftrightarrow \mathcal{V}_1(x) \in \mathcal{V}_2(X)$；$\mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \models \exists x.\varphi \Leftrightarrow T$, Lab $\mathcal{V}_1[x \mapsto \tau]$，对于某个$\tau \in T$；$\mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \models \exists^{\text{S}} X.\varphi \Leftrightarrow \mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2[X \mapsto S] \models \varphi$ 对于某个节点集 $S \subseteq T$；$\mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \models \exists^{\text{T}} X.\varphi \Leftrightarrow \mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2[X \mapsto T'] \models \varphi$ 对于 T 的某个子树 T'；$\mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \models \exists^{\text{P}} X.\varphi \Leftrightarrow \mathcal{T}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2[X \mapsto \pi] \models \varphi$ 对于 T. 的某条路径π

其中，对于针对 T的一阶赋值 $\mathcal{V}_1$ 、一个节点 $\tau \in T$和一个一阶变量 $x \in T$，$\mathcal{V}_1[x \mapsto \tau]$ 表示如下定义的一阶赋值：$\mathcal{V}_1[x \mapsto \tau](x) = \tau$ 且$\mathcal{V}_1[x \mapsto \tau](y) = \mathcal{V}_1(y)$，若 $y \neq x$。对于针对 T的二阶赋值 $\mathcal{V}_2$ 、一个集合$S \subseteq T$和一个二阶变量 X，记号$\mathcal{V}_2[X \mapsto S]$的含义类似。

注意，对于固定的$\mathcal{T}$ 和 φ，满足关系 $\mathcal{T}$、$\mathcal{V}_1$、$\mathcal{V}_2 \models \varphi$ 仅取决于 $\mathcal{V}_1$ 和$\mathcal{V}_2$ 赋予 φ中自由出现变量的值。特别地，如果 φ是一个句子，我们称 $\mathcal{T}$ 满足 φ，记作 $\mathcal{T} \models \varphi$，如果对于某些赋值 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$，$\mathcal{T}$、$\mathcal{V}_1$、$\mathcal{V}_2 \models \varphi$。在这种情况下，我们也称 $\mathcal{T}$是 φ的模型。非阻塞树 T满足句子 φ，记作 $T \models \varphi$，如果（T，$\text{Lab}_{\emptyset}$）$\models \varphi$，其中$\text{Lab}_{\emptyset}$ 为每个 T节点赋予空集。

MSOL中可表达的基本谓词。下面我们定义一些有用的标准谓词，这些谓词可以仅使用一阶量化在MSOL 中表达：

- 二阶二元谓词 $X \subset Y$、$X \subseteq Y$、$X = Y$、$X \neq Y$（具有预期含义）。例如，$X \subseteq Y$可以表示为 $\forall x.(x \in X \rightarrow x \in Y)$；
- 子关系可在 MSO 中由二元谓词 $\text{child}(x, y)$ $x < y \wedge \neg\exists z.(x < z \wedge z < y)$ 定义；
- $\text{path}(X)$（分别为 $\text{path}_{\infty}(X)$、$\text{path}_{f}(X)$）用于表示给定树中作为路径（分别为无限路径、有限路径）的子集。例如：$\text{path}(X)$ $\forall x \in X.\forall y \in X.((x \leq y \vee y \leq x) \wedge ((x < y \wedge \neg\text{child}(x, y)) \rightarrow \exists z \in X.(x < z \wedge z < y))$。
- 树这一性质可由以下二阶谓词表示：

$$\texttt{tree}(X) \triangleq \exists x.\forall y.(x \leq y) \wedge \forall x \in X.\forall y \in X.((x < y \wedge \neg\texttt{child}(x, y)) \rightarrow \exists z \in X.(x < z \wedge z < y)).$$

弱语义与余弱语义变体。我们还考虑 MSO、MTL 和 MPL 的弱语义变体，分别记为 WMSO、WMPL 和 WMTL。在 WMSO 中，二阶变量被解释为给定树的有限集合。同样，在 WMTL 和 WMPL 中，二阶量词分别在给定树的有限子树和有限路径上取值。最后，我们考虑 MSO、MTL 和 MPL 的余弱语义变体（分别记为 coWMSO、coWMPL 和 coWMTL），其中二阶变量被解释为给定树的无限集合（在 coWMPL 和 coWMTL 中分别为无限路径和无限子树）。

B. 完全量化下的表达能力

在本节中，我们比较 MPL、MTL 和 MSO 逻辑的表达能力。我们证明，即使在

MPL 与 MSO 之间的 有限分支情形 中，MTL 也严格处于二者之间（即，在有限分支 Kripke 树这一类上）。首先，我们证明 MTL 的表达能力严格弱于 MSO。事实上，该结果在 2^{AP}标记的无限链这一类上就已经成立。对于 Kripke 树的这一子类，树量化可以归约为路径量化，而后者又可以通过一阶量化来模拟 [13]。因此，自从FO $<$ MSO 即使在无限链上也成立，我们得到以下结果（详情见附录A）。

命题 1. 在 2^{AP} 标记的无限链上，有：

- MTL $\equiv$WMTL $\equiv$ COWMTL $\equiv$ 一阶逻辑 $<$ MSO，且
- 由 *[13]*, MSO $\equiv$WMSO $\equiv$ COWMSO。

由于链类可以简单地用 一阶逻辑刻画，根据命题1，以下结论成立。

命题 2. 对所有 L $\in$ {MSO、WMSO、coWMSO}以及 L$'$ $\in$ {MTL、WMTL、coWMTL}，L $\not\leq$ L$'$即使在有限分支情形下也成立。

显然，MTL 包含于 MSO （谓词 树(X)可以用MSO表示）。因此，根据命题 2，可得所需结果。

推论 1. 即使在有限分支情形下，MTL $<$ MSO。

接下来，我们将证明 MPL 的表达能力严格低于 MTL。显然，MPL 被 MTL 所包含（一阶量化可以通过树量化和一阶量化进行模拟）。为了证明 MTL 不被 MPL 所包含，我们证明稠密性（刻画稠密非阻塞树这一类）可以在 MTL 中定义，但不能在 MPL 中定义。稠密性可以在 MTL 中表示为：

$$\exists^{\mathrm{T}} X.\, \forall x \in X.\, \exists x_1 \in X.\, \exists x_2 \in X.\\ (x < x_1 \wedge x < x_2 \wedge \neg x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_2 \leq x_1).$$

为了证明稠密性不能在MPL中表示，我们需要一个初步结果，将已知的 coWMPL 与coWCCTL* [40]之间的表达能力等价性推广开来。将 coWCCTL* 翻译为coWMPL 的简单翻译可以直接调整，从而证明每个 CCTL*（分别为 WCCTL*）公式都可以在线性时间内翻译为等价的 MPL（分别为 WMPL）公式。通过调整 [40] 中用于证明 coWMPL 被 co WCCTL* 所包含的组合论证，我们得到以下结果。

命题 3. MPL $\equiv$CCTL*，且 WMPL $\equiv$WCCTL*。

对于每个 $n \geq 1$，我们定义两个非空的类 ND$_n$和 D$_n$，它们由非阻塞有限分支树组成，并且对每个 $n > 1$，以下结论成立：

- ND$_n$ 仅包含彼此同构且不满足稠密性的树；
- D$_n$ 仅包含满足稠密性的同构树；
- 在 CCTL* 中，不存在大小小于 n 的状态公式 φ 能够区分类 ND$_n$ 和 D$_n$，即，对于所有 $T \in$D$_n$ 和 $T' \in$ND$_n$，$T \models \varphi$当且仅当 $T' \models \varphi$。

因此，根据命题3，可知逻辑 MPL 无法刻画稠密性。

下文中，CCTL*公式 φ 的大小 $|\varphi|$ 定义为表示 φ的字符串长度，其中假设计数算子 D^k 中的自然数 k 采用一元编码。特别地，$|\mathrm{D}^k\varphi| = k + 1 + |\varphi|$。类 ND$_n$ 和 D$_n$ 通过对 $n \geq 1$进行归纳来定义：

- ND$_1$ 和 D$_1$ 相同，且由无限链组成；
- 对于每个 $n > 1$，ND$_n$ 是满足以下条件的最小非阻塞树集合 T：– T的根节点（称为 ND$_n$-节点）恰有 $n \cdot (n-1) + 1$ 个不同的子节点$\tau_{1,\,1}$，……，$\tau_{1,\,n}$，……，$\tau_{n-1,\,1}$，……，$\tau_{n-1,\,n}\tau_n$；– 对所有 $\ell \in [1, n-1]$，以子节点$\tau_{\ell,\,1}$，……，$\tau_{\ell,\,n}$为根的子树都属于 ND$_\ell$；– 以 τ_n 为根的子树属于 ND$_n$。
- 对于每个 $n > 1$，D$_n$ 是满足以下条件的最小非阻塞树集合 T：
  – T的根节点（称为 D$_n$-节点）恰有 $n\cdot(n-1)+2$个不同的子节点$\tau_{1,\,1}$，……，$\tau_{1,\,n}$，……，$\tau_{n-1,\,1}$，……，$\tau_{n-1,\,n}\tau_n\tau_n'$；– 对所有 $\ell \in [1, n-1]$，以子节点$\tau_{\ell,\,1}$，……，$\tau_{\ell,\,n}$为根的子树都属于 ND$_\ell$（注意是 ND$_\ell$，而非 D$_\ell$）；– 以 τ_n 和 τ_n' 为根的子树都属于 D$_n$。

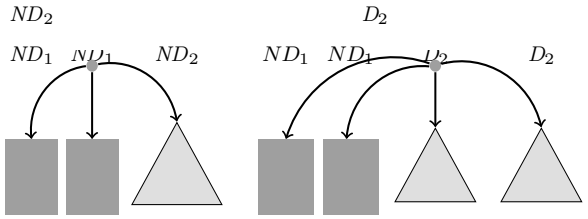


图 3：ND_n 和 D_n 对于 $n = 2$的树类。

根据构造，以下结论成立。

引理 1. 对于所有 $n > 1$，D$_n$ 中的树是稠密的，而 ND$_n$ 中的树不是稠密的。

证明. 设 $n > 1$、$T \in$D$_n$，且 S是 T的子集，仅由 D$_n$-节点组成。根据构造，S 是完全二叉树。因此，T 是稠密的。接下来，我们证明对于所有 $k \geq 1$和 $T \in$ND$_k$，T 不是稠密的。因此，结论得证。证明对 k进行归纳。$k = 1$ 的情形是显然的，因为在此情形下，T是一条无限链。现在，设 $k > 1$。我们假设 T 是稠密的，并由此推出矛盾。因此，存在 S 的一个子树 T，满足以下条件：

- 可达性不变性；S的每个节点在 S 中都有一个后代节点，该后代节点在 S中至少有两个不同的子节点。根据构造，以下两个条件之一成立：
- 存在 $1 \leq h < k$和 $T' \in$ND$_h$，使得 $S \subseteq T'$。根据归纳假设，T' 不是稠密的，因此我们得出矛盾；

• 对于 S的某个节点 τ，以节点τ 为根的 S 的子树 S' 是 ND_h 中的某棵树 T' 的子集，其中存在某个 $1 \le h < k$。注意，与 S一样， S' 满足可达性不变条件。反过来，根据归纳假设， T' 不是稠密的，从而得出矛盾。 □

我们可以证明，对于任意的 CCTL* 状态公式 φ 以及所有 $n, m \ge |\varphi|$， φ 都无法区分类 D_n 和 ND_m。证明采用关于 φ大小的结构归纳。在对时序模态和计数模态求值时，我们需要比较类 D_i 和 ND_j 的代表元，它们对应于（可能不同的）指标 i和 j，并满足不变式 $ij \ge |\psi|$；其中， ψ 是当前处理的 φ的子公式。

引理 2。设 φ 是一个 CCTL* 状态公式。那么，对于所有满足 $\min(m,n) \ge |\varphi|$ 的$m, n > 1$，以及所有 $T, T' \in \mathrm{D}_n \cup \mathrm{D}_m \cup \mathrm{ND}_n \cup \mathrm{ND}_m$，以下结论成立： $T \models \varphi \Leftrightarrow T' \models \varphi$。

因此，根据引理1–2 以及等价关系MPL ≡CCTL*，以下结论成立。

定理 1。即使在有限分支情形下，MPL 也无法表达稠密性。

由于稠密性可以在 MTL 中表达，且MPL 显然被 MTL包含，根据推论 1 和定理 1，我们得到逻辑 MPL、MTL和 MSO的如下表达能力层级。

推论 2. 即使在有限分支情形下，MPL ＜ MTL ＜ MSO。

C. 弱量化下的表达力

本节比较 MSO、MTL和 MPL的弱语义变体的表达能力。主要结果是，我们证明了WMTL 严格介于 WMPL 和 WMSO 之间，即使在有限分支情形下也是如此。显然，WMTL被 WMSO 包含（要求取值于有限集的二阶变量只能捕获给定树的有限子树，这一点可以仅通过一阶量化来表达）。因此，根据命题 2，有如下结论。

定理 2. 即使在有限分支情形下，WMTL ＜ WMSO。

接下来，我们证明 WMPL ＜ WMTL。首先，我们注意到，由于对有限路径的量化可以用一阶逻辑表达，因此 WMPL 与一阶逻辑的表达能力等价，且 WMPL ≤ WMTL。为了证明在一般情形下 WMTL 的表达能力强于 WMPL，我们考虑无限分支性质，即要求一棵树具有无限分支。该性质可以在 Weak语义下的 MTL 中表示为 $\neg\forall x.\, \exists^{\mathrm{T}} X.\, \forall y.\, (\mathrm{child}(x,y) \rightarrow y \in X)$。另一方面，已有文献通过 [49] 证明，每个可满足的 MSO 公式都由一棵有限分支克里普克树满足。因此，由于 WMPL、MPL 和 MTL 都被 MSO 包含，以下结论成立。

命题 4。无限分支性质无法在 MSO、MTL、MPL 和 WMPL 中定义。

为了证明即使在有限分支情形下，WMTL 也不被 WMPL 包含，我们证明：对于每个原子命题 a，由 CTL*公式 AF a 表达的性质（称为 a-接受性）无法在 WMPL 中定义。注意， a-接受性描述了这样一类 Kripke 树：从根节点出发的每条无限路径都会访问一个标有 a 的节点。在有限分支情形下，可以通过要求给定树 T 存在一个有限树前缀 T_a 来表达该性质，使得：(i) T_a 的每个叶节点都标有命题 a；(ii) 对于每个非叶节点 $\tau \in T_a$， τ 在 T 中的每个子节点同时也是 τ 在 T_a 中的子节点。

下面，我们证明 a-接受性质无法在 WMPL 中表达。根据命题 3，只需证明 a-接受无法在 WCCTL* 中定义。我们证明 CTL* 公式 $\mathtt{AF}\, a$ (称为

对于 WCCTL* 公式 ψ，我们称 ψ 是平衡的，当且仅当：

• 对于每个子公式 $\psi_1 \,\mathrm{U}\, \psi_2$ of ψ，都有 $|\psi_1| = |\psi_2|$;

• 对于 ψ 的每个子公式 $\mathrm{E}\theta$， θ 的形式为 $\theta_1 \wedge \theta_2$，其中 $|\theta_1| = |\theta_2|$。

证明对于平衡 WCCTL* 状态公式， a-接受的不可表达性结果，使我们能够将其表述为适用于任意 WCCTL* 状态公式，因为（通过使用合取⊤），WCCTL* 状态公式可以轻易转换为等价的平衡 WCCTL* 状态公式。

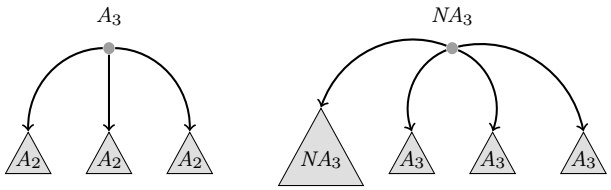


图4：用于 $n = 3$ 的 Kripke 树 A_n 类和 NA_n 类。

设 AP $= \{a\}$。对于每个 $n \ge 1$，我们定义两个非空类 A_n 和 NA_n，它们由 AP 上有限分支的 Kripke 树构成，并满足以下性质：对于每个 $n \ge 1$:

• A_n 仅包含满足 a-接受性质的同构 Kripke 树;

• NA_n 仅包含不满足 a-接受性质的同构 Kripke 树;

•不存在大小小于 n 的 WCCTL* 平衡状态公式 φ n，能够区分类 NA_n 和 A_n；也就是说，对于所有 $(T, \mathrm{Lab}) \in \mathrm{A}_n$ 以及 $(T', \mathrm{Lab}') \in \mathrm{NA}_n$，$(T, \mathrm{Lab}) \models \varphi$ 当且仅当 $(T', \mathrm{Lab}') \models \varphi$。

类 A_n 和 NA_n 通过对 $n \ge 1$ 归纳定义如下：

• A_1 由带标记的无限链组成，其中每个节点都标记为命题 a（a-节点或 A_1-节点）；

• 对于每个 $n > 1$，A_n 是满足以下条件的 Kripke 树 (T, Lab) 的最小集合：– T 的根节点（称为 A_n-节点）标签为空，且恰有 n 个不同的子节点 τ_1、. . .、 τ_n；– 对所有 $\ell \in [1, n]$，以子节点 τ_i 为根的 Kripke 子树都属于 A_{n-1}。

• 对于每个 $n \ge 1$，NA_n 是满足以下条件的 Kripke 树 (T, Lab) 的最小集合：

– T的根节点称为 NA$_n$-节点，具有空标签，并且恰好有 $n+1$ 个互不相同的子节点 τ_0、τ_1、……、τ_n；– 对于所有 $\ell \in [1,n]$，以子节点 τ_i 为根的 Kripke 子树属于 A$_n$；– 以 τ_0 为根的 Kripke 子树属于 NA$_n$。

请注意，由于 Kripke 树是无限的，因此 Kripke 树（T，Lab）与其根节点的某个子节点为根的子树同构是合理的。因此，类 NA$_n$ 定义良好。

设 $n \geq 1$。根据构造，对于 A$_n$ 中的每棵 Kripke 树，从根节点出发的每条无限路径都有一个只访问 a-节点的后缀。另一方面，对于 NA$_n$ 中的每棵 Kripke 树，都存在一条从根节点出发、只访问具有空标签的节点的无限路径（特别是 NA$_n$-节点）。因此，有如下结论。

引理 3。对于所有 $n \geq 1$，A$_n$ 中的 Kripke 树满足 a-接受性质，而 NA$_n$ 中的 Kripke 树不满足该性质。

我们可以证明，对于所有 $n \geq |\varphi|$，任意平衡 WCCTL* 状态公式 φ 都无法区分类 A$_n$ 和 NA$_n$。

引理 4。设 φ 是一个平衡 WCCTL* 状态公式。那么对于所有 $n > |\varphi|$，若（T，Lab）$\in$NA$_n$ 且（T'，Lab$'$）$\in$A$_n$，则（T，Lab）$\models \varphi$ 当且仅当（T'，Lab$'$）$\models \varphi$。

因此，根据引理3 和4 以及命题3，可知 a-接受性质无法用 WMPL 表达。此外，请注意，MPL $\equiv$ coWMPL。这是因为：(i) 对有限路径的量化可以用一阶逻辑表达；(ii) 路径为无限路径这一要求可以在 MPL 中仅通过一阶量化来定义。因此，由于 a-接受可以在 MPL 中表达，我们很容易得到以下结果。

定理 3。不存在能够表达 a-接受性质的 WMPL 公式。此外，即使在有限分支的情形下，也有 WMPL $\equiv$ FO、MPL $\equiv$coWMPL，以及 WMPL $<$ MPL。

由于WMTL 能够表达无限分支性质，并且在有限分支情形下，还能够表达 a-接受性质，根据定理2、命题4和定理3，我们得到弱变体的以下表达能力层级。

推论 3. WMPL $<$ WMTL $<$ WMSO 即使在有限分支情形下也成立。

D. coWeak 量化下的表达能力

在本节中，我们为所考虑的逻辑 MPL、MTL 和 MSO 的 coWeak 版本建立表达能力层级，该层级类似于相应 Weak 版本的表达能力层级。

定理 4. coWMPL $<$coWMTL $<$ coWMSO 即使在有限分支情形下也成立。

证明。显然，coWMPL $\leq$ coWMTL（对无限路径的量化可以通过对无限树的量化和一阶量化来模拟）。此外，coWMTL $\leq$ coWMSO（要求 coWMSO 中的二阶变量仅表示给定树的无限子树可以通过仅使用一阶量化来表达）。由于 coWMPL $\equiv$ MPL（定理 3），根据定理 1，即使在有限分支情形下，coWMPL 也无法表达稠密性。另一方面，稠密性可以用 coWMTL 表达。事实上，第 III-B 节中用于表达稠密性的 MTL 公式，与其余弱语义变体等价。此外，根据命题 2，coWMSO 不包含于 coWMTL。因此，结论直接得出。

□

E. 弱量化与 coWeak 量化

在本节中，我们比较逻辑 MTL 和 MSO 及其相应的 coWeak 语义和 Weak语义变体。

众所周知，[10], [30] 稠密性无法用WMSO 表达，即使在有限分支情形下也是如此。因此，既然WMTL $\leq$ WMSO，上述不可表达性结果同样适用于WMTL 。另一方面，我们在第III-B 节看到，稠密性可以改用MTL 来表达（因此也可以用MSO 来表达）。此外，在第III-C节，我们证明了无限分支性质可以用WMTL 来表达（因此也可以用WMSO 表达），但无法用MSO 和MTL 表达（见命题4）。由此可知，在任意 Kripke 树上，WMTL 与MTL （分别，WMSO与MSO）的表达能力不可比。

然而，众所周知，在有限分支情形下，WMSO 被 MSO 包含。事实上，在这种情形下，刻画给定树的有限集合的谓词 fin(X) 可以用 MSO 中的公式表达：

$$\exists^{S} Y.\, \big(\mathtt{tree}(Y) \wedge X \subseteq Y \wedge \neg \exists^{S} Z.\, (Z \subseteq Y \wedge \mathtt{path}_{\infty}(Z)).$$

此外，在有限分支情形下，假设 X 被解释为给定树的一棵子树，则谓词 $\mathtt{fin}(X)$ 可以定义为 MTL 中的 $\neg \exists^{\mathrm{T}} Y.\, (Y \subseteq X \wedge$路径$_{\infty}(Y))$。因此，根据命题2，我们得到以下结果。

定理 5. MSO $\not\sim$ WMSO、MTL $\not\sim$ WMTL、MSO $\not\sim$ WMTL 和 MTL $\not\sim$ WMSO。在有限分支情形下，WMSO $<$ MSO、WMTL $<$ MTL，以及 MTL $\not\sim$WMSO。

现在，我们利用以下对非阻塞树的有限子集的刻画，说明如何在coWMSO 中模拟对有限集合的二阶量化。

引理 5. 设 T 是一棵非阻塞树，且 $S \subseteq T$。那么，S 是有限的，当且仅当满足以下条件：
(*) 存在一棵无限树 $T_\infty \subseteq T$、一个无限森林$F_\infty \subseteq T$和一个无限集 $Y_\infty \subseteq T$，使得：– T_∞ 是有限分支的；– $F_\infty \subseteq Y_\infty \subseteq T_\infty$；– 对于 T_∞ 的每条无限路径 π，π 都有一个后缀只经过 F_∞ 的节点；– $S = T_\infty \setminus Y_\infty$。

证明。如果条件（$*$）得到满足，那么 S 包含于从 T_∞ 中移除森林 F_∞的所有节点后得到的树 T_f 中。由于 T_∞ 是有限分支的，且每条无穷

路径最终只访问 F_∞中的节点，因此可得T_f 是有限的。因此， S 也是有限的。

现在，假设 S 是有限的。由于 T 是非阻塞的，因此必定存在 T 的一个有限子树 T_f，使得 $S \subseteq T_f \setminus L$，其中 L 是 T_f 的叶节点集合。对于每个 $\tau \in L$，令 π_τ 为从节点 τ 开始的 T 的任意一条无限路径（由于 T 是非阻塞树，这样的路径 π_τ 必然存在）。令 F_∞ 为由 $\bigcup_{\tau \in F} \pi_\tau$ 给出的无限森林。定义 T_∞、$T_f \cup F_\infty$ 和 $Y_\infty = (T_f \setminus S) \cup F_\infty$。显然，条件（$*$）得到满足。□

我们可以很容易地在 coWMSO 中表达：非阻塞树的一个无限子集 T 是一棵树（分别地，是一个森林），并且一棵无限树是有限分支的。特别地，假设集合变量 Z 被解释为一棵无限树 T_∞，则 T_∞ 是有限分支的这一性质可以在 coWMSO中用公式 $\neg\exists x.\, \exists^{\mathsf{S}} X.\, [X \subseteq Z \wedge x \in X \wedge \forall y \in X.\, (y = x \vee \text{子节点}(x,\ y))]$ 表示。因此，由引理 5，我们很容易推得 MSO 和 WMSO 都被 coWMSO 所包含。

此外，无限分支树这一类可以通过公式 $\exists x.\, \exists X^{\mathsf{S}}.\, [x \in X \wedge \forall y \in X.\, (y = x \vee \text{子节点}(x, y))]$ 在 coWMSO 中得到刻画。因此，根据命题 4，可知 coWMSO 一般比 MSO 具有更强的表达能力。然而，在有限分支情形下，由于谓词 fin(X) 可以在 MSO 中定义，我们有 MSO ≡ coWMSO。因此，由于稠密性既可以在 MSO 和coWMSO 中定义，却不能在 WMSO 中定义，我们得到以下结果。

定理 6. MSO $<$ COWMSO 且 WMSO $<$ COWMSO。在有限分支情形下，MSO $\equiv$ COWMSO 且 WMSO $<$ COWMSO。

现在，让我们考虑 MTL 的余弱语义变体。我们首先证明，MTL 和 WMTL 都被coWMTL 所包含。换言之，在有限树上的二阶量化可以在coWMTL 中得到模拟。我们利用给定的非阻塞树的有限子树的以下刻画。

引理 6. 设 T 是一棵非阻塞树，T' 是 T 的一棵子树。则，T' 是有限的，当且仅当满足以下条件：($*$) 存在一个节点 $\tau \in T$ 和一棵无限树 $T_\infty \subseteq T$，使得：

- $\tau \in T_\infty$ 和 T_∞ 是有限分支的；
- 的每条无限路径 π 都会访问 T_∞ 中 T 的某个严格后代 τ；
- $T' = T_\infty \setminus \{\tau' \in T \mid \tau < \tau'\}$。

证明。显然，条件 ($*$) 蕴含 T' 是有限的。反之，假设 T' 是有限的，并令 τ 为 T' 的任意叶节点。由于 T 是非阻塞的，因此存在一条从节点 τ 开始的 T 的无限路径 π_τ。定义 T_∞、$T' \cup \pi_\tau$。容易得出，条件 ($*$) 得到满足。□

根据引理 6，我们可以得出以下结果。

命题 5. MTL $\leq$ COWMTL 和 WMTL $\leq$ COWMTL。

无限分支性质可以通过以下公式在coWMTL 中表达：$\exists x.\, \exists^{\mathsf{T}} X.\, [x \in X \wedge \forall y \in X.\, (y = x \vee \text{子节点}(x, y))]$。因此，根据命题 4 和 5，可得

：一般而言，coWMTL 的表达能力强于 MTL。然而，在有限分支情形下，假设将 X解释为给定树的一棵子树，谓词 fin(X) 可以用 MTL定义。因此，在这种情形下，MTL ≡ coWMTL。因此，由于稠密性既可在MTL 中定义（见第 III-B节），也可在 coWMTL 中定义（见定理 4的证明），但无法在 WMTL 和 WMSO中定义，因此根据命题 2，可得以下结果。

定理 7. MTL $<$ COWMTL、WMTL $<$ COWMTL、MSO $\not\sim$ COWMTL 和 WMSO $\not\sim$ COWMTL。在有限分支情形下，MTL $\equiv$ COWMTL、WMTL $<$COWMTL，且 WMSO$\not\sim$ COWMTL。

额外表达能力结果。根据目前为止确立的结果，要全面了解所讨论逻辑之间的表达能力比较，我们还必须比较 MPL 与 WMTL 和 WMSO。已知在有限分支情形下，CTL* 不被 WMSO 包含。这一结论来自 [22], [23], [25],，其中作者证明公式 E GF p 无法用 AFμ-CALCULUS 表达；还来自 [3], ，其中证明了 AFμ-CALCULUS 等价于 WMSO。因此，由于 CTL* $\leq$ MPL 且 WMTL $\leq$ WMSO，并且自从无限分支性质可以用 WMTL 和 WMSO 表达、但无法用 MPL 表达（命题 4），根据命题 2，可得以下结论。

定理 8。MPL $\not\sim$ WMTL 且 MPL $\not\sim$ WMSO。在有限分支情形下，MPL $\not\leq$ WMTL 且 MPL $\not\sim$WMSO。

在有限分支情形下，WMTL 是否被 MPL 包含，仍是一个开放问题。

IV. 与时序逻辑的联系

上一节的结果表明，MTL 是 MSO 的一个非平凡片段，并且严格包含 MPL。因此，有必要研究它与时序逻辑之间的关系。为此，我们首先确定 *Graded* μ-CALCULUS (Gμ-CALCULUS) [34]及其无交替变体（AFGμ-CALCULUS）这一新的片段；它们的语义分别可以编码到 MTL 和 WMTL 中。据我们所知，这是模态不动点逻辑的首个非平凡示例（即不被其他时序形式体系所包含），其语义不需要集合量化的全部表达能力。随后，我们给出子结构时序逻辑（STL*） [5], [6]到 coWMTL 的翻译，这表明后者足以对具有一阶可定义目标的博弈进行推理，并能够编码若干验证问题，例如反应式综合 [45]和模块检测 [35]。

A. 单步分级 μ-演算

正如 Wolper [53], 所观察到的，有一些简单的 ω-正则性质无法用经典时序逻辑表示，却很容易用 Kozen 的模态逻辑表示

- $\mathrm{tr}_x(\bot) \quad \bot$; - $\mathrm{tr}_x(p) \quad P_p(x)$; - $\mathrm{tr}_x(\neg\varphi) \quad \neg\mathrm{tr}_x(\varphi)$;
- $\mathrm{tr}_x(\top) \quad \top$; - $\mathrm{tr}_x(X) \quad x \in X$; - $\mathrm{tr}_x(\varphi_1 \odot \varphi_2) \triangleq \mathrm{tr}_x(\varphi_1) \odot \mathrm{tr}_x(\varphi_2), \quad \odot \in \{\wedge, \vee\}$;
- $\mathrm{tr}_x(\Diamond_{\geq k}\,\varphi) \quad \exists y_1, \ldots\ldots, y_k.\,(\bigwedge_{i\neq j}(y_i \neq y_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \text{子节点}(x, y_i)) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{k} \mathrm{tr}_{y_i}(\varphi))$;
- $\mathrm{tr}_x(\Box_{<k}\,\varphi) \quad \forall y_1, \ldots\ldots, y_k.\,(\bigwedge_{i\neq j}(y_i \neq y_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \text{子节点}(x, y_i)) \rightarrow (\bigvee_{i=1}^{k} \mathrm{tr}_{y_i}(\varphi))$;
- $\mathrm{tr}_x(\mu X.\,\vartheta) \quad \neg\mathrm{tr}_x(\nu X.\mathrm{pnf}(\neg\vartheta[X/\neg X]))$; - tr_x
$(\nu X.\,\vartheta) \quad \exists^{\mathrm{T}} X.\,x \in X \wedge \forall x \in X.\,\mathrm{tr}_x(\vartheta)$.

表 I：翻译函数 tr_x：$\Theta_{\mathrm{Z},\ \mathrm{O}} \rightarrow$ 将 MTL 从 Gμ-CALCULUS[1S] 翻译为 MTL。

μ-CALCULUS [33]。最简单的例子之一，是 Kripke 树中存在一条路径，使给定的原子命题 p在该路径的所有偶数位置上都成立：$\nu X.(p \wedge \Diamond\Diamond X)$。正如我们在引言中已经观察到的，这个公式由不连通的节点集见证，并且由于位于不动点变量之前的模态算子的双重嵌套，每个见证都取决于路径上前方两步处的见证。这与经典时序逻辑公式形成对比：将其翻译为模态 μ-CALCULUS 时，不需要在不动点变量前多重嵌套模态算子。例如，CTL 公式 E(p U q) 等价于 $\mu X.(q \vee (p \wedge \Diamond X))$，并且单个模态将不动点算子与其变量分隔开来。

基于这些观察，自然可以猜想，避免在不动点变量上对模态进行多重嵌套，就足以写出这样的公式：它们所依赖的见证集合彼此始终连通，而非连通集合则彼此独立。这种“独立性”性质似乎是能够将公式编码为 MTL 的关键，因为 MTL 只能对连通的节点集合进行谓词判断，因此无法描述非连通集合。下文将证明这一猜想：首先引入分级 μ-C演算 [34], 的一步片段；分级μ-C演算 [34], 是带有分级（即计数）模态 [27], 的模态 μ-C演算的一种扩展。随后，我们将展示如何将其语义直接转换为 MTL。

定义 3. Gμ-C演算（Gμ-C演算[1S]）的一步片段，是按照以下上下文相关文法构造的公式集合，其中 Z,O $\subseteq \mathrm{Vr}_2$,$X \in$ Z，且 $p \in$原子命题集：

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{Z,O}} \quad &:= \quad \bot \mid \top \mid p \mid \neg\varphi_{\mathrm{Z,O}} \mid \varphi_{\mathrm{Z,O}} \wedge \varphi_{\mathrm{Z,O}} \mid \varphi_{\mathrm{Z,O}} \vee \varphi_{\mathrm{Z,O}} \\ &\quad\ \mid \Diamond_{\geq k}\,\varphi_{\mathrm{O},\emptyset} \mid \Box_{<k}\,\varphi_{\mathrm{O},\emptyset} \mid X \mid \vartheta_{\emptyset,\emptyset};\\ \vartheta_{\mathrm{Z,O}} : &= \quad \mu X.\,\vartheta_{\mathrm{Z}\cup\{X\},\mathrm{O}\cup\{X\}} \mid \nu X.\,\vartheta_{\mathrm{Z}\cup\{X\},\mathrm{O}\cup\{X\}} \mid \varphi_{\mathrm{Z,O}}.\end{aligned}$$

$\Phi_{\mathrm{Z},\ \mathrm{O}}$（分别为 $\Theta_{\mathrm{Z},\ \mathrm{O}}$）表示由第一条（分别为第二条）规则所描述的公式集合，称为基础公式（分别为不动点公式），其中变量的每次出现都是正的（即处于偶数个否定的作用域内）。来自$\Phi_{\emptyset,\ \emptyset}$ 和$\Theta_{\emptyset,\ \emptyset}$ 的公式称为句子。

称为零步变量和单步变量的两个不动点变量集合 Z 和 O，分别标识 Gμ-CALCULUS[1S] 公式中唯一可以出现的自由变量。具体而言，Z 中的变量可以在任何模态的作用域之外使用，而 O 中的变量必须出现在模态的单层嵌套中。不允许在从相应的不动点算子到达不动点变量之前到达不动点变量。

Gμ-CALCULUS[1S] 句子的示例是 CTL 和 CTL* 状态公式 E(p U q) 及 E GF p 的编码 $\mu X.\,(q \vee (p \wedge \Diamond_{\geq 1} X))$ 和 $\nu X.\,\mu Y.\,(p \wedge \Diamond_{\geq 1} X) \vee (\Diamond_{\geq 1} Y)$。集合 $\Theta_{\{Y\},\ \{Z\}}$中的另一个公式示例是 $\mu X.(X \vee Y) \vee \Diamond_{\geq 2}(X \vee Z \wedge \Box_{<1} p)$。相反，$\Diamond_{\geq 1} Y$ 和 $\Diamond_{\geq 1}\Box_{\geq 1} Z$ 均不属于 $\Theta_{\{Y\},\ \{Z\}}$。在第一种情况下，Y 不是单步变量，因此不允许出现在模态的作用域内。然而，它仍然是一个 Gμ-CALCULUS[1S]公式，因为例如它属于 $\Theta_{\emptyset,\ \{Y\}}$。而第二个公式完全不属于一步片段，因为变量 Z 出现在两个嵌套模态的作用域内。

Gμ-CALCULUS[1S] 的语义完全是标准的（完整定义参见 [34] ）。给定一棵 Kripke 树 $\mathcal{T}$ 和变量集 V，令 Asg$_{\mathcal{T}}$(V) 表示将 V 中每个变量映射到 $\mathcal{T}$的某个节点集的赋值集。对于任意 Gμ-CALCULUS[1S] 公式$\vartheta \in \Theta_{\mathrm{Z},\ \mathrm{O}}$、Kripke 树 $\mathcal{T}$以及自由变量取自 Z $\cup$ O 的赋值 $\chi \in$ Asg$_{\mathcal{T}}$(Z $\cup$ O)，其指称 $[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$ 按照 ϑ的结构递归定义。这里仅列出计数模态和不动点算子的情形，其中 post(w) 按照惯例表示节点$w \in$T 的子节点集：

- $[\![\Diamond_{\geq k}\,\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \triangleq \left\{ w \in \mathrm{T} \;\middle|\; |\mathsf{post}(w) \cap [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}| \geq k \right\}$;
- $[\![\Box_{<k}\,\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \triangleq \left\{ w \in \mathrm{T} \;\middle|\; |\mathsf{post}(w) \setminus [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}| < k \right\}$;
- $[\![\mu X.\,\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \triangleq \bigcap \left\{ \mathrm{W} \subseteq \mathrm{T} \;\middle|\; [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X\mapsto \mathrm{W}]} \subseteq \mathrm{W} \right\}$;
- $[\![\nu X.\,\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \triangleq \bigcup \left\{ \mathrm{W} \subseteq \mathrm{T} \;\middle|\; \mathrm{W} \subseteq [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X\mapsto \mathrm{W}]} \right\}$.

Kripke 树与句子之间的满足关系 $\mathcal{T} \models \varphi$ 成立，当且仅当 $\mathcal{T}$ 的根节点属于 $[\![\varphi]\!]$。

首先请注意，Gμ-C演算[1系统] 能够通过以下句子表达树的稠密性

$$\varphi_{Den} \triangleq \nu X.\,\mu Y.\,(\Diamond_{\geq 2} X) \vee (\Diamond_{\geq 1} Y).$$

事实上，若 $\mathcal{T} \models \varphi_{Den}$ 是属于指称Δ 的 $\mathcal{T}$的根 $[\![\varphi_{Den}]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing}$。根据最大不动点的语义，我们有$[\![\mu Y.(\Diamond_{\geq 2} X) \vee (\Diamond_{\geq 1} Y)]\!]^{\mathcal{T}}_{\{X\mapsto\Delta\}} = \Delta$；这是通过将变量 X 赋值为整个指称 $\Delta \subseteq$ T，对最小不动点子公式 $\mu Y.(\Diamond_{\geq 2} X) \vee (\Diamond_{\geq 1} Y)$进行求值得到的。这个等式意味着，$\Delta$ 中的每个节点 v都满足以下条件之一：(a) v 在 Δ中至少有两个不同的子节点；(b) v 能够到达 Δ中满足性质 (a) 的某个节点。因此，Δ 恰好刻画了这样一个节点集：其中每个节点都在 Δ中有两个不同的严格后代。因此，$\mathcal{T}$具有

稠密性。另一方面，若 $\mathcal{T}$ 具有稠密性，则存在一个节点集 $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{T}$，它对应于 $\mathcal{T}$ 的一个无限二叉树 minor。考虑最小不动点子公式 $\mu Y.(\Diamond_{\geq 2} X) \vee (\Diamond_{\geq 1} Y)$ 的指称 Δ'，$[\![\mu Y.(\Diamond_{\geq 2} X) \vee (\Diamond_{\geq 1} Y)]\!]^{\mathcal{T}}_{\{X \mapsto \mathrm{M}\}}$，其中对最大不动点变量 X 的赋值为 M。根据集合 M 的定义，其中的每个节点也都能到达 M 中至少两个不同的节点。因此，$\mathrm{M} \subseteq \Delta'$，这意味着根据最大不动点的语义，$\mathrm{M} \subseteq [\![\varphi_{Den}]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing}$。此外，$\mathcal{T}$ 的根属于 Δ'，因为它能够到达 M 中的任意节点。因此，$\mathcal{T} \models \varphi_{Den}$，并且我们得到以下结果。

定理 9。稠密性可以在 Gμ-CALCULUS[1S] 中表达。

作为定理 9 的直接推论，结合定理 1 以及 [10], [30] 中关于 WMSO 无法刻画稠密树这一事实的观察，我们得到如下表达能力关系。

推论 4。Gμ-CALCULUS[1S] $\not\leq$ MPL 和 Gμ-CALCULUS[1S] $\not\leq$WMSO。

此时，我们可以开始将 Gμ-CALCULUS[1S] 公式的语义编码为 MTL。为此，我们首先确定 Gμ-CALCULUS[1S] 底层模态基底所具有的一个单步模拟性质。该性质基于赋值集上的一种序关系，称为单步模拟。给定两个赋值 $\chi, \chi' \in \mathrm{Asg}(\mathrm{Z} \cup \mathrm{O})$，若 χ 相对于节点集 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{T}$ 被 χ' 单步模拟，记作 $\chi \sqsubseteq^{\mathrm{Z}, \mathrm{O}}_{\mathrm{W}} \chi'$，则

- $\chi(X) \cap \mathrm{W} \subseteq \chi'(X)$, for all $X \in \mathrm{Z}$, and
- $\chi(X) \cap \mathsf{post}(\mathrm{W}) \subseteq \chi'(X)$, for all $X \in \mathrm{O}$,

其中，post(W)通常表示 $\mathcal{T}$ 中节点的子节点集。基本而言，χ' 为任意零步变量赋予上下文集 W 中至少与 χ 一样多的元素，并为任意单步变量赋予 W 中节点的全部子节点，而 χ 正是为这些节点赋值的。对 $\chi \sqsubseteq^{\mathrm{Z}, \mathrm{O}}_{\mathrm{W}} \chi'$ 的非正式理解是：当 W 上的可见范围被限制为最多向前一步时，χ' 包含了与 χ 一样多的关于 W 的信息。

现在我们可以证明，相对于同一个节点集 W，Gμ-CALCULUS[1S] 基片段的语义关于单步模拟关系是单调的。非正式地说，如果一个赋值 χ 相对于节点集 W 被另一个赋值 χ' 模拟，那么对于任意属于 W 且属于基公式 φ 相对于 χ 的指称的节点，它也属于 φ 相对于 χ'的指称。显然，这一性质由模态算子的嵌套所受的句法限制保证，例如单步公式 $\Diamond_{\geq 1} X$ 和 $\Box_{<3} X$具有这一性质，但非单步公式 $\Diamond_{\geq 1}\Diamond_{\geq 2} X$ 和 $\Box_{<2}\Diamond_{\geq 1} X$不具有这一性质。单步单调性表述如下，并且可以通过对基 Gμ-CALCULUS[1S] 公式的结构进行归纳而轻易证明。

引理 7. 对于任意基于 Gμ-CALCULUS[1S] 公式 $\varphi \in \Phi_{\mathrm{Z},\mathrm{O}}$、Kripke 树 $\mathcal{T}$、节点集 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{T}$ 以及一对赋值 $\chi, \chi' \in \mathrm{Asg}\tau(\mathrm{Z} \cup \mathrm{O})$，满足 $\chi \sqsubseteq^{\mathrm{Z}, \mathrm{O}}_{\mathrm{W}} \chi'$，则有 $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap \mathrm{W} \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}$。

单调性是上述所有 Gμ-CALCULUS[1S]公式的语义的“独立性”这一性质的核心。事实上，我们证明了，相对于公式 ϑ 的赋值 χ，以某个节点 $w \in \Delta$ 为根的指称 Δ 中的每个极大连通分量 Δ_w $[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$（即，以 w 为根且完全包含于 Δ 中的极大子树）也可以仅通过对不动点变量的解释限制到 Δ_w 来计算。本质上，Δ_w 中的一个节点 v 是否属于 Δ，并不取决于Δ_w 之外（即其单步扩展之外）的任何其他节点是否属于 Δ。换言之，指称的不连通部分不会相互影响。

给定节点集 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{T}$ 中以节点 $w \in \mathrm{T}$ 为根的极大连通分量可定义为

$$\mathrm{W}{\downarrow_w} \triangleq \{v \in \mathrm{W} \mid w \leq v \wedge \forall u \in \mathrm{T}.\, (w \leq u < v) \Rightarrow u \in \mathrm{W}\},$$

而赋值集 $\chi \in \mathrm{Asg}\tau(\mathrm{Z} \cup \mathrm{O})$ 在 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{T}$（的一步扩展）上的 (Z, O)-限制定义为

$$(\chi{\restriction_{\mathrm{W}}})(X) \triangleq \begin{cases} \chi(X) \cap \mathrm{W}, & \text{if } X \in \mathrm{Z} \setminus \mathrm{O}; \\ \chi(X) \cap \mathsf{post}(\mathrm{W}), & \text{if } X \in \mathrm{O} \setminus \mathrm{Z}; \\ \chi(X) \cap (\mathrm{W} \cup \mathsf{post}(\mathrm{W})), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

“独立性”性质可形式化表述如下，并可通过对不动点算子的嵌套进行归纳来证明，其中基情形的证明利用了引理 7。

引理 8. 对于每个不动点 Gμ-CALCULUS[1S] 公式 $\vartheta \in \Theta_{\mathrm{Z},\ \mathrm{O}}$、Kripke 树 $\mathcal{T}$、赋值集 $\chi \in \mathrm{Asg}\tau(\mathrm{Z} \cup \mathrm{O})$ 和节点 $w \in \Delta$，$[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$，都有 $\Delta_w, \Delta{\downarrow_w} = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}{\downarrow_w}$，其中 $\chi', \chi{\restriction_{\Delta_w}}$。

表 I 给出了一个翻译函数 $\mathrm{tr} : \mathrm{Vr}_1 \to (\Theta_{\mathrm{Z},\mathrm{O}} \to \text{MTL})$，它将每个 G$\mu$-CALCULUS[1S] 公式转换为一个等价的 MTL 公式。除不动点算子对应的情形外，其余情形都是标准的（例如参见 [31]），此处列出仅为完整起见。真正有趣的是最大不动点公式的情形。这里的思路是利用上文所述的“独立性”性质，将节点 w 属于最大不动点的条件，化简为 w 属于某个同时也是后不动点的子树这一条件。最小不动点公式的翻译结合了最大不动点的翻译，以及众所周知的 μ-CALCULUS 对偶性，该对偶性 $\mu X.\vartheta \equiv \neg\nu X.\neg\vartheta[X/\neg X]$ 将两个不动点算子联系起来，其中 $\vartheta[X/\neg X]$ 表示通过将公式 ϑ 中变量 X 的每次出现统一替换为其否定 $\neg X$ 而得到的公式。注意，由于 Gμ-CALCULUS[1S]，中不允许不动点算子之间出现否定，我们通过辅助函数 pnf 将公式 $\neg\vartheta[X/\neg X]$ 转换为一个等价的正范式公式：Gμ-CALCULUS $\to$ Gμ-CALCULUS。这样可确保，如果 ϑ 是一个 Gμ-CALCULUS[1S] 公式，那么 pnf($\neg\vartheta[X/\neg X]$) 也同样是一个 Gμ-CALCULUS[1S] 公式。

此时，可以通过结构归纳得到以下结果，方法是证明对于每个公式 $\vartheta \in \Theta_{\mathrm{Z},\ \mathrm{O}}$,

- $\mathrm{tr}_x(\nu X.\vartheta) \triangleq \begin{cases} \neg \mathrm{tr}_x(\mu X.\, pnf(\neg(\vartheta[X/\neg X][Y/\neg Y]))), & \text{if } \vartheta \in \Phi^{\mathbf{AF}}_{\mathrm{Z}',\mathrm{O}'}; \\ \mathrm{tr}_x(\vartheta[X/Y]), & \text{otherwise;} \end{cases}$
- $\mathrm{tr}_x(\mu X.\vartheta) \triangleq \begin{cases} \exists^{\mathrm{T}} X.\, x \in X \wedge \forall x \in X.\, \exists^{\mathrm{T}} Y.\, \mathtt{mst}(Y,X,x) \wedge \mathrm{tr}_x(\varphi[X/Y]\!\searrow_Y), & \text{if } \vartheta \in \Phi^{\mathbf{AF}}_{\mathrm{Z}',\mathrm{O}'}; \\ \mathrm{tr}_x(\vartheta[X/Y]), & \text{otherwise;} \end{cases}$

其中 Z′、Z $\cup \{Y, X\}$、O′、O $\cup \{Y, X\}$，且 mst(Y, X, x) $\forall y.(y \in Y) \leftrightarrow (x \le y \wedge \forall z.(x \le z \le y) \rightarrow z \in X)$，其中某个新的不动点变量为 $Y \in \mathrm{Vr}_2 \setminus \mathrm{free}(\vartheta)$，且这两个二阶存在量词的取值范围是有限树。

表 II：在有限分支树上，从 AFGμ-CALCULUS[1S 到 WMTL 的翻译函数 tr_x: $\Theta^{\mathbf{AF}}_{\mathrm{Z},\mathrm{O}} \to$ WMTL。

Kripke 树 $\mathcal{T}$、赋值集 $\chi \in \mathrm{Asg}_\tau(\mathrm{Z} \cup \mathrm{O})$ 和节点 $w \in \mathrm{T}$，满足 $w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$ 当且仅当 $\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \chi \models \mathrm{tr}_x(\vartheta)$。

定理 10. Gμ-CALCULUS[1S] $\le$MTL。

B. 无交替的一步分级 μ-CALCULUS

无交替模态 μ-CALCULUS（AFμ-CALCULUS），即不允许不动点算子交替的 μ-CALCULUS 片段，是模态 μ-CALCULUS 中表达能力较强、却容易得多的一个片段；对于有限分支树，该片段可以编码到 WMSO 中 [3], [26], [14], [15]。本文分析 Gμ-CALCULUS[1S]（AFGμ-CALCULUS[1S]）的无交替片段，并证明其语义可以在同一类树上编码到 WMTL 中。值得注意的是，已知 AFμ-CALCULUS 等价于 WMSO。因此，若从 AFGμ-CALCULUS[1S] 中去掉无交替约束，就会立即超出 WMSO 的范围，因而也超出 WMTL 的范围。我们还将 AFGμ-CALCULUS[1S] 的表达能力与 WMPL 以及 CTL 的路径上分级扩展进行比较，表明这一片段本身就是一种有趣的逻辑。

令 $\Theta^{\mathbf{AF}}_{\mathrm{Z}, \mathrm{O}}$ 和 $\Phi^{\mathbf{AF}}_{\mathrm{Z}, \mathrm{O}}$ 分别表示 $\Theta_{\mathrm{Z}, \mathrm{O}}$ 和 $\Phi_{\mathrm{Z}, \mathrm{O}}$中包含所有且仅包含无交替公式的子集。

显然，与 CTL 公式 AF a等价的 AFGμ-C演算[1S]句子 $\mu X.\, a \vee (\Box_{<1} X) \in \Theta^{\mathbf{AF}}_{\emptyset, \emptyset}$ 编码了 a-接受性质。

定理 11. a-接受性质可用 AFGμ-C演算[1S]表达。

由定理11 和 3可立即推出以下结果。

推论 5. AFGμ-CALCULUS[1S] $\not\le$WMPL。

众所周知，CTL 被严格包含于AFμ-CALCULUS [22], [18], ，这得益于时序算子 U 和 R 的一步展开性质。因此，显然，CTL $<$ AFGμ-CALCULUS[1S] 同样成立。然而，我们可以证明一个更强的性质。在 [7], [8], [9], 中，有人提出了不同于上一节所研究的 CTL 和 CTL* 的计数变体，称为分级计算树逻辑（GCTL）和分级计算树逻辑*（GCTL*）。在这些变体中，经典路径量词 E 和 A 被其分级版本 $\mathrm{E}^{\ge k}$和 $\mathrm{A}^{<k}$所取代。非正式地说，它们分别可以理解为“至少存在k 条路径”和“除少于 k 条路径之外的所有路径”。现在， [9] 的定理 5.4 表明，可以通过经典一步展开性质的推广，将 GCTL 编码为 Gμ-CALCULUS 。不过，仔细检查该证明可以发现，该翻译仅使用单个模态算子作用范围内的不动点变量。因此，可以得到以下结论。

定理 12. GCTL $\le$ AFGμ-演算[1S]。

为了证明在有限分支树上，AFGμ-CALCULUS[1S] $\le$ WMTL，我们首先需要介绍一些记号，并证明一些即使对于完整的 Gμ-CALCULUS 也成立的辅助性质。

给定一个 Gμ-CALCULUS 公式 φ 和一个变量 $X \in \mathrm{Vr}_2$,，我们用 $\varphi\!\searrow_X$ 和 $\varphi\!\nearrow_X$ 表示分别通过将 φ 中不在模态算子作用域内的 X 的每个自由出现替换为 $\bot$ 和 $\top$ 而得到的公式，并将其称为时刻零抑制。例如，$(\mu Y.(p \vee X) \wedge \Diamond(X \vee Y))\!\searrow_X = \mu Y.(p \vee \bot) \wedge \Diamond_{\ge 1}(X \vee Y)$ 以及 $(X \wedge \mu X.(p \vee X) \wedge \Box_{<2} X)\!\nearrow_X = \top \wedge \mu X.(p \vee X) \wedge \Box_{<2} X$。为节省篇幅，这些句法变换的形式化定义见附录II.E。直观地说，这两种时刻零抑制确保节点是否属于所得公式的指称，不取决于指定变量在“时刻零”的解释。

命题 6. 对于每个 Gμ-CALCULUS 公式 φ、变量$X \in$ 自由(φ)、Kripke 树 $\mathcal{T} =$ (T,Lab)、节点集 W $\subseteq$T、节点 $w \in$ T，以及赋值 $\chi \in$ 赋值集τ(自由变量(φ))，以下结论成立：

a) $[\![\varphi\!\searrow_X]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \subseteq [\![\varphi\!\nearrow_X]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$;
b) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = [\![\varphi\!\searrow_X \vee (X \wedge \varphi\!\nearrow_X)]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$;
c) $w \in [\![\varphi\!\searrow_X]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X \mapsto \mathrm{W}]}$ iff $w \in [\![\varphi\!\searrow_X]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X \mapsto \mathrm{W} \setminus \{w\}]}$;
d) $w \in [\![\varphi\!\searrow_X]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X \mapsto \mathrm{W}]}$ iff $w \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X \mapsto \mathrm{W} \setminus \{w\}]}$.

上述命题的 a-c 项可通过对公式进行结构归纳轻易得出 φ。特别地，项a用于证明项b （参见 [4, 引理 9.1。1] 以了解证明思路），而项d 则可直接由项b 和c推出。值得注意的是，项b是布尔函数的香农引理的一种推广。此外，项c 形式化地表明，无论节点是否属于变量 X 的解释，节点都属于一个抑制了该变量的公式的指称。

本质上，公式 ϑ 的零时刻抑制在下文中用于确保：节点出现在 ϑ 的指称中（通常是某个不动点算子的参数），完全是由其后代节点的存在所决定的，而将该节点纳入赋值确实是冗余的。这对于证明下一个结果至关重要；在该结果中，我们通过以下方式刻画无交替最小不动点公式的语义

$\bullet\ \mathrm{tr}_{X,x}(\varphi_1 \mathbb{U}_\phi \varphi_2)$ $\exists^{\mathrm{T}} X'.(\mathrm{nb}(X') \wedge X' \sqsubset_\phi^X X) \wedge (\mathrm{tr}_{X',x}(\varphi_2) \wedge \forall^{\mathrm{T}} X''.(\mathrm{nb}(X'') \wedge X' \sqsubset_\phi^X X'' \sqsubset_\phi^X X) \to \mathrm{tr}_{X'',x}(\varphi_1))$; $\bullet\ \mathrm{tr}_{X,x}(\varphi_1 \mathbb{R}_\phi \varphi_2)$ $\forall^{\mathrm{T}} X'.(\mathrm{nb}(X') \wedge X' \sqsubset_\phi^X X) \to (\mathrm{tr}_{X',x}(\varphi_2) \vee \exists^{\mathrm{T}} X''.(\mathrm{nb}(X'') \wedge X' \sqsubset_\phi^X X'' \sqsubset_\phi^X X) \wedge \mathrm{tr}_{X'',x}(\varphi_1))$; $\bullet\ \mathrm{tr}_{X,x}(\varphi_1 \mathbb{S}_\phi \varphi_2)$ $\exists^{\mathrm{T}} X'.(\mathrm{nb}(X') \wedge X \sqsubset_\phi^X X') \wedge (\mathrm{tr}_{X',x}(\varphi_2) \wedge \forall^{\mathrm{T}} X''.(\mathrm{nb}(X'') \wedge X \sqsubset_\phi^X X'' \sqsubset_\phi^X X') \to \mathrm{tr}_{X'',x}(\varphi_1))$; $\bullet\ \mathrm{tr}_{X,x}(\varphi_1 \mathbb{B}_\phi \varphi_2)$ $\forall^{\mathrm{T}} X'.(\mathrm{nb}(X') \wedge X \sqsubset_\phi^X X') \to (\mathrm{tr}_{X',x}(\varphi_2) \vee \exists^{\mathrm{T}} X''.(\mathrm{nb}(X'') \wedge X \sqsubset_\phi^X X'' \sqsubset_\phi^X X') \wedge \mathrm{tr}_{X'',x}(\varphi_1))$; 其中 $\mathrm{nb}(X)$ $\forall x \in X.\exists y \in X.\mathrm{child}(x,y)$，且 $Y \sqsubset_\phi^X Z$，$(Y \subset Z) \wedge (\forall y \in Y.\forall z \in Z.(\mathrm{tr}_{X,y}(\phi) \wedge \mathrm{child}(y,z)) \to z \in Y)$。

表 III：从 STL* 到 MTL 的翻译函数 $\mathrm{tr}_{X,x}$: STL* $\to$ MTL。

有限树。具体而言，得益于克莱尼定理以及底层树具有有限分支这一事实，在抑制不动点变量后，用于证明某个节点属于这些公式的指称的见证总是有限的。此外，条目 d 命题 6 保证这样的见证确实对应一个最小不动点（而非任意不动点），因为某个节点是否属于该指称，并不取决于它是否属于不动点变量的解释。

引理 9. 对于每个 Gμ-CALCULUS[1S] 公式 $\vartheta = \mu X_1 \ldots \mu X_k.\varphi \in \Theta_{\mathrm{Z,O}}$，其中 $\varphi \in \Phi_{\mathrm{Z} \cup \{X_1,\ldots,X_k\},\mathrm{O} \cup \{X_1,\ldots,X_k\}}$，给定有限分支克里普克树 $\mathcal{T} = (\mathrm{T}, \mathrm{Lab})$、节点 $w \in \mathrm{T}$ 以及赋值 $\chi \in$ 赋值集$\tau(\mathrm{Z} \cup \mathrm{O})$，以下性质彼此等价：

- $w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}$；
- 存在一棵有限树 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{T}$，其中 $w \in \mathrm{W}$ 满足 $v \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]\!\downarrow_Y]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{W}\downarrow_v]}$，对所有 $v \in \mathrm{W}$ 均成立。

表 II 列出了两种情形：在这两种情形下，从 AFGμ-CALCULUS[1S]到 WMTL 的翻译函数 tr :$\mathrm{Vr}_1 \to (\Theta^{\mathrm{AF}}_{\mathrm{Z}},_{\mathrm{O}} \to$ WMTL) 不同于一般情形下的翻译函数。与原始函数不同，在这种情形下，最大不动点公式的翻译是通过对偶性从最小不动点公式的翻译推导出来的。随后，只需对上述引理中陈述的性质进行编码，即可得到后者的翻译；其中我们使用辅助公式 $\mathrm{mst}(Y,X,x)$ 来标识见证 X 中完全包含、且以给定节点 x 为根的极大子树Y。另请注意，所有最小不动点算子都被合并并作为一个整体进行转换，这得益于以下经典等价关系（参见 [4, 命题 1.3.2]）：$\mu X_1 \ldots \mu X_k.\varphi \equiv \mu Y.\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]$。下文给出的表达能力结果，是通过采用证明定理 10 时所用的相同思路得到的。

定理 13. 有限分支树上的 AFGμ-CALCULUS[1S] $\leq$ WMTL。

C. 子结构时序逻辑

在 [5], [6], 对 CTL* 的一种扩展中，提出了称为子结构时序逻辑（STL*）的逻辑，其显著特征是能够对底层 Kripke 模型的非阻塞子结构进行隐式谓词化。当这类模型是树时，这等价于对子树进行推理。该逻辑通过添加四个（未来和过去的）类时序算子 $\mathbb{U}$（直到算子）、$\mathbb{R}$（释放算子）、$\mathbb{S}$（自从）和 $\mathbb{B}$（之前）而得到，这些算子称为半格算子，其解释是相对于由子树上的偏序所诱导的并半格给出的。

为节省篇幅，这里我们仅回顾直到公式 $\varphi_1 \mathbb{U}_\phi \varphi_2$的语义。该语义针对一个固定的 Kripke 树模型 $\mathcal{T}^*$ 及其一个非阻塞子树$\mathcal{T}$给出（完整定义见附录 III）。满足关系 $\mathcal{T} \models^{\mathcal{T}^*} \varphi_1 \mathbb{U}_\phi \varphi_2$ 成立，当且仅当存在一个非阻塞的、保留 ϕ的真子树 $\mathcal{T}'$，它是 $\mathcal{T}$的子树，并且满足$\mathcal{T}' \models^{\mathcal{T}^*} \varphi_2$；此外，对于所有严格位于$\mathcal{T}'$ 与 $\mathcal{T}$之间的非阻塞、保留 ϕ的树 $\mathcal{T}''$，均满足$\mathcal{T}'' \models^{\mathcal{T}^*} \varphi_1$。这里，保留 ϕ是指：满足公式 ϕ 的节点 $\mathcal{T}'$ 在 $\mathcal{T}$中的所有子节点，也都保留在 $\mathcal{T}'$ 中。

表 III 给出了从 STL* 到 MTL 的翻译函数 tr: $\mathrm{Vr}_2 \times \mathrm{Vr}_1 \to$(STL* $\to$MTL)，该函数对四个半格算子的语义进行编码。公式 $\mathrm{nb}(X)$ 对树 X 的非阻塞性质进行编码，而$Y \sqsubset_\phi^X Z$ 则对保持 ϕ 的子树关系进行编码。逻辑其余部分（对应于 CTL*）的编码与 [29] 中提出的编码到 MPL 的方法相同，因此不在此处报告。STL* 与 MPL 之间的比较在 [6] 中仍未解决。再次感谢定理 1 以及 STL* 能够表达稠密性 [6], 这一事实，下面的定理回答了这个问题。

定理 14. STL* $\leq$MTL 和 STL* $\not\leq$MPL。

[6] 第 5 节分析了若干涉及博弈推理的问题。该节指出，STL* 可以编码 LTL 反应式综合 [45], CTL* 模块检验 [35], 以及具有 LTL（因此可由一阶逻辑定义）目标的轮流制／并发零和／非零和博弈的求解。得益于上述定理，MTL 也具备同样的能力。

V. 讨论

我们介绍并研究了 MTL，这是一种定义在非阻塞树上的 MSO 变体，其中二阶变量的论域被限制为原始结构的子树。我们还将 MTL 及其有限变体（WMTL）和余有限变体（coWMTL）与 MSO 和 MPL 的相应变体的表达能力进行了广泛比较。不同于能够对节点的非连通集合进行量化的 MSO，MTL 与 MPL 类似，旨在仅对节点的连通集合进行谓词描述。因此，MSO（分别为 WMSO、coWMSO）严格强于 MTL（分别为 WMTL、coWMTL）的结果或许并不令人意外，也在一定程度上可以预料；而 MTL 与 MPL 之间也存在同样关系，则远没有那么明显。正如我们所展示的，这本质上源于 MTL 能够表达树的有意义性质，例如稠密性所规定的：底层树的路径集合是不可数的，或者等价地说，该树包含一个作为图 minor 的完全二叉树；而这些性质仅通过路径量化无法捕获。

这些结果要求我们更深入地研究 MTL 与时序逻辑之间的关系。在这里，我们通过证明 STL*（一种能够以相当一般的方式捕获策略推理和博弈的、具有表达能力的时序逻辑）可以轻松嵌入 MTL，初步开展了这项分析。这表明，对于具有 MTL 而言，处理具有 FO可定义目标的博弈确实已经足够。然而，通过识别 Gradedμ-Calculus 的一步片段，我们得到了一个更深刻的结果：该片段限制自由变量只能出现在至多一个模态算子的作用域内。这一限制反过来基本上阻止了该语言的公式对非连通集合进行谓词描述。事实上，我们证明了该片段包含于 MTL 之中，但无法由 MPL捕获，因为它仍然能够表达稠密性。就其本身而言，这项研究也可以被视为一项有价值的贡献，因为 Modal μ-Calculus虽然通常被认为是一种不友好的汇编式规范语言，但从实用角度来看却非常重要。事实上，符号模型检验工具确实存在，它们能够计算模型状态集合上不动点表达式的指称以进行验证，参见例如 [18]。

除了 WMTL 是否被有限分支树上的 MPL 所包含这一尚未解决的问题外，最值得进一步探讨的问题是 Gμ-C演算的两个一步片段（或其略作推广的版本）相对于 MTL 和 WMTL 的完备性。处理任意分支树上的无交替片段时尤其需要谨慎；在这种情况下，MTL 的对应片段可能并非 WMTL，而是 MTL 的某种诺特变体 [15] 。

参考文献

[1] R. Alur、T. Henzinger 和 O. Kupferman，“交替时序逻辑”，载于 FOCS’97。IEEECS，1997 年，第 100–109 页。[2] ——，“交替时序逻辑”，《ACM学报》，第 49 卷，第 5 期，第 672–713 页，2002 年。[3] A. Arnold 和 D. Niwinski，“弱单子逻辑可定义树集的不动点刻画”，载于《树自动机与语言》。North-Holland，1992 年，第 159–188 页。[4] ——，《 μ-演算基础》，丛书《逻辑与数学基础研究》。North-Holland，2001 年。[5] M. Benerecetti、F. Mogavero 和 A. Murano，“子结构时序逻辑”，载于 LICS’13。IEEECS，2013 年，第 368–377 页。[6] ——，“关于子结构与博弈的推理”，《计算逻辑学会汇刊》，第 16 卷，第 3 期，第 25:1–46 页，2015 年。[7] A. Bianco、F. Mogavero 和 A. Murano，“带计数计算树逻辑”，载于 LICS’09。IEEECS，2009 年，第 342–351 页。[8] ——，“带二进制编码的带计数计算树逻辑”，载于 CSL’10，丛书 LNCS 6247。Springer，2010 年，第 125–139 页。[9] ——，“带计数计算树逻辑”，《计算逻辑学会汇刊》，第 13 卷，第 3 期，第 25:1–53 页，2012 年。[10] M. Boja´nczyk、T. Idziaszek 和 M. Skrzypczak，“薄树的正则语言”，载于 STACS’13，丛书 LIPIcs 20。莱布尼茨信息学中心，2013 年，第 562–573 页。[11] J. Büchi，“弱二阶算术与有限自动机”，《MLQ》，第 6 卷，第 1–6 期，第 66–92 页，1960 年。[12] ——，“关于受限二阶算术中的判定方法”，载于 ICLMPS’62。斯坦福大学出版社，1962 年，第 1–11 页。[13] ——，“关于受限二阶算术中的判定方法”，载于《逻辑与数学基础研究》。Elsevier，1966 年，第 44 卷，第 1–11 页。[14] F. Carreiro、A. Facchini、Y. Venema 和 F. Zanasi，“弱单子二阶逻辑：互模拟意义下的自动机与表达能力”，载于 CSL’14 & LICS’14。ACM，2014 年，第 27:1–27 页。[15] ——，《弱者的力量》，TOCL，第 21 卷，第 2 期，第 47 页，2020 年，第 15–21 页。[16] K. Chatterjee、T. Henzinger 和 N. Piterman，《策略逻辑》，载于 CONCUR’07，LNCS 4703。Springer，2007 年，第 59–73 页。[17] ——，《策略逻辑》，IC，第 208 卷，第 6 期，第 677–693 页，2010 年。[18] E. Clarke、O. Grumberg 和 D. Peled，《模型检测》。麻省理工学院出版社，2002 年。[19] B. Courcelle，《图的一元二阶逻辑 II：有界宽度的无限图》，数学结构理论，第 21 卷，第 4 期，第 187–221 页，1989 年。[20] ——，《图的一元二阶逻辑 I：有限图的可识别集合》，IC，第 85 卷，第 1 期，第 12–75 页，1990 年。[21] ——，《图的一元二阶逻辑 III：树分解、图 minor 与复杂性问题》，RAIROTIA，第 26 卷，第 3 期，第 257–286 页，1992 年。[22] E. Emerson，《模型检测与 μ演算》，载于 DCFM’96，DIMACS’31。AMS，1996 年，第 185–214 页。[23] E. Emerson 和 E. Clarke，《使用不动点刻画并行程序的正确性性质》，载于 ICALP’80，LNCS 85。Springer，1980 年，第 169–181 页。[24] E. Emerson 和 J. Halpern，《“有时”与“从不不”再探：关于分支时间与线性时间》，ACM学报，第 33 卷，第 1 期，第 178–186 页，1986 年。[25] E. Emerson 和 C.-L. Lei，《命题μ演算片段中的高效模型检测》，载于 LICS’86。IEEECS，1986 年，第 267–278 页。[26] A. Facchini、Y. Venema 和 F. Zanasi，《关于模态 μ演算无交替片段的刻画定理》，载于 LICS’13。IEEECS，2013 年，第 478–487 页。[27] K. Fine，《在如此多的可能世界中》，Notre Dame形式逻辑杂志，第 13 卷，第 516–520 页，1972 年。[28] Y. Gurevich 和 S. Shelah，《分支时间逻辑的判定问题》，符号逻辑学报，第 50 卷，第 3 期，第 668–681 页，1985 年。[29] T. Hafer 和 W. Thomas，《计算树逻辑 CTL* 与二叉树的一元理论中的路径量词》，载于 ICALP’87，LNCS 267。Springer，1987 年，第 269–279 页。[30] T. Idziaszek、M. Skrzypczak 和 M. Boja´nczyk，《薄树的正则语言》，理论计算机科学，第 58 卷，第 4 期，第 614–663 页，2016 年。[31] D. Janin 和 G. Lenzi，《任意树上的一元二阶逻辑与弱一元二阶逻辑之间的关系及其在 μ演算中的应用》，基础信息学，第 61 卷，第 3–4 期，第 247–265 页，2004 年。[32] D. Janin 和 I. Walukiewicz，《相对于一元二阶逻辑的命题 μ演算的表达完备性》，载于 CONCUR’96，LNCS 1119。Springer，1996 年，第 263–277 页。[33] D. Kozen，《命题μ演算的结果》，理论计算机科学，第 27 卷，第 3 期，第 333–354 页，1983 年。[34] O. Kupferman、U. Sattler 和 M. Vardi，《分级μ演算的复杂性》，载于 CADE’02，LNCS 2392。Springer，2002 年，第 423–437 页。[35] O. Kupferman、M. Vardi 和 P. Wolper，《模块检测》，IC，第 164 卷，第 2 期，第 322–344 页，2001 年。[36] F. Mogavero、A. Murano、G. Perelli 和 M. Vardi，《策略推理：关于模型检测问题》，计算逻辑学会汇刊，第 15 卷，第 4 期，第 34:1–42 页，2014 年。[37] ——，《策略推理：关于可满足性问题》，逻辑与计算机科学杂志，第 13 卷，第 1 期：9，第 1–37 页，2017 年。[38] F. Mogavero、A. Murano 和 M. Vardi，《策略推理》，载于 FSTTCS’10，逻辑学与计算机科学论文集 8。莱布尼茨信息学中心，2010 年，第 133–144 页。[39] F. Moller 和 A. Rabinovich，《CTL* 的表达能力》，载于 LICS’99。IEEECS，1999 年，第 360–368 页。[40] ——，《CTL* 中的计数：一元路径逻辑的表达能力》，IC，第 184 卷，第 1 期，第 147–159 页，2003 年。[41] D. Muller、A. Saoudi 和 P. Schupp，《交替自动机、树的弱一元理论及其复杂性》，载于 ICALP’86，LNCS 226。Springer，1984 年，第 275–283 页。[42] ——，《交替自动机、树的弱一元理论及其复杂性》，理论计算机科学，第 97 卷，第 2 期，第 233–244 页，1992 年。[43] D. Muller 和 P. Schupp，《下推自动机、图、端、二阶逻辑与可达性问题》，载于 STOC’81。ACM，1981 年，第 46–54 页。[44] ——，《端理论、下推自动机与二阶逻辑》，理论计算机科学，第 37 卷，第 51–75 页，1985 年。[45] A. Pnueli 和 R. Rosner，《反应式模块的综合》，载于 POPL’89。ACM，1989 年，第 179–190 页。

[46] M. Rabin，《二阶理论的可判定性与无限树上的自动机》，TAMS，第 141 卷，第 1–35 页，1969 年。[47] ——，《弱可定义关系与特殊自动机》，载于《逻辑与数学基础研究》。Elsevier，1970 年，第 59 卷，第 1–23 页。[48] M. Rabin 和 D. Scott，《有限自动机及其判定问题》，IBMJRD，第 3 卷，第 115–125 页，1959 年。[49] B. ten Cate 和 A. Facchini，《无限树上的 EF 与传递图上的模态逻辑的刻画》，载于 MFCS’11，LNCS 6907。Springer，2011 年，第 290–302 页。[50] W. Thomas，《无限树上的链逻辑、路径逻辑与一阶逻辑》，载于 LICS’87。IEEECS，1987 年，第 245–256 页。[51] I. Walukiewicz，《树状结构上的一元二阶逻辑》，载于 STACS’96，LNCS 1046。Springer，1996 年，第 401–413 页。[52] ——，《下推过程：博弈与模型检测》，IC，第 164 卷，第 2 期，第 234–263 页，2001 年。[53] P. Wolper，《时序逻辑可以具有更强的表达能力》，IC，第 56 卷，第 1–2 期，第 72–99 页，1983 年。

附录

I. 第 III 节缺失的证明III

A. 完全量化下的表达能力

本节给出命题1 和引理 2的证明。

命题 1. 在 2^{AP}-标记的无限链上，有：

- MTL $\equiv$WMTL $\equiv$ COWMTL $\equiv$ FO $<$ MSO，且
- 通过 *[13]*, MSO $\equiv$WMSO $\equiv$ COWMSO。

证明。已知，对于由 2^{AP} 标记的无限链类，一阶逻辑与 MSO 等价，MSO 与 WMSO 也等价，且 MSO 与 余弱WMSO 等价 [13]。由于逻辑 MTL、WMTL 和 余弱WMTL 都包含一阶逻辑，因此只需证明，对于带有无限 2^{AP} 标记的链，对每个 $\mathrm{L} \in \{$ MTL、WMTL、余弱WMTL$\}$，都有 $\mathrm{L} \leq$ FO。我们聚焦于逻辑 MTL。MTL 的弱变体和余弱变体的证明类似。我们利用这样一个事实：链的子树是一条路径。设 φ 是一个 MTL 句子，X_1、.....、X_n 是其中出现的二阶变量。不失一般性，我们假设 φ 中不同的二阶量词出现位置都对应于不同的二阶变量。对于每个 $i \in [1,n]$，令 x_i 和 x_i' 为新的变量。对于 φ 的每个子公式 ψ，我们定义一个一阶公式 $f(\psi, t_1, \ldots, t_n)$，其中 $t_i \in \{$fin、inf$\}$ 是标志。直观地说，$t_i =$inf 表示在 φ 的二阶量词 $\exists^{\mathrm{T}} X_i$ 中，选择了给定链的一棵无限子树。映射 f 对布尔联结词、一阶原子公式和一阶量词是同态的；对于其他 MTL 构造，其定义如下：

- $f(z \in X_i, t_1, \ldots, t_n)$ $\begin{cases} x_i \leq z & \text{若 } t_i = \text{无穷多次} \\ x_i \leq z \wedge z \leq x_i' & \text{否则} \end{cases}$
- $f(\exists^{\mathrm{T}} X_i\, \psi, t_1, \ldots, t_n)$ $\exists x_i.\, f($ ψ t_1 $\ldots$ t_{i-1} t_{i+1} $\ldots$ t_n $\vee$,,,, 无穷多次,,)((,,,有限 $t_{i+1}, \ldots, t_n)$ $\exists x_i\, \exists x_i'.\ x_i \leq x_i' \wedge f$ ψ t_1 $\ldots$ t_{i-1}

。

所需的一阶逻辑句子由 $f(\varphi$, 有限 $\ldots$, 有限$)$ 给出。该构造的正确性很容易证明。 □

现在，我们给出引理 2 的证明。设 T 是一个非阻塞树，π 是 T的一条路径，且 $0 \leq i \leq |\pi|$。对于 CCTL* 路径公式 ψ，记号$T, \pi, i \models \psi$表示 $\mathcal{T}, \pi, i \models \psi$，其中 $\mathcal{T} = (T, \mathrm{Lab}_\emptyset)$ 是满足对所有 $\tau \in T$均有 $\mathrm{Lab}_\emptyset(\tau) = \emptyset$ 的 Kripke 树。对于 T-节点 τ和 CCTL* 状态公式 φ，记号 $T, \tau \models \varphi$的含义类似。

引理 2. 设 φ 是一个 CCTL* 状态公式。则，对于所有满足 $\min(m,n) \geq |\varphi|$ 的 m、$n > 1$，以及所有 $T, T' \in \mathrm{D}_n \cup \mathrm{D}_m \cup \mathrm{ND}_n \cup \mathrm{ND}_m$，以下结论成立：$T \models \varphi \Leftrightarrow T' \models \varphi$。

证明. 我们假设 $T \in \mathrm{D}_n$ 且 $T' \in \mathrm{ND}_m$。其他情形类似或更简单。证明通过对 $|\varphi|$ 进行归纳给出。对于基情形，$|\varphi| = 1$。因此，φ 是一个原子命题，结论显然成立（回顾一下，我们考虑的是无标记树）。现在，假设 $|\varphi| > 1$。因此，φ 的根算子要么是布尔联结词，要么是计数算子，要么是路径量词。布尔联结词的情形直接由归纳假设得出。现在，我们考虑另外两种情形。

情形 $\varphi = \mathrm{D}^k\theta$，其中某个状态公式为 θ：假设 $T \models \mathrm{D}^k\theta$。我们需要证明 $T' \models \mathrm{D}^k\theta$。若 $k = 0$，结论显然成立。现在，令 $k > 0$。由于 $T \in \mathrm{D}_n$ 且 $T \models \mathrm{D}^k\theta$，根据类 D_n的构造，存在 k个互不相同的子节点 τ_1、.....、τ_k，它们都是以 T为根的节点的子节点，并且对每个 $\ell \in [1,k]$:

- 以节点 τ_ℓ 为根的 T的子树 T_ℓ 要么属于某个 $i \in [1, n-1]$对应的类 ND_i，要么属于类 D_n，
- $T_\ell \models \theta$。

回顾一下，$T' \in \mathrm{ND}_m$。由于 $\min(m,n) \geq |\varphi|$且 $\varphi = \mathrm{D}^k\theta$，因此 $m > k$成立。我们选取 k个互不相同的子节点 τ_1'、.....、τ_k'，它们都是以 T'为根的节点的子节点，使得对于以节点 τ_ℓ'为根的 T'的子树 T_ℓ'，有 $T_\ell' \models \theta$。因此结论得证。假设我们已经为 $\ell \in [1,k]$选取了子节点 τ_1'、.....、$\tau_{\ell-1}'$。我们按如下方式选择 τ_ℓ'，其中 T_ℓ'是对应的有根子树：

- 情形 $T_\ell \in \mathrm{D}_n$：自从 $m > 1$，根据构造，T'-根节点有 m 个不同的子节点，它们都是 ND_{m-1}-节点。由于是 $k \leq m$，我们可以将 τ_ℓ' 设为其中一个尚未被选中的节点。因此，由于是 $m - 1 \geq |\theta|$，根据归纳假设，$T_\ell' \models \theta$。
- 情形 $T_\ell \in \mathrm{ND}_i$，其中 $i \in [1, n-1]$和 $i < m$：根据构造，T'-根节点有 m个不同的子节点，它们都是 ND_i-节点。由于是 $k \leq m$，我们可以将 τ_ℓ' 设为其中一个尚未被选中的节点。由于类 ND_i只包含同构树，我们得到 $T_\ell' \models \theta$。
- 情形 $T_\ell \in \mathrm{ND}_i$，其中 $i \in [m, n-1]$：自从 $m > 1$，根据构造，T'-根节点有 m个不同的子节点，它们都是 ND_{m-1}-节点。由于是 $k \leq m$ 和 $i \geq m$，我们按照第一种情形进行。

蕴含式 $T' \models \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ 类似，具体细节在此略去。

对于某个路径公式 ψ，设 $\varphi = \mathrm{E}\psi$：假设 $T \models \mathrm{E}\psi$。我们需要证明 $T' \models \mathrm{E}\psi$。根据假设，存在一条从根节点开始的$\pi$ T路径，使得 T、π、$0 \models \psi$。我们假设 π是无限的（另一种情况类似）。注意，自从

T属于 D_n，根据构造，对于每个 $i \geq 0$， $\pi(i)$ 要么是 D_n-节点，要么是某个 $i \in [1, n-1]$的 ND_i-节点。我们证明存在一条从 T'-根节点开始的 π' T' 无限路径，使得对于所有 $\ell \geq 0$，以下不变性成立：

- 要么 $\pi(\ell)$ 是 D_n-节点，而 $\pi'(\ell)$ 是 ND_m-节点；
- 要么对于某个 $i \in [1, m-1]$， $\pi(\ell)$ 和 $\pi'(\ell)$ 都是 ND_i-节点，其中 $m \leq n$；
- 要么对于某个 $i \in [m, n-1]$， $\pi(\ell)$ 是 ND_i 节点，且 $\pi'(\ell)$ 是 ND_m 节点。

由于我们考虑的是无标记树，且类 ND_i 中的所有树都同构，因此根据不变性和归纳假设可知，对于所有 $i \geq 0$ 以及 ψ 的状态子公式 θ， T， $\pi(i) \models \theta \Leftrightarrow T$， $\pi'(i) \models \theta$。因此，作为T、 π、 $0 \models \psi$，根据 CCTL* 语义，我们得到 T'、 π'、 $0 \models \psi$，结论由此得出。剩下要证明的是无限路径 π'的存在。由于 T 的根是 D_n-节点，而 T' 的根是 ND_m-节点，我们可以假设已经定义了无限路径 π' 的前 $\ell+1$ 个节点，其中某个 $\ell \geq 0$ 使得对每个$0 \leq i \leq \ell$，不变性均成立。接着，按照以下方式，从 T' 中 $\pi'(\ell)$ 的子节点里选取 π' 的节点 $\pi'(\ell+1)$：

- 情形 $\pi(\ell)$ 是一个 D_n-节点，而 $\pi'(\ell)$ 是一个 ND_m-节点：– 如果 $\pi(\ell+1)$ 是一个 D_n-节点，则将 $\pi'(\ell+1)$ 设为 $\pi'(\ell)$ 在 T' 中唯一的 ND_m-子节点；– 如果 $\pi(\ell+1)$ 是某个 $i \in [1, m-1]$ 的 ND_i-节点（注意 $m \leq n$），则将 $\pi'(\ell+1)$ 设为 $\pi'(\ell)$ 在 T' 中的某个 $m\mathsf{ND}_i$-子节点；– 如果 $\pi(\ell+1)$ 是某个 $i \in [m, n-1]$的 ND_n-节点，则将 $\pi'(\ell+1)$ 设为 $\pi'(\ell)$ 在 T' 中唯一的 ND_m-子节点。
- 情形 $\pi(\ell)$ 和 $\pi(\ell')$ 是某个 $i \in [1, m-1]$ 的 ND_i-节点，且 $m \leq n$：因此， $\pi(\ell+1)$ 是某个$j \in [1, m-1]$的 ND_j-节点。将 $\pi'(\ell+1)$ 设为 $\pi'(\ell)$ 在 T' 中的某个 ND_j-子节点。
- 情形 $\pi(\ell)$ 对某个 $i \in [m, n-1]$ 是一个 ND_i-节点，且 $\pi'(\ell)$ 是一个 ND_m-节点；因此， $\pi(\ell+1)$ 对某个$j \in [1, i]$是一个 ND_j-节点。若 $j < m$，则在 T' 中，将 $\pi'(\ell+1)$ 设为 $\pi'(\ell)$ 的某个 $m\mathsf{ND}_j$-子节点。否则，在 T' 中，将 $\pi'(\ell+1)$ 设为 $\pi'(\ell)$ 唯一的 ND_m-子节点。

在所有情形下，不变性均得以保持。蕴含关系 $T' \models \mathtt{E}\psi \Rightarrow T \models \mathtt{E}\psi$ 与此类似，此处省略细节。引理 2 的证明至此完成。□

B. 弱量词下的表达力：引理 *4* 的证明

本节给出引理 4 的证明。我们需要一些技术定义和初步结果。固定 $n \geq 1$，并设 Kripke 树 $\mathcal{T} \in \mathsf{NA}_n$。设 π 是 $\mathcal{T}$ 的一条有限路径。根据构造， π 具有 $\pi' \cdot \pi''$ 的形式，其中 π' 要么为空，要么只访问空标签节点（$\emptyset$-节点），而 π'' 要么为空，要么只访问 a-节点。我们称 π' （分别称 π''）为 π 的 $\emptyset$-部分（分别为 a-部分）。我们用 $\mathsf{lst}(\pi)$ 表示 π 的最后一个节点，并将从位置 i 开始的 π 的后缀记为 $\pi_{\geq i}$，其中 $0 \leq i < |\pi|$。设 $\mathsf{N}_\emptyset(\pi)$、$\mathsf{N}_a(\pi)$ 和 $\mathsf{D}_a(\pi)$ 为如下定义的自然数：

- $\mathsf{N}_\emptyset(\pi)$ $|\pi'|$ （ π中 $\emptyset$部分的长度）；
- $\mathsf{N}_a(\pi)$ $|\pi''|$ （ π中 a部分的长度）；
- $\mathsf{D}_a(\pi)$，若 $\mathsf{N}_a(\pi) > 0$（即 π导向一个 a节点），则为 0；否则，$\mathsf{D}_a(\pi)$ 为 $\ell - 1$，其中 ℓ是从 $\mathsf{lst}(\pi)$ 出发并通向 a节点的 $\mathcal{T}$最短有限路径的长度。注意，$\mathsf{D}_a(\pi)$ 定义良好，且 $0 \leq \mathsf{D}_a(\pi) \leq n$。

接下来，对于每个 $h \in [1, n]$，我们引入 $\mathcal{T} \in \mathsf{NA}_n$ 的有限路径之间的 h-兼容性概念。直观地说，这一概念提供了充分条件，使得无法通过大小至多为 h 的平衡 WCCTL* 路径公式区分 $\mathcal{T}$ 的两条有限路径。

定义 4（h-兼容性）。设 $h \in [1, n]$。若两条有限路径 π 和 π' 满足以下条件，则称它们是 $\mathcal{T}$的 h-兼容路径：

- $\mathsf{N}_a(\pi) = \mathsf{N}_a(\pi')$；
- 要么 $\mathsf{N}_\emptyset(\pi) = \mathsf{N}_\emptyset(\pi')$，要么 $\mathsf{N}_\emptyset(\pi) \geq h$ 且 $\mathsf{N}_\emptyset(\pi') \geq h$；
- 要么 $\mathsf{D}_a(\pi) = \mathsf{D}_a(\pi')$，要么 $\mathsf{D}_a(\pi) \geq h$ 且 $\mathsf{D}_a(\pi') \geq h$。

我们用 $\mathsf{R}(h)$ 表示定义在 $\mathcal{T} \in \mathsf{NA}_n$ 的有限路径上的二元关系，使得 (π, π') 当且仅当 π 和 π' 是h-兼容的。注意，对于所有 $h \in [1, n]$，$\mathsf{R}(h)$ 都是等价关系。此外，对于所有 $h \in [2, n]$，$\mathsf{R}(h) \subseteq \mathsf{R}(h-1)$，也就是说，$\mathsf{R}(h)$ 是 $\mathsf{R}(h-1)$ 的细化。以下引理确立了等价关系 $\mathsf{R}(h)$ 的若干有用性质；直观而言，该关系刻画了时态模态、计数模态和路径量词在有限路径上的语义。

引理 10。设 $h \in [2, n]$ 且 $(\pi, \pi') \in \mathsf{R}(h)$。则以下性质成立：
(1) 若 $|\pi| > 1$，则 $|\pi'| > 1$且 $(\pi_{\geq 1}, \pi'_{\geq 1}) \in \mathsf{R}(h-1)$。(2) 对每个 $0 \leq i < |\pi|$，都存在 $0 \leq i' < |\pi'|$，使得 $(\pi_{\geq i}, \pi'_{\geq i'}) \in \mathsf{R}(\{\mathrm{v12})$，并且将 $\mathsf{R}(\lfloor \frac{h}{2} \rfloor)$ 限制在满足 $0 \leq j < i$且 $0 \leq j' < i'$ 的数对 $(\pi_{\geq j}, \pi'_{\geq j'})$ 上后，该关系是全的。[1]

[1]回想一下，二元关系 化 $R \subseteq S \times S'$ 是全的，当且仅当对于每个 $s \in S$（分别地， $s' \in S'$），都存在 $s' \in S'$（分别地， $s \in S$），使得 $(s, s') \in R$

(3) 对于 $\pi(0)$ 的所有子节点 τ 和 $\pi'(0)$ 的所有子节点 τ'，$(\tau,\tau') \in \mathrm{R}(h-1)$。此外，要么 $n_0 = n_0'$，要么 $n_0, n_0' \geq h+1$，其中 n_0 （分别地， n_0'）是 $\pi(0)$（分别地， $\pi'(0)$）的子节点数。(4) 对于形如 $\pi(0)\cdot\rho$ 的每条有限路径，都存在一条形如 $\pi'(0)\cdot\rho'$ 的有限路径，使得 $(\pi(0)\cdot\rho, \pi'(0)\cdot\rho') \in \mathrm{R}(\lfloor \frac{h}{2} \rfloor)$。

证明。性质 1 的证明。假设 $|\pi| > 1$。由于 $(\pi,\pi') \in$ 释放算子(h)，因此要么 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi) = \mathrm{N}_\emptyset(\pi')$，要么 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi) \geq h$ 且 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi') \geq h$。此外， π 和 π' 的 a-部分长度相同。因此，由于其为 $h \geq 2$，结论很容易得出。

性质 2 的证明。令 $0 \leq i < |\pi|$。由于 $(\pi,\pi') \in$ 释放算子(h)， π 和 π' 的 a-部分长度相同。因此，如果 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi) = \mathrm{N}_\emptyset(\pi')$，令 $i' = i$即可直接得出结论。否则，$\mathrm{N}_\emptyset(\pi) \geq h$ 且 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi') \geq h$。我们分三种情况讨论；

- $i < \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$。令 $i' = i$。由于 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi) \geq h$ 且 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi') \geq h$，我们有 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi_{\geq i}) \geq \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ 且 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi'_{\geq i}) \geq \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$。因此，结论很容易得出。
- $i \geq \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ 和 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi_{\geq i}) \geq \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$。我们设 $i' = \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$。由于是 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi') \geq h$，有 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi'_{\geq i}) \geq \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$，在这种情况下结论也很容易得出。
- $i \geq \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ 和 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi_{\geq i}) < \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$。我们以这样的方式设置 i'，使得 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi'_{\geq i'}) = \mathrm{N}_\emptyset(\pi_{\geq i})$。注意，作为 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi') \geq h$， i'是定义良好的。此外，注意到 $i' \geq \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$，并且很容易证明，将 $\mathrm{R}(\lfloor \frac{h}{2} \rfloor)$ 限制在满足 $0 \leq j < i$和 $0 \leq j' < i'$的那些对 $(\pi_{\geq i}, \pi'_{\geq j'})$ 上是全的。

性质 3 的证明。设 τ 是 $\pi(0)$ 的子节点，且 τ' 是 $\pi'(0)$ 的子节点。如果 $\pi(0)$ 和 $\pi'(0)$ 都是 NA_n 节点，或 $\pi(0)$ 和 $\pi'(0)$ 都是 a-节点（因此也是 A_1-节点），则结论显然成立。否则，由于 $(\pi,\pi') \in \mathrm{R}(h)$，以下三个条件之一成立：

- $\pi(0)$ 是 A_ℓ-节点，且 $\pi'(0)$ 是 $\mathrm{A}_{\ell'}$-节点，其中 ℓ、$\ell' \in [2,n]$ 取某些值。根据构造，有 $\mathrm{D}_a(\tau) = \mathrm{N}_\emptyset(\pi) - 1 + \mathrm{D}_a(\pi)$，以及 $\mathrm{D}_a(\tau') = \mathrm{N}_\emptyset(\pi') - 1 + \mathrm{D}_a(\pi')$。因此，由于 $(\pi,\pi') \in \mathrm{R}(h)$，我们有 $\mathrm{D}_a(\tau) = \mathrm{D}_a(\tau')$，或 $\mathrm{D}_a(\tau) \geq h-1$ 且 $\mathrm{D}_a(\tau') \geq h-1$。在第一种情况下，根据构造可得 $\ell = \ell'$，结论显然成立。否则，由于 $h \geq 2$、 τ 和 τ' 都是 $\emptyset$- 节点。此外，根据构造，$\mathrm{D}_a(\pi(0)) = \mathrm{D}_a(\tau) + 1$，$\mathrm{D}_a(\pi'(0)) = \mathrm{D}_a(\tau') + 1$， $\ell = \mathrm{D}_a(\pi(0)) + 1$，以及 $\ell' = \mathrm{D}_a(\pi'(0)) + 1$。因此，由于 $\mathrm{D}_a(\tau) \geq h-1$ 且 $\mathrm{D}_a(\tau') \geq h-1$，我们得到 ℓ、$\ell' \geq h+1$，结论成立。
- $\pi(0)$ 对某个 $\ell \in [2,n]$ 而言是一个 A_ℓ-节点， $\pi'(0)$ 则是一个 NA_n-节点。因此， τ是一个 $\mathrm{A}_{\ell-1}$ 节点，而 τ'则是一个 NA_n-节点或 A_n-节点。我们声称 $\ell \geq h+1$。因此，$\mathrm{D}_a(\tau) \geq h-1 \geq 1$，结论得证。我们假设相反结论成立，并导出一个矛盾。自从 $(\pi,\pi') \in \mathrm{R}(h)$， $\ell < h+1$，且根据构造， $\ell = \mathrm{N}_\emptyset(\pi) + \mathrm{D}_a(\pi) + 1$，可知 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi) = \mathrm{N}_\emptyset(\pi')$ 且 $\mathrm{D}_a(\pi) = \mathrm{D}_a(\pi')$。另一方面，由于 $\pi'(0)$ 是一个 NA_n-节点，可知 $\mathrm{N}_\emptyset(\pi') + \mathrm{D}_a(\pi') + 1 > n$，这就产生了矛盾，结论得证。对于某个 $\ell' \in [2,n]$， • $\pi(0)$ 是一个 NA_n-节点，而 $\pi'(0)$ 是一个 $\mathrm{A}_{\ell'}$-节点。此情形与前一种情形类似。

性质 4 的证明。若 $\pi(0)$ 和 $\pi'(0)$ 都是 NA_n 节点，或者 $\pi(0)$ 和 $\pi'(0)$ 都是 a-节点（因此也是 A_1-节点），则结论显然成立。否则，由于 $(\pi,\pi') \in \mathrm{R}(h)$，以下三个条件之一成立：

对于某个 $\ell, \ell' \in [2,n]$， • $\pi(0)$ 是一个 A_ℓ-节点，而 $\pi'(0)$ 是一个 $\mathrm{A}_{\ell'}$-节点。按照性质 3 的证明中的推理，我们可以推出 $\ell = \ell'$ or $\ell, \ell' \geq h+1$。因此，结论很容易成立。

对于某个 $\ell \in [2,n]$， • $\pi(0)$ 是一个 A_ℓ-节点，而 $\pi'(0)$ 是一个 NA_n-节点。按照性质 3 的证明中的推理，我们可以推出 $\ell \geq h+1$。因此，在这种情形下结论也很容易成立。

- $\pi(0)$ 是一个 NA_n-节点， $\pi'(0)$ 是一个 $\mathrm{A}_{\ell'}$-节点，其中 $\ell' \in [2,n]$。这种情况与前一种情况类似。

□

根据引理 10，我们很容易推得，每个大小至多为 h 都无法区分h固定 Kripke 树 $\mathcal{T} \in NA_n$ 中兼容的有限路径。

引理 11. 设 $h \in [1,n]$ 以及 $(\pi,\pi') \in \mathrm{R}(h)$。那么，对于每个满足 $|\psi| \leq h$ 的平衡 WCCTL* 路径公式 ψ，有 $\mathcal{T}, \pi, 0 \models \psi$ 当且仅当 $\mathcal{T}, \pi', 0 \models \psi$。

证明。自从 $\mathrm{R}(h)$ 是一个等价关系，只需证明 $\mathcal{T}, \pi, 0 \models \psi$ 蕴含 $\mathcal{T}, \pi', 0 \models \psi$。证明通过对 $|\psi|$ 进行归纳。布尔联结词的情形直接由归纳假设得出。至于其他情形，我们如下进行：

- $\psi = a$：自从（π， π'） $\in \mathrm{R}$（h）以来， $\pi(0)$ 和 $\pi'(0)$ 要么都是 $\emptyset$-节点，要么 $\pi(0)$ 和 $\pi'(0)$ 都是 a-节点。因此，结论成立。

- $\psi = \mathrm{X}\ \psi_1$：根据假设 $|\psi_1| \leq h-1$和 $h \geq 2$。令 $\mathcal{T}, \pi, 0 \models \psi$。因此， $|\pi| > 1$和 $\mathcal{T}, \pi_{\geq 1}, 0 \models \psi_1$。由于 $(\pi,\pi') \in \mathrm{R}(h)$，根据引理 10(1)， $|\pi'| > 1$且 $(\pi_{\geq 1}, \pi'_{\geq 1}) \in \mathrm{R}(h-1)$。因此，根据归纳假设可得 $\mathcal{T}, \pi'_{\geq 1}, 0 \models \psi_1$。这意味着 $\mathcal{T}, \pi'$， $0 \models \psi$，结论得证。• $\psi = \psi_1\ \mathrm{U}\ \psi_2$：自从 ψ是平衡的且 $|\psi| \leq h$，可知 $|\psi_1|, |\psi_2| \leq \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$。令 $\mathcal{T}, \pi, 0 \models \psi$。因此，存在 $0 \leq i < |\pi|$，使得 $\mathcal{T}, \pi_{\geq i}, 0 \models \psi_2$，且对于所有 $0 \leq j < i$， 都有 $\mathcal{T}, \pi_{\geq j}, 0 \models \psi_1$。由于 $(\pi,\pi') \in \mathrm{R}(h)$，应用归纳假设

和引理 10(2)，可知存在 $0 \le i' < |\pi'|$ 使得 $\mathcal{T}$， $\pi'_{\ge i'}$， $0 \models \psi_2$ 且 $\mathcal{T}$， $\pi'_{\ge j'}$， $0 \models \psi_1$ 对于所有 $0 \le j' < i'$。这意味着 $\mathcal{T}$，π'， $0 \models \psi$，结论得证。

- $\psi = \mathrm{D}^{\ell}\psi_1$：由于是 $|\psi| \le h$，可得 $h > 2$、 $\ell \le h-1$ 和 $|\psi_1| \le h-1$。令 $\mathcal{T}$、 π、 $0 \models \psi$。因此，存在 ℓ 个不同的子节点 τ，它们是 π(0)的子节点，并且 $\mathcal{T}$、 $\tau \models \psi_1$。我们区分两种情况：– π(0)是一个 a-节点：因此，由于（π(0) π'(0)） $\in$ R(h)， π'(0)也是一个 a-节点。由于以 a-节点为根的子树是由 a-节点组成的链，我们可直接推出 $\ell = 1$ 和 $\mathcal{T}$、 π'、 $0 \models \psi$。– π(0) 是一个 $\emptyset$- 节点：因此，由于（ π(0) π'(0) ） $\in$ R(h)， π'(0) 也是一个 $\emptyset$- 节点。应用归纳假设和引理 10(4)，我们得到，对于 π'(0)的每个子节点 τ'， $\mathcal{T}$、 $\tau' \models \psi_1$。此外，要么 $n_0 = n'_0$，要么 n_0、 $n'_0 \ge h+1$，其中 n_0（分别为 n'_0）是 π(0)（分别为 π'(0)）的子节点数。因此，由于 $\ell \le h+1$，我们推出 $\mathcal{T}$、 π'、 $0 \models \psi$。
- $\psi = \mathrm{E}\theta$：由于是 $|\psi| \le h$ 且 ψ 平衡的，因此 θ 具有 $\theta_1 \wedge \theta_2$的形式，其中 $|\theta_1|$、 $|\theta_2| \le \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$。令 $\mathcal{T}$、 π、 $0 \models \psi$。因此，存在一条具有 π(0) $\cdot \rho$形式的有限路径，使得 $\mathcal{T}$、 π(0) $\cdot \rho$、 $0 \models \theta_i$ 对于 $i = 1$、2成立。由于（π、 π'） $\in R$（h），根据引理 10(4)和归纳假设，存在一条具有 π'(0) $\cdot \rho'$ 形式的有限路径，使得对于每个 $i = 1$、2，均有 $\mathcal{T}$、 π'(0) $\cdot \rho'$、 $0 \models \theta_i$。因此， $\mathcal{T}$、 π'、 $0 \models \psi$，证毕。

□

现在利用引理 4 和引理 11来证明。

引理 4. 设 φ 是一个平衡 WCCTL* 状态公式。那么对于所有 $n > |\varphi|$，若 (T, Lab) $\in$ NA$_n$ 且 (T', Lab′) $\in$ A$_n$，则 (T, Lab) $\models \varphi$ 当且仅当 (T', Lab′) $\models \varphi$。

证明. 设 (T, Lab) $\in$ NA$_n$ 且 (T', Lab′) $\in$ A$_n$，其中 $n > |\varphi|$，并令 R($n-1$) 为 ($n-1$, Lab) 的有限路径的 (T)-相容关系。根据构造，(T, Lab) 的根 τ_0 有一个子节点 τ_1，其 Kripke 子树 (T'', Lab″) 属于 A$_n$。此外，根据构造，(τ_0, τ_1) $\in$ R($n-1$)。由于是 $|\varphi| \le n-1$，根据引理 11，可得 (T, Lab) $\models \varphi$ 当且仅当 (T'', Lab″) $\models \varphi$。因此，由于 (T', Lab′) 与 (T'', Lab″) 同构，结论得证。

□

C. 弱量化与协弱量化：命题 5 的证明

命题 5. MTL $\le$ COWMTL 和 WMTL $\le$COWMTL。

证明。我们证明 MTL $\le$ coWMTL（WMTL $\le$ coWMTL 的证明类似）。考虑如下定义的开放 MTL 公式 $\theta(x, X)$：

$$\begin{aligned}\theta(x,X) \triangleq\ & x \in X \wedge \neg\exists y \in X.\, \exists^{\mathsf{T}} Y.\, [Y \subseteq X \wedge \forall z \in Y.\, (z = y \vee \mathtt{child}(y,z))] \wedge \\ & \forall Y^{\mathsf{T}}.\, [(\mathtt{path}(Y) \wedge Y \subseteq X) \to \exists y \in Y.\, x < y]\end{aligned}$$

假设将 X 解释为无限树 T，根据 coWMTL 语义，前一个公式断言： T 是有限分支的，节点 x 属于 T，并且 T 的每条无限路径都会经过节点 x的某个严格后代。

设 φ是一个 MTL 句子， $X_1, \ldots, X_n$ 是 φ中出现的集合变量。不失一般性，我们假设 φ 中不同的二阶量词出现位置各自对应不同的集合变量。对于每个 $i \in [1, n]$，令 $\overline{X}_i$ （分别为 $\overline{x}_i$）是一个新鲜的集合变量（分别为新鲜的一阶变量）。对于 φ的每个子公式 ψ，我们定义一个 MTL 公式 $f(\psi, t_1, \ldots, t_n)$，其中 $t_i \in \{\mathsf{fin}, \mathsf{inf}\}$ 是一个标志。直观地说， $t_i = \mathsf{inf}$ 表示在 φ的二阶量词 $\exists^{\mathsf{T}} X_i$ 中，选取给定非阻塞树的一棵无限子树。映射 f 在布尔联结词、一阶原子公式和一阶量词下是同态的；对于其他 MTL 构式，其定义如下：

- $f(z \in X_i, t_1, \ldots, t_n) \triangleq \begin{cases} z \in X_i & \text{if } t_i = \mathtt{inf} \\ z \in \overline{X}_i \wedge \neg \overline{x}_i < z & \text{otherwise} \end{cases}$
- $$\begin{aligned} f(\exists^{\mathsf{T}} X_i\, \psi, t_1, \ldots, t_n) \triangleq\ & \exists^{\mathsf{T}} X_i.\, f(\psi, t_1, \ldots, t_{i-1}, \mathtt{inf}, t_{i+1}, \ldots, t_n) \vee \\ & \exists^{\mathsf{T}} \overline{X}_i.\, \exists \overline{x}_i.\, (\theta(\overline{x}_i, \overline{X}_i) \wedge f(\psi, t_1, \ldots, t_{i-1}, \mathtt{fin}, t_{i+1}, \ldots, t_n)) \end{aligned}.$$

根据构造和引理 6，很容易得出，在 coWMTL 语义下解释时，MTL 句子 φ 等价于 MTL 句子 $f(\varphi, \mathsf{fin} \ldots, \mathsf{fin})$。

□

II. 第 IV 节的缺失证明IV

D. 一步分级 μ-演算

引理 7. 对于每个基础 Gμ-CALCULUS[1S]公式 $\varphi \in \Phi_{Z,O}$、Kripke 树 $\mathcal{T}$、节点集 $W \subseteq T$，以及满足 $\chi \sqsubseteq^{Z,O}_{W} \chi'$ 的一对赋值 $\chi, \chi' \in \mathrm{Asg}_{\mathcal{T}}(Z \cup O)$，都有 $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}$。

证明。证明通过对 Gμ-CALCULUS[1S] 基公式 $\varphi \in \Phi_{Z,O}$ 进行结构归纳来完成；不失一般性，假设该公式处于正范式。

- [基情形 $\varphi \in \{\bot, \top\} \cup \{p, \neg p \mid p \in \text{原子命题集}\} \cup \{\vartheta, \neg\vartheta \mid \vartheta \in \Theta_{\emptyset,\emptyset}\}$]：由于 $\mathrm{free}(\varphi) = \emptyset$，我们知道，$\varphi$ 的语义不依赖于 χ 和 χ' 中变量的赋值，即 $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}$，由此立即可得结论。

- [基情形 $\varphi = X \in$] $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = \chi\ X$ $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'} = Z$：根据不动点变量的语义定义，我们有 ( ) 和 ( )。现 $\chi'\ X$ $\chi\ X \cap \subseteq \chi'\ X$ $\chi \sqsubseteq '\ \chi'$ $X \in$ 在，( ) W ( )，因为 zo w 和 Z，因此此情形下也立即可得结论。

- [归纳情形 $\varphi \in \{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2\}$]：根据归纳假设，$[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W \subseteq [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}$ 和 $[\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W \subseteq [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}$ 均成立。因此，通过分析布尔联结词的语义，即可轻松得出结论：

$$\begin{aligned}
[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W &= ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}) \cap W \\
&= ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W) \cap ([\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W) \\
&\subseteq [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'} \cap [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'} \\
&= [\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W &= ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cup [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}) \cap W \\
&= ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W) \cup ([\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W) \\
&\subseteq [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'} \cup [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'} \\
&= [\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}.
\end{aligned}$$

- [归纳情形 $\varphi \in \{\Diamond_{\geq k} \varphi', \Box_{<k} \varphi'\}$]：回想一下，$\varphi' \in \Phi_{O\,\emptyset}$，并注意到 $\chi \sqsubseteq_{Z,O\,W} \chi'$ 蕴含 $\chi \sqsubseteq_{O\,\emptyset\,\mathrm{post}(W)} \chi'$。因此，根据归纳假设，我们有 $[\![\varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap \mathrm{post}(W) \subseteq [\![\varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}$。通过分析两个模态算子的语义，即可轻松得出结论：

$$\begin{aligned}
[\![\Diamond_{\geq k} \varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W &= \left\{ w \in W \,\middle|\, |\mathrm{post}(w) \cap [\![\varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}| \geq k \right\} \\
&\subseteq \left\{ w \in W \,\middle|\, |\mathrm{post}(w) \cap [\![\varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}| \geq k \right\} \\
&\subseteq \left\{ w \in T \,\middle|\, |\mathrm{post}(w) \cap [\![\varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}| \geq k \right\} \\
&= [\![\Diamond_{\geq k} \varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\Box_{<k} \varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap W &= \left\{ w \in W \,\middle|\, |\mathrm{post}(w) \setminus [\![\varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}| < k \right\} \\
&\subseteq \left\{ w \in W \,\middle|\, |\mathrm{post}(w) \setminus [\![\varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}| < k \right\} \\
&\subseteq \left\{ w \in T \,\middle|\, |\mathrm{post}(w) \setminus [\![\varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}| < k \right\} \\
&= [\![\Box_{<k} \varphi']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}.
\end{aligned}$$

□

引理 8. 对于任意不动点 Gμ-C不动点演算[1S]公式 $\vartheta \in \Theta_{Z,O}$、Kripke 树 $\mathcal{T}$、赋值集 $\chi \in \mathrm{Asg}_{\mathcal{T}}(Z \cup O)$ 以及节点 $w \in \Delta$，$[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$，均有 $\Delta_w, \Delta{\downarrow_w} = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}{\downarrow_w}$，其中 $\chi', \chi{\restriction_{\Delta_w}}$。

证明。证明过 程采用结构归纳法，对 Gμ-CALCULUS[1S] 不动点公式 $\vartheta \in \Theta_{Z,O}$ 进行。

- [基情形 $\vartheta \in \Phi$,] 7 ϑ Δ_w $\chi \sqsubseteq_{\Delta_w} \chi'$ $\Delta_w = \Delta \cap \Delta_w = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \cap \Delta_w \subseteq$ zo：我们首先应用引理，将其相对于 进 $[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}$ $\downarrow_w$ 行，因为 zo，从而得到 。此时，通过对包含关系两边施加限制，我们可推出 $\Delta_w = \Delta_w{\downarrow_w} \subseteq [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}{\downarrow_w} \subseteq$ $[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}{\downarrow_w} = \Delta_w$ $\Delta_w = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}{\downarrow_w}$ ，其中最后一个包含关系源于语义的单调性。因此，。

- [归纳情形 $\vartheta = \nu X.\, \vartheta'$]：根据不动点的定义，有 $\Delta = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X \mapsto \Delta]}$，因此根据归纳假设，我们有 $\Delta_w = [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi''}{\downarrow_w}$，其中

$$\begin{aligned}
\chi'' &\triangleq (\chi[X \mapsto \Delta]){\restriction_{\Delta_w}} \\
&= (\chi{\restriction_{\Delta_w}})[X \mapsto \Delta \cap (\Delta_w \cup \mathrm{post}(\Delta_w))] \\
&= \chi'[X \mapsto (\Delta \cap \Delta_w) \cup (\Delta \cap \mathrm{post}(\Delta_w))] \\
&= \chi'[X \mapsto \Delta_w].
\end{aligned}$$

最后一个等式源于以下事实：$\Delta \cap \mathrm{post}(\Delta_w) \subseteq \Delta_w \subseteq \Delta$，而这又是由限制算子 $\downarrow_w$ 的定义所导致的，因为 Δ_w 的所有节点都是 Δ 的节点，并且 Δ 中作为 Δ_w 中某个节点的后继的节点也必须属于 Δ_w。因此，

$\Delta_w = [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'[X \mapsto \Delta_w]}{\downarrow_w} \subseteq [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'[X \mapsto \Delta_w]}$；根据最大不动点算子的语义，这意味着 $\Delta_w \subseteq [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}$。于是，

$\Delta_w = \Delta_w{\downarrow_w} \subseteq [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}{\downarrow_w} \subseteq [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}{\downarrow_w} = \Delta_w$，所以 $\Delta_w = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}{\downarrow_w}$。

- [归纳情形 $\vartheta = \mu X.\vartheta'$]: 根据克莱尼定理，有 $\Delta = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_i$ 和 $[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{F}'_i$，其中对于所有 $i \in \mathbb{N}$，F0、F′0、∅、Fi+1、$[\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X\mapsto \mathrm{F}_i]}$，以及 F′i+1、$[\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'[X\mapsto \mathrm{F}'_i]}$。首先注意，根据归纳假设，对于所有 $i \in \mathbb{N}_+$ 和 $v \in \Delta$，有 Γ^i_v，$\mathrm{F}_i{\downarrow_v} = [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}(\chi{\restriction_{\Gamma^i_v}})[X \mapsto \Xi^i_v]^{\downarrow v}$，其中 Ξ^i_v，$\mathrm{F}_{i-1} \cap (\Gamma^i_v \cup \mathrm{post}(\Gamma^i_v))$。令 Γ^0_v、∅，其中 $v \in \Delta$。此外，由于 $\Gamma^i_v = \mathrm{F}_i{\downarrow_v} \subseteq \Delta{\downarrow_v} \subseteq \Delta{\downarrow_w} = \Delta_w$，注意对于所有 $v \in \Delta_w$，$\Gamma^i_v \subseteq \Delta_w$。现在，通过对指标 $i \in \mathbb{N}$ 进行辅助归纳证明，我们证明对于所有 $v \in \Delta_w$，$\mathrm{F}'_i \subseteq \mathrm{F}_i$ 且 $\Gamma^i_v \subseteq \mathrm{F}'_i{\downarrow_v}$。
  - [基情形 $i = 0$]: 这两个性质显然成立，因为 $\Gamma^0_v = \mathrm{F}'_0 = \mathrm{F}_0 = \emptyset$。
  - [归纳情形 $i > 0$]: 根据归纳假设，我们有 $\mathrm{F}'_{i-1} \subseteq \mathrm{F}_{i-1}$ 以及 $\Gamma^{i-1}_v \subseteq \mathrm{F}'_{i-1}{\downarrow_v}$，对所有 $v \in \Delta_w$均成立。显然，由于语义的单调性，$\mathrm{F}'_i = [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'[X\mapsto \mathrm{F}'_{i-1}]} \subseteq [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X\mapsto \mathrm{F}_{i-1}]} = \mathrm{F}_i$。因此，第一个性质得证。现在来看第二个性质。当 $v \notin \mathrm{F}_i$ 时，无需证明任何内容，因为 $\Gamma^i_v = \emptyset$，所以考虑一个节点 $v \in \mathrm{F}_i$。于是我们有

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_v &= [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{(\chi{\restriction_{\Gamma^i_v}})}[X \mapsto \Xi^i_v]^{\downarrow v} \\
&\subseteq [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{(\chi{\restriction_{\Delta_w}})}[X \mapsto \Xi^i_v]^{\downarrow v} \\
&\subseteq [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{(\chi{\restriction_{\Delta_w}})}[X \mapsto \mathrm{F}'_{i-1}]^{\downarrow v} \\
&= [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'[X\mapsto \mathrm{F}'_{i-1}]}{\downarrow_v} \\
&= \mathrm{F}'_i{\downarrow_v},
\end{aligned}$$

这里两个包含关系也都是由语义的单调性得出的。具体来说，第一个由上文提到的包含关系 $\Gamma^i_v \subseteq \Delta_w$ 推出，而第二个则源于包含关系 $\Xi^i_v \subseteq \mathrm{F}'_{i-1}$，它可以由归纳假设轻易推得，推导如下。首先注意，$\Xi^i_v = \mathrm{F}_{i-1} \cap (\Gamma^i_v \cup \mathrm{post}(\Gamma^i_v)) \subseteq \Delta \cap (\Delta_w \cup \mathrm{post}(\Delta_w)) = \Delta_w$，因此，$\Xi^i_v \subseteq \mathrm{F}_{i-1}$ 以及 $\Xi^i_v \subseteq \Delta_w$。现在，根据归纳假设，对于每个节点$u \in \mathrm{F}_{i-1} \cap \Delta_w$，都有 $u \in \Gamma^{i-1}_u \subseteq \mathrm{F}'_{i-1}{\downarrow_u} \subseteq \mathrm{F}'_{i-1}$，由此可推出所需的 $\Xi^i_v \subseteq \mathrm{F}'_{i-1}$。因此，第二个性质也得证。

此时，为了证明 $\Delta_w = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}{\downarrow_w}$，我们针对每个节点 $v \in \Delta_w$，找出一个指标 $j_v \in \mathbb{N}$使得 $v \in \Gamma^{j_v}_w$。这个指标必然存在，因为对于 j_v，我们可以选择任意一个数 $j \geq \max_{w\leq u\leq v}\min\{i \in \mathbb{N} \mid u \in \mathrm{F}_i\}$。因此，对于每个 $v \in \Delta_w$ $v \in \Gamma^{j_v}_w \subseteq {}'_{j_v}{\downarrow_w} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} {}'_i{\downarrow_w} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} {}'_i{\downarrow_w} = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}{\downarrow_w}$ $\Delta_w \subseteq [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}{\downarrow_w} \subseteq$，我们有 F (F) (F)，这意味着 and, $[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}{\downarrow_w} = \Delta_w$ $\Delta_w = [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'}{\downarrow_w}$ □ so, 。

在给出定理的证明之前 10，我们在此再次给出翻译函数 $\mathrm{tr} : \mathrm{Vr}_1 \to (\Theta_{\mathrm{Z},\ \mathrm{O}} \to$MTL) 从 G$\mu$-CALCULUS[1S] 到 MTL 的完整定义：

- $\mathrm{tr}_x(\bot)$ ⊥; • $\mathrm{tr}_x(\neg\varphi)$ $\neg\mathrm{tr}_x(\varphi)$; • $\mathrm{tr}_x(p) \triangleq P_p(x)$;
- $\mathrm{tr}_x(\top)$ ⊤; • $\mathrm{tr}_x(\varphi_1 \odot \varphi_2) \triangleq \mathrm{tr}_x(\varphi_1) \odot \mathrm{tr}_x(\varphi_2)$, $\mathrm{tr}_x(X_i) \triangleq x \in X_i$;
- $\mathrm{tr}_x(\Diamond_{\geq k}\,\varphi)$ $\exists y_1, \ldots, y_k.(\bigwedge_{i\neq j}(y_i \neq y_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k}$ 子节点$(x, y_i)) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{k} \mathrm{tr}_{y_i}(\varphi))$;
- $\mathrm{tr}_x(\Box_{<k}\,\varphi)$ $\forall y_1, \ldots, y_k.(\bigwedge_{i\neq j}(y_i \neq y_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k}$ 子节点$(x, y_i)) \to (\bigvee_{i=1}^{k} \mathrm{tr}_{y_i}(\varphi))$;
- $\mathrm{tr}_x(\mu X.\vartheta)$ $\neg\mathrm{tr}_x(\nu X.\mathrm{pnf}(\neg\vartheta[X/\neg X])$; • tr_x $(\nu X.\vartheta)$ $\exists^{\mathrm{T}} X.\, x \in X \wedge \forall x \in X.\, \mathrm{tr}_x(\vartheta)$.

定理 10. Gμ-CALCULUS[1S] $\leq$MTL。

证明。为证明 Gμ-CALCULUS[1S] 可由 MTL 涵盖，我们实际上证明以下更强的命题：对于每个 Gμ-CALCULUS[1S] 不动点公式 $\vartheta \in \Theta_{\mathrm{Z,O}}$、Kripke 树 $\mathcal{T}$、赋值集 $\chi \in \mathrm{Asg}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Z} \cup \mathrm{O})$ 和节点 $w \in \mathrm{T}$，均有

$$w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} \quad \textit{iff} \quad \mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \chi \models \mathrm{tr}_x(\vartheta)\,.$$

证明通过对 ϑ 进行（扩展）结构归纳来完成，其中我们假定不动点公式 $\vartheta = \mu X.\vartheta'$ 在归纳次序中高于 $\nu X.\mathrm{pnf}(\neg\vartheta'[X/\neg X])$。由于除不动点之外的所有情形下，翻译 $\mathrm{tr}_x(\vartheta)$ 的正确性都是显然的，因此我们只关注这两个算子。

- [$\vartheta = \nu X.\vartheta'$]: – ["若"]: 若 $\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \chi \models \mathrm{tr}_x(\vartheta)$，则存在一个包含 w 的（树）集合 W $\subseteq$T，使得对于所有 $v \in$W，均有 $\mathcal{T}, \{x \mapsto v\}, \chi[X \mapsto \mathrm{W}] \models \mathrm{tr}_x(\vartheta')$。根据归纳假设，对于所有 $v \in$W，均有 $v \in [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X\mapsto \mathrm{W}]}$，这意味着 W $\subseteq [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X\mapsto \mathrm{W}]}$。现在，根据最大不动点算子的语义，我们有 W $\subseteq [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$，因此 $w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$。

– ["仅当"] $w \in \Delta$ $[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X\mapsto\Delta]}$ 8 $w \in \Delta_w =$: 根据不动点的定义，有，。现在，根 $[\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi'[X\mapsto\Delta_w]}{\downarrow_w} \subseteq [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X\mapsto\Delta_w]}{\downarrow_w} \subseteq [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X\mapsto\Delta_w]}$ Δ_w $\Delta{\downarrow_w}$ χ' $\chi{\restriction_{\Delta_w}}$ 据引理，有，其中，并且，。注意，由于限制算子 [的定义

可知，集合 Δ_w 是以 w 为根的 T 的子树。因此，要证明 $\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \chi \models \mathrm{tr}_x(\vartheta)$ 成立，只需证明 $\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \chi[X \mapsto \Delta_w] \models \forall x.(x \in X) \to \mathrm{tr}_x(\vartheta')$ 也成立。此时，根据归纳假设，证明很容易得到，因为如之前所观察到的，$\Delta_w \subseteq [\![\vartheta']\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[X \mapsto \Delta_w]}$。

- [$\vartheta = \mu X.\vartheta'$]: 得益于 μ-CALCULUS 的最小不动点算子与最大不动点算子之间的对偶性，众所周知，$[\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = [\![\neg\nu X.\neg\vartheta'[X/\neg X]]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = \mathrm{T} \setminus [\![\nu X.\neg\vartheta'[X/\neg X]]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = \mathrm{T} \setminus [\![\nu X.\mathrm{pnf}(\neg\vartheta'[X/\neg X])]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$。这意味着，$w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$ 当且仅当 $w \notin [\![\nu X.\mathrm{pnf}(\neg\vartheta'[X/\neg X])]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$。注意，如果 $\vartheta' \in \Theta\mathrm{Z}_{\cup\{X\}},\mathrm{O}_{\cup\{X\}}$，那么 $\mathrm{pnf}(\neg\vartheta'[X/\neg X]) \in \Theta\mathrm{Z}_{\cup\{X\}},\mathrm{O}_{\cup\{X\}}$ 也成立，因此，$\nu X.\mathrm{pnf}(\neg\vartheta'[X/\neg X]) \in \Theta\mathrm{Z},\mathrm{O}$。现在，根据归纳假设，$w \notin [\![\nu X.\mathrm{pnf}(\neg\vartheta'[X/\neg X])]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$ 当且仅当 $\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \chi \not\models \mathrm{tr}_x(\nu X.\mathrm{pnf}(\neg\vartheta'[X/\neg X]))$。因此，$w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$ 当且仅当 $\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \chi \not\models \mathrm{tr}_x(\nu X.\mathrm{pnf}(\neg\vartheta'[X/\neg X]))$，根据翻译函数的定义，这立即意味着 $w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$ 当且仅当 $\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \chi \models \mathrm{tr}_x(\vartheta)$。 □

E. 无交替的一步分级 μ-演算

下面给出两个零时间抑制算子的完整定义：

- $\bot\!\searrow_X = \bot\!\nearrow_X$，$\bot$ 以及 $\top\!\searrow_X = \top\!\nearrow_X$，$\top$；
- $p\!\searrow_X = p\!\nearrow_X$，$p$；
- $(\Diamond_{\geq k}\varphi)\!\searrow_X = (\Diamond_{\geq k}\varphi)\!\nearrow_X, \Diamond_{\geq k}\varphi$；
- $(\Box_{<k}\varphi)\!\searrow_X = (\Box_{<k}\varphi)\!\nearrow_X, \Box_{<k}\varphi$；
- $X\!\searrow_X$、$\bot$ 和 $X\!\nearrow_X$、$\top$；
- $Y\!\searrow_X = Y\!\nearrow_X$，$Y$，当 $Y \neq X$ 时；
- $(\neg\varphi)\!\searrow_X$，$\neg(\varphi\!\searrow_X)$ 和 $(\neg\varphi)\!\nearrow_X$，$\neg(\varphi\!\nearrow_X)$；
- $(\varphi_1 \odot \varphi_2)\!\searrow_X$，$(\varphi_1\!\searrow_X) \odot (\varphi_1\!\searrow_X)$，$\odot \in \{\wedge,\vee\}$；
- $(\varphi_1 \odot \varphi_2)\!\nearrow_X$，$(\varphi_1\!\nearrow_X) \odot (\varphi_1\!\nearrow_X)$，$\odot \in \{\wedge,\vee\}$；
- $(\lambda X.\vartheta)\!\searrow_X = (\lambda X.\vartheta)\!\nearrow_X$、$\lambda X.\vartheta$，其中 $\lambda \in \{\mu,\nu\}$；
- $(\lambda Y.\vartheta)\!\searrow_X$、$\lambda Y.(\vartheta\!\searrow_X)$，其中 $\lambda \in \{\mu,\nu\}$，当 $Y \neq X$ 时；
- $(\lambda Y.\vartheta)\!\nearrow_X$、$\lambda Y.(\vartheta\!\nearrow_X)$，其中 $\lambda \in \{\mu,\nu\}$，当 $Y \neq X$ 时。

引理 9. 对于任意 Gμ-C演算[1S]公式 $\vartheta = \mu X_1 \ldots \mu X_k.\varphi \in \Theta_{\mathrm{Z},\mathrm{O}}$，其中 $\varphi \in \Phi_{\mathrm{Z}\cup\{X_1,\ldots,X_k\},\mathrm{O}\cup\{X_1,\ldots,X_k\}}$，有限分支 Kripke 树 $\mathcal{T} = (\mathrm{T}, \mathrm{Lab})$、节点 $w \in \mathrm{T}$ 以及赋值集 $\chi \in \mathrm{Asg}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Z} \cup \mathrm{O})$，以下性质等价：

- $w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$；
- 存在一个有限树 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{T}$，使得 $w \in \mathrm{W}$ 满足 $v \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]\!\searrow_Y]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{W}\downarrow_v]}$，对所有 $v \in \mathrm{W}$ 均成立。

证明。 众所周知 $\Delta \triangleq [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = [\![\mu X_1 \ldots \mu X_k.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi} = [\![\mu Y.\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi}$(参见 例如，[4, 命题 1.3.2])。根据克莱尼定理，有 $\Delta = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_i$，其中 F_0、$\emptyset$ 且 $\mathrm{F}_{i+1}, [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{F}_i]}$，对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。现在我们分别证明等价关系的两个方向。

- [“如果”]: 考虑由以下方式定义的 W 的子集族 $\{\mathrm{W}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$：W0、$\emptyset$ 以及 W_{i+1} ,$\{v \in \mathrm{W} \mid \mathrm{post}(v) \cap \mathrm{W} \subseteq \mathrm{W}_i\}$，对于所有 $i \in \mathbb{N}$均成立。容易看出，对于每个 $i > 0$ 和 $v \in \mathrm{W}_i$，都有 $\mathrm{W}\downarrow_v \setminus \{v\} \subseteq \mathrm{W}_{i-1}$。现在我们证明，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，$\mathrm{W}_i \subseteq \mathrm{F}_i$。反设存在一个指标$i \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{W}_i \setminus \mathrm{F}_i \neq \emptyset$，并将 $j \in \mathbb{N}$取为所有此类指标中的最小者。显然，$j > 0$，因为 $\mathrm{W}_0 = \emptyset$，且 $\mathrm{W}_{j-1} \subseteq \mathrm{F}_{j-1}$。令 $v \in \mathrm{W}_j \setminus \mathrm{F}_j \neq \emptyset$。根据假设，有 $v \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]\!\searrow_Y]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{W}\downarrow_v]}$。因此，根据命题 6 的条目 d，有 $v \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{W}\downarrow_v \setminus \{v\}]}$。由语义的单调性以及包含关系 $\mathrm{W}\downarrow_v \setminus \{v\} \subseteq \mathrm{W}_{j-1} \subseteq \mathrm{W}_{j-1}$ 和 $v \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{F}_{j-1}]} \subseteq \mathrm{W}$ 和 $[\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{F}_{j-1}]} = \mathrm{F}_j$，可得 W F F，这与假设矛盾。此时，由于 W 是有限的，立即可知 $\mathrm{W} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{W}_i$。于是，$w \in \mathrm{W} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{W}_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_i = \Delta$，从而完成了这一方向的证明。
- [“仅当”]: 通过对指标 $i \in \mathbb{N}$ 作归纳，我们证明：对于每个节点 $w \in \mathrm{F}_i$，都存在一棵以 w 为根的有限树 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{T}$，使得 $v \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]\!\searrow_Y]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{W}\downarrow_v]}$，对所有 $v \in \mathrm{W}$ 均成立。
  - [基情形 $i = 0$]: 该陈述显然成立，因为 $\mathrm{F}_0 = \emptyset$。
  - [归纳情形 $i > 1$]: 根据归纳假设，对于每个节点 $u \in \mathrm{F}_{i-1}$，都存在一棵以 u 为根的有限树 U_u，使得 $v \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]\!\searrow_Y]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{U}_u\downarrow_v]}$，对所有 $v \in \mathrm{U}_u$ 均成立。现在令 $\mathrm{W} \{w\} \cup \bigcup_{u\in\mathrm{post}(w)\cap\mathrm{F}_{i-1}} \mathrm{U}_u$，其中 $w \notin \mathrm{F}_{i-1}$。显然，W 是一棵以 w 为根的有限树，因为底层树模型具有有限分支。此外，对于所有满足 $v \neq w$ 的 $v \in \mathrm{W}$，都有 $v \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]\!\searrow_Y]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{W}\downarrow_v]}$，因为 $\mathrm{U}_u\downarrow_v = \mathrm{W}\downarrow_v$，其中 u 是 w 的祖先 v 的唯一子节点。因此，为了完成此情形的证明，我们需要证明 $w \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]\!\searrow_Y]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{W}]}$。注意，由于 $w \notin \mathrm{F}_{i-1}$ 且 $\mathrm{post}(w) \cap \mathrm{F}_{i-1} \subseteq \mathrm{W} \setminus \{w\}$，所以 $\chi[Y \mapsto \mathrm{F}_{i-1}] \sqsubseteq^{\mathrm{Z}\cup\{Y\}}_{\mathrm{O}_{\{w\}}} \chi[Y \mapsto \mathrm{W} \setminus \{w\}]$。因此，根据引理 7，有 $w \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{W}\setminus\{w\}]}$，因为 $w \in \mathrm{F}_i = [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{F}_{i-1}]}$。于是，根据命题 6 的条目 d，得到 $w \in [\![\varphi[X_1/Y,\ldots,X_k/Y]\!\searrow_Y]\!]^{\mathcal{T}}_{\chi[Y \mapsto \mathrm{W}]}$。

□

在给出定理 13 的证明之前，我们先给出从 AFGμ-CALCULUS[1S] 到 WMTL 的翻译函数 $\mathrm{tr}\colon \mathrm{Vr}_1 \to (\Theta^{\mathrm{AF}}_{\mathrm{Z},\mathrm{O}} \to \mathrm{WMTL})$ 定义中不同于一般翻译的部分，

即从 Gμ-CALCULUS[1S] 到 MTL 的翻译（请注意， Y 是一个任意的新鲜不动点变量，在变换所作用的公式中任何位置都未出现）：

- $\mathsf{tr}_x(\nu X.\,\vartheta) \triangleq \begin{cases} \neg\mathsf{tr}_x(\mu X.\,pnf(\neg(\vartheta[X/\neg X][Y/\neg Y]))), & \text{if } \vartheta \in \Phi^{\mathtt{AF}}_{\mathrm{Z}',\mathrm{O}'}; \\ \mathsf{tr}_x(\vartheta[X/Y]), & \text{otherwise;} \end{cases}$
- $\mathsf{tr}_x(\mu X.\,\vartheta) \triangleq \begin{cases} \exists^{\mathrm{T}} X.\, x \in X \wedge \forall x \in X.\, \exists^{\mathrm{T}} Y.\, \mathtt{mst}(Y, X, x) \wedge \mathsf{tr}_x(\varphi[X/Y]\!\downarrow_Y), & \text{if } \vartheta \in \Phi^{\mathtt{AF}}_{\mathrm{Z}',\mathrm{O}'}; \\ \mathsf{tr}_x(\vartheta[X/Y]), & \text{otherwise;} \end{cases}$

其中 Z′、Z $\cup\{Y, X\}$、O′、O $\cup\{Y, X\}$，以及 mst(Y, X, x) $\forall y.(y \in Y) \leftrightarrow (x \le y \wedge \forall z.(x \le z \le y) \rightarrow z \in X)$；对于某个新鲜的不动点变量 $Y \in \mathrm{Vr}_2 \setminus \mathsf{free}(\vartheta)$，其中两个二阶存在量词的取值范围是有限树。

定理 13。在有限分支树上，AFGμ-CALCULUS[1S] $\le$ WMTL。

证明。为证明 AFGμ-CALCULUS[1S] 被 WMTL 包含，为便于表述，我们针对句子证明以下命题：对于任意 AFGμ-CALCULUS[1S] 不动点句子 $\vartheta \in \Theta^{\mathtt{AF}}_{\emptyset,\emptyset}$、Kripke 树 $\mathcal{T}$ 和节点 $w \in \mathrm{T}$，均有

$$w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing} \quad \textit{iff} \quad \mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \varnothing \models \mathsf{tr}_x(\vartheta)\,.$$

将此性质推广到公式是显而易见的，因此留给读者完成。

- [$\vartheta = \mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\varphi$, $\varphi \in \Phi^{\mathtt{AF}}_{\{X_1,\ldots,X_k\}\,\{X_1,\ldots,X_k\}}$] $_x\,\vartheta = \exists^{\mathrm{T}} X.\ x \in X \wedge \forall x.\ x \in X \rightarrow$对于,: 首先注意到 tr() () () $\exists^{\mathrm{T}} Y.$ $Y\ X\ x \wedge {}_x\Big(\varphi[X_1/Y, \ldots, X_k/Y]\!\downarrow_{\{Y\}}\Big)$ 9 $w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing}$ $\subseteq$ mst(,,)tr。由引理，当且仅当存在一棵包含 w 的有限树 W T，使得 W 中的每个节点 v 都属于 $[\![\varphi[X_1/Y, \ldots, X_k/Y]\!\downarrow_{\{Y\}}]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing[Y\mapsto \mathrm{W}\downarrow_v]}$。此时，利用以下事实即可轻松得出结论：对于每棵树 U $\subseteq$T 及其每个节点 $u \in$U，均有 (i) $u \in [\![\varphi[X_1/Y, \ldots, X_k/Y]\!\downarrow_{\{Y\}}]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing[Y\mapsto \mathrm{U}\downarrow_u]}$

  当且仅当 $\mathcal{T}, \{x \mapsto u\}, \varnothing[Y \mapsto \mathrm{U}\!\downarrow_u] \models \mathsf{tr}_x\Big(\varphi[X_1/Y, \ldots, X_k/Y\!\downarrow_{\{Y\}}\Big),$，这要归功于定理 10；并且 (ii) $\mathcal{T}$, $\{x \mapsto u\}, \varnothing[Y \mapsto \mathrm{Z}\ X \mapsto \mathrm{U}] \models \mathsf{mst}(Y, X, x)$ 当且仅当 Z $=$U$\!\downarrow_u$，对每棵树 Z $\subseteq$T。
- [$\vartheta = \nu X_1 \ldots \nu X_k.\,\varphi$,对于 $\varphi \in \Phi^{\mathtt{AF}}_{\{X_1,\ldots,X_k\},\ \{X_1,\ldots,X_k\}}$]: 由于 μ-CALCULUS 的最大不动点算子与最小不动点算子之间具有对偶性，众所周知，

$$\begin{aligned} [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing} &= [\![\neg\mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots, X_k/\neg X_k]]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing} \\ &= \mathrm{T} \setminus [\![\mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots, X_k/\neg X_k]]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing} \\ &= \mathrm{T} \setminus [\![\mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\mathtt{pnf}(\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots, X_k/\neg X_k])]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing}. \end{aligned}$$

  这意味着 $w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing}$ 当且仅当 $w \notin [\![\mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\mathsf{pnf}(\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots, X_k/\neg X_k])]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing}$。现在注意，如果 $\varphi \in \Phi^{\mathtt{AF}}_{\{X_1,\ldots,X_k\},\ \{X_1,\ldots,X_k\}}$，那么 $\mathsf{pnf}(\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots X_k/\neg X_k]) \in \Phi^{\mathtt{AF}}_{\{X_1,\ldots,X_k\},\ \{X_1,\ldots,X_k\}}$ 也成立，因此，$\mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\mathsf{pnf}(\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots, X_k/\neg X_k]) \in \Theta^{\mathtt{AF}}_{\emptyset,\ \emptyset}$。根据前一项，我们知道

$$w \notin [\![\mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\mathtt{pnf}(\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots, X_k/\neg X_k])]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing}$$

  iff

$$\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \varnothing \not\models \mathsf{tr}_x(\mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\mathtt{pnf}(\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots, X_k/\neg X_k]))\,.$$

  因此， $w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing}$ 当且仅当 $\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}, \varnothing \not\models \mathsf{tr}_x(\mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\mathsf{pnf}(\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots, X_k/\neg X_k]))$. 此时，容易看出 $\mathsf{tr}_x(\vartheta) = \neg\mathsf{tr}_x(\mu X_1 \ldots \mu X_k.\,\mathsf{pnf}(\neg\varphi[X_1/\neg X_1, \ldots, X_k/\neg X_k]))$，由此立即可得 $w \in [\![\vartheta]\!]^{\mathcal{T}}_{\varnothing}$当且仅当 $\mathcal{T}, \{x \mapsto w\}$, $\varnothing \models \mathsf{tr}_x(\vartheta)$。 □

III. STL* 的语法与语义

定义 5（STL* 语法）。STL* 状态（φ）和路径（ψ）公式由原子命题集 AP 中的原子命题归纳构造，遵循以下文法，其中 $p \in \mathrm{AP}$:

1) $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \mathbb{U}_{\varphi} \varphi \mid \varphi \mathbb{R}_{\varphi} \varphi \mid \varphi \mathbb{S}_{\varphi} \varphi \mid \varphi \mathbb{B}_{\varphi} \varphi \mid \mathrm{E}\psi \mid \mathrm{A}\psi$;

2) $\psi ::= \varphi \mid \neg\psi \mid \psi \wedge \psi \mid \psi \vee \psi \mid \mathrm{X}\ \psi \mid \psi$ 直到算子 $\psi \mid \psi$ 释放算子 ψ.

给定两棵 Kripke 树 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}'$ 以及一个节点集 W，我们称 $\mathcal{T}'$ 是 $\mathcal{T}$关于 $\mathcal{T}^{\star}$ 的一个（严格）W-子树，如果 $\mathcal{T}'$ 是 $\mathcal{T}$的一个（严格）子树，与 $\mathcal{T}$具有相同的根节点，并且对于 $w \in$ 中属于 $\mathcal{T}'$W 的所有节点， w 在 $\mathcal{T}$中的所有子节点也属于 $\mathcal{T}'$。如果 $\mathcal{T}$是 $\mathcal{T}'$的一个（严格）W-子树，则称 $\mathcal{T}'$ 是 $\mathcal{T}$的一个（严格）W-超树。此外，给定一棵 Kripke 树 $\mathcal{T}$及其节点 w，我们用 $\mathcal{T}_w$ 表示以 w为根节点的 $\mathcal{T}$子树。

定义 6（STL* 语义）。给定两棵 Kripke 树 $\mathcal{T}^{\star}$、$\mathcal{T}$，其中包含 $\mathcal{T} \sqsubseteq \mathcal{T}^{\star}$，对于所有 STL* 状态公式 φ_1、 φ_2 和 ϕ，均有:

1）$\mathcal{T} \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_1 \mathbb{U}_{\phi} \varphi_2$ 当存在 $\mathcal{T}$ 的一个严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$-子树 $\mathcal{T}'$，使得 $\mathcal{T}' \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_2$，并且对于它的所有严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$-超树 $\mathcal{T}''$（这些超树是 $\mathcal{T}$ 的严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$-子树），均有 $\mathcal{T}'' \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_1$；2）$\mathcal{T} \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_1 \mathbb{R}_{\phi} \varphi_2$ 当对于 $\mathcal{T}$ 的所有严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$-子树 $\mathcal{T}'$，均有 $\mathcal{T}' \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_2$，或者存在 $\mathcal{T}$ 的一个严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$-超树 $\mathcal{T}''$，该超树同时是 $\mathcal{T}$ 的严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$-子树，并且满足 $\mathcal{T}'' \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_1$；3）$\mathcal{T} \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_1 \mathbb{S}_{\phi} \varphi_2$ 当存在 $\mathcal{T}$ 的一个严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$-超树 $\mathcal{T}'$，该超树同时是 $\mathcal{T}^{\star}$ 的子树，并且满足 $\mathcal{T}' \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_2$，且对于 $\mathcal{T}'$ 的所有严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$- 子树 $\mathcal{T}''$（这些子树是 $\mathcal{T}$ 的严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$- 超树），均有 $\mathcal{T}'' \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_1$；4）$\mathcal{T} \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_1 \mathbb{B}_{\phi} \varphi_2$ 当对于 $\mathcal{T}^{\star}$ 的所有严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$- 超树 $\mathcal{T}'$（这些超树同时是 $\mathcal{T}$ 的子树），均有 $\mathcal{T}' \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_2$，或者存在 $\mathcal{T}$ 的一个严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$- 子树 $\mathcal{T}''$，该子树同时是 $\mathcal{T}$ 的严格 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}}$-超树，并且满足 $\mathcal{T}'' \models^{\mathcal{T}^{\star}} \varphi_1$；其中， $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}^{\star}} \left\{ w \in \mathrm{W}_{\mathcal{T}} \,\middle|\, \mathcal{T}_w \models^{\mathcal{T}_w^{\star}} \phi \right\}$ 是 ϕ 的指称。