与对合 Stone 代数相关逻辑的无切割序列风格系统

Liliana M. Cant´u Mart´ınFigallo

数学系，数学研究所（INMABB），南方国立大学（UNS），布兰卡港，阿根廷

arXiv:2304.11621v1 [math.LO] 23 Apr 2023

摘要

在 [4, 5], 中引入了一种与一类称为对合 Stone 代数的代数结构相关的逻辑（称为 Six）。这类代数记为 S，首次在 [6] 中被视为研究与有限值 Łukasiewicz–Moisil 代数理论相关的某些问题的工具。事实上，Six 是相对于类 S 保持真值度的逻辑。

除此之外，研究证明 Six 是一种六值逻辑，同时也是一种形式不一致逻辑（LFI）；此外，还可以用原始联结词集合定义一致性算子。研究还给出了一个 Six 的 Gentzen 风格系统（该系统不具备切消去性质）。此外，在 [5], 中证明了 Six 是一种由有限个矩阵确定的矩阵逻辑；更确切地说，是由四个矩阵确定的。然而，在 [17] 中，这一结果得到了进一步强化，证明这四个矩阵中仅有一个即可确定 Six，也就是说，Six 可以由单个六元素逻辑矩阵确定。

在本文中，我们利用这一最新结果，采用 Avron、Ben-Naim 和 Konikowska 提出的方法，给出 Six 的不同 Gentzen 系统，并证明这些系统具有消去切性质。这使我们能够对该方法得出一些结论，并为精简过程提出其他工具。最后，我们基于其中一个系统给出 Six 的判定程序。

MSC（2010）：主要分类 06D35，次要分类 03B60。

关键词：真值度、形式不一致性逻辑、Gentzen 系统、对合 Stone 代数。

1 引言

为了将五值 Łukasiewicz-Moisil代数刻画为其补元满足某些条件的 De Morgan代数，并获得四值和三值情形的相应刻画，R. Cignoli 和 M. Sagastume 在 [6] 中引入了对合 Stone 代数这一类，并将其记作 S。这两位作者还证明（除其他结果外）S 是一个簇，为其建立了拓扑对偶性，并利用这种

对偶性确定了该类的次直不可约单对象和单对象。从代数的角度看，S-代数是在 De Morgan代数上附加一个一元运算得到的，记作 ∇。更确切地说，设 A 是一个 De Morgan代数，令 $K(A)$ 为所有满足以下条件的元素 $a \in A$ 的集合： a 的德·摩根否定 $\neg a$ 与 a 的布尔补相同。对每个 $a \in A$，令 $K_a = \{k \in K(A) : a \leq k\}$；若 K_a 有最小元，则将其记作 ∇a。于是，对合 Stone 代数类就是所有满足以下条件的 De Morgan代数 A ：对每个 $a \in A$， ∇a 都存在，且映射 $a \mapsto \nabla a$ 是格同态。

在 [4, 5], 中，首次考察了与对合 Stone 代数类相关联的一种逻辑。更准确地说，文中定义了与对合 Stone 代数相关联、保持真值度的逻辑，并将其命名为 Six。这遵循了一种非常普遍的模式，可适用于任何带有序关系的真值结构类；其意图是发挥多值性的特点，聚焦于由保持真值下确界所产生的推理概念，而不只是保持最大值 1。除此之外，文中证明了 Six 是一种多值逻辑（具有六个真值），可由有限个矩阵（四个矩阵）刻画。此外，Six 还是一种次协调逻辑；并且文中证明，它确实是一种 LFI（形式不一致逻辑），其一致性算子可用原有的联结词集合定义。此外， [4, 5]中给出了一个 Six 的 Gentzen 风格系统。遗憾的是，该系统不具备切消去性质（如下文所示）。

六值逻辑过去因各种原因并在不同上下文中出现。[14], 作者介绍了一种适用于表示不完全知识的六值逻辑。这种逻辑的实际优势在于，它允许系统随着时间推移以及从外部世界获取更多知识，逐步推理出它将知道或不会知道什么（或者什么可能发生或不可能发生）。为了捕捉世界不断变化的本质，他们区分了两类未知知识值：永久或永恒未知值，以及暂时未知值。值得注意的是，为这个六元素真值集合提出的两个序之一，与图 1 中 $\mathbb{S}_6$ 的序一致。关于六值逻辑的其他示例可参见 [13, 15, 11]。

近年来，由对合 Stone 代数导出的逻辑逐渐受到关注。在 [17], 中，研究证明 Six 是 Belnap-Dunn 四值逻辑（即 De Morgan代数簇的保序逻辑）的保守扩张，并为其给出了一种有限的 Hilbert 风格公理化，由此可以得到一个判定程序。更一般地，作者提出了一种方法，可以对每个超 Belnap 逻辑进行保守扩张，从而得到 Six 的扩展；他们还证明，以此方式定义的每个逻辑，都可以通过向相应的超 Belnap 基础逻辑添加固定的有限条规则模式来公理化。另一方面， [16], 中引入了完美旁一致代数这一类代数，它们是增添了完善算子的 De Morgan代数（见 [16]）。事实证明，这些代数与对合 Stone 代数项等价。后来，这些作者研究了与完美旁一致代数相关的 1-断言逻辑和保序逻辑。综上，我们认为，Six 是一个有趣的六值逻辑实例，具有良好的代数语义，值得进一步研究。

另一方面， [2], 中的作者采用 Rasiowa-Sikorski分解方法论，为所有基于非确定性矩阵的命题逻辑构造了可靠且完备的证明系统，并使用 n-序列式形式体系。随后， [3], 提出了一种通用方法，可将给定的可靠且完备的 n-序列式证明系统转化为等价的、采用普通双侧序列的可靠且完备系统，适用于满足某种最小表达能力条件的语言。通过这些步骤得到的系统，在规则的数量和规模方面都很难说是最优的（见 [2, 3]）。正如我们将看到的，本研究为 Six 构造了两个证明系统：一个采用 6-序列，另一个采用普通双侧序列；前者包含 84 条规则，后者包含 230 条规则。此外，其中许多规则至多需要六个上序列式来引入一个二元联结词。因此， [2, 3]还提出了三条通用精简原则，以将这些规则化简为更紧凑的形式。然而，精简过程完全不是算法化的，而且在很大程度上取决于不同阶段所作的选择，以及主导这一过程者的技能和能力。

本文的研究重点有两个；第一个目标是为 Six 提出一个具有消去切割性质的序列系统。众所周知，切割消去定理在证明论中发挥着重要作用，因为它使我们能够控制证明的规模和结构；因此，可以通过分析证明的结构推导出逻辑的许多性质（例如各种插值定理）。为此，我们利用了[17], 中的一项结果，该结果表明 Six 可由一个含有 6 个元素的矩阵确定。随后，我们沿用 Avron等人提到的方法，为 Six 提出新的 Gentzen 风格系统，且这些系统都具有消去切割性质。第二个目标是利用实现第一个目标所积累的经验，为精简过程提出新的原则和工具，并尝试将其中的某些部分“机械化”。这使我们得以构造一个含有 26 条规则的无切割序列系统，这些规则引入（相互作用的）联结词，并且各有一个或两个上序列式。最后，我们明确给出一个基于这一系统的 Six 判定程序；该程序改编自 Gentzen 为经典命题逻辑和直觉主义命题逻辑提出的原始判定过程（见 [18]），并由此得到自底向上的证明搜索。

2 预备知识

回顾一下，De Morgan代数是一种结构 $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$，其类型为 (2, 2, 1, 0, 0)，且其约化结构 $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是一个有界分配格，并且 $\neg$ 满足以下恒等式：

$$\neg\neg x \approx x, \quad \text{and}$$

$$\neg(x \wedge y) \approx \neg x \vee \neg y.$$

设 A 为 De Morgan代数，若存在 $b \in A$使得 $a \vee b = 1$ 且 $a \wedge b = 0$，则称 $a \in A$ 为补元；称 b 为 a 的布尔补，并记作a'。如果元素 a的补元存在，则它是唯一的。我们用 $B(A)$ 表示中心

A，即 A中所有补元组成的集合。可以看出， $B(A)$ 是 A的德·摩根子代数。令 $K(A)$ 为 A 的子集，由所有满足以下条件的元素 $a \in B(A)$ 构成： a的德·摩根否定 $\neg a$与其补元 a'重合。对于每个 $a \in A$，令$K_a = \{k \in K(A)$： $a \leq k\}$。如果 K_a 具有最小元，则如 [6]中所示，将其记为 ∇a。如果对于每个 $a \in A$， K_a 都具有最小元，则称 A 为 ∇-De Morgan代数。用 S 表示对合 Stone 代数的类；它是 ∇-De Morgan 代数的子类，并具有如下性质：从 A 到 $K(A)$ 的映射 $a \mapsto \nabla a$ 是一个格同态。

在 [6], 中已证明，S 是一个方程类。事实上，当且仅当存在满足以下方程的算子 $\nabla : A \to A$ 时，De Morgan代数 $A \in$S:

$$\nabla 0 \approx 0,$$

$$a \wedge \nabla a \approx a,$$

$$\nabla(a \wedge b) \approx \nabla a \wedge \nabla b,$$

$$\neg\nabla a \wedge \nabla a \approx 0.$$

对于每个 $n \geq 2$， $\mathbf{L}_n$ 表示具有 n 个元素的 Lukasiewicz 链 $0 < \frac{1}{n-1} < \cdots < \frac{n-2}{n-1} < 1$, 其具有众所周知的格结构，并且对于 $i = 0$、1、.....、$n-1$, $\neg(\frac{i}{n-1}) = 1 - \frac{i}{n-1}$。代数 $\mathbf{L}_n$ 是对合 Stone 代数的例子，对所有 $x \neq 0$ 和 $\nabla 0 = 0$ 定义 $\nabla x = 1$。次直不可约代数为 $\mathbf{L}_n$（当 $2 \leq n \leq 5$ 时）以及图 1 中给出的 S-代数 $\mathbb{S}_6$ 。

由以下事实：对于 $2 \leq n \leq 5$, $\mathbf{L}_n$ 是 $\mathbb{S}_6$ 的 S-子代数，我们得到：

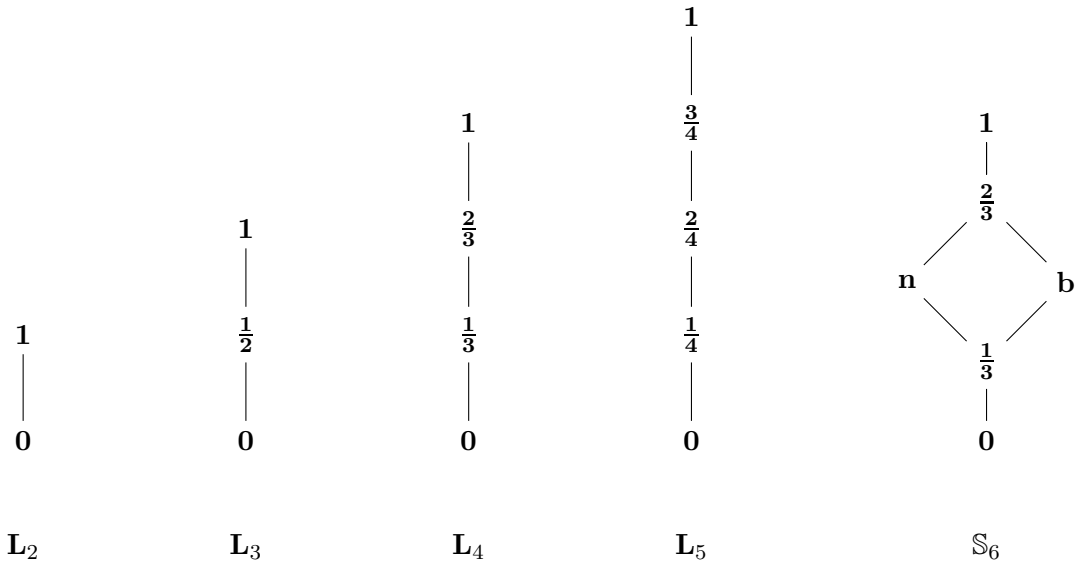
命题 2.1 (*[6]*) $\mathbb{S}_6$ 生成簇 S。

在 [4, 5], 中，研究了与对合 Stone 代数相关、保持真值度的逻辑。这遵循一种非常一般的模式，该模式适用于任何具有序关系的真值结构类；其意图是利用多值性，聚焦于由保持真值下确界而产生的推理概念，因此不只是保持真值 1。更确切地说，令 $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \wedge, \vee, \neg, \nabla, \bot, \top\rangle$为由某个固定的可数命题变量集 Var生成的、型为 (2, 2, 1, 1, 0, 0) 的绝对自由代数。通常，字母 $p, q, \ldots$ 表示命题变量，字母 $\alpha, \beta, \ldots$ 表示公式，而 $\Gamma, \Sigma, \ldots$ 表示公式集。令 $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$，则$\Gamma \models$属于 Six α 当且仅当存在有限的 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ，使得 $\forall A \in$ S， $\forall v \in$ Hom($\mathfrak{Fm}, A$)， $\forall a \in A$；若$v(\gamma) \geq a$对所有 $\gamma \in \Gamma_0$成立，则 $v(\alpha) \geq a$。此外，$\emptyset \models$属于 Six α 当且仅当 $\forall A \in$ S， $\forall v \in$ Hom($\mathfrak{Fm}, A$)， $v(\alpha) = 1$。

显然，Six 是一种句子逻辑，即$\models$Six 是定义在Fm上的有定义限后承关系。此外，

命题2.2 (*[4, 5]*) 设 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha\} \subseteq Fm$, $n \geq 1$。那么，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models$Six α 当且仅当不等式 $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \preccurlyeq \alpha$ 在簇 S 中成立。

由此可得



其中， $\mathbb{S}_6$ 中的运算由上图给出，且 $\neg \mathbf{0}=\mathbf{1}, \neg \mathbf{1}=\mathbf{0}$n $=$ n,¬b $=$b, $\neg \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$和 $\neg \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$。此外，对于所有 $x \neq \mathbf{0}$和 $\nabla \mathbf{0}=\mathbf{0}, \quad \nabla x=\mathbf{1}$。

图 1：S 的次直不可约代数。

命题2.3（*[4, 5]*）设 $\alpha, \beta \in Fm$。则，

(i) $\alpha \models^{\leq}$ s β 当且仅当不等式 $\alpha \preccurlyeq \beta$ 在 S 中成立，

(ii) $\alpha \models^{\leq}$ s β 当且仅当方程 $\alpha \approx \beta$ 在 S 中成立。

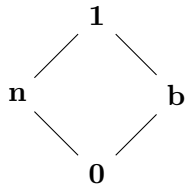
文献 [5], 证明，Six 是由四个矩阵确定的矩阵逻辑。

命题2.4 与 involutive Stone 代数相关联、保持真值度的逻辑 Six，是一种由矩阵 $\langle \mathbb{S}_6, \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)\rangle$, $\langle \mathbb{S}_6, [\mathbf{b})\rangle$, $\langle \mathbb{S}_6, \left[\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)\rangle$ and$\langle \mathbb{S}_6, [\mathbf{1})\rangle$ 确定的六值逻辑。

这里， $[a)$ 表示由 a生成的 $\mathbb{S}_6$ 格滤子。后来， [17], 中的结果进一步得到加强，表明 Six 可以由一个逻辑矩阵确定。

命题 2.5（*[17]*）Six 是由矩阵 $\langle \mathbb{S}_6, [\mathbf{b})\rangle$ 确定的逻辑。

注 2.1 众所周知，Dunn-Belnap 的四元结构如下图所示



$\mathfrak{B}_4$

其中否定定义为 $\neg\mathbf{0} = \mathbf{1}$, $\neg\mathbf{n} = \mathbf{n}$, $\neg\mathbf{b} = \mathbf{b}$ 和 $\neg\mathbf{1} = \mathbf{1}$；一方面，$_4$,$\mathbf{L}_4$,，另一方面，它们分别是 $\mathbb{S}_6$ 的德摩根子代数。这一事实解释了我们为何如此命名 $\mathbb{S}_6$ 中的元素。

在 [5], 中给出了一个用于 Six 的多结论序列系统。令 $\mathfrak{S}$ 为其公理和规则如下的序列演算：

公理

$$\text{(structural axiom)}\quad \alpha \Rightarrow \alpha \qquad (\bot)\quad \bot \Rightarrow \qquad (\top)\quad \Rightarrow \top$$

$$\text{(First modal axiom)}\quad \alpha \Rightarrow \nabla\alpha \qquad \text{(Second modal axiom)}\quad \Rightarrow \nabla\alpha \vee \neg\nabla\alpha$$

结构规则

$$\text{(Left weakening)}\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Sigma} \qquad \text{(Right weakening)}\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha}$$

$$\text{(Cut)}\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \quad \alpha, \Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}$$

逻辑规则

$$(\wedge\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow\wedge)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Sigma, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \wedge \beta}$$

$$(\vee\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Sigma \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow\vee)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \vee \beta}$$

$$(\neg)\quad \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha} \qquad (\neg\neg\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow\neg\neg)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\alpha, \Sigma}$$

$$(\nabla)\quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \nabla\Sigma}{\Gamma, \nabla\alpha \Rightarrow \nabla\Sigma} \qquad (\neg\nabla\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \neg\nabla\alpha \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow \Sigma}$$

遗憾的是，演算 $\mathfrak{S}$ 不具有切消去性质。事实上，不难验证，若 p 和 q 是两个命题变元，则序列

$$p \vee q \Rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

在 $\mathfrak{S}$ 中是可证的，而且它的每个证明都必然使用切规则。

另一方面，Six 是一种 da Costa 意义上的次协调逻辑（参见 [9, 10]），因为在存在矛盾的情况下，该逻辑中的推理未必会变得平凡。

命题 2.6（[4, 5]）Six 是非平凡、非爆炸且次完备的。

此外，在 Six 的语言中，令 $\bigcirc(p) = \{\neg\nabla(p \wedge \neg p)\}$。那么，

引理 2.1（[4, 5]）Six 关于 $\bigcirc(p)$ 和 $\neg$ 是有限温和爆炸的。

由以上内容可得：

定理 2.1（[4, 5]）Six 是一个关于 $\neg$ 且一致性算子 $\circ$ 由 $\circ\alpha = \neg\nabla(\alpha \wedge \neg\alpha)$定义的 LFI，其中对所有 $\alpha \in Fm$均成立。

此外，对于所有 $n \geq 0$, $\models_{\boldsymbol{Six}} \circ\neg^n\circ\alpha$。特别地，$\models_{\boldsymbol{Six}} \circ\circ\alpha$。因此，Six 使逻辑 mCi 的所有公理 $(cc)_n$ 都有效（见 [7]）。与 LFI 的通常框架一样，也可以按如下方式在 Six 中定义一个不一致性算子 $\bullet$：

$$\bullet\alpha =_{def} \neg \circ \alpha.$$

那么，$\bullet\alpha$ 在逻辑上等价于 $\nabla(\alpha \wedge \neg\alpha)$。注意，$\bullet$ 和 $\circ$ 可以分别等价地表示为 $\bullet\alpha = \nabla(\alpha \wedge \neg\alpha)$ 和 $\circ\alpha = \Delta(\alpha \vee \neg\alpha)$。这两个联结词的真值表如下：

p	$\circ p$	$\bullet p$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{n}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

最后，接下来我们将在 [3] 的背景下介绍矩阵 $\langle \mathbb{S}_6, [\mathbf{b}) \rangle$。更确切地说，设 $\mathcal{T}_6 = \{\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_{\mathbf{23}}, \mathbf{1}\}$ 为真值集合，其底层序由图 1 中的图示给出；再设 $\mathcal{M}_6$ 为矩阵 $\langle \mathcal{T}_6, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$，其中 $\mathcal{D} = \{\mathbf{b}_{\mathbf{23}}, \mathbf{1}\}$ 为指定值集合，且 $\mathcal{O} = \{\hat{\wedge}, \hat{\vee}, \hat{\neg}, \hat{\nabla}\}$，其中，对于 $x, y \in \mathcal{T}_6$, $x\hat{\wedge}y =$ 下确界 $\{x, y\}$ $x\hat{\vee}y =$ 上确界$\{x, y\}$，$\hat{}$，运算 $\hat{\neg}$ 和 ∇ 由下表给出

x	$\hat{\neg}x$	$\hat{\nabla}x$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{n}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{1}$
$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

3 矩阵逻辑的无切割序列系统

在 [2], 中，作者采用 Rasiowa-Sikorski分解方法论，为所有基于非确定性矩阵的命题逻辑构造了可靠且完备的 n-序列证明系统。随后，在 [3], 中，作者提出了一种通用方法，可将给定的可靠且完备的 n-序列证明系统转换为等价的普通双侧序列可靠且完备系统，适用于满足某种最小表达能力条件的语言。本节将回顾这两种方法，并考虑普通（确定性）矩阵。

设 $\mathscr{L}$ 是一个命题语言， $\mathfrak{Fm}$ 是由某个可数变量集生成的、在 $\mathscr{L}$ 上的绝对自由代数，其底集（即公式集）为 Fm。回顾一下， $\mathscr{L}$ 的一个（取 n 个真值的）矩阵 $\mathcal{M}$ 是一个三元组 $\langle \mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ ，其中 $\mathcal{T}$ 是一个有限的非空真值集， $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个非空真子集，而 $\mathcal{O}$ 对命题语言中的每个 k 元联结词 f 都包含一个 k 元函数 $\hat{}f\colon \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}$。

回顾一下， $\mathcal{M}$ 中的一个赋值是一个函数 $v\colon Fm \to \mathcal{T}$，满足

$$v(f(\psi_1, \ldots, \psi_k)) = \hat{f}(v(\psi_1), \ldots, v(\psi_k))$$

对于每个 k 元联结词 f 及所有 $\psi_1, \ldots, \psi_k \in Fm$。若公式 $\alpha \in Fm$ 被给定赋值 v 满足，记作 $v \models \alpha$，则 $v(\alpha) \in \mathcal{D}$。若赋值 v 满足序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ，记作 $v \models \Gamma \Rightarrow \Delta$，则 v 不满足 Γ 中的某个公式，或者 v 满足 Δ 中的某个公式。若一个序列被所有赋值满足，则称其为有效（相对于矩阵 $\mathcal{M}$）。我们用 $\vdash_{\mathcal{M}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ 表示序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 $\mathcal{M}$ 中有效。

现在，假设 $\mathcal{T} = \{t_0, \ldots, t_{n-1}\}$，其中 $n \geq 2$，且 $\mathcal{D} = \{t_d, \ldots, t_{n-1}\}$，其中 $1 \leq d \leq n-1$。直观而言， n-序列由 n 个公式集组成，每个真值对应一个公式集；正如我们将看到的，若对于某些 i、 $0 \leq i \leq n-1$ ，第 i个公式集中存在一个公式， v 将其赋值为第 i个真值，则该赋值 v 验证给定的 n-序列。

定义 3.1（参见 *[2]*）在 $\mathscr{L}$ 上的一个 n–序列是如下表达式

$$\Gamma_0 \mid \cdots \mid \Gamma_{n-1}$$

其中，对于每个 i， Γ_i 都是一个有限公式集。赋值 v 满足 n–序列 $\Gamma_0 \mid \cdots \mid \Gamma_{n-1}$ ，当且仅当存在 i、 $0 \leq i \leq n-1$ 和 $\psi \in \Gamma_i$ ，使得 $v(\psi) = t_i$。如果每个赋值 v都满足某个 n–序列，则该序列是有效的。

注意，赋值 v 满足一个普通序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ，当且仅当 v 满足 n–序列$\Gamma_1 \mid \cdots \mid \Gamma_{n-1}$，其中对所有 $0 \leq i \leq d-1$ 都有 $\Gamma_i = \Gamma$，且对所有 $d \leq j \leq n-1$ 都有 $\Gamma_j = \Delta$。 n-序列的另一种表示方式是使用带符号公式集。语言 $\mathscr{L}$ 上的带符号公式 $\mathcal{T}$是形如以下形式的表达式

$$t_i : \psi$$

其中 $t_i \in \mathcal{T}$和 $\psi \in Fm$。赋值 v 满足带符号公式 $t_i :\ \psi$ 当且仅当 $v(\psi) = t_i$。若 $\Omega \subseteq \mathcal{T}$和 $\Gamma \subseteq Fm$，我们用 $\Omega : \Gamma$ 表示集合

$$\Omega : \Gamma = \{t : \alpha \mid t \in \Omega, \alpha \in \Gamma\}$$

若 $\Omega = \{t\}$，我们写作 $t : \Gamma$ ，而不写 $\{t\} : \Gamma$。若某个赋值满足 $\Omega : \Gamma$中的某个带符号公式，则称该赋值满足带符号公式集 $\Omega : \Gamma$；若每个赋值 $v \in \mathcal{V}$都满足 $\Omega : \Gamma$ ，则称 $\Omega : \Gamma$ 有效。显然， n–序列 $\Gamma_0 \mid \cdots \mid \Gamma_{n-1}$ 有效，当且仅当带符号$_{n-1}$公式集$\bigcup_{i=0} t_i : \Gamma_i$ 有效。

在 [2] 中，针对任何基于 n值矩阵的逻辑，都构造了一个通用的 n-序列系统。考虑 n值矩阵 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ ，并令 $SF_{\mathcal{M}}$ 为如下定义的系统:

- 公理: $\mathcal{T} : \alpha$
- 结构规则: 弱化
- 逻辑规则: 对于每个 k元联结词 f 以及每个 $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{T}^k$

$$\frac{\Omega, a_1 : \alpha_1 \ \ldots \ \Omega, a_k : \alpha_k}{\Omega, \hat{f}(a_1, \ldots, a_k) : f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$$

定理 3.1（*[2]*）系统 $SF_{\mathcal{M}}$ 相对于矩阵 $\mathcal{M}$是可靠且完备的

可以将满足某些表达性条件的 n值逻辑的给定 n序列演算，转换为通常的双边序列演算（见 [3]）。令 Fm_p 为 Fm 的所有公式组成的集合，这些公式仅以 p 作为其命题变元，即 $Fm_p = \{\alpha \in Fm : Var(\alpha) = \{p\}\}$。将集合 $\mathcal{T} \setminus \mathcal{D}$记为 $\mathcal{N}$。

定义 3.2（*[3]*）语言 $\mathscr{L}$对于 $\mathcal{M}$ 而言是充分表达的，当且仅当对于任意 i、 $0 \leq i \leq n-1$，存在自然数 l_i、m_i以及公式 α^i_j、 $\beta^i_k \in Fm_p$，对于 $1 \leq j \leq l_i$和 $1 \leq k \leq m_i$，使得对于任意赋值 v，以下条件成立:

(i) $\alpha^i_1 = p$ 如果 $t_i \in \mathcal{N}$ 且 $\beta^i_1 = p$ 如果 $t_i \in \mathcal{D}$，(ii) 对于任意 $\varphi \in Fm$ 和 $t_i \in \mathcal{T}$

$$v(\varphi) = t_i \Leftrightarrow v(\alpha^i_1[p/\varphi]), \ldots, v(\alpha^i_{l_i}[p/\varphi]) \in \mathcal{N} \, and \, v(\beta^i_1[p/\varphi]), \ldots, v(\beta^i_{m_i}[p/\varphi]) \in \mathcal{D}$$

其中， $\alpha^i_j[p/\varphi]$ ($\beta^i_k[p/\varphi]$) 是在 α^i_j (β^i_k) 中将 p 代换为 φ 后得到的公式。

如果 Γ 是一组公式且 $\alpha \in Fm_p$，我们用 $\alpha[p/\Gamma]$ 表示集合

$$\alpha[\Gamma] = \{\alpha[p/\gamma] \mid \gamma \in \Gamma\}$$

翻译过程包括将每个 n-序列替换为一组语义等价的双边序列式。

假设 $\mathscr{L}$ 是一种表达能力足够强的语言，对于 $0 \leq i \leq n-1$，令 l_i、m_i、α^i_j 和 β^i_k 如定义 3.2 所述。考虑 $\mathscr{L}$ 上的 n–序列 $\Sigma = \Gamma_0 \mid \cdots \mid \Gamma_{n-1}$。$\pi$ 是 n–序列 Σ 的一个划分，当且仅当它是一个元组 $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_{n-1})$，且对于每个 i，π_i 都是集合 Γ_i 的一个如下形式的划分：

$$\pi_i = \{\Gamma'_{ij} \mid 1 \leq j \leq l_i\} \cup \{\Gamma''_{ik} \mid 1 \leq k \leq m_i\}$$

例 3.1 假设 $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, t_2\}$，也就是说，$n = 3$ 和 $0 \leq i \leq 2$。令 $l_0 = 2 = l_2$、$l_1 = 1$、$m_0 = 1$、$m_1 = 2$ 和 $m_2 = 0$ 如定义 3.2 所述。那么，给定的一个 3-序列的划分 π 具有如下形式：

$$\left(\left\{\Gamma'_{01}, \Gamma'_{02}, \Gamma''_{01}\right\}, \left\{\Gamma'_{11}, \Gamma''_{11}, \Gamma''_{12}\right\}, \left\{\Gamma'_{21}, \Gamma'_{21}\right\}\right)$$

请注意，在此上下文中，允许存在空单元。因此，若有 3-序列 $\phi, \varphi \mid \delta \mid \gamma, \rho$，则下一个是它的一个划分。

$$\left(\left\{\{\phi\}, \emptyset, \{\varphi\}\right\}, \left\{\emptyset, \{\delta\}, \emptyset\right\}, \left\{\{\gamma, \rho\}, \emptyset\right\}\right)$$

于是，给定 n-序列 Σ的一个划分 π，我们定义由 Σ 和划分 π确定的双边序列式 Σ_π 如下：

$$\bigcup_{j=1}^{l_0} \alpha^0_j[\Gamma'_{0j}], \ldots, \bigcup_{j=1}^{l_{n-1}} \alpha^{n-1}_j[\Gamma'_{(n-1)j}] \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{m_0} \beta^0_k[\Gamma''_{0k}], \ldots, \bigcup_{k=1}^{m_{n-1}} \beta^{n-1}_k[\Gamma''_{(n-1)k}]$$

设 Π为 n–序列 Σ的所有划分构成的集合，将该集合记作 $TWO(\Sigma)$

$$TWO(\Sigma) = \{\Sigma_\pi \mid \pi \in \Pi\}$$

于是，若 $\mathcal{C}$是一个关于 $\mathscr{L}$的 n–序列演算，则我们将由下式给出的关于 $\mathscr{L}$ 的（普通）序列演算记作 $TWO(\mathcal{C})$：

公理：对 $\mathcal{C}$的所有公理 A，$TWO(A)$，

Inference rules: $\dfrac{TWO(S)}{\Sigma'}$, where $\dfrac{S}{R}$ is a rule in $\mathcal{C}$ and $\Sigma' \in TWO(R)$.

那么，

定理 3.2（*[3]*）设 $\mathscr{L}$ 是关于 $\mathcal{M}$ 的足够丰富的语言，并设 $\mathcal{C}$ 是关于 $\mathcal{M}$ 可靠且完备的序列演算。那么， $TWO(\mathcal{C})$ 关于 $\mathcal{M}$ 可靠且完备，并且切规则在 $TWO(\mathcal{C})$ 中是可容许的。

4 基于 Six 带符号公式集的证明系统

本节将按照第 3 节所述的方法，为 Six 构造 6-序列演算及其向双边普通序列演算的转换。如 [3]，所指出的，采用上述一般方法得到的 n-序列演算通常并非最优（双边演算也是如此）。因此，在这两种情况下，都可以运用 [2] 中的三条通用精简原则（将在下一节介绍），将其简化为更紧凑的形式。

定义 4.1 6-序列演算 SF-Six 定义如下:

公理

$$\{\mathbf{0}:\alpha, \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}:\alpha, \mathbf{n}:\alpha, \mathbf{b}:\alpha, \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}:\alpha, \mathbf{1}:\alpha\} \quad where \quad \alpha \in \mathfrak{Fm}$$

结构规则

$$\frac{\Omega}{\Omega'} \quad where \quad \Omega \subseteq \Omega'$$

逻辑规则 $i, j \in \mathcal{T}_6$

$$(\vee_{i,j}) \quad \frac{\Omega, i:\alpha,\ j:\beta}{\Omega, \mathrm{Sup}\{i,j\}:\alpha\vee\beta} \qquad (\wedge_{i,j}) \quad \frac{\Omega, i:\alpha,\ j:\beta}{\Omega, \mathrm{Inf}\{i,j\}:\alpha\wedge\beta}$$

$$(\neg_i) \quad \frac{\Omega, i:\alpha}{\Omega, \mathbf{1}-i:\neg\alpha} \quad for\ i \neq \mathbf{n}\ and\ i \neq \mathbf{b}$$

$$(\neg_{\mathbf{n}}) \quad \frac{\Omega, \mathbf{n}:\alpha}{\Omega, \mathbf{n}:\neg\alpha} \qquad (\neg_{\mathbf{b}}) \quad \frac{\Omega, \mathbf{b}:\alpha}{\Omega, \mathbf{b}:\neg\alpha}$$

$$(\nabla_{\mathbf{0}}) \quad \frac{\Omega, \mathbf{0}:\alpha}{\Omega, \mathbf{0}:\nabla\alpha} \qquad (\nabla_i) \quad \frac{\Omega, i:\alpha}{\Omega, \mathbf{1}:\nabla\alpha} \quad for\ i \neq \mathbf{0}$$

命题 4.1

(i) SF-Six 关于矩阵 $\mathcal{M}_6$ 是可靠且完备的,

(ii) 切规则在 SF-Six 中是可容许的。

证明。根据构造并考虑定理 3.1。 □

现在，我们将 6-序列演算 SF-Six 转换为普通序列演算。我们将第 3 节所描述的转换之后得到的双侧（普通）序列演算称为 TS-Six。

命题 4.2 Six 的语言具有足够的表达能力。

证明。事实上，只需检查以下内容即可。

$$
\begin{array}{lcl}
v(\alpha)=\mathbf{0} & \Longleftrightarrow & v(\alpha), v(\nabla\alpha)\in\mathcal{N},\ v(\neg\alpha)\in\mathcal{D}\\
v(\alpha)=\mathbf{\frac{1}{3}} & \Longleftrightarrow & v(\alpha)\in\mathcal{N},\ v(\neg\alpha), v(\nabla\alpha)\in\mathcal{D}\\
v(\alpha)=\mathbf{n} & \Longleftrightarrow & v(\alpha), v(\neg\alpha)\in\mathcal{N}\\
v(\alpha)=\mathbf{b} & \Longleftrightarrow & v(\alpha), v(\neg\alpha)\in\mathcal{D}\\
v(\alpha)=\mathbf{\frac{2}{3}} & \Longleftrightarrow & v(\neg\alpha)\in\mathcal{N},\ v(\alpha), v(\nabla\neg\alpha)\in\mathcal{D}\\
v(\alpha)=\mathbf{1} & \Longleftrightarrow & v(\neg\alpha), v(\nabla\neg\alpha)\in\mathcal{N},\ v(\alpha)\in\mathcal{D}
\end{array}
$$

□

于是， α^i_j 和 β^i_k 的公式（见定义 3.2）为:

i	α^i_j's	β^i_k
$\mathbf{0}$	$\alpha^{\mathbf{0}}_1 = p$, $\alpha^{\mathbf{0}}_2 = \nabla p$	$\beta^{\mathbf{0}}_1 = \neg p$
$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\alpha^{\frac{1}{3}}_1 = p$	$\beta^{\frac{1}{3}}_1 = \neg p$, $\beta^{\frac{1}{3}}_2 = \nabla p$
$\mathbf{n}$	$\alpha^{\mathbf{n}}_1 = p$, $\alpha^{\mathbf{n}}_2 = \neg p$	–
$\mathbf{b}$	–	$\beta^{\mathbf{b}}_1 = p$, $\beta^{\mathbf{b}}_2 = \neg p$
$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\alpha^{\frac{2}{3}}_1 = \neg p$	$\beta^{\frac{2}{3}}_1 = p$, $\beta^{\frac{2}{3}}_2 = \nabla\neg p$
$\mathbf{1}$	$\alpha^{\mathbf{1}}_1 = \neg p$, $\alpha^{\mathbf{1}}_2 = \nabla\neg p$	$\beta^{\mathbf{1}}_1 = p$,

我们从翻译 SF-Six 的公理开始。为此，我们必须计算普通序列集合。

$$TWO(\alpha\,|\,\alpha\,|\,\alpha\,|\,\alpha\,|\,\alpha\,|\,\alpha)$$

该集合包含 324 个元素，所有元素都可以通过 $\alpha \Rightarrow \alpha$ 使用弱化[1]获得。

[1]我们编写了一个小型 Python 程序来计算所有这些序列。

为了转换逻辑规则，我们将考虑到

$TWO(\ \alpha|\ \ |\ \ |\ \ |\ \ |) = \{\alpha \Rightarrow, \nabla\alpha \Rightarrow, \Rightarrow \neg\alpha\}$ $TWO(|\ \ |\ \ |\alpha|\ \ |) = \{\Rightarrow \alpha, \Rightarrow \neg\alpha\} TWO($
$|\alpha|\ \ |\ \ |\ \ |) = \{\alpha \Rightarrow, \Rightarrow \neg\alpha, \Rightarrow \nabla\alpha\}$ $TWO(|\ \ |\ \ |\ \ |\alpha|) = \{\neg\alpha \Rightarrow, \Rightarrow \alpha, \Rightarrow \nabla\neg\alpha\} TWO($
$|\ \ |\alpha|\ \ |\ \ |) = \{\alpha \Rightarrow, \neg\alpha \Rightarrow\}$ $TWO(|\ \ |\ \ |\ \ |\ \ |\alpha) = \{\neg\alpha \Rightarrow, \nabla\neg\alpha \Rightarrow, \Rightarrow \alpha\}$

那么，否定 $\neg$ 的普通序列规则为 [2]:

$$(\neg_{\mathbf{0}})_1 \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\neg\neg\alpha \Rightarrow} \qquad (\neg_{\mathbf{0}})_2 \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\nabla\neg\neg\alpha \Rightarrow} \qquad (\neg_{\mathbf{0}})_3 \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\Rightarrow \neg\alpha}$$

$$(\neg_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})_1 \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha}{\neg\neg\alpha \Rightarrow} \qquad (\neg_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})_2 \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha}{\Rightarrow \neg\alpha} \qquad (\neg_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})_3 \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha}{\Rightarrow \nabla\neg\neg\alpha}$$

$$(\neg_{\mathbf{n}})_1 \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow}{\neg\alpha \Rightarrow} \qquad (\neg_{\mathbf{n}})_2 \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow}{\neg\neg\alpha \Rightarrow}$$

$$(\neg_{\mathbf{b}})_1 \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\Rightarrow \neg\alpha} \qquad (\neg_{\mathbf{b}})_2 \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\Rightarrow \neg\neg\alpha}$$

$$(\neg_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})_1 \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha}{\neg\alpha \Rightarrow} \qquad (\neg_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})_2 \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha}{\Rightarrow \neg\neg\alpha} \qquad (\neg_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})_3 \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha}{\Rightarrow \nabla\neg\alpha}$$

$$(\neg_{\mathbf{1}})_1 \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha}{\neg\alpha \Rightarrow} \qquad (\neg_{\mathbf{1}})_2 \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha}{\nabla\neg\alpha \Rightarrow} \qquad (\neg_{\mathbf{1}})_3 \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha}{\Rightarrow \neg\neg\alpha}$$

显然，规则 $(\neg_{\mathbf{0}})_3, (\neg_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})_2, (\neg_{\mathbf{n}})_1, (\neg_{\mathbf{b}})_1, (\neg_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})_1$ 和 $(\neg_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})_3, (\neg_{\mathbf{1}})_1$ 以及 $(\neg_{\mathbf{1}})_2$ 是多余的（序列结论同时也是序列前提），可以删去。

类似地，我们得到 ∇ 的规则。

[2]为简洁起见，我们省略了上下文。

$$(\nabla_{\mathbf{0}})_1\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\mathbf{0}})_2\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\nabla\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\mathbf{0}})_3\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\Rightarrow \neg\nabla\alpha}$$

$$(\nabla_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})_1\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha}{\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})_2\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha}{\nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})_3\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha}{\Rightarrow \nabla\alpha}$$

$$(\nabla_{\mathbf{n}})_1\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow}{\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\mathbf{n}})_2\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow}{\nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\mathbf{n}})_3\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow}{\Rightarrow \nabla\alpha}$$

$$(\nabla_{\mathbf{b}})_1\ \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\mathbf{b}})_2\ \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\mathbf{b}})_3\ \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha}{\Rightarrow \nabla\alpha}$$

$$(\nabla_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})_1\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha}{\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})_2\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha}{\nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})_3\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha}{\Rightarrow \nabla\alpha}$$

$$(\nabla_{\mathbf{1}})_1\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha}{\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\mathbf{1}})_2\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha}{\nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow} \qquad (\nabla_{\mathbf{1}})_3\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha}{\Rightarrow \nabla\alpha}$$

同样，规则 $(\nabla_{\mathbf{0}})_1, (\nabla_{\mathbf{0}})_3, (\nabla_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})_3$ 和 $(\nabla_{\mathbf{1}})_3$ 是多余的，因此可以删除。

析取的规则是：

$$(\vee_{\mathbf{0},\mathbf{0}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \beta \Rightarrow \quad \nabla\beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \vee \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta);\ \nabla(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad (\vee_{\mathbf{0},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\beta \quad \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \vee \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta);\ \nabla(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

$$(\vee_{\mathbf{0},\mathbf{n}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \beta \Rightarrow \quad \neg\beta \Rightarrow}{(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad (\vee_{\mathbf{0},\mathbf{b}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow (\alpha \vee \beta);\ \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\vee_{\mathbf{0},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \neg\beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\mathbf{0},\mathbf{1}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \neg\beta \Rightarrow \quad \nabla\neg\beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

$$(\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\mathbf{0}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha \quad \beta \Rightarrow \quad \nabla\beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \vee \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta);\ \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha \quad \beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\beta \quad \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \vee \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta);\ \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\mathbf{n}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha \quad \beta \Rightarrow \quad \neg\beta \Rightarrow}{\alpha \vee \beta \Rightarrow;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad (\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\mathbf{b}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha \quad \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha \quad \neg\beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\mathbf{1}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\alpha \quad \neg\beta \Rightarrow \quad \nabla\neg\beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

$$(\vee_{\mathbf{n},\mathbf{0}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow \quad \beta \Rightarrow \quad \nabla\beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \vee \beta \Rightarrow;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad (\vee_{\mathbf{n},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow \quad \beta \Rightarrow \quad \Rightarrow \neg\beta \quad \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \vee \beta \Rightarrow;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

$$(\vee_{\mathbf{n},\mathbf{n}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow \quad \beta \Rightarrow \quad \neg\beta \Rightarrow}{\alpha \vee \beta \Rightarrow;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad (\vee_{\mathbf{n},\mathbf{b}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\vee_{\mathbf{n},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow \quad \neg\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\mathbf{n},\mathbf{1}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \neg\alpha \Rightarrow \quad \neg\beta \Rightarrow \quad \nabla\neg\beta \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

$$(\vee_{\mathbf{b},\mathbf{0}})\ \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha \ \ \beta \Rightarrow \quad \nabla\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\mathbf{b},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha \ \ \beta \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\beta \quad \Rightarrow \nabla\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\vee_{\mathbf{b},\mathbf{n}})\ \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha \ \ \beta \Rightarrow \quad \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\mathbf{b},\mathbf{b}})\ \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\vee_{\mathbf{b},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha \ \ \neg\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\mathbf{b},\mathbf{1}})\ \frac{\Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \neg\alpha \ \ \neg\beta \Rightarrow \quad \nabla\neg\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

$$(\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\mathbf{0}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha \ \ \beta \Rightarrow \quad \nabla\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha \ \ \beta \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\beta \quad \Rightarrow \nabla\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\mathbf{n}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha \ \ \beta \Rightarrow \quad \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\mathbf{b}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha \quad \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha \ \ \neg\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)} \qquad (\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\mathbf{1}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\alpha \ \ \neg\beta \Rightarrow \quad \nabla\neg\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

$$(\vee_{\mathbf{1},\mathbf{0}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \ \ \beta \Rightarrow \quad \nabla\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad (\vee_{\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \ \ \neg\beta \Rightarrow \quad \nabla\neg\beta \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

$$(\vee_{\mathbf{1},\mathbf{n}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \ \ \beta \Rightarrow \quad \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad (\vee_{\mathbf{1},\mathbf{b}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

$$(\vee_{\mathbf{1},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \ \ \neg\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad (\vee_{\mathbf{1},\mathbf{1}})\ \frac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \nabla\neg\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \alpha \ \ \neg\beta \Rightarrow \quad \nabla\neg\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta;\ \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow;\ \nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow}$$

最后，合取的规则为：

$$(\wedge_{\mathbf{0},\mathbf{0}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\alpha \ \ \beta \Rightarrow \quad \nabla\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta);\ \nabla(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow} \qquad (\wedge_{\mathbf{0},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\alpha \ \ \beta \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\beta \quad \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta);\ \nabla(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow}$$

$$(\wedge_{\mathbf{0},\mathbf{n}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\alpha \ \ \beta \Rightarrow \quad \neg\beta \Rightarrow}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta);\ \nabla(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow} \qquad (\wedge_{\mathbf{0},\mathbf{b}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta);\ \nabla(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow}$$

$$(\wedge_{\mathbf{0},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\alpha \ \ \neg\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \beta \quad \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta);\ \nabla(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow} \qquad (\wedge_{\mathbf{0},\mathbf{1}})\ \frac{\alpha \Rightarrow \quad \nabla\alpha \Rightarrow \ \Rightarrow \neg\alpha \ \ \neg\beta \Rightarrow \quad \nabla\neg\beta \Rightarrow \ \Rightarrow \beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow;\ \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta);\ \nabla(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow}$$

$(\wedge_{\frac{1}{3}},0)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \Rightarrow \nabla\alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \ \nabla\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \nabla\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow}; (\,); (\,)\ (\wedge_{\frac{1}{3}},\ 1\ 3\,)$

$\dfrac{\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \Rightarrow \nabla\alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta\ \ \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{\frac{1}{3}},n)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \Rightarrow \nabla\alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \ \neg\beta \Rightarrow}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{\frac{1}{3}},b)$

$\dfrac{\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \Rightarrow \nabla\alpha\ \ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{\frac{1}{3}},\ 2\ 3\,)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \Rightarrow \nabla\alpha\ \ \neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{\frac{1}{3}},$

$1)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \Rightarrow \nabla\alpha\ \ \neg\beta \Rightarrow\ \ \nabla\neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{n},0)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow\ \ \neg\alpha \Rightarrow\ \ \beta \Rightarrow\ \ \nabla\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ \Rightarrow ($

$\wedge_{n},\ 1\ 3\,)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow\ \ \neg\alpha \Rightarrow\ \ \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta\ \ \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{n,n})\ \dfrac{\alpha \Rightarrow\ \ \neg\alpha \Rightarrow\ \ \beta \Rightarrow\ \ \neg\beta \Rightarrow}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow}; (\,)\ (\wedge_{n,b})$

$\dfrac{\alpha \Rightarrow\ \ \neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla}; (\,); (\alpha \wedge \beta)\ (\wedge_{n},2\ 3\,)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow\ \ \neg\alpha \Rightarrow\ \ \neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow}; (\,)\ (\wedge_{n},1)$

$\dfrac{\alpha \Rightarrow\ \ \neg\alpha \Rightarrow\ \ \neg\beta \Rightarrow\ \ \nabla\neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow}; (\,)\ (\wedge_{b},0)\ \dfrac{\Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \ \nabla\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ \Rightarrow (\wedge_{b},\ 1\ 3\,)$

$\dfrac{\Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta\ \ \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{b,n})\ \dfrac{\Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \ \neg\beta \Rightarrow}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow \nabla}; (\,); (\alpha \wedge \beta)\ (\wedge_{b,b})$

$\dfrac{\Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta}; (\,)\ (\wedge_{b},2\ 3\,)\ \dfrac{\Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta}; (\,)\ (\wedge_{b},1)$

$\dfrac{\Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \neg\alpha\ \ \neg\beta \Rightarrow\ \ \nabla\neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta}; (\,)\ (\wedge_{\frac{2}{3}},0)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \nabla\neg\alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \ \nabla\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \nabla\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow}; (\,); (\,)\ (\wedge_{\frac{2}{3}},\ 1\ 3\,)$

$\dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \nabla\neg\alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta\ \ \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{\frac{2}{3}},n)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \nabla\neg\alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \ \neg\beta \Rightarrow}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow}; (\,)\ (\wedge_{\frac{2}{3}},b)$

$\dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \nabla\neg\alpha\ \ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{\frac{2}{3}},\ 2\ 3\,)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \nabla\neg\alpha\ \ \neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta\ \ \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow\ \ \Rightarrow \nabla\neg\ \alpha \wedge \beta}; (\,)\ ; (\,)\ (\wedge_{\frac{2}{3}},$

$1)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \nabla\neg\alpha\ \ \neg\beta \Rightarrow\ \ \nabla\neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta\ \ \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow\ \ \Rightarrow \nabla\neg\ \alpha \wedge \beta}; (\,)\ ; (\,)\ (\wedge_{1},0)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \ \nabla\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \ \nabla\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \nabla\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow}; (\,);$

$(\,)\ (\wedge_{1},\ 1\ 3\,)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \ \nabla\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\beta\ \ \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \ \Rightarrow \nabla\ \alpha \wedge \beta}; (\,); (\,)\ (\wedge_{1},n)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \ \nabla\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \beta \Rightarrow\ \ \neg\beta \Rightarrow}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow\ \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow};$

$(\,)\ (\wedge_{1},b)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \ \nabla\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow \neg\ \alpha \wedge \beta}; (\,)\ (\wedge_{1},2\ 3\,)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \ \nabla\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \Rightarrow \neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta\ \ \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta\ \ \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow\ \ \Rightarrow \nabla\neg\ \alpha \wedge \beta};$

$(\,)\ ; (\,)\ (\wedge_{1},1)\ \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow\ \ \nabla\neg\alpha \Rightarrow\ \Rightarrow \alpha\ \ \neg\beta \Rightarrow\ \ \nabla\neg\beta \Rightarrow\ \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta\ \ \neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow\ \ \nabla\neg\ \alpha \wedge \beta\ \ \Rightarrow}; (\,)\ ; (\,)$

命题 4.3

(i) TS-Six 相对于矩阵 $\mathcal{M}_6$ 是可靠且完备的,

（ii）切规则在 TS-Six 中是可容许的。

证明。根据 TS-Six 系统的构造以及定理 3.2。 □

5 精简双边序列系统 TS-Six

通过 [2] 的一般方法（并在第 3 节中进行了回顾）得到的双边演算 TS-Six，就规则而言几乎并非最优（这类“通用”系统通常都是如此）。因此，我们使用 [2] 中确立的三个一般精简原则，将其化为更紧凑的形式。在这三个原则中，第一个和第三个减少了规则的数量（这是我们衡量复杂度的主要标准），而第二个则通过减少规则的前提数来简化规则（由于第三个规则会增加前提数，其应用之后通常会接着应用前两个规则）。

回顾一下，如果每当 $\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \ \ldots \ \Gamma_k \Rightarrow \Delta_k}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$ 是规则 (r) 的一个有效应用，且 Γ' 和 Δ' 是公式集时，

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma' \Rightarrow \Delta_1, \Delta' \ \ldots \ \Gamma_k, \Gamma' \Rightarrow \Delta_k, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

也是（r） [3]的一个有效应用。于是，三条精简原则如下:

原则1。如果 R 中的某条规则可由其他规则导出，则可以将其删除。

原则2。如果$\frac{S}{\Sigma}$ （其中 S 是前提集合）是 R中的一条规则， S' 是 S 的子集，且 $\frac{S'}{\Sigma}$ 可在 R 中导出（可能需要使用切规则），那么可以用 $\frac{S'}{\Sigma}$替换$\frac{S}{\Sigma}$。特别地，如果 $\frac{S}{\Sigma}$是 R中的一条规则，$\Gamma \Rightarrow \Delta \in S$，且 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 可由 $S \setminus \{\Gamma \Rightarrow \Delta\}$ 在 R中导出，那么可以用$\frac{S \setminus \{\Gamma \Rightarrow \Delta\}}{\Sigma}$ 替换 $\frac{S}{\Sigma}$。其中两个非常简单但相当有用的情形是： $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 被某条公理或 $\Gamma \Rightarrow \Delta$中的某个序列包含。

原则3. 设 G 是一个序列系统。如果在 G 中有规则 $\dfrac{\{\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i\}_{1 \le i \le n}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$、$\dfrac{\{\Pi_j \Rightarrow \Theta_j\}_{1 \le j \le k}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$，且二者都是上下文无关的，那么我们可以用以下新规则替换这两条规则

$$\frac{\{\Gamma_i, \Pi_j \Rightarrow \Delta_i, \Theta_j\}_{1 \le i \le n, 1 \le j \le k}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

[3]第5页系统 $\mathfrak{S}$ 的规则（¬）不是上下文无关的。

原则1和原则2的证明是直接的。原则3通过适当地使用弱化、收缩规则（由于我们处理的是公式集合而非公式序列，因此该规则是隐含的），以及利用这两条规则都是上下文无关的这一事实而得到。除这些原则外，我们还将系统地使用以下命题。

命题5.1 设 $\mathfrak{GC}$ 是一个序列演算，具有恒等公理以及弱化和收缩的结构规则（左侧和右侧）；并设 $\dfrac{S \cup \{\Rightarrow \varphi\}}{\Sigma}$ 和 $\dfrac{S \cup \{\varphi \Rightarrow\}}{\Sigma}$ 是 $\mathfrak{GC}$的两个上下文无关规则。那么， $\dfrac{S}{\Sigma}$ 可在 $\mathfrak{GC}$中导出。

证明。设 $S = \{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n\}$ 和 Σ 是 $\Gamma \Rightarrow \Delta$。由于（r1） $\dfrac{S \cup \{\Rightarrow \varphi\}}{\Sigma}$ 和（r2） $\dfrac{S \cup \{\varphi \Rightarrow\}}{\Sigma}$ 是上下文无关规则，根据原则3，我们有

$$(\mathrm{r})\ \frac{\{\Gamma_i, \Gamma_j \Rightarrow \Delta_i, \Delta_j\}_{1 \leq i,j \leq n} \cup \{\varphi, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i\}_{1 \leq i \leq n} \cup \{\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, \varphi\}_{1 \leq i \leq n} \cup \{\varphi \Rightarrow \varphi\}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

可在 $\mathfrak{GC}$中导出。现在，对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，序列 Γ_i、 $\Gamma_j \Rightarrow \Delta_i$、 Δ_j、 $1 \leq j \leq n$； φ、 $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ 以及 $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$、 φ 都可以通过弱化规则从 $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ 得到，而 $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ 是（r）的上序列式（对于 $i = j$）。此外， $\varphi \Rightarrow \varphi$ 是恒等公理的一个实例。因此， $\dfrac{S}{\Sigma}$ 可在 $\mathfrak{GC}$中导出。 □

由规则 $(\neg_0)_1$ 和 $(\neg_{\frac{1}{3}})_1$ 以及命题5.1，我们得到以下可导出规则

$$\frac{\alpha \Rightarrow \Rightarrow \neg\alpha}{\neg\neg\alpha \Rightarrow}$$

并且，根据该规则、规则 $(\neg_n)_2$ 和命题5.1，我们有

$$\frac{\alpha \Rightarrow}{\neg\neg\alpha \Rightarrow}$$

在 SF-Six 中是可导出的。现在，恢复上下文后，我们有

$$(\neg\neg \Rightarrow)\ \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

以类似的方式，由规则 $(\neg_{\frac{2}{3}})_2$、、$(\neg_1)_3$、、$(\neg_b)_2$ 以及命题5.1，我们得到

$$(\Rightarrow \neg\neg)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\neg\alpha}$$

因此， $\neg$ 的规则为

$$(\neg\neg \Rightarrow)\ \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg\neg)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\neg\alpha}$$

$$(\nabla\neg\neg\Rightarrow)\ \frac{\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\alpha}{\nabla\neg\neg\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad(\Rightarrow\nabla\neg\neg)\ \frac{\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\alpha\quad\Gamma\Rightarrow\Delta,\nabla\alpha}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\nabla\neg\neg\alpha}$$

关于联结词 ∇，由规则（$\nabla_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}$）$_3$，（$\nabla_{\mathbf{1}}$）$_3$和命题5.1可得$\Rightarrow\alpha$、$\frac{\neg\alpha\Rightarrow}{\Rightarrow\nabla\alpha}$。由此规则，利用（$\nabla_{\mathbf{b}}$）$_3$和命题5.1可得$\frac{\Rightarrow\alpha}{\Rightarrow\nabla\alpha}$；利用（$\nabla_{\mathbf{n}}$）$_3$和命题5.1可得$\frac{\neg\alpha\Rightarrow}{\Rightarrow\nabla\alpha}$。

另一方面，由$(\nabla_{\mathbf{1}})_2,(\nabla_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})_2$和命题5.1可得(1)$\frac{\neg\alpha\Rightarrow\Rightarrow\alpha}{\nabla\neg\nabla\alpha\Rightarrow}$。我们将此规则以两种方式组合：结合($\nabla_{\mathbf{n}}$)$_2$和命题5.1，可得(2) $\frac{\neg\alpha\Rightarrow}{\nabla\neg\nabla\alpha\Rightarrow}$；结合$(\nabla_{\mathbf{b}})_2$和命题5.1，可得 $\frac{\Rightarrow\alpha}{\nabla\neg\nabla\alpha\Rightarrow}$。现在，我们运用原则3，将规则(1)、(2)和$(\nabla_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}})_2$组合起来，得到

$$(\nabla\neg\nabla\Rightarrow)\ \frac{\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\Delta,\alpha,\nabla\alpha}{\Gamma,\nabla\neg\nabla\alpha\Rightarrow\Delta}$$

以类似方式推理并组合适当的规则（恢复上下文后），我们得到SF-Six中的以下可导规则。

$$(\Rightarrow\nabla)\ \frac{\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\Delta,\alpha}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\nabla\alpha}\qquad(\nabla\nabla\Rightarrow)\ \frac{\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\alpha}{\nabla\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

$$(\neg\nabla\Rightarrow)\ \frac{\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\Delta,\alpha,\nabla\alpha}{\neg\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad(\Rightarrow\neg\nabla)\ \frac{\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\alpha}{\Gamma\Rightarrow\neg\nabla\alpha,\Delta}$$

$$(\nabla\neg\nabla\Rightarrow)\ \frac{\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\Delta,\alpha,\nabla\alpha}{\Gamma,\nabla\neg\nabla\alpha\Rightarrow\Delta}$$

另一方面，我们有以下结果:

命题5.2 规则$\frac{\nabla\alpha\Rightarrow}{\alpha\Rightarrow}$、 $\frac{\nabla\alpha\Rightarrow}{\Rightarrow\neg\alpha}$和$\frac{\Rightarrow\nabla\alpha}{\Rightarrow\nabla\neg\neg\alpha}$在TS-Six中是可容许的。

证明。我们只证明第一条规则（其余规则的证明类似）。假设序列 $\nabla\alpha\Rightarrow$ 在 TS-Six 中可证。那么，由命题 4.3，$\models_{\mathcal{M}_6}\nabla\alpha\Rightarrow$。于是，对每个 $\mathcal{M}_6$-赋值 v，$v(\nabla\alpha)=\hat{\nabla}v(\alpha)\in\{\mathbf{0},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\mathbf{n}\}$。根据 $\hat{\nabla}$ 的定义（见第2节），我们有 $\hat{\nabla}v(\alpha)=\mathbf{0}$；因此，对每个赋值 v，$v(\alpha)=\mathbf{0}$。也就是说，$\models_{\mathcal{M}_6}\alpha\Rightarrow$；并且由命题 4.3，$\alpha\Rightarrow$ 在 TS-Six 中可证。□

因此，根据这一点以及原则2和原则3，我们可以将规则（$\nabla\neg\neg\Rightarrow$）、（$\Rightarrow\nabla\neg\neg$）、（$\nabla\nabla\Rightarrow$）和（$\Rightarrow\neg\nabla$）改写如下:

$$(\nabla\neg\neg\Rightarrow)\ \frac{\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\nabla\neg\neg\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad(\Rightarrow\nabla\neg\neg)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\nabla\alpha}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\nabla\neg\neg\alpha}$$

$$(\nabla\nabla\Rightarrow)\ \frac{\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\nabla\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad\qquad(\Rightarrow\neg\nabla)\ \frac{\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\neg\nabla\alpha,\Delta}$$

采用类似的推理，并结合适当的规则（仅使用命题5.1），我们可以得到SF-Six中关于联结词 $\vee$ 的以下可导规则。

由 $(\vee_{0,\ 0})$ 和 $(\vee_{0,\ 1_3})$ 可得 $\alpha\Rightarrow\ \nabla\alpha\Rightarrow\Rightarrow\neg\alpha\quad\beta\Rightarrow\Rightarrow\neg\beta(\alpha\vee\beta)\ \Rightarrow$。由此以及 $(\vee_{0,\ n})$ 可得 (I) $\alpha\Rightarrow\ \nabla\alpha\Rightarrow\Rightarrow\neg\alpha\quad\beta\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\ \Rightarrow$。此外，由 $(\vee_{\frac{1}{3},\ 0})$ 和 $(\vee_{\frac{1}{3},\ 1_3})$ 可得 $\alpha\Rightarrow\Rightarrow\nabla\alpha\ \Rightarrow\neg\alpha\quad\beta\Rightarrow\Rightarrow\neg\beta(\alpha\vee\beta)\ \Rightarrow$；再由此以及 $(\vee_{\frac{1}{3},\ n})$ 可得 $\alpha\Rightarrow\Rightarrow\nabla\alpha\ \Rightarrow\neg\alpha\quad\beta\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\ \Rightarrow$。由最后一个规则和 (I) 可得 (II) $\alpha\Rightarrow\Rightarrow\neg\alpha\quad\beta\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\ \Rightarrow$。

另一方面，由 $(\vee_{n,\ 0})$ 和 $(\vee_{n,\ 1_3})$ 可得 $\alpha\Rightarrow\ \neg\alpha\Rightarrow\quad\beta\Rightarrow\Rightarrow\neg\beta(\alpha\vee\beta)\ \Rightarrow$，将其与 $(\vee_{n,\ n})$ 结合可得 $\alpha\Rightarrow,\ \neg\alpha\Rightarrow\quad\beta\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\ \Rightarrow$。由最后一个规则和 (II) 可得 $\alpha\Rightarrow\quad\beta\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\ \Rightarrow$。然后，在恢复上下文后，~~我们得到 TS-Six~~ 中如下的（经典）可导出规则。

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\beta,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\alpha\vee\beta,\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

类似地，由 $(\vee_{0,0})$ 和 $(\vee_{0,1_3})$ 可得：$\frac{\alpha\Rightarrow\ \nabla\alpha\Rightarrow\Rightarrow\neg\alpha\quad\beta\Rightarrow\Rightarrow\neg\beta}{\Rightarrow\neg\ \alpha\vee\beta}$()。由此以及 $(\vee_{0,b})$ 可得：(III) $\frac{\alpha\Rightarrow\ \nabla\alpha\Rightarrow\Rightarrow\neg\alpha\quad\Rightarrow\neg\beta}{\Rightarrow\neg\ \alpha\vee\beta}$()。另一方面，由 $(\vee_{\frac{1}{3},0})$ 和 $(\vee_{\frac{1}{3},1_3})$ 可得 $\frac{\alpha\Rightarrow\Rightarrow\neg\alpha\ \Rightarrow\nabla\alpha\ \alpha\vee\beta\Rightarrow\Rightarrow\neg\beta}{\Rightarrow\neg\ \alpha\vee\beta}$()；将其与 $(\vee_{\frac{1}{3},b})$ 结合可得：$\frac{\alpha\Rightarrow\Rightarrow\neg\alpha\ \Rightarrow\nabla\alpha\quad\Rightarrow\neg\beta}{\Rightarrow\neg\ \alpha\vee\beta}$()。由此以及 (III) 可得 (IV) $\frac{\alpha\Rightarrow\Rightarrow\neg\alpha\quad\Rightarrow\neg\beta}{\Rightarrow\neg\ \alpha\vee\beta}$()。另一方面，由 $(\vee_{b,0})$ 和 $(\vee_{b,1_3})$ 可得 $\Rightarrow\alpha,\ \Rightarrow\neg\alpha\quad\Rightarrow\neg\beta$

$\Rightarrow\neg\alpha\quad\beta\Rightarrow\Rightarrow\neg\beta$, ()；由此以及 $(\vee_{b,b})$ 可得 $\Rightarrow\alpha,\Rightarrow\neg\ \alpha\vee\beta$ ()。将这一最后的规则与 (IV) 结合，可得 $\frac{\Rightarrow\neg\alpha\quad\Rightarrow\neg\beta}{\Rightarrow\neg\ \alpha\vee\beta}$()。现在，恢复上下文后，我们得到 TS-Six 中下一个可导出规则。

$$(\Rightarrow\neg\vee)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\neg\alpha,\Delta\quad\Gamma\Rightarrow\neg\beta,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\neg(\alpha\vee\beta),\Delta}$$

由于对合 Stone 代数尤其是 De Morgan代数，因此 De Morgan 律成立，所以预计这条最后的规则可在 TS-Six 中导出。

这条规则 $\frac{\Rightarrow\beta}{\Rightarrow\alpha\vee\beta}$ 还需要进一步推导。我们在表1中展示其推导过程。

同样地，我们可以得到$\dfrac{\Rightarrow \alpha}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$。根据原则3并恢复上下文，我们有

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta, \Delta}$$

通过类似的推理，我们可以得到以下规则

$$(\neg\vee \Rightarrow)\ \frac{\neg\alpha, \neg\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg(\alpha \vee \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

命题 5.3 下列规则在 TS-Six 中是可容许的。

$$\text{(i)}\ \frac{\nabla\alpha \Rightarrow \quad \nabla\beta \Rightarrow}{\nabla(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad \text{(ii)}\ \frac{\Rightarrow \nabla\alpha, \nabla\beta}{\Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)}$$

$$\text{(iii)}\ \frac{\nabla\neg\alpha, \nabla\neg\beta \Rightarrow}{\nabla\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow} \qquad \text{(iv)}\ \frac{\Rightarrow \nabla\neg\alpha \quad \Rightarrow \nabla\neg\beta}{\Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta)}$$

证明。（i）：假设 $\nabla\alpha \Rightarrow$ 和 $\nabla\beta \Rightarrow$ 可证。根据命题 4.3，$\models_{\mathcal{M}_6} \nabla\alpha \Rightarrow$ 和 $\models_{\mathcal{M}_6} \nabla\beta \Rightarrow$。设 v 为一个赋值。于是，$v(\nabla\alpha) = \nabla v(\alpha) = \mathbf{0}$（因为对于每个 $x \in \mathcal{T}_6$，$\nabla x = \mathbf{0}$ 当且仅当 $x = \mathbf{0}$），并且 $v(\nabla\beta) = \nabla v(\beta) = \mathbf{0}$。因此，$v(\nabla(\alpha \vee \beta)) = \nabla(v(\alpha) \vee v(\beta)) = \nabla v(\alpha) \vee \nabla v(\beta) = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}$（回顾一下，$\nabla$ 是类 S 中的格同态）。

(ii)：类似于 (i)，并考虑到在 $\mathcal{M}_6$ 中成立：$x \neq \mathbf{0}$ 或 $y \neq \mathbf{0}$ 蕴含 $x \vee y \neq \mathbf{0}$。

(iii)：类似于 (i)，并考虑到在 $\mathcal{M}_6$ 中成立：$\neg x = \mathbf{0}$ 或 $\neg y = \mathbf{0}$ 蕴含 $\neg(x \vee y) = \mathbf{0}$。

(iv)：类似于 (i)，并考虑到在 $\mathcal{M}_6$ 中成立：$\neg x \neq \mathbf{0}$ 且 $\neg y \neq \mathbf{0}$ 蕴含 $\neg(x \vee y) \neq \mathbf{0}$。□

因此，析取的简化规则如下：

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta, \Delta}$$

$$(\neg\vee \Rightarrow)\ \frac{\neg\alpha, \neg\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg(\alpha \vee \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \neg\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta), \Delta}$$

$$(\nabla\vee \Rightarrow)\ \frac{\nabla\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \nabla\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\nabla(\alpha \vee \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \nabla\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \nabla\alpha, \nabla\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta), \Delta}$$

$$(\nabla\neg\vee \Rightarrow)\ \frac{\nabla\neg\alpha, \nabla\neg\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\nabla\neg(\alpha \vee \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \nabla\neg\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \nabla\neg\alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \nabla\neg\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta), \Delta}$$

Step	待合并的规则	所得规则
(1)	$(\vee_{\mathbf{1},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})$, $(\vee_{1,1})$	$\dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \ \nabla\neg\alpha \Rightarrow \Rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \beta\, \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(2)	$(\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})$, $(\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},1})$	$\dfrac{\Rightarrow \alpha\, \neg\alpha \Rightarrow \Rightarrow \nabla\neg\alpha \quad \Rightarrow \beta\, \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(3)	(1) , (2)	$\dfrac{\Rightarrow \alpha\, \neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta\, \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(4)	$(\vee_{\mathbf{1},\ \mathbf{n}})$, $(\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\mathbf{n}})$	$\dfrac{\Rightarrow \alpha\, \neg\alpha \Rightarrow \quad \beta \Rightarrow\ \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(5)	$(\vee_{\mathbf{1},\ \mathbf{b}})$, $(\vee_{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\mathbf{b}})$	$\dfrac{\Rightarrow \alpha\, \neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta\ \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(6)	(3), (5)	$\dfrac{\Rightarrow \alpha\, \neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(7)	$(\vee_{\mathbf{n},\mathbf{1}})$, $(\vee_{\mathbf{n},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})$	$\dfrac{\alpha \Rightarrow\ \neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta\, \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(8)	(7), $(\vee_{\mathbf{n},\ \mathbf{b}})$	$\dfrac{\alpha \Rightarrow\ \neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(9)	(6), (8)	$\dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(10)	$(\vee_{\mathbf{b},\ \mathbf{1}})$ $(\vee_{\mathbf{b},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})$	$\dfrac{\Rightarrow \alpha\ \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \beta\, \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(11)	(10), $(\vee_{\mathbf{b},\ \mathbf{b}})$	$\dfrac{\Rightarrow \alpha\ \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(12)	$(\vee_{\mathbf{0},\ \mathbf{1}})$, $(\vee_{\mathbf{0},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})$	$\dfrac{\alpha \Rightarrow \Rightarrow \neg\alpha\, \nabla\alpha \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta\, \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(13)	$(\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\mathbf{1}})$, $(\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}})$	$\dfrac{\alpha \Rightarrow \Rightarrow \neg\alpha\ \Rightarrow \nabla\alpha \quad \Rightarrow \beta\, \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(14)	(12), (13)	$\dfrac{\alpha \Rightarrow \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \beta\, \neg\beta \Rightarrow}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(15)	$(\vee_{\mathbf{0},\ \mathbf{b}})$, $(\vee_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\mathbf{b}})$	$\dfrac{\alpha \Rightarrow \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \beta\ \Rightarrow \neg\beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(16)	(14), (15)	$\dfrac{\alpha \Rightarrow \Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(17)	(11), (16)	$\dfrac{\Rightarrow \neg\alpha \quad \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$
(18)	(9), (17)	$\dfrac{\Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$

表1: $\dfrac{\Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$的推导

$\wedge$ 的规则精简过程与上述过程类似；由此得到的规则如下。

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\alpha,\beta,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\alpha\wedge\beta,\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\alpha,\Delta \quad \Gamma\Rightarrow\beta,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\alpha\wedge\beta,\Delta}$$

$$(\neg\wedge\Rightarrow)\ \frac{\neg\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta \quad \neg\beta,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\neg(\alpha\wedge\beta),\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\neg\wedge)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\neg\alpha,\neg\beta,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta),\Delta}$$

$$(\nabla\wedge\Rightarrow)\ \frac{\nabla\alpha,\nabla\beta,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\nabla(\alpha\wedge\beta),\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\nabla\wedge)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\nabla\alpha,\Delta \quad \Gamma\Rightarrow\nabla\beta,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\nabla(\alpha\wedge\beta),\Delta}$$

$$(\nabla\neg\wedge\Rightarrow)\ \frac{\nabla\neg\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta \quad \nabla\neg\beta,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\nabla\neg(\alpha\wedge\beta),\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\nabla\neg\wedge)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\nabla\neg\alpha,\nabla\neg\beta,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\nabla\neg(\alpha\wedge\beta),\Delta}$$

最后，我们提出一项新原则，即原则4，以便进一步优化某些规则。

命题5.4（原则4）设 $\mathfrak{GC}$ 是一个具有弱化和收缩（左侧和右侧）结构规则的序列演算。若（r）$\dfrac{\{\Gamma_i\Rightarrow\Delta_i\}_{1\leq i\leq n}}{\Gamma\Rightarrow\Delta}$ 是 $\mathfrak{GC}$ 的一条规则，并且存在公式集Γ_i'和Δ_i'，适用于 $1\leq i\leq n$，使得：

（i）$\Gamma_i'\subseteq\Gamma_i$ 和$\Delta_i'\subseteq\Delta'$,

（ii）序列 $\Gamma_i'\Rightarrow\Delta_i'$ 可在 $\mathfrak{GC}$ 中由 $\Gamma_i\Rightarrow\Delta_i$导出，且不使用规则（r）或切规则,

那么，（r）可替换为（r′）$\dfrac{\{\Gamma_i'\Rightarrow\Delta_i'\}_{1\leq i\leq n}}{\Gamma\Rightarrow\Delta}$。

证明。我们来看看 (r) 和 (r') 是否等价。显然，我们可以通过适当的弱化从 (r) 证明 (r')。反过来，也可以从 (r') 证明 (r)。事实上，

$$(\text{r'})\ \frac{\begin{array}{ccc}\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1 & & \Gamma_n\Rightarrow\Delta_n\\ \vdots & & \vdots\\ \Gamma_1'\Rightarrow\Delta_1' & \cdots & \Gamma_n'\Rightarrow\Delta_n'\end{array}}{\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

□

显然，如果 $\mathfrak{GC}$ 是无割序列演算，那么应用原理4后得到的系统也是无割的。

然后，根据原则4，我们可以替换以下规则：

$$\frac{\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\Delta,\alpha,\nabla\alpha}{\neg\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta} \quad \text{by} \quad \frac{\Gamma,\Rightarrow\Delta,\nabla\alpha}{\neg\nabla\alpha,\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

公理

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

结构规则

$$(w \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow w) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}$$

逻辑规则

$$(\vee \Rightarrow) \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta, \Delta}$$

$$(\neg\vee \Rightarrow) \frac{\neg\alpha, \neg\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg(\alpha \vee \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg\vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \neg\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta), \Delta}$$

$$(\nabla\vee \Rightarrow) \frac{\nabla\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \nabla\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\nabla(\alpha \vee \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \nabla\vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \nabla\alpha, \nabla\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta), \Delta}$$

$$(\nabla\neg\vee \Rightarrow) \frac{\nabla\neg\alpha, \nabla\neg\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\nabla\neg(\alpha \vee \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \nabla\neg\vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \nabla\neg\alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \nabla\neg\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \vee \beta), \Delta}$$

$$(\wedge \Rightarrow) \frac{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge) \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta, \Delta}$$

$$(\neg\wedge \Rightarrow) \frac{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \neg\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg(\alpha \wedge \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg\wedge) \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha, \neg\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta), \Delta}$$

$$(\nabla\wedge \Rightarrow) \frac{\nabla\alpha, \nabla\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\nabla(\alpha \wedge \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \nabla\wedge) \frac{\Gamma \Rightarrow \nabla\alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \nabla\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta), \Delta}$$

$$(\nabla\neg\wedge \Rightarrow) \frac{\nabla\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \nabla\neg\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\nabla\neg(\alpha \wedge \beta), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \nabla\neg\wedge) \frac{\Gamma \Rightarrow \nabla\neg\alpha, \nabla\neg\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \nabla\neg(\alpha \wedge \beta), \Delta}$$

$$(\neg\neg \Rightarrow) \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg\neg) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\neg\alpha}$$

$$(\nabla\neg\neg \Rightarrow) \frac{\nabla\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\nabla\neg\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \nabla\neg\neg) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla\alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla\neg\neg\alpha}$$

$$(\Rightarrow \nabla) \frac{\Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla\alpha} \qquad (\nabla \Rightarrow) \frac{\nabla\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\nabla\nabla\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\neg\nabla \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla\alpha}{\neg\nabla\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg\nabla) \frac{\nabla\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\nabla\alpha, \Delta}$$

$$(\nabla\neg\nabla \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla\alpha}{\Gamma, \nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow \Delta}$$

表2：GSix序列演算

and

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \Delta, \alpha, \nabla\alpha}{\Gamma, \nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad \text{by} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla\alpha}{\Gamma, \nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow \Delta}$$

通过这种方式，我们得到了精简的演算，并将其命名为 GSix，其规则如表2所示。

上述构造及对精简过程的详细描述构成了以下定理的证明。

定理 5.1

(i) GSix 关于矩阵 $\mathcal{M}_6$ 是可靠且完备的，

(ii) 切规则在 GSix 中是可容许的。

以下 是一个无切割的 GSix-证明，证明序列 $p \vee q \Rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$（参见第2节 ）.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{p \Rightarrow p, \neg\neg q}\,(\Rightarrow \neg\neg)}{p \Rightarrow \neg\neg p, \neg\neg q}\,(\vee \Rightarrow) \qquad \dfrac{\dfrac{q \Rightarrow q}{q \Rightarrow \neg\neg p, q}\,(\Rightarrow \neg\neg)}{q \Rightarrow \neg\neg p, \neg\neg q}\,\Rightarrow\!(\mathrm{w})}{p \vee q \Rightarrow \neg\neg p, \neg\neg q}}{p \vee q \Rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)}\,(\Rightarrow \neg\wedge)$$

本节将通过展示切消去性质的一个应用来结束。更确切地说，我们将证明，尽管 Six 是一种次协调逻辑，但它不蕴含任何矛盾。这将以一种非常简单的方式从切割消去定理中推出。首先，考虑以下引理。

引理5.1 设 γ 为一个公式。以下条件等价。

(i) 序列 $\Rightarrow \gamma \wedge \neg\gamma$ 在 GSix 中是可证的。(ii)
空序列 $\Rightarrow$ 在 GSix 中是可证的。

证明。(ii) $\Longrightarrow$(i)：显然。
(i) $\Longrightarrow$ (ii)：假设 $\Rightarrow \gamma \wedge \neg\gamma$ 在 GSix 中可证。那么，根据定理 5.1，存在一个 $\Rightarrow \gamma \wedge \neg\gamma$ 的无切推导 $\mathcal{D}$。于是， $\mathcal{D}$ 的形式为

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \gamma} \qquad \dfrac{\vdots}{\Rightarrow \neg\gamma}\,(\mathrm{r})}{\Rightarrow \gamma \wedge \neg\gamma}\,(\Rightarrow \wedge)$$

我们对 γ 的复杂度 $c(\gamma)$ 进行归纳。
基础步骤。如果 $c(\gamma) = 0$，那么 γ 是一个命题变元。因此，推理 (r) 的下序列式为 $\Rightarrow \neg p$。分析 GSix 的规则（切规则除外）后，我们得出结论：(r) 必须是右弱化，并且该推理的上序列式必须是空序列。

归纳步骤。假设 $c(\gamma) > 0$。那么，(r) 可以是规则 $(\Rightarrow \neg\vee)$、$(\Rightarrow \neg\wedge)$、$(\Rightarrow \neg\neg)$ 或 $(\Rightarrow \neg\nabla)$ 之一。我们只分析 (r) 为 $(\Rightarrow \neg\vee)$ 的情形，其他情形是类似的。在这种情况下，$\mathcal{D}$ 具有如下形式

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(1)}{\vdots}{\Rightarrow \alpha, \beta}}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}(\rightarrow \vee) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(2)}{\vdots}{\Rightarrow \neg\alpha} \qquad \dfrac{(3)}{\vdots}{\Rightarrow \neg\beta}}{\Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}(\rightarrow \neg\vee)}{\Rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \vee \beta)}(\Rightarrow \wedge)$$

于是，我们可以构造如下推导

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(1)}{\vdots}{\Rightarrow \alpha, \beta}}{\Rightarrow \alpha, \beta, \neg\alpha}(\Rightarrow \mathrm{w}) \qquad \dfrac{\dfrac{(2)}{\vdots}{\Rightarrow \neg\alpha}}{\beta \Rightarrow \alpha, \neg\alpha}(\mathrm{w})\text{'s}}{\Rightarrow \alpha, \neg\alpha}(\mathrm{cut})}{\Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha}(\Rightarrow \wedge)$$

也就是说，$\Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha$ 在 GSix 中是可证的。由于 $c(\alpha) < c(\gamma)$，根据归纳假设，我们有空序列 $\Rightarrow$ 是可证的。□

命题 5.5 空序列在 GSix 中不可证。

证明。由定理 5.1 并分析 GSix 的规则可得。 □

推论 5.1 Six 不蕴涵矛盾。

证明。由引理 5.1、命题 5.5 和定理 5.1 可得。 □

6 GSix 的 Gentzen 式判定程序、

前几节所呈现的结果曾在第一届巴西—哥伦比亚逻辑会议上作报告。当时，有人询问我们是否能为 Six（基于 GSix 系统）给出一个判定程序，因为众所周知，一个逻辑具有无切序列版本这一事实，本身

身并不能保证其存在判定程序。在本节中，我们用伪代码陈述一个适用于 GSix 的判定程序，该程序改编自 G. Gentzen 为 LK 的命题片段提出的判定程序（参见 [18, 定理 6.13]）。

定义 6.1（广义子公式）给定公式γ的广义子公式集合 gsub(γ)，定义为满足以下条件的最小公式集合：

(1) $\alpha \in$gsub(α)；(2) gsub(α) $\cup$ gsub(β) $\subseteq$ gsub($\alpha * \beta$)，$* \in \{\vee, \wedge\}$；(3) gsub($\neg\alpha$) $\cup$ gsub($\neg\beta$) $\subseteq$ gsub($\neg(\alpha * \beta)$)，$* \in \{\vee, \wedge\}$；(4) gsub(α) $\cup$gsub($\neg\alpha$) $\subseteq$ gsub($\nabla\alpha$)；(5) gsub($\nabla\alpha$) $\cup$gsub($\nabla\beta$) $\subseteq$ gsub($\nabla(\alpha \wedge \beta)$)；(6) gsub($\nabla\neg\alpha$) $\cup$ gsub($\nabla\neg\beta$) $\subseteq$ gsub($\nabla\neg(\alpha \wedge \beta)$)；(7) gsub($\alpha$) $\subseteq$gsub($\neg\neg\alpha$)；(8) gsub($\nabla\alpha$) $\subseteq$ gsub($\nabla\neg\neg\alpha$)；(9) gsub($\nabla\alpha$) $\subseteq$gsub($\neg\nabla\alpha$)；

注 6.1 注意，根据定义 6.1 中的 (4) 和 (9)，对于给定的 α、 α 和$\neg\alpha$ ，它们是 $\neg\nabla\alpha$的广义子公式，并且

$$\mathsf{gsub}(\alpha) \cup \mathsf{gsub}(\neg\alpha) \cup \mathsf{gsub}(\nabla\alpha) \subseteq \mathsf{gsub}(\nabla\neg\nabla\alpha),$$

$$\mathsf{gsub}(\nabla\alpha) \subseteq \mathsf{gsub}(\nabla\nabla\alpha),$$

$$\mathsf{gsub}(\alpha) \cup \mathsf{gsub}(\neg\alpha) \cup \mathsf{gsub}(\nabla\alpha) \subseteq \mathsf{gsub}(\neg\nabla\alpha).$$

如果 $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ ($n < \omega$)，则 Γ 的所有广义子公式的集合定义为 gsub(Γ) $=\bigcup_{i=1}^{n}$ gsub(γ_i)。此外，序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的所有广义子公式的集合为

$$\mathsf{gsub}(\Gamma \Rightarrow \Delta) \stackrel{def}{=} \mathsf{gsub}(\Gamma) \cup \mathsf{gsub}(\Delta).$$

于是，我们得到如下结果

命题 6.1（广义子公式性质）设 $\mathcal{D}$ 是 GSix 中序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的无切证明。则，对于 $\mathcal{D}$ 中的任意序列 $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$，我们有

$$\mathsf{gsub}(\Gamma' \Rightarrow \Delta') \subseteq \mathsf{gsub}(\Gamma \Rightarrow \Delta).$$

证明。对 $\mathcal{D}$ 中推理的数量进行归纳，并根据定义 6.1、注 6.1 以及对 GSix 规则的考察可得。□

例 6.1 序列 $\nabla\neg\nabla(p\wedge q)\Rightarrow\neg\nabla p\vee\neg\nabla q$ 在 GSix 中可证。因此，gsub($\nabla\neg\nabla(p\wedge q)\Rightarrow\neg\nabla p\vee\neg\nabla$) = gsub($\nabla\neg\nabla(p\wedge q)$) $\cup$ gsub($\neg\nabla p\vee\neg\nabla$) = $\{\nabla\neg\nabla(p\wedge q)$,$\neg\nabla(p\wedge q)$ $\neg\neg\nabla(p\wedge q)$ $\neg\nabla p\vee\neg\nabla q,\nabla($ $p\wedge q)$ $\neg(p\wedge q)$ $p\wedge q,\neg\nabla p,\neg\nabla q,\nabla p,\nabla q,\neg p,\neg q,p,q\}$; 并且存在一个对它的无切证明。事实上

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\nabla p\Rightarrow\nabla p}{\neg(p\wedge q),\nabla p\Rightarrow\nabla p,p\wedge q,\neg\nabla q}(w)'s}{\neg(p\wedge q)\Rightarrow\neg\nabla p,\nabla p,p\wedge q,\neg\nabla q}(\Rightarrow\neg\nabla) \quad \dfrac{\dfrac{\nabla q\Rightarrow\nabla q}{\neg(p\wedge q),\nabla q\Rightarrow\nabla q,p\wedge q,\neg\nabla p}(w)'s}{\neg(p\wedge q)\Rightarrow\neg\nabla q,\nabla q,p\wedge q,\neg\nabla p}(\Rightarrow\neg\nabla)}{\neg(p\wedge q)\Rightarrow\nabla(p\wedge q),\neg\nabla p,p\wedge q,\neg\nabla q}(\Rightarrow\nabla\wedge)}{\nabla\neg\nabla(p\wedge q)\Rightarrow\neg\nabla p,\neg\nabla q}(\nabla\neg\nabla\Rightarrow)}{\nabla\neg\nabla(p\wedge q)\Rightarrow\neg\nabla p\vee\neg\nabla q}(\Rightarrow\vee)$$

显然，对于任意序列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$，gsub($\Gamma\Rightarrow\Delta$) 都是一个有限集。

设 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}_j$ 是两个序列集合。我们用 LowSeqGSix ($\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_j$) 表示 $\mathcal{S}-\mathcal{S}_j$ 中所有满足以下条件的序列 $\Pi\Rightarrow\Lambda$ 所构成的集合：$\Pi\Rightarrow\Lambda$ 是 GSix 中某个推理的下序列式，而其上序列式为 $\mathcal{S}_j$ 中的一个或两个。接下来，考虑以下用伪代码编写的算法。

算法 1：GSix 的判定程序

输入：一个序列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$
输出：可证 / 不可证

$\mathcal{S}\longleftarrow\{\Pi\Rightarrow\Lambda\,|\,\Pi\cup\Lambda\in$ gsub$(\Gamma\Rightarrow\Delta)\}$;
$\mathcal{S}_0\longleftarrow\{\Pi\Rightarrow\Lambda\in\mathcal{S}\,|\,\Pi\Rightarrow\Lambda$ 是 GSix 的一个初始序列式$\}$;
$j\longleftarrow 0$;
$\mathcal{S}_{-1}\longleftarrow\emptyset$;
当 $\Gamma\Rightarrow\Delta\notin\mathcal{S}_j$ 且 $\mathcal{S}_j\neq\mathcal{S}_{j-1}$ 时执行
  $\mathcal{S}_{j+1}\longleftarrow$ 低序列GSix$(\mathcal{S},\mathcal{S}_j)\cup\mathcal{S}_j$;
  $S\longleftarrow S-\mathcal{S}_j$;
  $j\longleftarrow j+1$;
如果 $\Gamma\Rightarrow\Delta\in\mathcal{S}_j$ 则返回可证;
否则返回不可证的;

由于集合 $\{\Pi\Rightarrow\Lambda\,|\,\Pi\cup\Lambda\in$ gsub$(\Gamma\Rightarrow\Delta)\}$ 是有限的，该过程总会结束。

7 结论

我们采用 Avron、Ben-Naim 和 Konikowska [3] 提出的方法，并利用 Six 由单个六元素逻辑矩阵 [17]所确定这一事实，尝试为逻辑 Six 找到一个无切割序列系统。作为这一过程的结果，我们得到一个包含 84 条逻辑规则的系统（SF-Six）、一个包含 230 条逻辑规则的系统（TS-Six），并在精简后得到包含 26 条逻辑规则的系统 GSix；这些系统都具有切割消去性质。由于我们处理的是六个真值，这一过程的复杂度显著增加，尤其是精简过程。在这方面，我们提出了若干专门工具（并证明了它们的可靠性），例如命题5.1和原则4，可用于系统地精简系统。然而，这项工作能否成功，很大程度上取决于如何证明语言具有充分的表达能力。换言之，这在很大程度上取决于我们为定义 3.2 中的 α和 β公式所作的选择。特别是，对于给定的两个真值，最好能找到相应的公式，使 i 和 j 的公式除一处之外完全相同，而这一处在一种情况下是 α，在另一种情况下是 β（参见命题 4.2 中真值 $\mathbf{2}$ $\mathbf{3}$ 和 1 对应的公式）。应用我们的原则后，还可以利用语义（以及原则2）进一步精简系统。最后，我们使用无切割序列系统 GSix 为其提供判定程序，并由此得到自底向上证明搜索。我们将来会研究该方法的复杂度，并将其与 [17] 中给出的判定程序以及可从矩阵 $\mathcal{M}_6$得到的真值表判定方法进行比较。

我们计划将这项研究继续推进，把这种方法扩展到相对于某种有序结构保持真值度、但不具有矩阵语义的逻辑。我们还将继续寻找能够进一步系统化精简过程的工具。

致谢。感谢匿名审稿人认真审阅本文，并提出有益的建议和建设性的意见。

参考文献

[1] Avron, A.. 具有一致性算子的逻辑的非确定性语义。《近似推理杂志》, 45, 271–287, (2007).[2] Avron, A. 和 Konikowska, B., 基于非确定性的逻辑的多值演算，COS'04 会议录（语义挑战研讨会），维也纳 2004，《纯粹与应用逻辑兴趣小组期刊》，2005 (10), 365–387.[3] Avron, A., Ben-Naim, J. 和 Konikowska, B., 具有一般有限值语义的逻辑的无切普通序列演算。《Logica Universalis》, 1, 41–69, 2006.[4] Cant´u L., 与对合 Stone 代数相关的保真值度逻辑。硕士论文，南方国立大学（布兰卡港，阿根廷），2019。

[5] Cant´u L. 和 Figallo M., 关于与对合 Stone 代数相关的保真值度逻辑。《IGPL 逻辑期刊》，2018，doi: 10.1093/jigpal/jzy071.[6] Cignoli R., 和 de Gallego M. S., 某些 Łukasiewicz 代数的格结构，《代数通论》，13 (1981), 315–328.[7] Carnielli W.A., Coniglio M. E. 和 Marcos J.,《形式不一致逻辑》。载于：《哲学逻辑手册》，第14卷，第15-107页。编者：D. Gabbay；F. Guenthner。Springer，2007年。[8] Carnielli W.A. 和 J. Marcos J., C-系统分类。载于 W. A. Carnielli、M. E. Coniglio 和 I. M. L. D'Ottaviano 编，《容 paraconsistency——通往不一致性的逻辑之路》，《纯粹与应用数学讲义》第228卷，第1–94页。Marcel Dekker，纽约，2002年。[9] da Costa, N.C.A.,《不一致形式系统》（葡萄牙语）。博士后论文，1963年。UFPR 出版社于1993年在库里蒂巴再版。[10] da Costa, N.C.A., 不一致形式系统的命题演算。《巴黎科学院院报》，A辑，第257卷（1963），3790–3792。[11] Encheva, S., Tumin, S.（2007）。基于多值逻辑的知识评估。载于：Apolloni, B., Howlett, R.J., Jain, L.（编）《基于知识的智能信息与工程系统》。KES 2007。《计算机科学讲义》，第4693卷。Springer，柏林、海德堡。[12] Figallo, M. 四值模态逻辑的无切序列演算与自然演绎。《逻辑学研究》，109, 1347–1373.（2021）。https://doi.org/10.1007/s11225-021-09944-3[13] Font, J. M., 和 Moussavi, M. 关于三值逻辑六值扩展的注记。《应用非经典逻辑杂志》3 (1993), 173–187.[14] Garcia O.N. 和 Moussavi M., 用于表示不完全知识的六值逻辑。载于《第20届国际多值逻辑研讨会》会议录（1990），IEEE 计算机学会出版社，第110–114页。[15] Garc´ıa-Duque J., L´opez-Nores M., Pazos-Arias J., Fern´andez-Vilas A., D´ıaz-Redondo R., Gil-Solla A., Blanco-Fern´andez Y. 和 Ramos-Cabrer M., 用于推理需求规格说明中的不确定性与不一致性的六值逻辑。《逻辑与计算杂志》，第16卷，第2期，2006年4月，第227–255页。[16] Gomes J., Greati V., Marcelino S., Marcos J., Rivieccio U., 完美旁一致代数的逻辑。第16届《逻辑与语义框架及其应用》研讨会（LSFA 2021）会议录，阿根廷布宜诺斯艾利斯（线上），2021年7月23日至24日，《理论计算机科学电子会议录》357，第56–76页。[17] Marcelino S. 和 Rivieccio U. 对合 Stone 代数的逻辑。《软计算》（2021），即将出版。

[18] Takeuti, G.（2013） [1975]。《证明论》（第二版）。纽约州米尼奥拉：Dover Publications。