arXiv:2304.11630v1 [math.AC] 23 Apr 2023

单纯树的顶点覆盖理想的幂

BIJENDER、AJAY KUMAR 和 RAJIV KUMAR

Abstract. 2011 年，Herzog、Hibi 和 Ohsugi 猜想：如果 J 是一个弦图的覆盖理想，那么对于所有 $s \geq 1.$， J^s 都是逐分量线性的。2022 年，H`a 和 Tuyl 考虑了比弦图更一般的对象，并提出了以下问题：设 $J(\Delta)$ 是单纯树 $\Delta.$ 的覆盖理想。对于所有 $s \geq 1$， $J(\Delta)^s$ 是否都是逐分量线性的？本文对这一问题给出了肯定的回答。

1. 引言

单项式理想的同调性质和组合性质研究是一个美丽的领域，其中组合数学与交换代数之间存在丰富的相互作用。特别地，无平方单项式理想类与组合数学有着紧密联系。无平方单项式理想的一个基本例子是简单超图的边理想 $\mathcal{H}$. 回忆一下，简单超图 $\mathcal{H}$是一个二元组（$\mathcal{V}$， $\mathcal{E}$），其中 $\mathcal{V}$ 是一个有限集， $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{V}$ 的非空子集的集合，并且对于任意满足 $F \neq G$的 F、$G \in \mathcal{E}$ ，都有 $F \not\subset G.$ 。 $\mathcal{H}$的边理想记为 $I(\mathcal{H})$，它是域 $\mathbb{K}$ 上的多项式环 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的无平方单项式理想，由$I(\mathcal{H}) = \langle \prod_{x \in F} x : \ F \in \mathcal{E} \rangle.$ 给出。 $I(\mathcal{H})$的亚历山大对偶称为 $\mathcal{H}$ 的顶点覆盖理想，记为$I(\mathcal{H})^\vee = J(\mathcal{H})$。赋值 $\mathcal{H} \leftrightarrow I(\mathcal{H})$给出了超图族与无平方单项式理想族之间的一一对应。Faridi [4] 通过单纯复形的面理想，引入了超图 $\mathcal{H}$ 的边理想 $I(\mathcal{H})$的概念。设 Δ 是顶点集为 $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$的单纯复形，则可以关联一个无平方单项式理想$I(\Delta) = \langle \prod_{x \in F} x : \ F \in \mathcal{F}(\Delta) \rangle$, 称为 Δ的面理想，其中 $\mathcal{F}(\Delta)$表示 $\Delta.$ 的所有面$_{x \in F}$的集合。这一对应关系对于研究无平方单项式理想的幂非常有效。对于每个单纯复形 Δ，我们可以关联一个超图，即 $\mathcal{H}(\Delta) = (\mathcal{V}, \ \mathcal{F}(\Delta))$ 。注意， $I(\mathcal{H}(\Delta)) = I(\Delta)$。 Δ 的顶点覆盖理想定义为 $J(\Delta) = J(\mathcal{H}(\Delta)) = I(\mathcal{H}(\Delta))^\vee$.。利用这种方法，可以将任意无平方单项式理想视为某个单纯复形的面集或某个超图的边理想。无平方单项式理想与单纯复形之间的另一种对应称为 Stanley-Reisner对应。设 Δ 是顶点集为 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}.$的单纯复形。则 Δ的 Stanley-Reisner理想记为 I_Δ，定义为 $I_\Delta = \langle x_{i_1} \cdots x_{i_s} : \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \notin \Delta \rangle.$。如果商环 S/I_Δ 具有相同的性质，则称单纯复形是（序贯）Cohen-Macaulay的。Eagon 和 Reiner [1] 证明了，单纯复形 Δ 是 Cohen-Macaulay 的，当且仅当 $I_\Delta^\vee$ 具有线性分解。具有线性分解的理想被认为在计算上较为简单。Herzog 和 Hibi [8] 引入了一类称为分次线性理想的新理想。设 graded ideal I ，如果由 I 中次数为 j 的齐次元素生成的理想 $I_{<j>}$ 对所有 $j \geq 0.$ 都具有线性分解，则称其为分次线性理想。Herzog-Hibi [8] 通过证明单纯复形 Δ 是序贯 Cohen–Macaulay的当且仅当理想 $I_\Delta^\vee$ 是逐分量线性理想，推广了 Eagon 和 Reiner 的结果。已知，在特征为 0 的域上，多项式环 S 中的分次 I 是 Koszul 的

Date：2023年4月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 13C14、13D02、05E40。
Key words and phrases. 逐分量线性、顶点可分解、正则性、序贯 Cohen–Macaulay、顶点覆盖理想、符号幂。

当且仅当它是逐分量线性的。Koszul 模由 Herzog 和 Iyengar 于[13]引入。Koszul 模在交换代数和代数几何等领域有着重要应用。

寻找逐分量线性理想类别的问题备受关注，文献中许多作者对此进行了广泛研究（见 [2, 3, 10, 15, 16, 17]）。特别是，人们希望找到图 G 上的一些组合条件，使其覆盖理想的幂为逐分量线性。Francisco 和 Tuyl [6] 证明，弦图的顶点覆盖理想是逐分量线性的。Herzog、Hibi 和 Ohsugi [10] 研究了与图相关的覆盖理想的幂，并证明 Cohen- Macaulay 弦图的顶点覆盖理想的所有幂都是逐分量线性的。此外，他们提出了一个猜想：弦图的顶点覆盖理想的所有幂都是逐分量线性的。除广义星图、Cohen-Macaulay 弦图、树、Cohen-Macaulay 二部图和仙人掌图，以及 $(C_4, 2K_2)$-自由图等若干类图之外，这一猜想几乎没有取得进展（见 [2, 10, 14, 15, 16, 17]）。H`a 和 Tuyl [7] 提出了以下问题：设 $J(\Delta)$ 为单纯树 Δ. 的覆盖理想。对于所有 $s \geq 1$， $J(\Delta)^s$ 是否都是逐分量线性的？本文对此问题给出了肯定的回答，从而证明了 Herzog、Hibi 和 Ohsugi 猜想在单纯树这一特殊情形下的推广。

定理 1.1. 设 Δ 是一棵单纯树。那么对每个 $k \in \mathbb{N}_{>0}$, $J(\Delta)^k$ 都有线性商，因此它是逐分量线性的。

另一个值得研究的问题是考察理想 I 在取幂时保持不变的性质。自然会问：如果一个分次理想 I 是逐分量线性的，那么对所有 $s \geq 1$，理想 I^s 是否也逐分量线性？Herzog、Hibi 和 Zheng [12] 证明，若 $I(G)$ 有线性分解，则 $I(G)$ 的每个幂也有线性分解。然而，有些例子中， I 有线性分解（因而是逐分量线性的），但 I^2 却不具备这一性质。第一个这样的例子由 Terai 给出。Terai 指出，若基域的特征为零，则 Stanley–Reisner 理想 $I = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_5, x_1x_3x_6, x_1x_4x_5, x_1x_4x_6, x_2x_3x_4, x_2x_4x_6, x_2x_5x_6, x_3x_4x_5, x_3x_5x_6)$ 有线性分解，而 I^2 没有线性分解。然而，若基域的特征为 2，则 I 没有线性分解。在 [19] 中，Sturmfels 给出了一个具有线性分解的无平方单项式理想 $I = (x_4x_5x_6, x_3x_5x_6, x_3x_4x_6, x_3x_4x_5, x_2x_5x_6, x_2x_3x_4, x_1x_3x_6, x_1x_4x_5)$（与基域的特征无关）。但是 I^2 没有线性分解。由定理 1.1 和 [4, 推论 7.8], ，我们得到本文的第二个主要结果。

定理 1.2. 设 Δ 是一个单纯树。则下列命题等价。
(i) $J(\Delta)$ 有线性分解。(ii) 对某个 $s \geq 1.$， $J(\Delta)^s$ 有线性分解。(iii) 对所有 $s \geq 1.$， $J(\Delta)^s$ 有线性分解。(iv) $S/I(\Delta)$ 是 Cohen-Macaulay。
(v) Δ 是无混合的。(vi) Δ 是嫁接的。

2. 预备知识

为简便起见，我们用 $[n].$ 表示集合 $\{1, \ldots, n\}$。此外，我们用记号 $[n]^a$ 表示集合 $\{(k_1, \ldots, k_a) : k_i \in [n]\}.$

设 Δ 是一个单纯复形。 Δ 的所有面的集合记为 $\mathcal{F}(\Delta)$。如果 $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \ldots, F_t\}$，则我们写作 $\Delta = \langle F_1, \ldots, F_t \rangle.$ 只有一个面的单纯复形称为单纯形。 Δ 的子集族是指一个单纯复形，其面集是 $\Delta.$ 面集的子集。

定义 2.1。 设 Δ 是顶点集为 $\mathcal{V}$ 且具有 $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \ldots, F_t\}.$ 的单纯复形

（a）对于 Δ 的一个面 F， F 的删除记作 $\mathrm{del}_\Delta(F)$，是定义为如下形式的单纯复形

$$\mathrm{del}_\Delta(F) = \{G \in \Delta : G \cap F = \emptyset\}.$$

（b）对于 Δ 的一个面 F， F 的链接记作 $\mathrm{link}_\Delta(F)$，它是定义如下的一个单纯复形

$$\mathrm{link}_\Delta(F) = \{G \in \Delta : G \cap F = \emptyset, G \cup F \in \Delta\}.$$

（c）如果在 $\mathrm{link}_\Delta(x)$ 中不存在同时为 $\mathrm{del}_\Delta(x)$ 中的面的面，则称顶点 $x \in \mathcal{V}$ 为 Δ 的剥离顶点；如果 . Δ 是一个单纯形，或者它具有剥离顶点 x，使得 $\mathrm{del}_\Delta(x)$ 和 $\mathrm{link}_\Delta(x)$ 都是顶点可分解的，则称 . Δ 是顶点可分解的。

（d）如果存在 Δ 的所有面 $F_{i_1} \ldots$、F_{i_t} 的一个线性序，使得对于所有满足 $r < s$ 的 r、$s \in [t]$，存在满足 $F_{i_s} \setminus F_{i_j} = \{x\}$. 的 $x \in F_{i_s} \setminus F_{i_r}$ 和 $j \in [s-1]$，则称 Δ 是可剖分的

（e）如果对于每个 $i \neq j$，都存在 Δ 的面序列 F_{t_1}，...，F_{t_r}，使得 $F_{t_1} = F_i$、$F_{t_r} = F_j$，并且对于 $s \in [r-1]$. 有 $F_{t_s} \cap F_{t_{s+1}} \neq \emptyset$，则称 Δ 是连通的。（f）如果面 F 是 Δ 的唯一面，或者存在面 $G \in \mathcal{F}$（Δ），满足 $G \neq F$，使得对于所有满足 $H \neq F$. 的 $H \in \Delta$，都有 $F \cap H \subset F \cap G$，则称 F 为 Δ 的叶。进一步地，G 称为 F 的分支。特别地，如果 $F \cap G \neq \emptyset$，则称 G 为 F. 的关节点。（g）如果叶 F 属于 Δ，且集合 $\{F \cap G : G \in \mathcal{F}(\Delta)\}$ 关于包含关系是全序的，则称其为良叶。（h）如果 Δ 是连通的，并且 Δ 的每个非空子集族都有一片叶，则称 Δ 为单纯树。如果 Δ 不连通，且 Δ 的每个连通分支都是树，则称 Δ 为森林。（i）如果 F_1，...，F_t 是 Δ 的所有面构成的一个序，并且对于每个 $i \in [t-1]$，F_i 都是 Δ. 的子集族 $\langle F_i, \ldots, F_t\rangle$ 的良叶，则称该序为良叶序

定义 2.2. 如果满足以下条件，则称单纯复形 Δ 是由带有单纯形 F_1、...、F_s 的单纯复形 Δ' 嫁接而成（或者说 Δ 是嫁接的）。
(a) $\Delta = \langle F_1, \ldots, F_s\rangle \cup \Delta'$; (b) $\mathcal{V}(\Delta') \subset \bigcup_{i=0}^{s} \mathcal{V}(F_i)$；
(c) 对所有 $i \in [s]$，F_i 都是 Δ 的叶子；(d) 对所有 $i \in [s]$，
$F_i \notin \mathcal{F}(\Delta')$；(e) 对于 $i \neq j$，$F_i \cap F_j = \emptyset$；(f) 如果
$G \in \mathcal{F}(\Delta')$ 是 Δ 的关节点，那么 $\Delta \setminus G$ 也同样是嫁接
的。

定义 2.3. 设 $\mathcal{V}$ 是一个有限集，$\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{V}$. 的非空子集族。那么，二元组 $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 称为超图。$\mathcal{V}$ 的元素称为顶点，$\mathcal{E}$ 的元素称为边。我们分别用 $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 的顶点集和边集。若对于任意 F、$G \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$，只要 $F \neq G$，就有 $F \not\subset G$.，则称超图 $\mathcal{H}$ 为简单超图。只含一个顶点的边 E 称为平凡边。若顶点 $x \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$ 满足 $\{x\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$，或者对于所有 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ 都有 $x \notin E$，则称其为孤立顶点。若超图 $\mathcal{H}$ 的每个顶点都是孤立顶点，则称 $\mathcal{H}$ 为孤立超图。简单超图也称为杂乱族。

本文中所考虑的所有超图都是简单的。

记号 2.4. 设 $\mathcal{H}$ 为一个超图。删除其孤立顶点后得到的超图记作 $\mathcal{H}^\circ$.

定义 2.5. 设 $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H})\ \mathcal{E}(\mathcal{H}))$ 为一个超图。
(a) $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ 的一个子集 C 称为 $\mathcal{H}$ 的顶点覆盖，若对于所有 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ 都有 $C \cap E \neq \emptyset$。$\mathcal{H}$ 的一个顶点覆盖 C 称为极小的，如果不存在 C 的真子集是 $\mathcal{H}$. 的顶点覆盖。(b) $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ 的一个子集 W 称为独立集，若对于所有 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ 都有 $E \cap (\mathcal{V}(\mathcal{H}) \setminus W) \neq \emptyset$。

定义 2.6. 设 Δ 为一个单纯复形，$\mathcal{H}$ 为一个超图。
(a) $\mathcal{H}$ 的独立复形记作 $\Delta(\mathcal{H})$，是一个单纯复形，其面为 $\mathcal{H}$. 的独立集

(b) 与 Δ 相关联的超图记作 $\mathcal{H}(\Delta)$，其边集为 $\mathcal{F}(\Delta)$。(c) 如果 $\mathcal{H}$ 的每个极小顶点覆盖的基数都相同，则称 $\mathcal{H}$ 为无混合。此外，如果 $\mathcal{H}(\Delta)$ 是无混合的，则称 Δ 为无混合。

设 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 $\mathbb{K}$.上的多项式环

定义 2.7. 设 $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 是一个有限集。对于子集 $F \subset \mathcal{V}$，令 x_F 表示 S中的单项式 $\prod_{x_j \in F} x_j$，令 $\wp_F$ 表示由变量 $x_j \in F$.生成的 S 的素理想

(a) 设 $\mathcal{H}$ 是顶点集为 $\mathcal{V}$. 的超图。则 $\mathcal{H}$的边理想记为 $I(\mathcal{H})$，是 S 中的无平方因子单项式理想，定义为

$$I(\mathcal{H}) = \langle x_F : F \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) \rangle.$$

亚历山大对偶 $J(\mathcal{H}) = I(\mathcal{H})^\vee$ 的 $I(\mathcal{H})$ 称为 顶点覆盖理想 $\mathcal{H}$. 注意$J(\mathcal{H}) = \bigcap_{F \in \mathcal{E}(\mathcal{H})} \wp_F$.

(b) 设 Δ 是顶点集为 $\mathcal{V}$. 的单纯复形。则 Δ的面理想记为 $I(\Delta)$，是 S 中的无平方因子单项式理想，定义为

$$I(\Delta) = \langle x_F : F \in \mathcal{F}(\Delta) \rangle.$$

Δ 的顶点覆盖理想由 $J(\Delta) = J(\mathcal{H}(\Delta))$ 给出。注意， $I(\Delta) = I(\mathcal{H}(\Delta))$。因此，$J(\Delta) = I(\Delta)^\vee$.

定义 2.8. 设 $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$ 为一个超图。对于 $x_j \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$,
(a) $\mathcal{H}$ 的收缩，记作 $\mathcal{H}/x_j$，是边理想为无平方因子单项式理想 $I(\mathcal{H}) : x_j$ 的超图；(b) $\mathcal{H}$ 的删除，记作 $\mathcal{H}\backslash x_j$，是边理想为无平方因子单项式理想 $I(\mathcal{H}) \cap k[x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n]$. 的超图

考虑以下集合

$$\mathcal{E}' = \{F \setminus \{x_j\} : F \in \mathcal{E}(\mathcal{H}), x_j \in F\}$$

and

$$\mathcal{E}'' = \{E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) : x_j \notin E, F \setminus \{x_j\} \not\subset E \text{ for all } F \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) \setminus \{E\}\}.$$

那么顶点集 和 $\mathcal{H}$ 的收缩（分别为删除 $H \setminus x_j$）的边集由 b 给出 y

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}/x_j) = \mathcal{V}(\mathcal{H}) \setminus \{x_j\} \text{ (resp. } \mathcal{V}(\mathcal{H} \setminus x_j) = \mathcal{V}(\mathcal{H}) \setminus \{x_j\})$$

and

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}/x_j) = \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}'' \text{ (resp. } \mathcal{E}(\mathcal{H} \setminus x_j) = \{E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) : x \notin E\}).$$

因此，顶点可分解单纯复形的定义转换为顶点可分解超图如下。

定义 2.9. 若超图 $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$ 是顶点可分解的，则它要么是孤立超图，要么存在一个顶点 $x \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$，使得
(a) $\mathcal{H}/x$ 和 $\mathcal{H} \setminus x$ 是顶点可分解的；并且 (b) 对于 $\mathcal{H}/x$ 中的每个独立集 W，都存在 $H \setminus x$ 中的一个独立集 W'，使得 $W \subsetneq W'$.

注记 2.10. 设 $\mathcal{H}$ 是顶点集 $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ 和边集 $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ 上的简单超图。那么对于每个 $x \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$ 和 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$, 存在一条边 $E' \in \mathcal{E}(\mathcal{H}/x)$，使得 $E' \subset E \setminus \{x\}$.

定义 2.11. 设 M 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-分次 S-模。
(a) 那么 $\beta_{i,j}^S(M) = (\text{Tor}_i^S(M, \mathbb{K}))_j$ 称为 M. 的$(i, j)^{th}$ 分次贝蒂数。(b) M 的正则性记为 $\text{reg}(M)$，定义为

$$\text{reg}(M) = \max\{j - i : \beta_{i,j}^S(M) \neq 0\}.$$

(c) 如果存在一个整数 d，使得 $\beta_{i,\ i+b} = 0$ 对所有 i 以及所有 $b \neq d$ 都成立，那么我们称模 M 具有线性分解。(d) 如果存在一个有限序列，则称模 M 为序贯 Cohen–Macaulay 模

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

使得商模 M_i/M_{i-1} 对所有 $i \in [r]$ 都是 Cohen-Macaulay 的分次 S- M 子模，并且对所有 $i \in [r-1]$.，$\dim(M_i/M_{i-1}) < \dim(M_{i+1}/M_i)$

如果 S/I_Δ 是 Cohen-Macaulay（分别地，序贯 Cohen-Macaulay）环，则称单纯复形 Δ 在 $\mathbb{K}$ 上是 Cohen-Macaulay（分别地，序贯 Cohen-Macaulay）的。此外，如果其独立复形 Δ（$\mathcal{H}$）是顶点可分解（分别地，可剖分、序贯 Cohen-Macaulay）的，则称超图 $\mathcal{H}$ 是顶点可分解（分别地，可剖分、序贯 Cohen-Macaulay）的。对于超图，以下蕴含关系是已知的:

$$\text{顶点可分解} \ \Rightarrow\ \text{可剖分} \ \Rightarrow \text{序贯 Cohen-Macaulay}。$$

定义 2.12. 若分次理想 I of S 对所有 j 都满足 $I_{<j>}$ 有线性分解，则称其为逐分量线性的，其中 $I_{<j>}$ 是由 I 中次数为 j. 的所有元素生成的理想

一般而言，找到逐分量线性的理想并不容易。不过，存在一类更小的逐分量线性理想，即具有线性商的理想。

定义 2.13. 设 I 是 S. 的单项式理想。若存在 I 的极小生成元的一个排列 $u_1, \ldots, u_r$，使得对所有 i.，$\langle u_1, \ldots, u_{i-1}\rangle$: $\langle u_i\rangle$ 都由 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的一个子集生成，则称 I 具有线性商

现在我们引入无平方因子单项式理想的 k 次符号幂的概念。

定义 2.14. 设 I 是 S 中的无平方因子单项式理想，其不可约主分解为 $I = \wp_1 \cap \cdots \cap \wp_t$，其中 $\wp_i$ 是由 S. 中若干变量生成的理想。则对于 $k \in \mathbb{N}_{>0}$， I 的 k 次符号幂 $I^{(k)}$ 定义如下:

$$I^{(k)} = \wp_1^k \cap \cdots \cap \wp_t^k.$$

现在我们回顾极化的定义。它是将单项式理想转换为无平方因子单项式理想的非常有用的工具。

定义 2.15. 设 $I \subset S$ 是一个单项式理想，其生成元为 u_1、…、u_m，其中 $u_i = \prod_{j=1}^n x_j^{a_{ij}}$. 对于 $j \in [n]$，令 $a_j = \max\{a_{ij} : \ i \in [m]\}$. 考虑一个多项式环

$$T = \mathbb{K}[x_{11}, \ldots, x_{1a_1}, x_{21}, \ldots, x_{2a_2}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{na_n}].$$

那么，由无平方因子单项式 w_1、.....、w_m 生成的 T 中的无平方因子单项式理想 I，其中 $w_i = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{a_{ij}} x_{jk}$，称为 I 的极化

3. Powers of vertex cover ideal of a simplicial tree

本节中，我们研究单纯树 Δ. 的覆盖理想 $J(\Delta)$ 的幂的最小自由分解。我们证明，对于所有 $k \in \mathbb{N}_{>0}$.， $J(\Delta)^k$ 都是逐分量线性的。为证明这一结果，我们引入一些基本概念。

注记 3.1. [11, 推论 3.4] 当且仅当 Δ 是森林时，单纯复形 Δ 具有良叶序。特别地，每个森林都有一个良叶。

定义 3.2. 对于 $t \geq 2$，令 $\Delta = \langle F_1, \ldots\ldots, F_t \rangle$ 为一棵单纯树。假设 F_1 是Δ. 的良叶。根据良叶的定义，存在一个序列 $i_1, \ldots\ldots, i_{t-1}$ 使得

$$F_1 \cap F_{i_1} \supseteq F_1 \cap F_{i_2} \supseteq \cdots \supseteq F_1 \cap F_{i_{t-1}}.$$

现在，令 $g \in [t-1]$ 为满足以下条件的最大整数：$F_1 \cap F_{i_g} \neq \emptyset$. 对于 $l \in [g]$，假设

$$F_1 \cap F_{i_l} = \{x_{j_0}, \ldots, x_{j_1}, \ldots, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{g-l}}, \ldots, x_{j_{g+1-l}}\}.$$

有限序列（x_{j_0}，...，x_{j_1}，...，x_{j_2}，...，$x_{j_{g-1}}$，...，x_{j_g}）称为 F_1 在 Δ.中的良叶的良顶点序列

在下面的例子中，我们看到一个叶的良顶点序列可能并不唯一。

例 3.3. 设 Δ 为图 1 所示的单纯树，其面为 $F_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$、$F_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$、$F_3 = \{x_1, x_5, x_6\}$和 $F_4 = \{x_6, x_7, x_8\}$. 我们有

$$F_1 \cap F_2 = \{x_1, x_2, x_3\} \supseteq F_1 \cap F_3 = \{x_1\} \supseteq F_1 \cap F_4 = \emptyset.$$

因此，F_1 是 Δ. 的良叶。另请注意，(x_1, x_2, x_3)和(x_1, x_3, x_2)都是良叶 F_1.的良好顶点序列

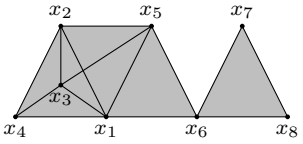

FIGURE 1

为了研究超图 $\mathcal{H}$ 的覆盖理想 $J(\mathcal{H})$ 的符号幂，我们从 $\mathcal{H}$ 构造一个新的超图，使得 $J(\mathcal{H})$ 的符号幂的极化等于新构造超图的覆盖理想。

构造。设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，其顶点集为 $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{F_1, \ldots, F_t\}$.。设 $k \in \mathbb{N}_{>0}$.。对于 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b) \in [k]^b$，令 $|\mathbf{f}|$ 表示和 $\sum_{p=1}^{b} f_p$.。那么，对于一条边 $F = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\}$，我们定义一个超图 $F(k)$，其顶点集为

$$\mathcal{V}(F(k)) = \{x_{j_p,f} : p \in [b], f \in [k]\}$$

以及边集

$$\mathcal{E}(F(k)) = \{\{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\} : |\mathbf{f}| \leq k + b - 1\}.$$

按照约定，我们将 $F(0)$ 设为顶点为 $\mathcal{V}(F(0))$ 的孤立超图。对于 $\mathbf{k}_t = (k_1, \ldots, k_t) \in \mathbb{N}^t$，我们定义超图 $\mathcal{H}(\mathbf{k}_t) = \mathcal{H}(k_1, \ldots, k_t)$，其顶点集为 $_t\mathcal{V}(\mathcal{H}(\mathbf{k}_t)) = \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{V}(F_i(k_i))$，边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{H}(\mathbf{k}_t)) = \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{E}((F_i(k_i)))$。特别地，如果 $k_i = k$ 对所有 $i \in [t]$ 都成立，则将超图 $\mathcal{H}(\mathbf{k}_t)$ 记为 $\mathcal{H}(\mathbf{k})$。

我们借助下面的例子说明上述构造。

例 3.4。考虑顶点集为 $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \{x_1, \ldots, x_6\}$、边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{F_1, F_2, F_3\}$ 的超图 $\mathcal{H}$，其中 $F_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$、$F_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$ 和 $F_3 = \{x_4, x_5, x_6\}$.。对于 $\mathbf{k}_3 = (2, 1, 3) \in \mathbb{N}^3$，$\mathcal{H}(\mathbf{k}_3)$ 是顶点集为

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}(\mathbf{k}_3)) = \{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{4,1}, x_{4,2}, x_{4,3}, x_{5,1}, x_{5,2}, x_{5,3}, x_{6,1}, x_{6,2}, x_{6,3}\},$$

以及边集合

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}(\mathbf{k}_3)) = \left\{ \begin{array}{l} \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}\}, \{x_{1,2}, x_{2,1}, x_{3,1}\}, \{x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,1}\}, \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,2}\}, \\ \{x_{3,1}, x_{4,1}, x_{5,1}\}, \{x_{4,1}, x_{5,1}, x_{6,1}\}, \{x_{4,2}, x_{5,1}, x_{6,1}\}, \{x_{4,1}, x_{5,2}, x_{6,1}\}, \\ \{x_{4,1}, x_{5,1}, x_{6,2}\}, \{x_{4,3}, x_{5,1}, x_{6,1}\}, \{x_{4,1}, x_{5,3}, x_{6,1}\}, \{x_{4,1}, x_{5,1}, x_{6,3}\}, \\ \{x_{4,2}, x_{5,2}, x_{6,1}\}, \{x_{4,2}, x_{5,1}, x_{6,2}\}, \{x_{4,1}, x_{5,2}, x_{6,2}\} \end{array} \right\}.$$

下面的引理建立了覆盖理想 $J(\mathcal{H}(\mathbf{k}))$ 与覆盖理想 $J(\mathcal{H})$ 的 k 次符号幂之间的关系。

引理 3.5. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，其顶点集为 $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，边集为$\widetilde{\mathcal{E}(\mathcal{H})} = \{F_1, \ldots, F_t\}$.。那么 $J(\mathcal{H}(\mathbf{k})) = J(\mathcal{H})^{(k)}$，其中 $k \in \mathbb{N}_{>0}$.

证明。由 [5, 命题 2.3], , 可得

$$\widetilde{J(\mathcal{H})^{(k)}} = \widetilde{\wp_{F_1}^k} \cap \cdots \cap \widetilde{\wp_{F_t}^k}.$$

现在，根据 [5,命题 2.5],

$$\widetilde{\wp_F^k} = \bigcap_{\Sigma f_j \leq k+a-1} (x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}), \text{ where } F = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\} \subset \mathcal{E}(\mathcal{H}).$$

因此，我们有等式 $\widetilde{J(\mathcal{H})^{(k)}} = J(\mathcal{H}(\mathbf{k}))$。 □

下面的定理是本文的主要结果。

定理 3.6. 设 $\mathbf{k}_t \in \mathbb{N}_{>0}^t$ 和 Δ 是单纯树。则 $\mathcal{H}(\mathbf{k}_t)$ 是一个顶点可分解超图，其中 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta)$。

我们按以下引理的顺序证明此定理。首先，我们从下面这一事实开始。

注记 3.7. 设 $\mathcal{H}$ 是顶点集为 $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$、边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{\{x_1, \ldots, x_n\}\}$. 的超图。对于 $k \in \mathbb{N}$, 令 $\mathcal{D} = \Delta(\mathcal{H}(\mathbf{k}))$, 且 $W \in$链接$_{\mathcal{D}}(x_{1,1})$。由于 $\{x_{1,1}, \ldots, x_{n,1}\}$ 是 $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ 和 $W \cup \{x_{1,1}\} \in \mathcal{D}$ 中的一条边，因此可知，对于某个 $2 \leq j \leq n.$，有 $\{x_{j,1}, \ldots, x_{j,k}\} \not\subset W$

引理 3.8. 采用注记 3.7 中的记号， $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ 是顶点可分解的 .

证明。我们使用关于 $N = k + n.$ 的归纳法证明该引理。若 $n = 1$ 或 $k = 0$, 则 $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ 是一个孤立超图, 因此是顶点可分解的。特别地，当 $N = 1.$时，证明即告完成

现在，假设 $N > 1$ 和 $n > 1.$ 。首先，我们证明 $x_{1,1}$ 是超图 $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ 的剥离顶点。令 $\mathcal{D} = \Delta(\mathcal{H}(\mathbf{k}))$, 且 $W \in$ 链接$_{\mathcal{D}}(x_{1,1})$。根据注记 3.7，存在 $2 \leq j \leq n$ 使得 $\{x_{j,1}, \ldots, x_{j,k}\} \not\subset W.$。假设 f 是满足 $x_{j,f} \notin W.$ 的最大正整数。我们断言 $W \cup \{x_{j,f}\} \in$删除$_{\mathcal{D}}(x_{1,1})$。由于 $x_{1,1} \notin W$，只需证明 $W \cup \{x_{j,f}\} \in \mathcal{D}.$。反之，假设 $W \cup \{x_{j,f}\} \notin \mathcal{D}.$。那么存在 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in [k]^n$，满足 $|\mathbf{f}| \leq k+n-1$, 使得 $\{x_{1,f_1}, \ldots, x_{n,f_n}\} \subset W \cup \{x_{j,f}\}.$。这意味着 $f = f_j$ 且 $x_{1,f_1} \in W.$。由于 $x_{1,1} \notin W$，我们有 $f_1 \geq 2.$ 。这给出

$$1 + f_2 + \cdots + (f_j + 1) + \cdots + f_n \leq |\mathbf{f}| \leq k + n - 1. \tag{3.1}$$

现在，利用对所有 i 都成立的事实 $f_1 \geq 2$、 $f_i \geq 1$ 以及 $|\mathbf{f}| \leq k+n-1$，我们得到 $f_j = f < k.$ 这就给出

$$\{x_{1,1}, x_{2,f_2}, \ldots, x_{j,f_j+1}, \ldots, x_{n,f_n}\} \subset W \cup \{x_{1,1}\},$$

因此根据公式（3.1），我们有 $\{x_{1,1}, x_{2,f_2}, \ldots, x_{j,f_j+1}, \ldots, x_{n,f_n}\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H}(\mathbf{k}))$。这与事实 $W \cup \{x_{1,1}\} \in \mathcal{D}.$ 矛盾。这证明了 $W \cup \{x_{j,f}\} \in \mathcal{D}$, 因此 $x_{1,\ 1}$ 是 $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ 的一个剥离顶点。

现在， $\mathcal{H}(\mathbf{k}) \setminus \{x_{1,1}\} \simeq \mathcal{H}(\mathbf{k} - \mathbf{1})$ 和 $\mathcal{H}(\mathbf{k})/x_{1,\ 1} = \mathcal{H}'(\mathbf{k})$, 其中 $\mathcal{H}'$ 是具有顶点集 $\mathcal{V}(\mathcal{H}') = \{x_2, \ldots, x_n\}$ 和边集 $\mathcal{E}(\mathcal{H}') = \{\{x_2, \ldots, x_n\}\}$. 的超图。通过对 N 进行归纳法，$\mathcal{H}(\mathbf{k}) \setminus \{x_{1,1}\}$ 和 $\mathcal{H}(\mathbf{k})/x_{1,\ 1}$ 都是顶点可分解的。因此， $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ 是顶点可分解的。□

现在，我们为本节余下部分固定一些记号。

设置 3.9。对于 $t \geq 2$, 设 $\Delta = \langle F_1, \ldots, F_t \rangle$ 是顶点集 $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的一棵单纯树，其良叶序为 $F_1, \ldots, F_t.$。对于 $i \in [t-1]$, 假设 G_i 是 F_i 在 $\Delta_i = \langle F_i, \ldots, F_t \rangle.$ 中的一个分支。由于 F_1 是 Δ 的一片良叶，存在一个排序 $i_1, \ldots, i_t$，使得

$$F_1 \cap F_{i_1} \supset F_1 \cap F_{i_2} \supset \cdots \supset F_1 \cap F_{i_t}.$$

设 g 是满足 $F_1 \cap F_{i_g} \neq \emptyset.$ 的最大整数。考虑超图 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta)$。令 $\mathbf{k}_t = (k_1, \ldots, k_t) \in \mathbb{N}_{>0}^t$, 并设 $\mathcal{L} = P_0P_1P_2\ldots$ 是一个满足 $P_i \in \{L, D\}.$ 的无限字符串。假设 $\mathcal{L}_s = P_0P_1P_2\ldots P_s$ 是其第 s 个部分字符串。我们递归地定义三元组 $\left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}, A_s, B_s\right)_{s=0}^{\infty}$ 序列，其中

(1) $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 是一个超图；且

(2) A_s 和 B_s 是顶点集合。

定义

$$\left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_0}, A_0, B_0\right) = \left(\mathcal{H}(\mathbf{k}_t), \emptyset, \emptyset\right),$$

and

$$\left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_1}, A_1, B_1\right) = \begin{cases} \left(\mathcal{H}(\mathbf{k}_t)/x_{u_1,c_1}, \{x_{u_1}\}, \emptyset\right) & \text{if } P_1 = L; \\ \left(\mathcal{H}(\mathbf{k}_t) \setminus x_{u_1,c_1}, \emptyset, \{x_{u_1}\}\right) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $x_{u_1} \in F_1 \cap F_{i_g}$ 和 $c_1 = 1$. 设 $s \geq 1$ 为一个整数，使得存在一个顶点序列 $(x_{u_q},\ c_q)_{q=1}^{s}$ 满足

$$\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_q} = \begin{cases} \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{q-1}}/x_{u_q,c_q} & \text{if } P_q = L; \\ \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{q-1}} \setminus x_{u_q,c_q} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$A_q = \{x_{u_p} \colon\ P_p = L、\ p \in [q]\}$ 和 $B_q = \{x_{u_p} \colon\ P_p = D、\ p \in [q]\}$ 对所有 $q \in [s]$. 成立。对于 $i \in [t]$，令

$$k_i^{(s)} = \max\{0, k_i - d_i^{(s)}\},\ \text{where } d_i^{(s)} = -|F_i \cap A_s| + \sum_{x_{u_m} \in F_i \cap A_s} c_m.$$

对于 $i \in [t-1]$，考虑以下条件：

(i) 如果 $F_i \setminus A_s = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\}$，那么对于某个 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b)$ 中的 $[k_i]^b$，$^\circ$在 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$ 中是一条边，且满足 $f_p > c_m$，当 $x_{j_p} = x_{u_m} \in B_s \setminus A_s$ 且 $|\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1$；以及 (ii) $F_i \cap G_i \not\subset A_s$.

令 U_s 为满足上述条件的所有 $i \in [t-1]$ 的集合。假设 U_s 非空。令 ℓ_s 为 U_s 的最小元素，并令 $(x_{w_1}, \ldots, x_{w_r})$ 为 F_{ℓ_s} 在 Δ_{ℓ_s}. 中的良顶点序列。现在，令 $j_0 = \min\{j \colon\ x_{w_j} \notin A_s\}$，并取 $x_{u_{s+1}} = x_{w_{j_0}}$. 。我们定义

$$\left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s+1}}, A_{s+1}, B_{s+1}\right) = \begin{cases} \left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}/x_{u_{s+1},c_{s+1}}, A_s \cup \{x_{u_{s+1}}\}, B_s\right) & \text{if } P_s = L \\ \left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s} \setminus x_{u_{s+1},c_{s+1}}, A_s, B_s \cup \{x_{u_{s+1}}\}\right) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，c_{s+1} 是满足$x_{u_{s+1},\ c_{s+1}} \in \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$的最小正整数。另一方面，若$U_s = \emptyset$，则我们对所有 $q \geq s$.定义 $\left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_q}、\ A_q、\ B_q\right) = \left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}、\ A_s、\ B_s\right)$

注记 3.10. 采用设置 3.9 中的记号，我们注意到以下事实。

(a) 由于 $\mathcal{V}(\mathcal{H}(\mathbf{k}_t))$是有限的，根据设置 3.9，存在唯一的整数 $\alpha(\mathcal{L})$，使得

$$\left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}, A_s, B_s\right) = \begin{cases} \left((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}})/x_{u_s,c_s}, A_{s-1} \cup \{x_{u_s}\}, B_{s-1}\right) & \text{if } P_s = L \\ \left((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}) \setminus x_{u_s,c_s}, A_{s-1}, B_{s-1} \cup \{x_{u_s}\}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于所有 $s \in [\alpha(\mathcal{L})]$ 以及

$$\left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}, A_s, B_s\right) = \left(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{\alpha(\mathcal{L})}}, A_{\alpha(\mathcal{L})}, B_{\alpha(\mathcal{L})}\right)$$

对于所有 $s \geq \alpha(\mathcal{L})$。此外，对于所有 $s \in [\alpha(\mathcal{L}) - 1]$ 以及 $U_{\alpha(\mathcal{L})} = \emptyset$.，都有 $U_s \neq \emptyset$

(b) 令 $s \in [\alpha(\mathcal{L}) - 1] \cup \{0\}$. 。假设 $F_{\ell_s} \setminus A_s = \{x_{u_{s+1}} = x_{h_1}, \ldots, x_{h_a}\}$，其中

$$l_s = \begin{cases} \min\{i : i \in U_s\} & \text{if } s \in [\alpha(\mathcal{L}) - 1] \\ 1 & \text{if } s = 0. \end{cases}$$

那么，对于某个 $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_a) \in [k_{\ell_s}]^a$，有 $e_p > c_m$ if$x_{h_p} = x_{u_m} \in B_{\ell_s} \setminus A_{\ell_s}$ and $|\mathbf{e}| \leq k_{\ell_s}^{(s)} + a - 1.$，$\{x_{h_1,e_1}, \ldots, x_{h_a,e_a}\}$ 是 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ$ 中的一条边

注记 3.11. 采用设置 3.9 和注记 3.10 中的记号，令 $s \in [\alpha(\mathcal{L}) - 1]$.

(a) 令 $x_{u_{s+1}} = x_{u_q}$，其中某个 $q \leq s$ 满足 $P_q = D$. 。由于 $x_{u_{s+1},\ c_{s+1}} \in \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$ and

$$\mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ) \subset \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{q-1}})^\circ),$$

我们得到 $c_{s+1} > c_m$.

(b) 设 $E \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$，其中 $x_{u_{s+1},\ c_{s+1}} \in E$. 由于 $x_{u_{s+1},\ c_{s+1}} \in \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$，我们得到 $E \in \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$。

沿用设置 3.9 和注记 3.10 中的记号，我们定义了 $k_i^{(s)}$ 对于 $s \in [\alpha(\mathcal{L})]$. 对于 $s \geq \alpha(\mathcal{L})$，我们定义 $k_i^{(s)} = k_i^{(\alpha(\mathcal{L}))}$. 此外，若 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$ 是 $\mathcal{V}(\mathcal{H}(\mathbf{k}_t))$ 的非空子集，则称其在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 中是可构造的，如果存在 $i \in [t]$ 使得以下条件成立：
(a) $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = F_i \setminus A_s$；以及 (b) $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b) \in [k_i]^b$，其中当 $x_{j_p} = x_{u_m} \in B_s \setminus A_s$ 且 $|\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1$. 时有 $f_p > c_m$

以下是设置 3.9 的一个说明性示例。

例 3.12. 设 Δ 是如图 2 所示的单纯树，其面为 $F_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$、$F_2 = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$ 和 $F_3 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$. 。采用设置 3.9 中的记号，设 $\mathcal{L} = P_0P_1P_2\ldots$ 是一个无限字符串，使得 $P_2 = D$ 和 $P_1 = P_3 = P_4 = L$. 。令 $\mathbf{k}_3 = (1, 2, 2) \in \mathbb{N}^3_{>0}$ 和 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta)$ 为与 Δ. 相关联的超图。我们计算序列 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})_{s=0}^{\infty}$. 。根据定义，$\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_0} = \mathcal{H}(\mathbf{k}_3)$。由于 $x_{u_1} = x_1$，我们有

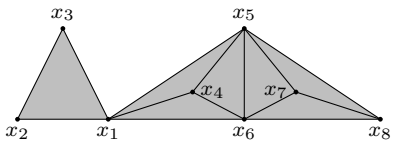

FIGURE 2

$$\mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_1}) = \left\{ \begin{array}{l} \{x_{2,1}, x_{3,1}\}, \{x_{4,1}, x_{5,1}, x_{6,1}\}, \{x_{4,2}, x_{5,1}, x_{6,1}\}, \{x_{4,1}, x_{5,2}, x_{6,1}\}, \\ \{x_{4,1}, x_{5,1}, x_{6,2}\}, \{x_{5,1}, x_{6,1}, x_{7,1}, x_{8,1}\}, \{x_{5,2}, x_{6,1}, x_{7,1}, x_{8,1}\}, \\ \{x_{5,1}, x_{6,2}, x_{7,1}, x_{8,1}\}, \{x_{5,1}, x_{6,1}, x_{7,2}, x_{8,1}\}, \{x_{5,1}, x_{6,1}, x_{7,1}, x_{8,2}\} \end{array} \right\}.$$

根据设置 3.9，$A_1 = \{x_1\}$ 和 $B_1 = \emptyset$. 。我们得到 $\ell_1 = 2$. 。由于 $(x_5,\ x_6)$ 是 $\Delta_2 = \langle F_2$ 中良叶 F_2 的良顶点序列，$F_3\rangle$，我们有 $x_{u_2,\ c_2} = x_{5,\ 1}$。因此，$\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_2}$ 是一个边集为

$$\mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_2}) = \Big\{ \{x_{2,1}, x_{3,1}\}, \{x_{4,1}, x_{5,2}, x_{6,1}\}, \{x_{5,2}, x_{6,1}, x_{7,1}, x_{8,1}\} \Big\}.$$

我们有 $A_2 = \{x_1\}$ 和 $B_2 = \{x_5\}$. 此外，$\ell_2 = 2$，可得 $x_{u_3,\ c_3} = x_{5,\ 2}$。因此，$\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_3}$ 是一个超图，其边集为

$$\mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_3}) = \Big\{ \{x_{2,1}, x_{3,1}\}, \{x_{4,1}, x_{6,1}\}, \{x_{6,1}, x_{7,1}, x_{8,1}\} \Big\}.$$

这给出了 $A_3 = \{x_1, x_5\}$ 和 $B_3 = \{x_5\}$. 现在，我们有 $\ell_3 = 2$，因此 $x_{u_4,\ c_4} = x_{6,\ 1}$。因此，$\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_4}$ 是一个超图，其边集为

$$\mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_4}) = \Big\{ \{x_{2,1}, x_{3,1}\}, \{x_{4,1}\}, \{x_{7,1}, x_{8,1}\} \Big\}.$$

如前所述，$A_4 = \{x_1, x_5, x_6\}$ 和 $B_4 = \{x_5\}$. 此外，我们注意到 $U_4 = \emptyset$. 因此，对于所有 $s \geq 4$. ，我们有$\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s} = \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_4}$。注意，$x_{u_2} = x_{u_3}$. 因此，对于某些 $p \neq q$.，可能有 $x_{u_p} = x_{u_q}$

沿用例 3.12 的记号，注意到 $x_{1,\ 2} \in \mathcal{V}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_1})$，但 $\{x_{1,2}\} \notin \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_1})$。此外，注意到 $x_{6,\ 2} \in \mathcal{V}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_2})$，但 $\{x_{6,2}\} \notin \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_2})$。因此，收缩和删除操作可能产生某些不属于任何边的孤立顶点。我们牢记这一观察，并给出超图 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$.的边集的如下刻画

引理 3.13. 采用设置 3.9 中的记号，假设 E 是 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$. 中的一条边。那么 E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$. 中是可构造的。反之，如果 E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$中是可构造的，那么存在一条边 E' 属于 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$，使得 $E' \subset E$.

证明。我们对 s. 使用归纳法。根据超图 $\mathcal{H}(\mathbf{k}_t)$ 的构造，对于 $s = 0$. 结论成立。设 $s > 0$，则对于 $s - 1$. 结论成立。若 $s > \alpha(\mathcal{L})$，则 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s} = \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}$，因此对 s. 使用归纳法即可得到结论。现在，假设 $s \leq \alpha(\mathcal{L})$。那么有两种可能。

情形 1。当 $P_s = L$. 根据设置 3.9，我们有 $A_s = A_{s-1} \cup \{x_{u_s}\}$ 和 $B_s = B_{s-1}$. 。现在，令 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\} \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$。那么 E 或 $E \cup \{x_{u_s,c_s}\}$ 是 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}$. 中的一条边。若 $E \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}})$，则根据对 s 的归纳法，E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}$ 中是可构造的，因此存在 $i \in [t]$，使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = F_i \setminus A_{s-1}$ 且 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b) \in [k_i]^b$，其中

$$f_p > c_m \text{ if } x_{j_p} = x_{u_m} \in B_{s-1} \setminus A_{s-1} \text{ and } |\mathbf{f}| \leq k_i^{(s-1)} + b - 1.$$

我们断言，$x_{u_s} \notin F_i \setminus A_{s-1}$. 相反，假设 $x_{u_s} \in F_i \setminus A_{s-1}$ 且 $x_{u_s} = x_{j_1}$. 令 $F = \{x_{j_1,c_s}, x_{j_2,f_2}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$. 现在，利用 $f_1 \geq c_s$，我们得到

$$|\mathbf{f}| - f_1 + c_s \leq k_i^{(s-1)} + b - 1.$$

因此，根据注记 3.11(a)，F 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}$. 中是可构造的。对 s 使用归纳法，存在一条边 $F' \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}})$，使得 $F' \subset F$. 现在，根据注记 2.10，存在一条边 $E' \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$，使得 $E' \subset F' \setminus \{x_{u_s,c_s}\} \subset E$. 这意味着 E 不是 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 中的一条边，矛盾。因此，$x_{u_s} \notin F_i \setminus A_{s-1}$. 现在，我们有

$$F_i \setminus A_s = F_i \setminus A_{s-1} \text{ and } F_i \cap A_s = F_i \cap A_{s-1}.$$

因此，我们得到 $k_i^{(s)} = k_i^{(s-1)}$. 这意味着 $|\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1$. 此外，如果 $x_{j_p} = x_{u_m} \in B_s \setminus A_s$，那么 $x_{j_p} = x_{u_m} \in B_{s-1} \setminus A_{s-1}$，从而 $f_p > c_m$. 因此，E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$. 中是可构造的。另一方面，如果 $E \cup \{x_{u_s,c_s}\} \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}})$，那么根据对 s 的归纳法，$E \cup \{x_{u_s,c_s}\}$ 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}$ 中是可构造的，因此存在 $i \in [t]$，使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}, x_{u_s}\} = F_i \setminus A_{s-1}$ 且 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b) \in [k_i]^b$，其中

$$f_p > c_m \text{ if } x_{j_p} = x_{u_m} \in B_{s-1} \setminus A_{s-1} \text{ and } |\mathbf{f}| + c_s \leq k_i^{(s-1)} + b.$$

因此，我们有 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = F_i \setminus A_s$. 注意到 $k_i^{(s)} = k_i^{(s-1)} - c_s + 1$. 因此，我们得到 $|\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1$. 现在，事实 $B_s \setminus A_s \subset B_{s-1} \setminus A_{s-1}$ 意味着 E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$. 中是可构造的

反之，设 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$ 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$. 中是可构造的。于是存在 $i \in [t]$，使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = F_i \setminus A_s$ 且 $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_b) \in [k_i]^b$，其中

$$f_p > c_m \text{ if } x_{j_p} = x_{u_m} \in B_s \setminus A_s \text{ and } |\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1.$$

如果 $x_{j_p} = x_{u_m} \in B_{s-1} \setminus A_{s-1}$，那么 $x_{j_p} \in B_s \setminus A_s$，因为 $x_{j_p} \neq x_{u_s}$. 。因此，当 $x_{j_p} = x_{u_m} \in B_{s-1} \setminus A_{s-1}$. 时，我们有 $f_p > c_m$。现在，我们有 $x_{u_s} \in F_i$ 或 $x_{u_s} \notin F_i$. 。如果 $x_{u_s} \in F_i$，则得到 $F_i \setminus A_{s-1} = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}, x_{u_s}\}$ 和 $k_i^{(s-1)} = k_i^{(s)} + c_s - 1$. 。这意味着

$$|\mathbf{f}| + c_s \leq k_i^{(s-1)} + b.$$

根据注记 3.11(a)，$E \cup \{x_{u_s,c_s}\}$ 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}$ 中是可构造的，因此由关于 s 的归纳法，存在一条边 $H \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}})$，使得 $H \subset E \cup \{x_{u_s,c_s}\}$. 现在，注记 2.10 表明存在一条边 $E' \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$，使得 $E' \subset H \setminus \{x_{u_s,c_s}\} \subset E$. 另一方面，如果 $x_{u_s} \notin F_i$，那么

$$F_i \setminus A_{s-1} = F_i \setminus A_s \text{ and } k_i^{(s-1)} = k_i^{(s)}.$$

现在，$|\mathbf{f}| \leq k_i^{(s-1)} + b - 1$ 意味着 E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}$. 中是可构造的。由关于 s 的归纳法，存在一条边 $H \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}})$，使得 $H \subset E$. 注意，$x_{u_s},\ c_s \notin H$. 因此，利用注记 2.10，存在一条边 $E' \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$，使得 $E' \subset H \subset E$.

情形 2。当 $P_s = D$. 根据设置 3.9，$A_s = A_{s-1}$ 并且 $B_s = B_{s-1} \cup \{x_{u_s}\}$. 因此，对于所有 $i \in [t]$. $k_i^{(s)} = k_i^{(s-1)}$ 令 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$ 为 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$. 中的一条边。于是 $E \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}})$ 且 $x_{u_s,c_s} \notin E$.因此，通过对 s 进行归纳法，E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}$ 中是可构造的，故存在 $i \in [t]$ 使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = F_i \setminus A_{s-1}$ 且 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b) \in [k_i]^b$ 满足

$$f_p > c_m \text{ if } x_{j_p} = x_{u_m} \in B_{s-1} \setminus A_{s-1} \text{ and } |\mathbf{f}| \leq k_i^{(s-1)} + b - 1.$$

此外，由于 $F_i \setminus A_{s-1} = F_i \setminus A_s$ 且 $k_i^{(s)} = k_i^{(s-1)}$，我们只需证明：若 $x_{j_p} = x_{u_s}$，则 $f_p > c_s$。由以下事实可知 $x_{u_s,c_s} \notin E$. 因此， E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$.中是可构造的

反之，设 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$ 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$. 中是可构造的。则存在 $i \in [t]$，使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = F_i \setminus A_s$，且 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b) \in [k_i]^b$，其中

$$f_p > c_m \text{ if } x_{j_p} = x_{u_m} \in B_s \setminus A_s \text{ and } |\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1.$$

如果 $x_{j_p} = x_{u_m} \in B_{s-1} \setminus A_{s-1}$，那么 $x_{j_p} \in B_s \setminus A_s$ 意味着 $f_p > c_m$.。现在，利用 $k_i^{(s)} = k_i^{(s-1)}$ 这一事实，我们得到 E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}}$. 中是可构造的。根据 s 进行归纳，存在一条边 $E' \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s-1}})$，使得 $E' \subset E$.。由于 $x_{u_s,\ c_s} \notin E$，我们得到 $E' \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$. □

鉴于引理 3.13， $\{x_{j,f}\}$ 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 中可构造，当且仅当 $\{x_{j,f}\} \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$。以下引理有助于证明定理 3.6。

引理 3.14. 使用设置 3.9 和注记 3.10 中的记号，设 $s \in [\alpha(\mathcal{L}) - 1]$. 假设 $|(F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s| = 1$. 则 $\{x_{h_1,c_{s+1}}, x_{h_2,e_2}, \ldots, x_{h_a,e_a}\}$ 是 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ$. 中的一条边

证明。设 $E = \{x_{h_1,c_{s+1}}, x_{h_2,e_2}, \ldots, x_{h_a,e_a}\}$. 那么，根据注记 3.11(a)， E 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$. 中是可构造的。根据引理 3.13，存在一条边 E' 位于 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 中，使得 $E' \subset E$.。此外，由于 $\{x_{h_1,e_1}, \ldots, x_{h_a,e_a}\}$ 是 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 中的一条边，因此可得 $x_{h_1,\ c_{s+1}} \in E'$. 不失一般性，我们假设 that

$$E' = \{x_{h_1,c_{s+1}}, x_{h_2,e_2}, \ldots, x_{h_b,e_b}\}.$$

根据注记 3.11(b)，我们得到 $E' \in \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$，这给出 $b > 1$. 再次由引理 3.13，存在$i \in [t]$ 使得 $\{x_{h_1}, \ldots, x_{h_b}\} = F_i \setminus A_s$，且 $\mathbf{f} = (c_{s+1}, e_2, \ldots, e_b)$ 属于 $[k_i]^b$，其中 $|\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1$.如果 $i < \ell_s$，那么 $F_i \cap F_{\ell_s} \subset F_i \cap G_i$. 这意味着 $(F_i \cap G_i) \setminus A_{s-1} \neq \emptyset$. 因此，我们有 $i \in U_s$，矛盾。另一方面，如果 $i > \ell_s$，那么

$$(F_{\ell_s} \cap F_i) \setminus A_s = \{x_{h_1}, \ldots, x_{h_b}\} \subset (F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s.$$

因此，我们得到 $|(F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s| > 1$，再次产生矛盾。因此，我们得到 $i = \ell_s$，即 $E' = E$. □

下面的例子说明， $\{x_{h_1,c_{s+1}}, x_{h_2,e_2}, \ldots, x_{h_a,e_a}\}$ 不一定是超图 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ$ 的边，若 $|(F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s| > 1$.

例 3.15。考虑单纯树 Δ，其面为$F_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$、$F_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$、$F_3 = \{x_1, x_7, x_8\}$、$F_4 = \{x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ 和 $F_5 = \{x_4, x_9, x_{10}\}$，如图3所示。令 $\mathbf{k}_5 = (1, 1, 1, 4, 2) \in \mathbb{N}^5_{>0}$，并令 $\mathcal{L} = P_0P_1P_2\ldots$为一个满足 $P_1 = P_2 = P_3 = L$. 的无限字符串。假设$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta)$。采用设置 3.9 中的记号，序列 $(x_{u_1,\ c_1}, x_{u_2,\ c_2}, x_{u_3,\ c_3}) = (x_{1,\ 1}, x_{4,\ 1}, x_{7,\ 1})$ 满足

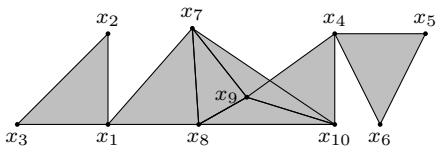

FIGURE 3

$$\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_q} = \begin{cases} \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{q-1}}/x_{u_q,c_q} & \text{if } P_q = L; \\ \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{q-1}} \setminus x_{u_q,c_q} & \text{otherwise} \end{cases}$$

对所有 $q \in [3].$，超图 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_3})^\circ$ 的边集由下式给出

$$\mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_3})^\circ) = \left\{ \begin{array}{c} \{x_{2,1}, x_{3,1}\}, \{x_{5,1}, x_{6,1}\}, \{x_{8,2}, x_{9,3}, x_{10,1}\}, \{x_{8,2}, x_{9,1}, x_{10,3}\}, \\ \{x_{8,2}, x_{9,2}, x_{10,2}\}, \{x_{9,1}, x_{10,1}\}, \{x_{9,2}, x_{10,1}\}, \{x_{9,1}, x_{10,2}\} \end{array} \right\}.$$

Now, $U_3 = \{4\}$, and hence $\ell_3 = 4$. Since $G_4 = F_5$, we get

$$(F_4 \cap G_4) \setminus \{x_1, x_4, x_7\} = \{x_9, x_{10}\}.$$

因此，我们可以取 $x_{u_4,\ c_4} = x_{9,\ 1}$。注意， $\{x_{8,2}, x_{9,3}, x_{10,1}\}$ 是边 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_3})^\circ$，但 $\{x_{8,2}, x_{9,1}, x_{10,1}\}$不是 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_3})$ 中的边$^\circ$.

引理 3.16. 采用设置 3.9 和注记 3.10 中的记号，设 $s \in [\alpha(\mathcal{L}) - 1]$. 。假设$|(F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s| > 1$. 。那么，对于某个 $(f_2, \ldots, f_a) \in [k_{\ell_s}]^{a-1}$.，有 $\{x_{h_1,c_s}, x_{h_2,f_2}, \ldots, x_{h_a,f_a}\} \in \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$

证明。我们有 $(F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s \subset \{x_{w_{j_0}}, \ldots, x_{w_r}\}$. 因此，存在某个 $j > j_0$使得$x_{w_j} \in (F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s$. 取 $j' = \min\{j : x_{w_j} \in (F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s, j \neq j_0\}$. 于是 $x_{w_{j'}} = x_{h_q}$对于某个 $2 \leq q \leq a$. 取 $f_1 = c_{s+1}$, $f_q = e_1 + e_q - c_{s+1}$ 以及 $f_p = e_p$ 对于 $p \neq 1, q$. 我们有

$$|\mathbf{f}| = |\mathbf{e}| \leq k_{\ell_s}^{(s)} + a - 1, \text{ where } \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_a).$$

令 $E = \{x_{h_1,f_1}, \ldots, x_{h_a,f_a}\}$. 利用注记 3.11(a) 以及 $f_q \geq e_q$ 这一事实，我们得到 E 在 $\mathcal{H}_{\mathcal{L}_s}$. 中是可构造的。我们断言 $E \in \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$。若不然，设 $E \notin \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$。那么根据引理 3.13，存在一条边 $E' = \{x_{h_{p_1},f_{p_1}}, \ldots, x_{h_{p_b},f_{p_b}}\}$ 属于 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$，使得 $E' \subsetneq E$,，其中 $\{x_{h_{p_1}}, \ldots, x_{h_{p_b}}\} = F_i \setminus A_s$，且 $\mathbf{f}' = (f_{p_1}, \ldots, f_{p_b}) \in [k_i]^b$，并且 $|\mathbf{f}'| \leq k_i^{(s)} + b - 1$，对某个 $i \in [t]$. 成立。我们断言 $b > 1$. 。若不然，设 $b = 1$. 。那么 $E' = \{x_{h_{p_1},f_{p_1}}\}$ 且 $f_{p_1} \leq k_i^{(s)}$. 。根据注记 3.11(b)，$x_{h_1,f_1} = x_{u_{s+1},c_{s+1}} \notin E'$. 。由于 $\{x_{h_1,e_1}, \ldots, x_{h_a,e_a}\} \in \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$，可得 $E' = \{x_{h_q,f_q}\}$. 。现在，利用不等式 $e_q \leq f_q = f_{p_1} \leq k_i^{(s)}$，我们得到 $\{x_{h_q,e_q}\}$ 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$. 中是可构造的。因此，利用引理 3.13，我们得到 $\{x_{h_q,e_q}\} \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$。这与$\{x_{h_1,e_1}, \ldots, x_{h_a,e_a}\} \in \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$ 这一事实矛盾。因此，必有 $b > 1$. 。接下来，我们证明 $i > \ell_s$. 。若 $i < \ell_s$，则 $(F_i \cap F_{\ell_s}) \setminus A_s \subset (F_i \cap G_i) \setminus A_s$，这意味着 $i \in U_s$，矛盾。这就证明了$i > \ell_s$. 。注意到

$$(F_{\ell_s} \cap F_i) \setminus A_s = \{x_{h_{p_1}}, \ldots, x_{h_{p_b}}\} \subset (F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s.$$

由 $b > 1$，根据良顶点序列的定义可知$x_{w_{j_0}}$，$x_{w_{j'}} \in F_i \setminus A_s$，即$x_{h_1}$，$x_{h_q} \in F_i \setminus A_s$. 因此，我们有

$$|\mathbf{e}'| = |\mathbf{f}'| \leq k_i^{(s)} + b - 1,$$

其中 $\mathbf{e}' = (e_{p_1}, \ldots, e_{p_b})$。因此，$\{x_{h_{p_1},e_{p_1}}, \ldots, x_{h_{p_b},e_{p_b}}\}$是可构造的 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$.现在，根据引理 3.13，存在一条边 $E'' \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$，使得 $E'' \subset \{x_{h_{p_1},e_{p_1}}, \ldots, x_{h_{p_b},e_{p_b}}\}$.这意味着$\{x_{h_1,e_1}, \ldots, x_{h_a,e_a}\} \notin \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$，矛盾。□

引理 3.17。采用设置 3.9 和注记 3.10 中的记号，设 $s \in [\alpha(\mathcal{L}) - 1] \cup \{0\}$. 那么$x_{u_{s+1},\ c_{s+1}}$ 是超图 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ$.的剥离顶点

证明。设 $\mathcal{D} = \Delta((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$ 和 $W \in$链接$_{\mathcal{D}}(x_{u_{s+1},\ c_{s+1}})$。根据引理 3.14 和引理 3.16，我们可以假设 $e_1 = c_{s+1}$. 对于 $p \in [a]$，令 $\sigma_p =$ 最大$\{c : x_{h_p,\ c} \in \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)\}$. 假设

$$\{x_{h_p,1}, \ldots, x_{h_p,\sigma_p}\} \cap \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ) \subset W$$

对所有 $2 \leq p \leq a$. 于是 $\{x_{h_1,e_1}, x_{h_2,e_2}, \ldots, x_{h_a,e_a}\} \subset W \cup \{x_{u_{s+1},c_{s+1}}\}$，矛盾。因此，存在 $2 \leq p \leq a$ 使得 $\{x_{h_p,1}, \ldots, x_{h_p,\sigma_p}\} \cap \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ) \not\subset W$. 假设 f是满足 $x_{h_p,\ f} \in \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ) \setminus W$. 的最大整数。我们断言 $W \cup \{x_{h_p,f}\} \in$ 删除$_{\mathcal{D}}(x_{u_{s+1},\ c_{s+1}})$。反设 $W \cup \{x_{h_p,f}\} \notin$ 删除$_{\mathcal{D}}(x_{u_{s+1},\ c_{s+1}})$。由于 $x_{u_{s+1},\ c_{s+1}} \notin W$，可知存在一条边 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$属于 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ$，使得 $E \subset W \cup \{x_{h_p,f}\}$. 根据引理 3.13，存在 $i \in [t]$ 使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = F_i \setminus A_s$ 以及 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b) \in [k_i]^b$ 满足

$$f_q > c_m \text{ if } x_{j_q} = x_{u_m} \in B_s \setminus A_s \text{ and } |\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1.$$

由于 $W \in \mathcal{D}$，我们有 $x_{h_p,\ f} \in E$. 令 $x_{h_p,\ f} = x_{j_1,\ f_1}$. 于是 $x_{h_p} = x_{j_1}$ 且 $f = f_1$. 若 $i < \ell_s$，则事实 $x_{h_p} \in (F_i \cap F_{\ell_s}) \setminus A_s$意味着 $i \in U_s$. 这与 ℓ_s. 的极小性矛盾。因此，我们得到$i \geq \ell_s$，从而 $x_{h_p} \in (F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s$. 回忆一下，

$$j_0 = \min\{j : x_{w_j} \in (F_{\ell_s} \cap G_{\ell_s}) \setminus A_s\}.$$

因此，对于某个 $j > j_0$. ，有 $x_{h_p} = x_{w_j}$ 。此外，根据良顶点序列的定义可知 $x_{u_{s+1}} = x_{w_{j_0}} \in F_i$. 。令 $x_{u_{s+1}} = x_{j_2}$. 。于是 $f_2 > c_{s+1} \geq 1$. 。现在，不等式$|\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1 \leq k_i + b - 1$ 意味着 $f_1 < k_i$. 。因此，该集合

$$F = \{x_{j_1,f_1+1} = x_{h_p,f+1}, x_{j_2,c_{s+1}} = x_{u_{s+1},c_{s+1}}, \ldots, x_{j_b,f_b}\} \subset \mathcal{V}(\mathcal{H}(\mathbf{k}_t)).$$

注意

$$(f_1 + 1) + c_{s+1} + \cdots + f_b \leq |\mathbf{f}| \leq k_i^{(s)} + b - 1.$$

由注记 3.11(a)， F 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 中是可构造的，因此由引理 3.13，存在一条边 $F' \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$，使得 $F' \subset F$. 。由于 E 是 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ$ 中的一条边，我们有

$$\{x_{j_1,f_1+1}, x_{j_2,c_{s+1}}\} \cap F' \neq \emptyset.$$

我们证明 F' 是 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ$. 中的一条边。若 $F' \notin \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$，则由注记 3.11(b) 可知，$x_{j_2,c_{s+1}} \notin F'$. 。因此，我们有 $F' = \{x_{j_1,f_1+1}\}$. 。现在，引理 3.13 表明 $\{x_{j_1,f_1}\} \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})$。因此， $E \notin \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ)$，这就产生了矛盾。这证明了 F' 是 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ$. 中的一条边。现在，我们证明 $F' \subset W \cup \{x_{u_{s+1},c_{s+1}}\}$. 。若 $x_{j_1,f_1+1} \notin F'$，则结论成立。另一方面，若 $x_{j_1,f_1+1} \in F'$，则由 $f_1 = f$ 的极大性可得 $x_{j_1,f_1+1} \in W$，进而得到 $F' \subset W \cup \{x_{u_{s+1},c_{s+1}}\}$. 。因此，在这两种情况下，我们都有 $F' \subset W \cup \{x_{u_{s+1},c_{s+1}}\}$，从而 $W \cup \{x_{u_{s+1},c_{s+1}}\} \notin \mathcal{D}$，这就产生了矛盾。这证明了我们的断言： $W \cup \{x_{h_p,f}\} \in$ 删除$_{\mathcal{D}}(x_{u_{s+1},c_{s+1}})$。因此， $x_{u_{s+1},c_{s+1}}$ 是 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ$. □的一个剥离顶点

引理 3.18. 使用设置 3.9 和注记 3.10 中的记号， $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 对于所有 $s \geq \alpha(\mathcal{L})$ 都是顶点可分解超图。

证明. 为简便起见，我们记 $\alpha = \alpha(\mathcal{L})$。那么 $U_\alpha = \emptyset$. 。只需证明 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha}$ 是顶点可分解超图。若 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha}$ 是孤立超图，则它是顶点可分解的。现在，设 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha}$ 不是孤立超图。那么，根据引理 3.13，存在 $i \in [t]$ 使得满足以下条件：

(⋆) 若 $F_i \setminus A_\alpha = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\}$，则对于某个 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b)$， $\{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$ 是 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha})^\circ$ 中的一条边 in $[k_i]^b$ with $f_p > c_m$ if $x_{j_p} = x_{u_m} \in B_\alpha \setminus A_\alpha$ and $|\mathbf{f}| \leq k_i^{(\alpha)} + b - 1$.

令 A 为所有满足条件 (⋆) 的 $i \in [t]$ 的集合。若可能，设存在 $i, i' \in A$ ，其中 $i' > i$，使得 $(F_i \setminus A_\alpha) \cap (F_{i'} \setminus A_\alpha) \neq \emptyset$. 。令 $x \in (F_i \setminus A_\alpha) \cap (F_{i'} \setminus A_\alpha)$。那么 $x \in (F_i \cap G_i) \setminus A_\alpha$. 。这意味着 $i \in U_\alpha$，矛盾。因此

$$(F_i \setminus A_\alpha) \cap (F_{i'} \setminus A_\alpha) = \emptyset \text{ for all } i, i' \in A \text{ with } i' \neq i. \tag{3.2}$$

令 $i \in A$ 和 $F_i \setminus A_\alpha = \{x_{j_1} \ldots x_{j_b}\}$. 对于 $p \in [b]$，设

$$c'_p = \min\{c : x_{j_p,c} \in \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha})^\circ)\} - 1.$$

现在，令 $\bar{d}_i = \sum_{p \in [b]} c'_p$ 和 $\bar{k}_i =$ 最大$\{0, k_i^{(\alpha)} - \bar{d}_i\}$. 我们断言 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha})^\circ \simeq \mathcal{H}'$，其中

$$\mathcal{H}' = \bigsqcup_{i \in A} (F_i \setminus A_\alpha)(\bar{k}_i).$$

令 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_b) \in [\bar{k}_i]^b$. 则

$$|\mathbf{f}| \leq \bar{k}_i + b - 1 \text{ if and only if } |\mathbf{f}'| \leq k_i^{(\alpha)} + b - 1,$$

其中 $\mathbf{f}' = (f_1 + c'_1, \ldots, f_b + c'_b) \in [k_i]^b$. 现在，设 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$ 是 $\mathcal{H}'$. 中的一条边。若 $x_{j_p} = x_{u_m} \in B_\alpha \setminus A_\alpha$，则 $f'_p \geq c'_p + 1 > c_m$ ，因为 $x_{j_p,\, c'_p+1} \in \overline{\mathcal{V}}((\mathcal{H}_{\mathcal{L}_\alpha})^\circ)$。因此，我们观察到 $E' = \{x_{j_1,f'_1}, \ldots, x_{j_b,f'_b}\}$ 在 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha}$. 中是可构造的。由引理 3.13，存在一条边 E'' 属于 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha}$，使得 $E'' \subset E'$. 。不失一般性，可假设对于某个 $b' \leq b$. ，有 $E'' = \{x_{j_1,f'_1}, \ldots, x_{j_{b'},f'_{b'}}\}$。再次由引理 3.13，存在 $i' \in [t]$，使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_{b'}}\} = F_{i'} \setminus A_\alpha$，并且

$$\bar{\mathbf{f}} = (f'_1, \ldots, f'_{b'}) \in [k_{i'}]^{b'} \text{ with } |\bar{\mathbf{f}}| \leq k_{i'}^{(\alpha)} + b' - 1.$$

若可能，设 $b' = 1.$。那么 $E' = \{x_{j_1,f_1'}\}.$。由于 $f_1' \geq c_1' + 1$，由引理 3.13 可得 $\{x_{j_1,c_1'+1}\} \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha})$，因此 $x_{j_1,\ c_1'+1} \notin \mathcal{V}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha})^\circ)$，这就导致矛盾。因此，我们有 $b' > 1$，即 $i' \in A.$。现在，方程（3.2）表明 $i = i'$，即 $E' = E''.$。因此， E' 是 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha})^\circ.$ 中的一条边。反过来，若 $E' = \{x_{j_1,f_1'}, \ldots, x_{j_b,f_b'}\} \in \mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha})^\circ)$，则 $\{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H}')$。这证明了我们的断言。现在，利用引理 3.8，我们可以说超图 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_\alpha}$ 是顶点可分解的。□

例 3.19。设 Δ 是图 2 中的一个单纯树。在例 3.12 中，我们已经看到 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_4}$ 是一个边集为

$$\mathcal{E}((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_4})^\circ) = \Big\{\{x_{2,1}, x_{3,1}\}, \{x_{7,1}, x_{8,1}\}\Big\}.$$

我们注意到 $\alpha(\mathcal{L}) = 4$ 以及 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_4})^\circ \simeq (F_1 \setminus A_4)(1) \sqcup (F_3 \setminus A_4)(1)$。

引理 3.20。采用设置 3.9 和注记 3.10 中的记号，超图 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 对所有 $s \in \mathbb{N}$ 以及所有无限字符串 $\mathcal{L}.$ 都是顶点可分解的

证明。令 $\alpha_0 = \max\{\alpha(\mathcal{L})\colon\ \mathcal{L}$ 是一个无限字符串$\}.$ 根据引理 3.18，只需证明对于所有 $s \leq \alpha_0$ 以及所有无限字符串 $\mathcal{L}.$，$\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 是一个顶点可分解超图。我们对 $\alpha_0 - s.$ 使用归纳法。由引理 3.18， $s = \alpha_0$ 时结论成立。现在，我们设 $s < \alpha_0$，且 $\mathcal{L} = P_0P_1P_2 \ldots P_sP_{s+1} \ldots$ 是任意无限字符串。若 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s} = \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s+1}}$，则由归纳法可得结论。另一方面，设 $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s} \neq \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s+1}}$ 且 $P_{s+1} = D.$。于是 $s \in [\alpha(\mathcal{L}) - 1]$，并且

$$\big((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ \setminus x_{u_{s+1},c_{s+1}}\big)^\circ = (\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_{s+1}})^\circ.$$

现在，考虑这个 字符串 $\mathcal{L}' = P_0P_1P_2 \ldots P_sP_{s+1}' \ldots$ 含有 $P_{s+1}' = L.$ 我们有 $\mathcal{L}_s' = \mathcal{L}_s$，因此

$$\big((\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ / x_{u_{s+1},c_{s+1}}\big)^\circ = (\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}'_{s+1}})^\circ.$$

因此，通过归纳法，$(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ \setminus x_{u_{s+1},c_{s+1}}$ 和 $(\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s})^\circ / x_{u_{s+1},c_{s+1}}$ 是顶点可分解超图。由引理 3.17， $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}_s}$ 是顶点可分解超图。类似地，我们可以证明当

$P_{s+1} = L.$ □

现在我们证明本文的第一个主要结果。

定理 3.6 的证明。根据引理 3.20，超图 $\mathcal{H}(\mathrm{k}_t)/x_{u_1,\ 1}$ 和 $\mathcal{H}(\mathrm{k}_t) \setminus x_{u_1,\ 1}$ 是顶点可分解的。根据引理 3.17， $x_{u_1,\ 1}$ 是超图 $\mathcal{H}(\mathrm{k}_t)$的剥离顶点。因此， $\mathcal{H}(\mathrm{k}_t)$是顶点可分解超图。□

定理 1.1 的证明。设 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta)$。利用 $[11,$ 推论 1.6$],$，我们有 $J(\Delta)^k = J(\Delta)^{(k)}$，从而 $J(\Delta)^k = J(\mathcal{H})^{(k)}.$。根据定理 3.6，超图 $\mathcal{H}(\mathrm{k})$ 是顶点可分解的，因而是可剖分的。现在由引理 3.5，我们有 $J(\Delta)^k = J(\mathcal{H}(\mathrm{k}))$。因此由 $[9,$ 定理 8.2.5$],$ $J(\mathcal{H})^k$ 具有线性商。由 $[18,$ 引理 3.5$],$ $J(\Delta)^k$ 具有线性商。因此由 $[9,$ 定理 8.2.15$],$ $J(\Delta)^k$ 是逐分量线性的。□

设 Δ 是一个单纯树，且 $\deg(J(\Delta))$ 是 $J(\Delta)$ 的最小单项式生成元的最大次数。然后利用定理 1.1，我们得到以下结果。

定理 3.21. 设 Δ 是一棵单纯树。那么对于 $s \geq 1.$，$\operatorname{reg}(J(\Delta)^s) = s \deg(J(\Delta))$。

现在我们可以证明本文的第二个主要结果。

定理 1.2 的证明。(i)、(ii) 和 (iii) 的等价性由定理 3.21 得出，而 (i) 和 (iv) 的等价性由 $[1,$ 定理 $3]$ 得出。此外，(iv) 、 (v) 和 (vi) 的等价性由 $[4,$ 推论 7.8$]$ 和 $[4,$ 推论 8.3$]$ 得出。□

致谢。第二作者感谢印度政府科技部根据初创研究基金（SRG/2021/001442）提供的经费支持。第二作者还获得了印度理工学院查谟分校提供的种子基金支持。

References

[1] John A. Eagon 和 Victor Reiner。《Stanley-Reisner 环的分解与 Alexander 对偶》。 *J. Pure Appl.* , ( ): – 。 *Algebra* 130 3 265 275, 1998

[2] Nursel Erey。《与（$C_4, 2K_2$）-自由图相关的理想的幂》。 *J. Pure Appl. Algebra*, 223(7):3071–3080, 2019。[3] Nursel Erey 和 Ayesha Asloob Qureshi。《路径的覆盖理想的二次幂》。 *arXiv e-prints*, 第 arXiv:1912.08161 页，2019 年 12 月。[4] Sara Faridi。《平方自由单项式理想的 Cohen-Macaulay 性质》。 *J. Combin. Theory Ser. A*, 109(2):299–329, 2005。[5] Sara Faridi。《通过平方自由单项式理想研究单项式理想》。载于 *Commutative algebra* 244 *Lect. Notes* , {v}卷, *Pure Appl. Math.* 85 114 2006 页码 – 。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿，{v}。[6] Christopher A. Francisco 和 Adam Van Tuyl。《序贯 Cohen-Macaulay 边理想》。 *Proc. Amer. Math.* , ( ): –（电 *Soc.* 135 8 2327 2337 2007 子版），{v}。[7] Huy T`ai H`a 和 Adam Van Tuyl。《逐分量线性理想的幂：Herzog–Hibi–Ohsugi 猜想及相关问题》。 *Res. Math. Sci.*, 9(2):第 22 号论文，2022。[8] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。《逐分量线性理想》。 *Nagoya Math. J.*, 153:141–153, 1999。[9] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。《 *Monomial ideals* 》， *Graduate Texts in Mathematics* 丛书第 260 卷。Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011。[10] J¨ *Combinatorial* urgen *aspects of commutative algebra and algebraic geometry* 6 *Abel Symp.* 49 60 Herzog、Takayuki Hibi 和 Hidefumi Ohsugi。《逐分量线性理想的幂》。载于 , {v}卷，页码 – 。Springer，柏林，2011。[11] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi、Ngˆo Viˆet Trung 和 Xinxian Zheng。《标准分次顶点覆盖代数、圈与叶》。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 360:6231–6249, 2006。[12] J¨ *Math.* urgen *Scand.* 95 1 23 32, 2004 Herzog、Takayuki Hibi 和 Xinxian Zheng。《幂具有线性分解的单项式理想》。 , ( ): – 。[13] J¨urgen Herzog 和 Srikanth Iyengar。《Koszul 模》。 *J. Pure Appl. Algebra*, 201(1-3):154–188, 2005。[14] Ajay Kumar 和 Rajiv Kumar。《关于顶点覆盖理想的幂》。 *J. Pure Appl. Algebra*, 226(1):第 106808 号论文，10 页，2022。[15] Fatemeh Mohammadi。《弦图的顶点覆盖理想的幂》。 *Comm. Algebra*, 39 3764, 2011 10 3753( ): – 。[16] Fatemeh Mohammadi。《顶点覆盖理想的幂》。 *Collect. Math.*, 65(2):169–181, 2014。[17] Fatemeh Mohammadi 和 Somayeh Moradi。《弱拟阵理想及其在顶点覆盖理想中的应用》。*Osaka J. Math.*, 47(3):627–636, 2010。[18] S. A. Seyed Fakhari。《非常良覆盖图和二部图的覆盖理想的符号幂》。 *Proc. Amer. Math.* , ( ): – 。 *Soc.* 146 1 97 110, 2018

[19] Bernd Sturmfels。《组合代数几何中的四个反例》。 *J. Algebra*, 230(1):282–294, 2000。*Email address*: 2019rma0011@iitjammu.ac.in*Email address*: ajay.kumar@iitjammu.ac.in*Email address*: rajiv.kumar@iitjammu.ac.inDepartment of Mathematics, Indian Institute of Technology Jammu, J&K, India - 181221.