关于保留与对合 Stone 代数相关真值度的逻辑

Liliana M. Cant´u [a] Mart´ín Figallo[b]

[a]阿根廷乌斯怀亚火地岛地区学院—弗洛伦蒂诺·阿梅吉诺高等教育学院，国立技术大学。[b]阿根廷巴伊亚布兰卡，南方国立大学（UNS）数学系

arXiv:2304.11626v1 [math.LO] 23 Apr 2023

摘要

对合 Stone 代数（或 S 代数）由 R. Cignoli 和 M. Sagas- tume 提出，旨在研究 n 值 Lukasiewicz–Moisil 代数理论。

本文聚焦于保留与对合 Stone 代数相关真值度的逻辑，称为 Six。这遵循一种非常一般的模式，该模式适用于任何具有序关系的真值结构类，旨在探究多值性，重点关注由保留真值下界所产生的推理概念，因此不只是保留值 1。

我们证明了，Six 是一种多值逻辑（具有六个真值），可由有限个矩阵（四个矩阵）刻画。此外，我们还表明 Six 是一种次协调逻辑。进一步地，我们证明它是一种真正的 LFI（形式不一致逻辑），其一致性算子可以用原有的联结词集来定义。最后，我们研究了 Six 的证明论，为其提供了一个 Gentzen 演算，该演算相对于该逻辑是可靠且完备的。

MSC（2010）：主要分类 06D35，次要分类 03B60。

关键词：真值度、形式不一致逻辑、Gentzen 系统、对合 Stone 代数。

1 引言规则

设 A 为一个 De Morgan 代数。用 $K(A)$ 表示所有满足以下条件的元素 $a \in A$ 的集合： $\neg a$ 对 a的德摩根否定与 a的补相一致。对于每个 $a \in A$，令$K_a = \{k \in K(A)\colon\ a \leq k\}$；如果 K_a 有最小元，则将其记为 ∇a K_a的最小元。所有满足对于每个 $a \in A$， ∇a 存在，且映射

$$a \mapsto \nabla a$$

是格同态的 De Morgan 代数类称为对合 Stone 代数类，记为 S。这些代数由 R. Cignoli 和 M. Sagastume（[2]）引入，与n值 Lukasiewicz–Moisil 代数理论相关。

文献中研究的、与给定代数类相关联的大多数逻辑，都将 1 作为推理中唯一需要保持的真值来定义。这些真值保持逻辑并未充分利用多值性，因为它们关注的是真值 1（即真）而非其他中间真值。

要超越仅保持真这一做法，可以考虑一种推理概念：它通过保持真值下界来定义，因此保持的不仅是值 1。在这种框架下，语言与真值保持逻辑中的语言相同，变化的是推理关系。这种推理对应于所谓的真值程度保持逻辑，相关讨论颇为详尽；它遵循一种非常一般的模式，可适用于任何带有序关系的真值结构类。

真值度保持逻辑的研究可追溯至 W´ojcicki 在其 1988年 著作[18], 中对 Lukasiewicz 逻辑的研究，随后又在 [12, 13, 14, 16, 1], amongothers 中得到拓展。关于这些逻辑及其与次协调性的关系，值得引用 [6, 7, 11]。

在本文中，我们关注与对合 Stone 代数相关、能够保留真值度的逻辑 $\mathbb{L}^{\leq}\,\mathbf{s}$。除此之外，我们证明 $\mathbb{L}^{\leq}\,\mathbf{s}$ 是一种多值逻辑（具有六个真值），且可由有限个矩阵（四个矩阵）刻画。此外，我们还证明 $\mathbb{L}^{\leq}\,\mathbf{s}$ 是一种次协调逻辑。进一步地，我们证明它是一种真正的 LFI（形式不一致逻辑，[4]），并具有一个可用原始联结词集定义的一致性算子。最后，我们研究 $\mathbb{L}^{\leq}\,\mathbf{s}$ 的证明论，为其构造了一个 Gentzen 演算，该演算相对于预期语义是可靠且完备的。

2 预备知识

本节将回顾一些众所周知的概念和结果，使本文内容自成一体。回顾一下，De Morgan 代数是一种结构 $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$，其类型为 (2, 2, 1, 0, 0)，且其约化代数 $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是一个有界分配格，并且 $\neg$ 满足以下恒等式：

(DM1) $\neg\neg x \approx x$,

(DM2) $\neg(x \wedge y) \approx \neg x \vee \neg y$.

注意，由此可得 $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$, $\neg 0 = 1$ 和 $\neg 1 = 0$。我们用 M 表示所有德摩根代数构成的簇。设 A 是一个 De Morgan 代数。集合 $F \subseteq A$ 是 A的格滤子，当且仅当：(a) $1 \in F$；(b) $x \in F$和 $x \leq y$蕴含 $y \in F$；(c) $x, y \in F$蕴含 $x \wedge y \in F$。我们用 $\mathcal{F}i(A)$ 表示 A的所有格滤子构成的族。

称 $A \in \mathbf{M}$, $a \in A$ 为有补的，若存在 $b \in A$, $a \vee b = 1$ 和 $a \wedge b = 0$,b ，使得b 是 a 的补，记作 a'。若元素 a 的补存在，则它是唯一的。我们用 $B(A)$ 表示 A 的中心，即 A 的所有有补元构成的集合。可以看出， $B(A)$ 是 A 的一个 M-子代数。

设 $K(A)$ 是 A 的子集，由所有满足德摩根否定 $\neg a$ 与补 a' 重合的元素 $a \in B(A)$ 构成。也就是说，

$$K(A) = \{a \in B(A) : \neg a = a'\}.$$

容易验证， $K(A)$ 是 $B(A)$ 的 M-子代数。对于每个 $a \in A$，令 $K_a = \{k \in K(A) : a \leq k\}$。如果 K_a 有最小元，我们将其记为 ∇a，如 [2] 中所示。如果对于每个 $a \in A$， K_a 都有最小元，则称 A 为 ∇-德摩根代数。对合 Stone 代数类记为 S，它是满足如下性质的 ∇-德摩根代数的子类：映射 $a \mapsto \nabla a$ 从 A 到 $K(A)$ 是格同态。

定理 2.1（Cignoli 等人（*[3]*））S 是一个方程类。事实上，De Morgan 代数 $A \in$ 属于 S，当且仅当存在一个算子 $\nabla : A \to A$ 满足以下等式：

(IS1) $\nabla 0 \approx 0$, (IS2) $a \wedge \nabla a \approx a$, (IS3) $\nabla(a \wedge b) \approx \nabla a \wedge \nabla b$, (IS4) $\neg\nabla a \wedge \nabla a \approx 0$。

如果 $A \in$ S，那么 $a^\star = \neg\nabla a$ 是 A 的伪补（见 [17]）并且 $a^{\star\star} = \neg\nabla\neg\nabla a = \nabla a$。由于 $a^\star \vee a^{\star\star} = 1$， A 是 Stone 格。 a 的对偶伪补 a^+ 也存在，事实上，$a^+ = \nabla\neg a$，因此 A 也是对偶 Stone 格。由此可知，S 是双 Stone 代数类的子类（见 [3]）。

众所周知，在 Stone 格中， A， $a \in B(A)$ 当且仅当 $a = a^{\star\star}$。因此，如果 A 是一个同时也是 Stone 格的 De Morgan 代数，并且定义 $\nabla a = a^{\star\star}$，则有：对于每个 $a \in A$，代数 $\langle A, \vee, \wedge, \neg, \nabla, 0, 1\rangle \in$ S 当且仅当 $a^\star = \neg(a^{\star\star})$ 当且仅当 $B(A) = K(A)$（参见 [3]）。受此启发，S 的成员被称为对合 Stone 代数。

以下是一些对合 Stone 代数的例子。

例 2.1

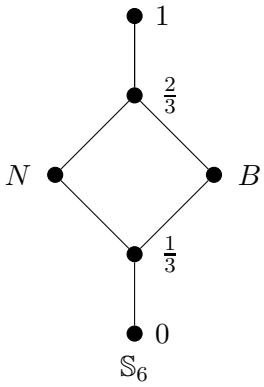
（i）每个布尔代数 $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ 都可以赋予对合 Stone 代数的结构。事实上，取 $\nabla x = x$，可得 $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1\rangle$ 是一个对合 Stone 代数。

(ii) 设 $\langle A, \wedge, \vee, \sim, \sigma_1^n, ..., \sigma_{n-1}^n, 0, 1\rangle$ 是一个 n值Lukasiewicz-Moisil代数。那么，其约化代数 $\langle A, \wedge, \vee, \sim, \sigma_{n-1}^n, 0, 1\rangle$ 是一个对合 Stone 代数（*[2]*）。特别地，当 n =3 时，我们有 $\langle A, \wedge, \vee, \sim, \sigma_2^3, 0, 1\rangle \in$ S，并且算子 σ_2^3 对每个 $a, b \in A$ 都满足关系 $a \wedge \sigma_2^3\neg a \leq b \vee \neg\sigma_2^3 b$。另一方面，如果 $A \in$ S 且关系 $a \wedge \nabla\neg a \leq b \vee \neg\nabla b$ 在 A 中成立，那么 $\langle A, \vee, \wedge, \neg, \Delta, \nabla, 0, 1\rangle$ 是一个三值Lukasiewicz代数，其中 $\Delta = \neg\nabla\neg$。因此，（Cignoli 等人）三值Lukasiewicz代数类与满足方程 $a \wedge\nabla\neg a \leq b \vee \neg\nabla b$ 的对合 Stone 代数类相一致。

(iii) 对于每个 $n \geq 2$, $\mathbf{L}_n$，我们将 n 元链 $0 < \frac{1}{n-1} < \cdots < \frac{n-2}{n-1} < 1$ 记为具有众所周知的格结构和 $\neg(\frac{i}{n-1}) = \frac{n-i-1}{n-1}$，其中 $i = 0, 1, \ldots, n-1$。

代数 $\mathbf{L}_n$ 是对合 Stone 代数的实例，其中对于所有 $x \neq 0$ 和 $\nabla 0 = 0, \quad \nabla x = 1$。

(iv) 如我们将看到的，以下是对合 Stone 代数的另一个重要实例。令 $\mathbb{S}_6 = \{0, \frac{1}{3}, N, B, \frac{2}{3}, 1\}$，其格结构由下式给出



否定由 $\neg 0 = 1$、 $\neg 1 = 0$、 $\neg N = N$、 $\neg B = B$、 $\neg\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 和 $\neg\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 给出。此外，对于所有 $x \neq 0$ 和 $\nabla 0 = 0$, $\nabla x = 1$。

注记 2.1 算子 ∇ 具有众所周知的模态性质，例如必然化规则。

在 [3], 中，作者将 De Morgan 代数（由 Cornish 和 Fowler 提出的）中众所周知的 Priestley 对偶推广到了对合 Stone 代数。利用这一对偶，他们确定了次直不可约和简单 S 代数。

在本文中，我们关注与对合 Stone 代数相关、保持真值度的逻辑。这遵循一种非常一般的模式，可应用于任何带有序关系的真值结构类；该模式旨在利用多值性，聚焦于这样一种推理概念：它通过保持真值下界而得出，因此不仅仅是保持值 1（见 [12, 13, 14]）。更确切地说，若 K 是有序代数类，且 $\mathfrak{Fm}$ 是与 K同类型的绝对自由代数，那么通过保持真值下界而得出的推理概念 $\models_K^{\leq}$ 便引出如下定义：对于所有 $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm \quad \Gamma \models_K^{\leq} \alpha$，当且仅当 $\forall A \in \mathbf{K}$, $\forall v \in Hom_{\mathbf{K}}(\mathfrak{Fm}, A)$, $\forall a \in A$, 若$v(\alpha_i) \geq a$, 则对于所有 $i \leq n$, 有 $v(\alpha) \geq a$。

3 语义模型：对合 Stone 代数

本节将展示我们的语义模型的结构及其最重要的性质。

命题 3.1 若 A是对合 Stone 代数，则

(i) $\nabla A = K(A)$, (ii)
$x \in \nabla A$ 当且仅当 $x = \nabla x$,
(iii) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$。

证明。这是定理 2.1 的推论。 □

因此， ∇ 满足以下性质：

引理 3.1 在每个对合 Stone 代数 A中，以下恒等式成立：

(IS5) $\nabla 1 \approx 1$, *(IS6)* $\neg x \vee \nabla x \approx 1$, (IS7) $\nabla\nabla x \approx \nabla x$,
(IS8) $\nabla\neg\nabla x \approx \neg\nabla x$, *(IS9)* $\nabla(x \vee \neg x) \approx 1$,
(IS10) $x \wedge \neg\nabla x \approx 0$, *(IS11)* $\nabla(x \vee \nabla y) \approx \nabla x \vee \nabla y$.

证明。由定理 2.1 可得。 □

通常，我们可以如下定义算子 Δ

$$\Delta a =_{def.} \neg\nabla\neg a$$

From 由此定义和命题 3.1 (i)，我们有 $\Delta A = \nabla A = K(A)$。此外，

引理 3.2 在每个对合 Stone 代数 A中，以下恒等式成立：

(IS12) $\Delta x \wedge x \approx \Delta x$, *(IS13)* $\Delta\nabla x \approx \nabla x$,
(IS14) $\nabla\Delta x \approx \Delta x$, *(IS15)* $\Delta(x \wedge \neg x) \approx 0$,
(IS16) $\Delta(x \vee y) \approx \Delta x \vee \Delta y$, *(IS17)* $\Delta(x \wedge y) \approx \Delta x \wedge \Delta y$.

证明。由定理 2.1 可得。 □

利用 [3], 中建立的拓扑对偶性，作者证明了以下结论。

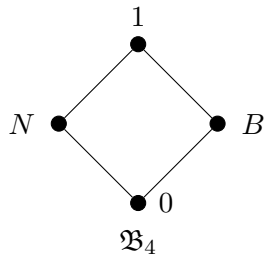
引理 3.3（Cignoli 等人 *[3]*）S 的次直不可约代数为 $\mathbf{L}_n$，其中 $2 \leq n \leq 5$，以及 $\mathbb{S}_6$。S 的单代数为 $\mathbf{L}_2$ 和 $\mathbf{L}_3$。

又由于代数 $\mathbf{L}_n$（其中 $2 \leq n \leq 5$ ）是 $\mathbb{S}_6$ 的 S-子代数，因此有：

推论 3.1 $\mathbb{S}_6$ 生成簇 S。

最后这个结果表明，给定等式在每个对合 Stone 代数中成立，当且仅当它在 $\mathbb{S}_6$ 中成立。这一点对于下文将非常有用。

注记 3.1 Belnap 四值逻辑 $FOUR$(*[3, 4]*) 是一种逻辑系统，因其在多个领域中的诸多应用而广为人知。该逻辑旨在对以下情形进行建模：面对这样一种情况——人们掌握了关于某个句子真假的若干相互冲突的信息，或者对其一无所知——经典真值（真和假）必须被视为彼此独立，从而产生四种非经典认知值：1（真且非假）、0（假且非真）、N（既非真也非假）以及 B（既真又假）。这就产生了众所周知的四元素 De Morgan 代数 $\mathfrak{B}_4$，其中



$\mathfrak{B}_4$

$\neg 0 = 1, \neg 1 = 0, \neg N = N \ and \ \neg B = B.$

另一方面，多值逻辑（例如 Lukasiewicz n值逻辑）旨在表达各种真值度的存在。由于 $\mathbf{L}_4$ 和 $\mathfrak{B}_4$ 都是$\mathbb{S}_6$的 M-子代数，我们认为，任何基于这一特定代数的逻辑都将结合这两个思想。下一节我们将研究其中一种逻辑。

格 $\mathfrak{B}_4$ 还产生了另一种著名的逻辑，即四值模态逻辑 $\mathcal{TML}$，该逻辑在 *[15]* 和 *[8]* 中得到了深入研究。

4 关于相对于 S 保持真值度的逻辑

现在，我们将重点讨论相对于真值度 $\mathbb{L}^{\leq}$ s 保持真值度的逻辑，该逻辑与对合 Stone 代数相关联。

令 $\mathfrak{Fm} = \langle Fm$、$\wedge$、$\vee$、$\neg$、$\nabla$、$\bot$、$\top\rangle$ 为由某个固定的可数命题变量集 Var 生成的类型为 (2, 2, 1, 1, 0, 0) 的绝对自由代数。按照惯例，字母 p、q、.....表示命题变量，字母 α、β、.....表示公式，而 Γ、Σ、.....表示公式集。若 A 和 B 是类型为 (2, 2, 1, 1, 0, 0) 的代数（不一定是 S–代数），则用 $Hom(A, B)$ 表示从 A 到 B 的所有同态的集合。

定义 4.1 在簇 S 上保持真值度的逻辑为 $\mathbb{L}^{\leq}\mathbf{s} = \langle Fm, \models^{\leq}\mathbf{s}\rangle$，其中，对每个 $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$:

(i) 如果 $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \neq \emptyset$,

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha \quad \textit{iff} \quad \forall A \in \mathbf{S}, \forall v \in Hom(\mathfrak{Fm}, A), \forall a \in A \\ \textit{if } v(\alpha_i) \geq a, \textit{ for all } i \leq n, \\ \textit{then } v(\alpha) \geq a$$

(ii) $\emptyset \models^{\leq}\mathbf{s}\, \alpha$ 当且仅当 $\forall A \in \mathsf{S}$、$\forall v \in Hom(\mathfrak{Fm}, A)$、$v(\alpha) = 1$。

(iii) 如果 $\Gamma \subseteq Fm$ 不是有限的,

$$\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha \quad \textit{iff} \quad \textit{there are } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma \textit{ such that} \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha.$$

根据上述定义，我们有 $\mathbb{L}^{\leq}\mathbf{s}$ 是一个句子逻辑，即 $\models^{\leq}\mathbf{s}$ 是定义在 Fm上的有限的后承关系。

命题4.1 设 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha\} \subseteq Fm$, $n \geq 1$。则下列条件等价:

(i) α_1, ..., $\alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha$,

(ii) $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \models^{\leq}\mathbf{s}\ \alpha$,

(iii) $\mathsf{S} \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \preccurlyeq \alpha$，即不等式 $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \preccurlyeq \alpha$ 在簇 S 中成立。

证明。(i)⇒(ii) 设 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha\} \subseteq Fm$、$n \geq 1$。假设 α_1, ..., $\alpha_n \models^{\leq}\mathsf{S}\, \alpha$。那么，$\forall A \in \mathsf{S}$, $\forall v \in Hom(\mathfrak{Fm}$、$A)$, $\forall a \in A$, 如果对于所有 $i \leq n$, $v(\alpha_i) \geq a$, 则 $v(\alpha) \geq a$。由于 A 具有格结构，对于所有 $i \leq n$，我们有 $v(\alpha_i) \geq a$ 当且仅当 $\bigwedge_{i=1}^{n} v(\alpha_i) \geq a$ 当且仅当 $v(\bigwedge_{i=1}^{n}(\alpha_i)) \geq a$。因此，如果 $v(\bigwedge_{i=1}^{n}(\alpha_i)) \geq a$，则有 $v(\alpha) \geq a$；也就是说，$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \preccurlyeq \alpha$ 在 S 中成立。类似地，可以证明 (ii)⇒(i)。最后，在假设 (i) 的情况下，(iii) 只是 (ii) 的另一种表述方式。□

注记4.1 等价关系 (i)⇔(ii) 表明，$\mathbb{L}^{\leq}\mathbf{s}$ 是合取逻辑。另一方面，(ii)⇔(iii) 表明，后承关系 $\models^{\leq}\mathbf{s}$ 将 S 中的序内化。

由命题4.1可得以下结论。

推论 4.1 设 $\alpha, \beta \in Fm$。则,

(i) $\alpha \models^{\leq}_{\mathbf{s}} \beta$ 当且仅当 $\mathsf{S} \models \alpha \preccurlyeq \beta$,

(ii) $\alpha \models^{\leq}_{\mathbf{s}} \beta$ 当且仅当 $\mathsf{S} \models \alpha \approx \beta$。

证明。（i）取 $n = 1$ 即得。（ii）由（i）立即可得。 □

由推论 3.1 可得:

命题 4.2 对于每个 $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$、$\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{s}} \alpha$，当且仅当对于每个 $h \in Hom(\mathfrak{Fm}、\mathbb{S}_6)$、$\bigwedge\{h(\gamma)\colon \gamma \in \Gamma\} \leq h(\alpha)$。特别地，$\emptyset \models^{\leq}_{\mathbf{s}} \alpha$ 当且仅当对于所有 $h \in Hom(\mathfrak{Fm}、\mathbb{S}_6)$，$h(\alpha) = 1$。

5 $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{s}}$ 作为矩阵逻辑

在本节中，我们将看到，$\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{s}}$ 可以用矩阵和广义矩阵（广义矩阵）来刻画。

回顾一下，逻辑矩阵（或简称矩阵）是一个二元组 $\langle A、F\rangle$，其中 A 是一个代数，而 F 是 A 的非空子集。广义矩阵是一个二元组 $\langle A、\mathcal{C}\rangle$，其中 A 是一个代数，而 $\mathcal{C}$ 是 A 的子集族，它构成了 A 的一个闭集系统。也就是说，$\mathcal{C}$ 满足:

（C1） $A \in \mathcal{C}$、
（C2）如果 $\{X_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C}$，那么 $\bigcup_{i\in I} X_i \in \mathcal{C}$。

设 $M = \langle A、F\rangle$ 为一个矩阵。由 M 确定的逻辑 $\mathbb{L}_M = \langle \mathfrak{Fm}、\models_M\rangle$ 定义如下：设 $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$

$$\Gamma \models_M \alpha \quad \text{iff} \quad \forall v \in Hom(\mathfrak{Fm}, A) \\ \text{if } v(\gamma) \in F, \text{ for all } \gamma \in \Gamma, \text{ then } v(\alpha) \in F.$$

如果 $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in I}$ 是一个矩阵族，那么由矩阵族 $\mathcal{F}$ 确定的逻辑 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}} = \langle \mathfrak{Fm}、\models_{\mathcal{F}}\rangle$ 定义为 $\models_{\mathcal{F}} = \bigcap_{i\in I} \models_{M_i}$。

另一方面，由广义矩阵 $G = \langle A,\mathcal{C}\rangle$ 确定的逻辑是 $\mathbb{L}_G = \langle \mathfrak{Fm},\models_G\rangle$，其中：令 $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$

$$\Gamma \models_G \alpha \quad \text{iff} \quad \forall v \in Hom(\mathfrak{Fm}, A), \forall F \in \mathcal{C} \\ \text{if } v(\gamma) \in F, \text{ for all } \gamma \in \Gamma, \text{ then } v(\alpha) \in F.$$

由广义矩阵族确定的逻辑，其定义方式与由矩阵族确定的逻辑类似。

现在，考虑以下矩阵族和广义矩阵及其对应的逻辑。令

$$\mathcal{F} = \{\langle A, F\rangle : A \in \mathbf{S} \text{ and } F \text{ is a lattice–filter of } A\}$$

and

$$\mathcal{F}_g = \{\langle A, \mathcal{F}i(A)\rangle : A \in \mathbf{S}\}$$

其中， $\mathcal{F}i(A)$ 是 A 的所有格滤子的族。于是，

定理 5.1 逻辑 $\mathbb{L}^{\leq}$ **s** 与逻辑 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ 重合，也与逻辑 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g}$重合。

证明。 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ 与 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g}$ 重合这一事实，直接源于分别由矩阵族和广义矩阵族所确定的逻辑的定义。此外，由于 S 是一个簇，且滤子的概念是初等可定义的，类 $\mathcal{F}_g$ 在超积下封闭。因此，$\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g}$ 是有限的。

于是，为证明 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g}$ 与 $\mathbb{L}^{\leq}$ **s** 重合，我们只需证明该结论可以通过有限个前提得到。令 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha \in Fm$，使得 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq} \mathbf{s}\,\alpha$。由引理 4.1，对于所有 $v \in Hom(Fm, A)$，有 (1) $v(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge (\alpha_n) \leq v(\alpha)$。令 $F \in Fi(A)$，并假设 $v(\alpha_1) \ldots, v(\alpha_n) \in F$，则（根据滤子的定义）有 $v(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge v(\alpha_n) \in F$。由 (1) 以及 F滤子，有 $v(\alpha) \in F$。于是， $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models_{\mathcal{F}_g} \alpha$。

反之，假设 (2) α_1、.....、$\alpha_n \models_{\mathcal{F}_g} \alpha$，并令 $v \in Hom(Fm$、$A)$。考虑由 $v(\alpha_1)$ .....、$v(\alpha_n)$、 $F = Fi(v(\alpha_1)$ .....、$v(\alpha_n))$ 生成的滤子。显然，对于所有 $i \leq n$， $v(\alpha_i) \in F$，因此根据 (2)， $v(\alpha) \in F$。于是，根据生成滤子的性质， $v(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge v(\alpha_n) \leq v(\alpha)$。因此，根据引理 4.1， α_1、.....、$\alpha_n \models^{\leq} \mathbf{s}\,\alpha$。 □

另一方面， $\mathbb{S}_6$ 的滤子恰好是由 $\mathbb{S}_6$ 的每个元素生成的主滤子。于是， $\mathcal{F}i(\mathbb{S}_6) = \{[0), [\frac{1}{3})$ $[N)$ $[B), [\frac{2}{3}), [1)\}$。现在，考虑下面的矩阵族

$$\mathcal{F}^6 = \{\langle \mathbb{S}_6, [0)\rangle, \langle \mathbb{S}_6, \left[\frac{1}{3}\right)\rangle, \langle \mathbb{S}_6, [N)\rangle, \langle \mathbb{S}_6, [B)\rangle, \langle \mathbb{S}_6, \left[\frac{2}{3}\right)\rangle, \langle \mathbb{S}_6, [1)\rangle\}$$

以及广义矩阵

$$\mathcal{F}_g^6 = \langle \mathbb{S}_6, \mathcal{F}i(\mathbb{S}_6)\rangle$$

定理 5.2 逻辑 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}^6}$、 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g^6}$ 和 $\mathbb{L}^{\leq}$ **s** 重合。

证明。由于由有限矩阵集确定的逻辑是有限的，我们将再次证明它们通过有限个前提重合。此外，显然 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}^6}$ 和 $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g^6}$ 重合。另一方面，设 α_1，.....，α_n，$\alpha \in Fm$，使得 α_1，.....，$\alpha_n \models^{\leq} \mathbf{s}\,\alpha$。根据命题 4.2，这等价于 $\mathbb{S}_6 \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \preccurlyeq \alpha$，即对于所有 $h \in Hom$（$\mathfrak{Fm}$，$\mathbb{S}_6$），h（α_1）$\wedge \cdots \wedge h$（α_n）$\leq h$（α）。然后，根据此前使用的滤子的相同性质，我们有 α_1，.....，$\alpha_n \models_{\mathcal{F}_g^6} \alpha$。反向蕴含与定理 5.1 的证明中所展示的反向蕴含类似。□

到目前为止，我们已经证明，$\mathbb{L}^{\leq}$ $\mathbf{s}$ 是由六个有限矩阵族所确定的矩阵逻辑。接下来，我们将看到其中两个是多余的。

首先，注意到矩阵 $\langle \mathbb{S}_6, [0)\rangle = \langle \mathbb{S}_6, \{0, \frac{1}{3}, N, B, \frac{2}{3}, 1\}\rangle$ 是平凡的。事实上，对于所有 $\alpha \in Fm$ 以及所有 $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbb{S}_6)$，我们都有 $h(\alpha) \in [0)$。于是，对于每个 $\Gamma \subseteq Fm$，都有 $\Gamma \models_{\langle \mathbb{S}_6,\ [0)\rangle} \alpha$，因此我们可以将其舍弃。

另一方面，我们将看到，$\langle \mathbb{S}_6, [N)\rangle$ 和 $\langle \mathbb{S}_6, [B)\rangle$ 是同构矩阵。为此，下面的技术结果将会有所帮助。

引理 5.1 设 $h\colon \mathfrak{Fm} \to \mathbb{S}_6$, $\mathcal{V}' \subseteq Var$ 以及 $h'\colon \mathfrak{Fm} \to \mathbb{S}_6$，使得对于所有 $p \in \mathcal{V}'$,

$$h'(p) = \begin{cases} h(p) & \text{if } h(p) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \\ N & \text{if } h(p) = B \\ B & \text{if } h(p) = N \end{cases} . \text{ Then } h'(\alpha) = \begin{cases} h(\alpha) & \text{if } h(\alpha) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \\ N & \text{if } h(\alpha) = B \\ B & \text{if } h(\alpha) = N \end{cases}$$

对于所有满足 $Var(\alpha) \subseteq \mathcal{V}'$ 的 $\alpha \in \mathfrak{Fm}$。

证明。我们对公式 α, $c(\alpha)$ 的复杂度使用归纳法。首先，注意到 $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \simeq \mathbf{L}_4$ 是 $\mathbb{S}_6$ 的一个 S-子代数，也就是说，它对 S-代数的所有运算封闭。

若 α 是 p，其中 p 是一个命题变量，则由假设可得引理成立。

假设对所有复杂度小于 k, $k \geq 1$ 的公式，引理均成立；设 α 是一个复杂度为 k 的公式。那么，我们分以下几种情况讨论：

情形 I：α 是 $\neg\beta$，其中 $\beta \in Fm$。若 $h(\alpha) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$，由于 $h(\alpha) = h(\neg\beta) = \neg h(\beta)$，我们有 $h(\beta) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$。另一方面，$h'(\beta) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$。由归纳假设，$h(\beta) = h'(\beta)$。由于 h' 是一个同态，$h'(\alpha) = h'(\neg\beta) = \neg h(\beta) = \neg h'(\beta) = h'(\neg\beta) = h'(\alpha)$。若 $h(\alpha) = N$，由 $\neg N = N$ 可得 $h(\beta) = N$。由归纳假设，$h'(\beta) = B$，且由于 $\neg B = B$，我们有 $h'(\alpha) = B$。类似地，可以证明在 $h(\alpha) = B$ 的情形下引理成立。

情况 II：α 是 $\beta_1 \wedge \beta_2$，其中 β_1、$\beta_2 \in Fm$。如果 $h(\alpha) = h(\beta_1) \wedge h(\beta_2) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$，则有许多子情况。如果 $h(\beta_1)$ $h(\beta_2) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$，根据归纳假设，$h(\beta_1) = h'(\beta_1)$，且 $h(\beta_2) = h'(\beta_2)$，于是 $h(\alpha) = h(\beta_1) \wedge h(\beta_2) = h'(\beta_1) \wedge h'(\beta_2) = h'(\alpha)$。如果 $h(\beta_1) = N$，且 $h(\beta_2) \in \{0, \frac{1}{3}\}$，根据归纳假设，$h'(\beta_1) = B$，且 $h'(\beta_2) = h(\beta_2)$，于是 $h'(\alpha) = h'(\beta_1) \wedge h'(\beta_2) = B \wedge h(\beta_2) = h(\beta_2) = N \wedge h(\beta_2) = h(\beta_1) \wedge h(\beta_2) = h(\alpha)$。其他子情况也以类似方式研究。

情况 III：α 是 $\beta_1 \vee \beta_2$，其中 β_1、$\beta_2 \in Fm$。这与情况 II 类似。

情形 IV：α 是 $\nabla\beta$，且 $\beta \in Fm$。于是，$h(\alpha) = h(\nabla\beta) = \nabla h(\beta) \in \{0, 1\}$。若 $h(\alpha) = 0$，则根据 $\mathbb{S}_6$中 ∇ 的定义，$h(\beta) = 0$。由归纳假设，$h'(\beta) = h(\beta) = 0$，因此 $h'(\alpha) =$

$0 = h(\alpha)$。若 $h(\alpha) = 1$，则 $h(\beta) \in \{\frac{1}{3}, N, B, \frac{2}{3}, 1\}$。在这些情形中的任意一种，我们都有 $h'(\alpha) = 1$。□

现在，我们可以看到，矩阵 $\langle \mathbb{S}_6, [N)\rangle$ 和 $\langle \mathbb{S}_6, [B)\rangle$ 确定了相同的逻辑 c.

引理 5.2 逻辑 $\models_{\langle \mathbb{S}_6, [N)\rangle}$ 与 $\models_{\langle \mathbb{S}_6, [B)\rangle}$ 一致。

证明。由于 $\models_{\langle \mathbb{S}_6, [N)\rangle}$（以及 $\models_{\langle \mathbb{S}_6, [B)\rangle}$）是有限的后承关系且是合取的；我们只需考虑形如 $\alpha \models_{\langle \mathbb{S}_6, [N)\rangle} \beta$ 的推理（如果 β 是逻辑有效的，则我们将 α 视为 $\neg\bot$）。设 $(1)\alpha \models_{\langle \mathbb{S}_6, [N)\rangle} \beta$，并令 $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbb{S}_6)$，使得 $h(\alpha) \in \{B, \frac{2}{3}, 1\}$。如果 $h(\alpha) = B$，则考虑引理 5.1 中的同态 h'。于是，$h'(\alpha) = N \in \{N, \frac{2}{3}, 1\}$，并且根据 (1)，$h'(\beta) \in \{N, \frac{2}{3}, 1\}$。如果 $h'(\beta) = N$，则 $h(\beta) = B \in \{B, \frac{2}{3}, 1\}$。否则，如果 $h'(\beta) \in \{\frac{2}{3}, 1\}$，则 $h'(\beta) = h(\beta) \in \{\frac{2}{3}, 1\} \subseteq \{B, \frac{2}{3}, 1\}$。

如果 $h(\alpha) \in \{\frac{2}{3}, 1\}$，根据（1），$h(\beta) \in \{N, \frac{2}{3}, 1\}$。如果 $h(\beta) = N$，那么 $h'(\beta) = B$。但是，在这种情况下，$h(\alpha) = h'(\alpha) \in \{\frac{2}{3}, 1\}$，也就是说，$h' \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbb{S}_6)$ 验证了 $h'(\alpha) \in \{N, \frac{2}{3}, 1\}$，但 $h'(\beta) \notin \{N, \frac{2}{3}, 1\}$，这与（1）矛盾。因此，$h(\beta) \in \{\frac{2}{3}, 1\} \subseteq \{B, \frac{2}{3}, 1\}$。通过分析所有这些情况，我们得出结论：$\alpha \models_{\langle \mathbb{S}_6, [B)\rangle} \beta$。类似地，我们证明了，如果 $\alpha \models_{\langle \mathbb{S}_6, [B)\rangle} \beta$，那么 $\alpha \models_{\langle \mathbb{S}_6, [N)\rangle} \beta$。□

根据上述结果，我们有：

定理 5.3 与对合 Stone 代数 $\mathbb{L}^{\leq}$s 相关联的真值度保持逻辑，是一种由矩阵 $\langle \mathbb{S}_6, \left[\frac{1}{3}\right)\rangle$，$\langle \mathbb{S}_6, [N)\rangle$，$\langle \mathbb{S}_6, \left[\frac{2}{3}\right)\rangle$ 和 $\langle \mathbb{S}_6, [1)\rangle$ 确定的六值逻辑。

接下来，我们用 Six 表示逻辑 $\mathbb{L}^{\leq}$ s。

回顾一下，如果某个逻辑中的一组联结词能够表示与该逻辑相对于其矩阵语义既可靠又完备的每一种可能的真值表，我们就称这组联结词是函数完备的。如果一个逻辑拥有一组函数完备的联结词，我们就称该逻辑是函数完备的。

引理 5.3 设 $h: \mathfrak{Fm} \to \mathbb{S}_6$，$h': \mathfrak{Fm} \to \mathbb{S}_6$ 和 $p \in Var$，使得 $h(p) = B$ 和 $h'(p) = N$。那么，对所有满足 $Var(\alpha) \subseteq \{p\}$ 的 $\alpha \in \mathfrak{Fm}$，有 $h(\alpha) \neq N$ 和 $h'(\alpha) \neq B$。

证明。该结论直接源于以下事实：$\{0, \frac{1}{3}, B, \frac{2}{3}, 1\}$ 和 $\{0, \frac{1}{3}, N, \frac{2}{3}, 1\}$ 是 $\mathbb{S}_6$ 的 S-子代数。□

推论 5.1 Six 不是函数完备的。

证明。根据引理 5.3，不可能用这些联结词定义函数 $f: \mathbb{S}_6 \to \mathbb{S}_6$，使得对于所有 x，$f(x) = N$。□

6 Six 作为次协调逻辑

本节将从次协调性的角度研究 Six。我们将看到，矛盾（相对于 $\neg$）并不一定会使推理平凡化，因此，按照 da Costa 的意义，Six 是一种次协调逻辑（参见 [9, 10]）。此外，我们还将看到，Six 是一种形式不一致逻辑（LFI）；并且，相对于一组适当的公式 $\bigcirc(p)$，它是温和爆炸的，这组公式取决于命题变量 p （参见 [5, 4]）。

命题 6.1 Six 是非平凡且非爆炸的。

证明。令 p 和 q 为两个不同的命题变量，并考虑同态 $h:\ \mathfrak{Fm} \to \mathbb{S}_6$，使得 $h(p) = N$ 且 $h(q) = B$。那么，$p,\ \neg p \not\models_{\boldsymbol{Six}} q$。□

考虑上述证明中使用的同态，我们还可得出 $\not\models_{\boldsymbol{Six}} q \vee \neg q$，因此

命题 6.2 Six 是超完备的。

On the other side, in the language of ***Six***, put $\bigcirc(p) = \{\Delta p \vee \Delta\neg p\}$. Then,

引理 6.1 Six 关于 $\bigcirc(p)$ 和 $\neg$ 是有限温和爆炸的。

证明。设 p 和 q 是两个不同的命题变量。很容易验证 t

$$\bigcirc(p), p \not\models_{\boldsymbol{Six}} q \quad \text{and} \quad \bigcirc(p), \neg p \not\models_{\boldsymbol{Six}} q.$$

但是，由于 $h((\Delta p \vee \Delta\neg p) \wedge p \wedge \neg p) = h((\neg\nabla\neg p \vee \neg\nabla\neg\neg p) \wedge p \wedge \neg p) = h((\neg\nabla\neg p \vee \neg\nabla p) \wedge p \wedge \neg p) = h((\neg\nabla\neg p \wedge p \wedge \neg p) \vee (\neg\nabla p \wedge p \wedge \neg p)) = 0$ (根据 (IS10))，对所有 $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbb{S}_6)$ 都成立。因此，$\bigcirc(p)\ p, \neg p \models_{\boldsymbol{Six}} \bot$。□

综上所述，我们得到：

定理 6.1 Six 关于 $\neg$ 是一个 LFI，其一致性算子 $\circ$ 定义为 $\circ\alpha = \Delta\alpha \vee \Delta\neg\alpha$，对于所有 $\alpha \in Fm$。

此外，正如 da Costa 的系统 C_n 中所发生的那样（参见 [9, 10]），一致性算子会通过其他联结词传播。

定理 6.2 在 Six 中成立：
(i) $\models_{\boldsymbol{Six}} \circ\bot$ (ii) $\circ\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \circ\nabla\alpha$ (iii) $\circ\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \circ\neg\alpha$ (iv) $\circ\alpha, \circ\beta \models_{\boldsymbol{Six}} \circ(\alpha \# \beta)$，对于 $\# \in \{\wedge, \vee\}$。

证明。显然。 □

此外，对于所有 $n \geq 0$, $\models_{\boldsymbol{Six}} \circ\neg^{n}\circ\alpha$。特别地，$\models_{\boldsymbol{Six}} \circ\circ\alpha$。因此，Six 验证逻辑 mCi 的所有公理 $(cc)_n$ （参见 [4]）。正如在 LFI's 的框架中通常所做的那样，也可以在 Six 中按如下方式定义不一致算子 $\bullet$：

$$\bullet\alpha =_{def} \neg \circ \alpha.$$

然后，$\bullet\alpha$ 在逻辑上等价于 $\nabla\alpha \wedge \nabla\neg\alpha$。注意，$\bullet$ 和 $\circ$ 可以等价地表示为 $\bullet\alpha = \nabla(\alpha \wedge \neg\alpha)$ 和 $\circ\alpha = \Delta(\alpha \vee \neg\alpha)$。这两个联结词的真值表如下：

p	$\circ p$	$\bullet p$
0	1	0
$\frac{1}{3}$	0	1
N	0	1
B	0	1
$\frac{2}{3}$	0	1
1	1	0

定理 6.3 在 Six 中成立：

(i) $\alpha \wedge \neg\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \bullet\alpha$，但 $\bullet\alpha \not\models_{\boldsymbol{Six}} \alpha \wedge \neg\alpha$；(ii) $\bullet\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \bullet\neg\alpha$ 且 $\bullet\neg\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \bullet\alpha$；(iii) $\bullet(\alpha \# \beta) \models_{\boldsymbol{Six}} \bullet\alpha \vee \bullet\beta$，对于 $\# \in \{\wedge, \vee\}$；反之则不成立。

证明。此为例行工作。 □

最后这个结果表明，在 Six 中，一方面的一致性概念与另一方面的矛盾概念可以区分开来。这是 LFI 体系中一项非常宝贵的特性，只有少数逻辑具备这一特性，例如 mbC 和 $\mathcal{TML}$ （见 [8]）；其中前者是 [4] 所展示的层级结构中最弱的。尽管 Six 不是函数完备的（参见推论 5.1），但它具有良好的表达能力。例如，在 Six 中，可以区分“经典”真值（0 和 1）与“非经典”真值（1_3、N、B 和 2_3）。

作为本节的结束，我们将展示，在 Six 中可以再现经典逻辑。也就是说，我们将证明一个关于经典命题逻辑 CPL 的可导性调整定理（DAT）。

我们可以将 CPL 看作由 $\wedge$、$\vee$ 和 $\neg$ 生成的语言。令 $\mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}$ 表示该语言中 CPL 的公式代数。

定理6.4 设 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 是 CPL 中的有限公式集。那么，
$\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ 当且仅当 Γ、$\circ p_1$、.....、$^{\circ}p_n \models_{\boldsymbol{Six}} \alpha$，其中 Var($\Gamma \cup \{\alpha\}$) $= \{p_1, \ldots, p_n\}$。

证明。（$\Leftarrow$）设 $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}$，并令 $h \in Hom$（$\mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}$，$\mathbb{B}_1$），其中 $\mathbb{B}_1$ 是二元布尔代数（即 $\mathbb{B}_1 = \{0, 1\}$）。由于 $\mathbb{B}_1$ 可被视为$\mathbb{S}_6$ 的 S-子代数（若令 ∇（x） $= x$，对所有 x，则 $\mathbb{B}_1 \simeq$ ·$\mathbf{L}_2$），我们有 que $h \in Hom$（$\mathfrak{Fm}$，$\mathbb{S}_6$）。因此，根据假设有

$$h(\bigwedge_{i=1}^{k} \alpha_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \circ p_j) \leq h(\alpha).$$

由于 $h \in Hom$（$\mathfrak{Fm}$，$\mathbb{B}_1$），因此对所有 j、$1 \leq j \leq n$，h（$^{\circ}p_j$） $= \circ h$（p_j） $= 1$。然后，如果对所有 i、$1 \leq i \leq k$，h（α_i） $= 1$，我们有$_k$ $_n h$（$\bigwedge_{i=1} \alpha_i \wedge \bigwedge_{j=1} \circ p_j$） $= 1$，因此 h（α） $= 1$。也就是说，$\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$。

($\Rightarrow$) 假设 $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ 并令 $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbb{S}_6)$。我们来证明，对于决定 Six 的每个矩阵 M，$\Gamma, \circ p_1, \ldots,$ $\circ p_n \models_M \alpha$。令 $M = \langle \mathbb{S}_6, [\frac{1}{3}) \rangle$，并假设 $h(\Gamma \cup \{\circ p_1, \ldots, \circ p_n\}) \subseteq [\frac{1}{3})$，其中 Var($\Gamma \cup \{\alpha\}$) $= \{p_1, \ldots, p_n\}$。于是，$h(\circ p_i) \neq 0$，这意味着对于所有 i，$h(p_i) \in \{1, 0\}$。因此，我们可以认为 $h \in Hom(\mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}, \mathbb{B}_1)$。

由于 $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ 且 $h(\Gamma) \subseteq \{1\}$，因此 $h(\alpha) = 1$ 以及 $h(\alpha) \in [\frac{1}{3})$。于是，$\Gamma, \circ p_1, \ldots, ^{\circ}p_n \models_{\langle \mathbb{S}_6, [\frac{1}{3}) \rangle} \alpha$。

类似地，可以证明，对于定义 Six 的其他矩阵，也有 Γ、$\circ p_1$..... $\circ p_n \models_M \alpha$。因此，$\Gamma$、$\circ p_1$.....$^{\circ}p_n \models_{\boldsymbol{Six}} \alpha$。□

7 Six 的证明论

到目前为止，我们一直使用语义工具研究 Six 逻辑。在本节中，我们将通过相继式演算给出它的句法版本。如果 Σ 是一个公式集，那么 $\nabla\Sigma$ $=\{\nabla\alpha :$ $\alpha \in \Sigma\}$。

定义 7.1 我们将以下列公理和规则组成的相继式演算记为 $\mathfrak{S}$：公理

$$\textit{(structural axiom)} \quad \alpha \Rightarrow \alpha \qquad (\bot) \quad \bot \Rightarrow \qquad (\top) \quad \Rightarrow \top$$

（第一模态公理）$\alpha \Rightarrow \nabla\alpha$ （第二模态公理）$\Rightarrow \nabla\alpha \vee \neg\nabla\alpha$

结构规则

$$\textit{(Left weakening)}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Sigma} \qquad \textit{(Right weakening)}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha}$$

$$\textit{(Cut)}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \quad \alpha, \Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}$$

逻辑规则

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Sigma, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \wedge \beta}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Sigma \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \vee \beta}$$

$$(\neg)\ \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}$$

$$(\neg\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow \neg\neg)\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\alpha, \Sigma}$$

$$(\nabla)\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \nabla\Sigma}{\Gamma, \nabla\alpha \Rightarrow \nabla\Sigma} \qquad (\neg\nabla \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \neg\nabla\alpha \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \nabla\neg\nabla\alpha \Rightarrow \Sigma}$$

Gentzen 演算 $\mathfrak{S}$ 中的推导（或 $\mathfrak{S}$-证明）概念是通常的概念。也就是说，当一个序列 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ 在 $\mathfrak{S}$中可导出（记作 $\mathfrak{S} \vdash \Gamma \Rightarrow \Sigma$）时，意味着它具有一个推导，其中初始序列式是公理的实例，并且所使用的规则属于上述列表中的规则。由于我们在序列中使用的是公式集，而不仅仅是多重集或序列，因此没有明确列出交换规则和收缩规则；因此，该 Gentzen 演算满足所有结构规则。如果 α 是一个公式，我们写作 $\mathfrak{S} \vdash \alpha$，表示 $\mathfrak{S} \vdash \Rightarrow \alpha$。

引理 7.1 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in Fm$。以下条件等价。

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ 在 $\mathfrak{S}$中可导出；
(ii) $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ 在 $\mathfrak{S}$中可导出；
(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_m$ 在 $\mathfrak{S}$中可导出；
(iv) $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_m$ 在 $\mathfrak{S}$中可导出。

证明。考虑到规则 $(\wedge \Rightarrow)$、$(\Rightarrow \wedge)$、$(\vee \Rightarrow)$、$(\Rightarrow \vee)$ 与经典情形中的规则相同，证明是显而易见的。□

注 7.1 由于支配合取 $\wedge$ 和析取 $\vee$行为的逻辑规则是经典规则，我们知道在 $\mathfrak{S}$ 中，关于这两个联结词的所有经典性质都成立。特别地，以下结论成立：设 $\alpha,\beta,\gamma \in Fm$。若 $\mathfrak{S} \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$，则，

(i) 若 $\mathfrak{S} \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$，则 $\mathfrak{S} \vdash \alpha \vee \gamma \Leftrightarrow \beta \vee \gamma$ 且 $\mathfrak{S} \vdash \alpha \wedge \gamma \Leftrightarrow \beta \wedge \gamma$,

and

(ii) 若 $\mathfrak{S} \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\mathfrak{S} \vdash \gamma \Rightarrow \delta$，则 $\mathfrak{S} \vdash \alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta \wedge \delta$ 且 $\mathfrak{S} \vdash \alpha \vee \gamma \Rightarrow \beta \vee \delta$。

(iii) $\mathfrak{S} \vdash \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$。

在下文中，我们用 $\mathfrak{S} \vdash \Gamma \Leftrightarrow \Sigma$ 表示序列式 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ 和 $\Sigma \Rightarrow \Gamma$ 均可在 $\mathfrak{S}$ 中导出。

引理 7.2 设 α、β、$\gamma \in Fm$ 使得 $\mathfrak{S} \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$。则，

(i) $\mathfrak{S} \vdash \neg\alpha \Leftrightarrow \neg\beta$,
(ii) $\mathfrak{S} \vdash \nabla\alpha \Leftrightarrow \nabla\beta$。

证明。(i) 显然。(ii)：

$$(\mathrm{cut})\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \beta \qquad \beta \Rightarrow \nabla\beta}{(\nabla)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \nabla\beta}{\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\beta}}$$

类似地，可以证明 $\nabla\beta \Rightarrow \nabla\alpha$。 □

此外，由于 $\neg$ 是德摩根否定，预期可得以下结果。

引理 7.3 设 α、$\beta \in Fm$。以下序列式在 $\mathfrak{S}$ 中是可导出的。

(i) $\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$,
$\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$, (ii)
$\alpha \vee \beta \Rightarrow \neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta$, (iii)
$\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta$, (i
v) $\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$,
(v) $\neg\alpha \vee \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$,
(vi) $\neg\alpha \wedge \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$,
(vii) $\neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$,

证明。（i）：由（$\neg\neg \Rightarrow$）和（$\Rightarrow \neg\neg$）立即可得。
（ii）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha}(\Rightarrow \neg\neg)}{\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha, \neg\neg\beta}(\text{right w.})}{\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta}(\Rightarrow \vee) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \neg\neg\beta}(\Rightarrow \neg\neg)}{\beta \Rightarrow \neg\neg\alpha, \neg\neg\beta}(\text{right w.})}{\beta \Rightarrow \neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta}(\Rightarrow \vee)}{\alpha \vee \beta \Rightarrow \neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta}(\vee \Rightarrow)$$

(iii)：与 (ii) 类似。
(iv)：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \Rightarrow \alpha, \beta}(\text{right w.})}{\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta}(\Rightarrow \vee)}{\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \neg\alpha}(\neg) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha, \beta}(\text{right w.})}{\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta}(\Rightarrow \vee)}{\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \neg\beta}(\neg)}{\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta}(\Rightarrow \wedge)$$

(v)：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha, \beta \Rightarrow \alpha}(\text{left w.})}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha}(\wedge \Rightarrow)}{\neg\alpha \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)}(\neg) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \Rightarrow \beta}{\alpha, \beta \Rightarrow \beta}(\text{left w.})}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta}(\wedge \Rightarrow)}{\neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)}(\neg)}{\neg\alpha \vee \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)}(\vee \Rightarrow)$$

(vi)：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{

(i) $\mathfrak{S} \vdash \nabla(\alpha \vee \beta)$
$\Leftrightarrow \nabla\alpha \vee \nabla\beta$, (ii) $\mathfrak{S} \vdash \nabla(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \nabla\alpha \wedge \nabla\beta$, (iii)
$\mathfrak{S} \vdash \nabla\nabla\alpha \Leftrightarrow \nabla\alpha$, (iv)
$\mathfrak{S} \vdash \nabla\neg\nabla\alpha \Leftrightarrow \neg\nabla\alpha$, (v)
$\mathfrak{S} \Rightarrow \neg\nabla\bot$。

证明。(i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \Rightarrow \alpha, \beta}(\Rightarrow\vee)}{\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta}}{\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta, \nabla(\alpha \vee \beta)}(c) \quad \dfrac{\alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)}{\alpha, \alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)}}{\alpha \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)}(\nabla) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha, \beta}(\Rightarrow\vee)}{\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta}}{\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta, \nabla(\alpha \vee \beta)}(c) \quad \dfrac{\alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)}{\beta, \alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)}}{\beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)}(\nabla)}{\nabla\alpha \vee \nabla\beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)}(\vee\Rightarrow)$$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha \vee \beta}{\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha, \beta}(\text{Lemma 7.1}) \quad \dfrac{\alpha \Rightarrow \nabla\alpha}{\alpha, \beta \Rightarrow \nabla\alpha, \nabla\beta}(\text{w})}{\alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla\alpha, \nabla\beta}(\text{cut})}{\nabla(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \nabla\alpha, \nabla\beta}(\nabla)}{\nabla(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \nabla\alpha \vee \nabla\beta}(\Rightarrow\vee)$$

(ii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \nabla\alpha}{\alpha, \beta \Rightarrow \nabla\alpha}(\text{w})}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \nabla\alpha}(\wedge\Rightarrow)}{\nabla(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \nabla\alpha}(\nabla) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha, \beta \Rightarrow \nabla\beta}(\text{w})}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \nabla\beta}(\wedge\Rightarrow)}{\nabla(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \nabla\beta}(\nabla)}{\nabla(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \nabla\alpha \wedge \nabla\beta}(\Rightarrow\wedge)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta}{\alpha, \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta}(\text{Lemma 7.1})}{\alpha, \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta, \nabla(\alpha \wedge \beta)}(\text{w}) \quad \dfrac{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)}{\alpha \wedge \beta, \alpha, \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)}(\text{w})}{\alpha, \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)}(\text{cut})}{\nabla\alpha, \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)}(\nabla)}{\nabla\alpha, \nabla\beta \Rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)}(\nabla)}{\nabla\alpha \wedge \nabla\beta \Rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)}(\wedge\Rightarrow)$$

(iii) $\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\nabla\alpha$ 是第一模态公理的一个实例。另一方面

$$(\nabla)\ \frac{\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\alpha}{\nabla\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\alpha}$$

(iv) 它是第一模态公理和规则（$\neg\nabla$）的推论。

(v)

$$(\neg)\ \frac{(\nabla)\ \dfrac{\bot \Rightarrow}{\nabla\bot \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg\nabla\bot}$$

□

8 逆转原理、可靠性和完备性

为了证明相对于 Six 的 $\mathfrak{S}$ 的可靠性和完备性，我们需要陈述有效性的概念。

定义 8.1 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in Fm$。如果对于所有 $h \in Hom$（Fm, $\mathbb{S}_6$）均成立，则称序列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ 是有效的

$$h(\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i) \leq h(\bigvee_{j=1}^{m} \beta_j).$$

If $n = 0$, we take $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i = \top$ and if $m = 0$, we take $\bigvee_{j=1}^{m} \beta_j = \bot$.

由上述定义可得

$\bigvee_{j=1}^{m} \beta_j$. 命题 8.1 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ 当且仅当 $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \models$ Six 有效

此外，我们将称该规则为

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Sigma_1, \ldots, \Gamma_k \Rightarrow \Sigma_k}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}$$

在其成立时保持有效性:

$$\Gamma_i \Rightarrow \Sigma_i \text{ is valid for } 1 \leq i \leq k \text{ implies } \Gamma \Rightarrow \Sigma \text{ is valid.}$$

回想一下，公式 α, $c(\alpha)$ 的复杂度是 α 中联结词出现的次数。我们用 $\alpha \models \beta$ 表示 $\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \beta$ 和 $\beta \models_{\boldsymbol{Six}} \alpha$。

定理 8.1 设 $\alpha \in Fm$。则，$\alpha \models \top$ 或 $\alpha \models \bot$ 或

$$\alpha \models \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}$$

其中每个 $\alpha_{ij} \in \{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$ 均对应某个命题变量 p_k、$n \geq 0$、$m_i \geq 0$。

证明。我们对 α 的复杂度使用归纳法。若 $c(\alpha) = 0$，则 α 是 p_k 或 $\top$ 或 $\bot$。在这些情形中的任一种情况下，定理均成立。

（归纳假设）假设对于复杂度小于 k 的任意公式，定理均成立。令 α 使得 $c(\alpha) = k$。

若 α 是 $\alpha^1 \wedge \alpha^2$，根据（归纳假设），$\alpha^k \models \top$ 或 $\alpha^k \models \bot$ 或

$$\alpha^k \models \bigwedge_{i=1}^{n_k} \bigvee_{j=1}^{m_{k_i}} \alpha_{ij}^k$$

对于 $k = 1, 2$。

如果 $\alpha^1 \models \bot$ 或 $\alpha^2 \models \bot$，则 $\alpha \models \bot$。如果 $\alpha^1 \models \top$，则 $\alpha \models \alpha^2$，根据（归纳假设），定理成立。类似地，如果 $\alpha^2 \models \top$，结论也成立。

否则，$\alpha^1 \models \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1$ 且 $\alpha^2 \models \bigwedge_{i=1}^{n_2} \bigvee_{j=1}^{m_{2_i}} \alpha_{ij}^2$。于是，$\alpha = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \models \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n_2} \bigvee_{j=1}^{m_{2_i}} \alpha_{ij}^2$，而最后这个表达式是若干项的合取，其中每一项都是形如

$\{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$ 的公式的析取。

如果 α 是 $\alpha^1 \vee \alpha^2$，其中 α^1 和 α^2 如前一种情形所述。那么，如果 $\alpha^1 \models \top$ 或 $\alpha^2 \models \top$，则 $\alpha \models \top$。如果 $\alpha^1 \models \bot$，则 $\alpha \models \alpha^2$，根据（归纳假设），定理成立。类似地，如果 $\alpha^2 \models \bot$，结论也成立。否则，$\alpha = \alpha^1 \vee \alpha^2 \models \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1 \vee \bigwedge_{i=1}^{n_2} \bigvee_{j=1}^{m_{2_i}} \alpha_{ij}^2$。根据推论 4.1，并注意到每个对合 Stone 代数特别地都是一个分配格，利用分配律进行必要次数的变换，我们可以将表达式 $\bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1 \vee \bigwedge_{i=1}^{n_2} \bigvee_{j=1}^{m_{2_i}} \alpha_{ij}^2$ 化为形如 $\bigwedge\bigvee \beta_t$ 的一个表达式，其中对于某个命题变量 p_k，$\beta_t \in \{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$。

如果 α 是 $\neg\alpha^1$，根据（归纳假设），$\alpha^1 \models \top$ 或 $\alpha^1 \models \bot$ 或 $\alpha^1 \models \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1$。如果 $\alpha^1 \models \top$，那么 $\alpha \models \bot$。如果 $\alpha^1 \models \bot$，那么 $\alpha \models \top$。否则，根据引理 7.2 和注 7.1，$\alpha =$

$\neg\alpha^1 \models \neg \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1$。由于每个对合 Stone 代数尤其也是一个 De Morgan 代数，因此有 $\alpha \models \neg \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1 \models \bigvee_{i=1}^{n_1} \bigwedge_{j=1}^{m_{1_i}} \neg\alpha_{ij}^1$。再次根据分配律和（DM1），$\neg\neg x \approx x$，我们得到表达式 $\bigvee_{i=1}^{n_1} \bigwedge_{j=1}^{m_{1_i}} \neg\alpha_{ij}^1$ 等价于 $\bigwedge\bigvee \beta_t$ 类型中的一个，其中每个

$\beta_t \in \{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$ 都对应于某个命题变量 p_k。

最后，如果 α 是 $\nabla\alpha^1$ 且 $\alpha^1 \models \top$，那么 $\alpha \models \top$。如果 $\alpha^1 \models \bot$，那么 $\alpha \models \bot$。否则，$\alpha^1 \models \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1$，并且根据引理 3.1 (IS7)、(IS8) 以及作为格同态的 ∇，我们得到 $\alpha = \nabla\alpha^1 \models \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \nabla\alpha_{ij}^1$，其中 $\nabla\alpha_{ij}^1$ 具有某个命题变量 p_k 对应的

$\{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$ 中某个元素的形式。 □

注记 8.1 根据定理 8.1，我们知道每个公式 $\alpha \in Fm$ 在 $\mathbf{Six}_n$ 中在逻辑上等价于 $\top$ 或 $\bot$，或者等价于具有 $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}$ 形式的公式。如果 α 既不等价于 $\bot$，也不等价于 $\top$，我们就称 $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}$ 是 α 的一个合取范式。每个公式都有无穷多个合取范式。我们将 α 的任一合取范式记作 $\bar{\alpha}$。如果 α 等价于 $\bot$ 或 $\top$，那么 $\bot$ ($\top$) 是 α 的一个合取范式。此外，我们称 α_{ij} 为 $\bar{\alpha}$ 的块。

如果 α 是合取范式，我们用 $\#\alpha$ 表示 α 的块数。也就是说，如果 α 是 $\bot_n$ 或 $\top$，那么 $\#\alpha = 0$。否则，α 是 $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}$，此时 $\#\alpha = m_1 + \cdots + m_n$。

示例 8.1 考虑公式 $\nabla((p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2)$。根据引理 7.4 (i)，我们有

$$\nabla((p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2) \Leftrightarrow \nabla(p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2$$

并且，根据引理 7.4 (ii) 和备注 7.1 (i)，

$$\nabla(p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2 \Leftrightarrow (\nabla p_1 \wedge \nabla\neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2$$

现在，由 $\nabla p_1 \wedge \nabla\neg\nabla p_2 \Leftrightarrow \nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2$，根据注 7.1 (i) 和引理 7.4 (iv)。然后，根据注 7.1 (i)

$$(\nabla p_1 \wedge \nabla\neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2 \Leftrightarrow (\nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2$$

由引理 7.4 (iv) 和注 7.1 (i)，我们得到

$$(\nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2 \Leftrightarrow (\nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2$$

最后，由注 7.1 (iii)，我们得到

$$(\nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2 \Leftrightarrow (\nabla p_1 \vee \nabla p_2) \wedge (\neg\nabla p_2 \vee \nabla p_2)$$

最后这个公式是与原公式逻辑等价的合取范式，并且我们已经证明，$\nabla((p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2)$ 和 $(\nabla p_1 \vee \nabla p_2) \wedge (\neg\nabla p_2 \vee \nabla p_2)$ 可以相互导出。也就是说，以下序列式在 $\mathfrak{G}$ 中是可导出的

$$\nabla((p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2) \Leftrightarrow (\nabla p_1 \vee \nabla p_2) \wedge (\neg\nabla p_2 \vee \nabla p_2)$$

Besides, $\#(\nabla p_1 \vee \nabla p_2) \wedge (\neg\nabla p_2 \vee \nabla p_2) = 4$

引理 8.1 设 $\alpha \in Fm$。那么，存在 α 的一个合取范式 $\bar{\alpha}$，使得 $\alpha \Leftrightarrow \bar{\alpha}$。

证明。证明使用归纳法，按 α 的复杂度进行，并运用注 7.1 以及引理 7.2、7.3、7.4。细节留给耐心的读者。□

定理 8.2（可靠性）在 $\mathfrak{G}$ 中可导出的每个序列 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ 都是有效的。

证明。容易验证，这些公理都是有效序列，且结构规则保持有效性。另一方面，考虑到 $\mathbb{S}_6$ 是一个 De Morgan 代数，以及 (DM1)、(IS7) 和 (IS8)，我们可以清楚地看到，(¬)、(¬¬ ⇒)、(⇒ ¬¬) 和 (¬∇) 都保持有效性。

最后，让我们来看一下

$$(\nabla)\quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \nabla\Sigma}{\Gamma, \nabla\alpha \Rightarrow \nabla\Sigma}$$

n m保持有效性。假设 (1) $\bigwedge h(\alpha_i) \wedge h(\alpha) \leq \bigvee h(\nabla\beta_j)$。那么，由于 ∇ 是一个$i=1$ $j=1$格同态，$\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\alpha) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \nabla h(\beta_j) = \nabla\left(\bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)\right)$。然而，在 $\mathbb{S}_6$ 中，我们有对于所有 x都成立的 $\nabla x \in \{0,1\}$。于是，$\nabla\left(\bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)\right) \in \{0,1\}$。如果 $\nabla\left(\bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)\right) = 0$，那么，根据 (1)，$n$ $n\bigwedge h(\alpha_i) \wedge h(\alpha) = 0$，从而 $\bigwedge h(\alpha_i)$ $= 0$ 或 $h(\alpha) = 0$。在这两种情况下，我们都有$i=1$ $i=1$

$\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\nabla\alpha) = 0$ and therefore $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\nabla\alpha) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\nabla\beta_j)$. If $\nabla\left(\bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)\right) = 1$, trivially we have $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\nabla\alpha) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\nabla\beta_j)$. □

接下来，我们将看到，在 $\mathfrak{G}$ 中，逆转原理成立。

引理 8.2（逆转原理）对于 $\mathfrak{G}$ 的每条规则 S_1、.....、$\dfrac{S_k}{S}$（左弱化和右弱化除外），均有：

如果 S 有效，则 S_i 对于 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 有效。

证明。由于规则（$\wedge \Rightarrow$）、（$\Rightarrow \wedge$）、（$\vee \Rightarrow$）和（$\Rightarrow \vee$）与经典情形中的相同；并且考虑到对合 Stone 代数是分配格，该原理对它们成立，正如在经典情形中一样。由于每个对合 Stone 代数都是 De Morgan 代数，规则（$\neg$）、（$\neg\neg \Rightarrow$）和（$\Rightarrow \neg\neg$）验证了该原理。规则（$\neg\nabla \Rightarrow$）根据（IS8）验证了该原理。

让我们看看（∇）验证了该原理。假设序列 Γ、$\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\Sigma$ 有效。那么，对于每个 $h \in Hom$（Fm、$\mathbb{S}_6$），我们有

$$h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) \wedge \nabla h(\alpha) = h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma \wedge \nabla\alpha) \leq h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \nabla\beta) = h(\nabla \bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta) = \nabla h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta)$$

根据 $\mathbb{S}_6$ 中的 ∇ 定义，我们有 $\nabla h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta) \in \{0, 1\}$。如果 $\nabla h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta) = 0$，那么 $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) \wedge \nabla h(\alpha) = 0$。在 $\mathbb{S}_6$中，我们可以断言 $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) = 0$ 或 $\nabla h(\alpha) = 0$。如果 $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) = 0$，那么 $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma \wedge \alpha) \leq h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \nabla\beta)$。如果 $\nabla h(\alpha) = 0$，那么 $h(\alpha) = 0$，因此 $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) \wedge h(\alpha) = 0$，并且 $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma \wedge \alpha) \leq h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \nabla\beta)$。

On the other side, if $\nabla h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta) = 1$, clearly $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma \wedge \alpha) \leq h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \nabla\beta)$. □

定理 8.3（完备性）在 $\mathfrak{G}$ 中有效的每个序列都可在 $\mathfrak{G}$中导出。

证明。我们通过对 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$中出现的逻辑联结词 $\vee$ 和 $\wedge$ 的总数进行归纳法，证明每个有效序列 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ 都有一个 $\mathfrak{G}$ 证明。根据引理 8.1，我们假设 $\Gamma \cup \Sigma$ 中的每个公式都采用合取范式。

对于基例， Γ 和 Σ 中的每个公式都是 $\{p, \neg p, \nabla p, \nabla\neg p, \neg\nabla p, \neg\nabla\neg p\}$ 中某个命题变量 p 或常量 $\bot$、 $\top$对应的一个块。由于该序列是有效的，我们有以下几种情况：

（1） $\bot \in \Gamma$ 或 $\top \in \Sigma$,

(2.1) $p \in \Gamma$ 和 $p \in \Sigma$; (2.2) $p \in \Gamma$ 和 $\nabla p \in \Sigma$,

(3.1) $\neg p \in \Gamma$ 和 $\neg p \in \Sigma$; (3.2) $\neg p \in \Gamma$ 和 $\nabla \neg p \in \Sigma$,
(4.1) $\nabla p \in \Gamma$ 和 $\nabla p \in \Sigma$; (4.2) $\nabla \neg p \in \Gamma$ 和 $\nabla \neg p \in \Sigma$,
(5.1) $\neg \nabla \neg p \in \Gamma$ 和 $\neg \nabla \neg p \in \Sigma$; (5.2) $\neg \nabla \neg p \in \Gamma$ 和 $p \in \Sigma$,
(6) ∇p、$\neg \nabla p \in \Sigma$。

在情形 (1) 中，$\Gamma \Rightarrow \Sigma$ 可以由 ($\bot$) 或 ($\top$) 以及弱化规则推导得到。在情形 (2.1)、(3.1)、(4.1)、(4.2) 和 (5.1) 中，$\Gamma \Rightarrow \Sigma$ 可以由结构公理以及弱化规则推导得到。在情形 (2.2)、(3.2) 中，$\Gamma \Rightarrow \Sigma$ 可以由第一模态公理以及弱化规则推导得到。在情形 (5.2) 中，我们可以如下推导出 $\neg \nabla \neg p \Rightarrow p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg p \Rightarrow \nabla \neg p}(\neg)}{\neg \nabla \neg p \Rightarrow \neg \neg p} \qquad \neg \neg p \Rightarrow p}{\neg \nabla \neg p \Rightarrow p}(\mathrm{cut})$$

由此我们通过弱化规则推导出 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$。在情形 (6) 中，我们利用第二模态公理、引理 7.1 以及弱化规则推导出 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$。

对于归纳步骤，设 α 是一个既不是块、也不是 Γ 或 Σ 中的常量的任意公式。根据命题公式的定义，α 必须具有 ($\beta \vee \gamma$) 或 ($\beta \wedge \gamma$) 的形式。如果 α 具有 ($\beta \vee \gamma$) 的形式，且 ∇p 是 β 的一个块、$\neg \nabla p$ 是 γ 的一个块，那么 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ 可以利用第二模态公理、引理 7.1 以及弱化规则推导得到。

否则，分别可以通过 $\vee$–引入规则或 $\wedge$–引入规则推导出 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$，具体采用左侧情形还是右侧情形，取决于 α 是否属于 Γ 或 Σ，但不使用弱化规则。在每种情况下，该规则的每个顶序列都将比 $\Gamma \Rightarrow \Sigma$少至少一个联结词 $\wedge$或 $\vee$，并且根据逆转原理，该序列是有效的。因此，根据归纳假设，每个顶序列在 $\mathfrak{S}$中都有一个推导。

□

9 结论

本文旨在研究关于对合 Stone 代数保持真值度的逻辑，该逻辑名为 Six。我们证明了这是一种六值逻辑，可以用四个矩阵来定义。事实证明，Six 是一种有趣的逻辑，它结合了 Belnap 四值逻辑 $FOUR$和 n值 Lukasiewicz 逻辑（$2 \leq n \leq 5$）的优良特征。作为一种次协调逻辑，它是一个真正的 LFI，并具有能够区分一致性与矛盾的一致性算子。最后，我们通过相继式演算 $\mathfrak{S}$给出了 Six 的句法表示。我们认为，$\mathfrak{S}$ 值得进一步深入研究；例如，它是否具有割消去性质仍是一个开放问题。鉴于规范模态算子∇行为的逻辑规则形式异常，我们推测情况并非如此。从这个意义上说，我们认为，超序列框架将是呈现具有割消去性质的 Six Gentzen 风格系统的更合适工具。

致谢：我们谨向匿名审稿人表示感谢，感谢他们提出的宝贵意见和建议，使我们得以改进论文的最终版本。

参考文献

[1] F. Bou、F. Esteva、J. M. Font、A. Gil、L. Godo、A. Torrens、V. Verd´u，《基于剩余格簇的真值程度保持逻辑》。《逻辑与计算杂志》19（2009），第6期，1031–1069。[2] R. Cignoli和M. S. de Gallego，《某些卢卡西维茨代数的格结构》。《普遍代数》13（1981），315–328。[3] R. Cignoli和M. S. de Gallego，《带算子的某些德摩根代数与卢卡西维茨代数的对偶性》。《澳大利亚数学会杂志》（A辑）34（1983），377–393。[4] W.A. Carnielli、M. E. Coniglio和J. Marcos，《形式不一致逻辑》。载于：《哲学逻辑手册》第14卷，第15–107页。编者：D. Gabbay；F. Guenthner。施普普林格，2007年。[5] W.A. Carnielli和J. Marcos，《C-系统分类学》。载于W. A. Carnielli、M. E. Coniglio和I. M. L. D'Ottaviano编，《次协调性——通向不一致性的逻辑道路》，《纯粹与应用数学讲义》第228卷，第1–94页。Marcel Dekker，纽约，2002年。[6] J. L. Castiglioni和R. Ertola–Biraben，《带对偶否定的真值度保持直觉主义逻辑的严格次协调性》。《逻辑杂志：IGPL》22（2014），第2期，268—273。[7] M. Coniglio、F. Esteva和L. Godo，《源自模糊逻辑系统的形式不一致逻辑》。《逻辑杂志：IGPL》22（2014），第6期，880–904[8] M. Coniglio和M. Figallo，《与四值模态代数相关的两种逻辑的希尔伯特式公理化》。《逻辑研究》，第102卷（2014），第3期，525–539。[9] da Costa，N.C.A.，《不一致形式系统》（葡萄牙语）。特许任教资格论文，1963年。由UFPR出版社再版，库里蒂巴，1993年。[10] da Costa，N.C.A.，《不一致形式系统的命题演算》。巴黎科学院院刊，A辑，第257卷（1963年），3790–3792。`èmes ´émie´érie A[11] R. Ertola–Biraben、F. Esteva、T. Flaminio、L. Godo、C. Noguera，《度保持模糊逻辑中的次协调性》。《软计算》19（3），531–546（2015）。[12] J. M. Font，《保持真值程度的次结构逻辑》。《逻辑分会通报》36，117–130，2007年。[13] J. M. Font，《认真对待真值度》。《逻辑研究》（真值专刊，第I部分）91，383–406，2009年。

[14] J. M. Font、A. Gil、A. Torrens和V. Verd´u, 《保持真值程度的无限值Lukasiewicz逻辑》。《数学逻辑档案》45，839–868，2006年。[15] J. M. Font和M. Rius, 《四值模态逻辑的抽象代数逻辑方法》。《符号逻辑杂志》65（2000），第2期，第481–518页。[16] J. M. Font、A. Gil、A. Torrens和V. Verd´u, 《保持真值程度的无限值Lukasiewicz逻辑》。《数学逻辑档案》45（2006），第7期，839–868。[17] J.Varlet, 《三值Lukasiewicz代数》。《列日皇家科学学会通报》36，399–408，1968年。[18] R. W´ojcicki, 《逻辑演算理论：后承运算基础理论》。《Synthese文库》/第199卷，1988年。