arXiv:2304.11640v1 [math.AC] 23 Apr 2023

单纯复形的顶点覆盖理想

BIJENDER 和 AJAY KUMAR

Abstract. 给定一个单纯复形 Δ，我们研究如何构造一个新的单纯复形 $\bar{\Delta}$，使得相应的单项式理想具有良好的代数性质。我们给出一种检验任意超图是否具有顶点可分解性的方法。因此，我们证明，在单纯复形 Δ 的圈覆盖的所有顶点处附加非纯骨架，会得到一个单纯复形 $\bar{\Delta}$，使得其关联超图 $\bar{\mathcal{H}}(\Delta)$是顶点可分解的。此外，我们证明，$\bar{\Delta}$ 的覆盖理想的所有符号幂都是逐分量线性的。我们的工作推广了先前已知的结果：在图的圈覆盖的所有顶点处添加非纯完全图。

1. Introduction

交换代数与组合学之间的相互作用已被证明能有效解决这两个领域中的各种难题。在组合交换代数中，我们常常研究平方自由单项式理想。平方自由单项式理想可以看作简单超图的边理想。设 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 是一个简单超图，其顶点集为V，边集为 $\mathcal{E}$。对于简单超图 $\mathcal{H}$，可以关联一个平方自由单项式理想$I(\mathcal{H}) = \langle \prod x : F \in \mathcal{E} \rangle \subset R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\rangle$，称为 $\mathcal{H}$的边理想。 $\mathcal{H}$的顶点覆盖$_{x\in F}$理想定义为 $J(\mathcal{H}) = \langle x_{j_1} \cdots x_{j_q} : \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}\}$是 $\mathcal{H}\rangle$.的一个极小顶点覆盖。已知 $J(\mathcal{H}) = I(\mathcal{H})^\vee$，其中 $I(\mathcal{H})^\vee$ 表示 $I(\mathcal{H})$ 的 Alexander 对偶。边理想 $I(\mathcal{H})$ 也可以看作单纯复形 Δ的面理想。设 Δ 是顶点集为 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的单纯复形，且 $\mathcal{F}(\Delta)$ 是 Δ的所有极大面的集合。我们可以为 Δ 关联一个平方自由单项式理想，其定义为 $I(\Delta) = \langle \prod x : F \in \mathcal{F}(\Delta)\rangle$，称为$_{x\in F}$

Δ. 的面理想。考虑超图 $\mathcal{H}(\Delta) = (V, \mathcal{F}(\Delta))$。注意， $I(\Delta) = I(\mathcal{H}(\Delta))$。 Δ 的顶点覆盖理想定义为 $J(\Delta) = J(\mathcal{H}(\Delta)) = I(\mathcal{H}(\Delta))^\vee$.

本文探讨如何修改单纯复形 Δ，从而得到一个新的单纯复形 $\bar{\Delta}$，使得 Δ 满足良好的代数性质。我们的工作受到 Villareal [19]研究的启发。对于图 $G = (V_G, E_G)$的顶点子集 S，在 S 的每个顶点处添加一根胡须后得到的图记为 $G \cup W(S)$。Villareal [19] 证明了， $G \cup W(V_G)$是 Cohen-Macaulay 的，或者等价地，覆盖理想 $J(G \cup W(V_G))$具有线性分解。后来， [6, 20], 中证明了 $G \cup W(V_G)$是顶点可分解且可壳化的。一般而言，对于任意超图，已知以下蕴含关系：

$$\text{vertex decomposable} \Rightarrow \text{shellable} \Rightarrow \text{sequentially Cohen-Macaulay}.$$

许多作者研究了单纯复形的加须操作和部分加须操作的概念（见 [1, 2, 5, 8]）。[2, 8] 中的作者给出了单纯复形 Δ 的顶点集的子集 S 满足某些必要且充分条件，使得在 S 的每个顶点处添加一个胡须后

日期：2023年4月25日。2020年数学主题分类。主要分类号：05E40、13C14、13D02。关键词和短语。逐分量线性、顶点可分解、顶点覆盖理想、符号幂。1

所得复形是顶点可分解的或序贯科恩-麦考利单纯复形。Alexander 对偶的概念帮助我们将平方自由单项式理想的序贯科恩-麦考利性质与其对偶的逐分量线性性质联系起来。回顾一下，如果对于所有 $j \in \mathbb{N}$， $I_{<j>}$ 都具有线性分解，则称一个分次理想是逐分量线性的，其中 $I_{<j>}$ 表示由 I中所有次数为 j的齐次元素生成的理想。对于平方自由单项式理想 I，Herzog 和 Hibi [10] 给出了判定 $I^\vee$ 为逐分量线性的如下准则： R/I 在 $\mathbb{K}$ 上是序贯科恩-麦考利的，当且仅当 $I^\vee$ 是逐分量线性理想。特别地，该结果表明，如果超图$\mathcal{H}$ 是顶点可分解的，那么 $I(\mathcal{H})^\vee$ 是逐分量线性理想。在 [7], 中，已经证明了 $G \cup W$的覆盖理想的所有符号幂都是逐分量线性的。如果S 是图 G的一个顶点覆盖，那么 Selvaraja 在 [16] 中证明了 $G \cup W$的覆盖理想的所有符号幂（S）都是逐分量线性的。R¨omer 在 [15] 中证明，一个分次R-模 M 是 Koszul 的，当且仅当 M 是逐分量线性的。Koszul模由 Herzog 和 Iyengar 在 [13]中引入。Koszul模在交换代数和代数几何等领域有着重要应用。[9] 中的作者证明，在 G 的圈覆盖的所有顶点处添加胡须，会得到一个新图，使得其覆盖理想的所有符号幂都是逐分量线性的，或等价地说，是 Koszul 的。自然会产生这样的问题：我们能否将这些结果推广到更一般的对象？本文引入了单纯复形 Δ的圈覆盖概念（见定义 2.5）。我们在单纯复形 Δ 的圈覆盖的每个顶点处附加非纯骨架（见定义 2.1），从而得到一个¯单纯复形 Δ。我们将 [14, 17] 中的构造推广为：通过复制 $\mathcal{H}$中的边，从 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta)$得到超图_$\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t)$，其中 t是 $\mathcal{H}$ 的边数，且 $(\ell_1, \ldots, \ell_t) \in \mathbb{N}^t$. 。我们证明，$\mathcal{H}(\ell, \ldots, \ell)$ 是一个顶点可分解图。我们的第一个主要结果如下所述。

定理 A（见定理 4.18）。设 Δ 是一个单纯复形，且 W 是 _Δ 的圈覆盖。设 Δ 是从 Δ 出发，在 W 的所有顶点处附加非纯骨架后得到的单纯复形。则 $J(\bar{\Delta})^{(\ell)}$ 具有线性商，因此它是逐分量线性的。

如果理想 I 具有线性分解，那么 I^2 可能不具有这一性质。第一个此类例子归功于 Terai，见 [4, 注 3]。Sturmfels [18] 还给出了另一类此种理想的例子。我们的工作还有以下重要推论。

定理 B（见定理 4.20）。设 Δ 是一个单纯复形，且 W 是 _Δ 的圈覆盖。设 Δ 是从 Δ 出发，在 W 的所有顶点处附加非纯骨架后得到的单纯复形。如果对于所有 $\ell \geq 1$ 都有 $J(\bar{\Delta})^{(\ell)} = J(\bar{\Delta})^\ell$，则以下条件等价。

¯(a) $J(\Delta)$具有线性分解。(b) 对于某个 $\ell \geq 1$， $J(\bar{\Delta})^\ell$ 具有线性分解。(c) 对于所有 $\ell \geq 1$， $J(\bar{\Delta})^\ell$ 具有线性分解。¯(d) $R/I(\Delta)$是 Cohen-Macaulay 的。(e) Δ 是无混合的。

2. 预备知识

本节介绍本文中使用的一些基本记号和术语。设$n \in \mathbb{N}$，其中 $\mathbb{N}$ 是所有非负整数的集合。为简便起见，我们将集合$\{r \in \mathbb{N}_{>0} : r \leq n\}$ 记作 $[n]$. 。此外，我们用记号 $[n]^a$ 表示集合 $\{(\ell_1, \ldots, \ell_a) : \ell_i \in [n]\}$.

设 Δ 是顶点集为 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. 的单纯复形。若 $F \in \Delta$，则称 F 是 Δ. 的一个面。若面 F 是 Δ 的一个关于包含关系的极大元，则称其为 Δ 的一个极大面。我们用 $\mathcal{F}(\Delta)$表示 Δ. 的所有极大面组成的集合。我们将 Δ的面 F的维数定义为 $\dim\ F = |F|-1$，其中 $|F|$是 F.的基数。单纯复形 Δ 的维数定义为

$$\dim \Delta = \max\{\dim F : F \in \mathcal{F}(\Delta)\}.$$

对于 $s \in [\dim \Delta] \cup \{0\}$， Δ的第 s 个骨架记作 $\Delta^{(s)}$，它是定义如下的单纯复形:

$$\Delta^{(s)} = \{F \in \Delta : \dim F \leq s\}.$$

若 Δ是一个具有 $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \ldots, F_t\}$ 的单纯复形，则称 Δ由 F_1、.....、F_t生成，并记作

$$\Delta = \langle F_1, \ldots, F_t \rangle.$$

设 Δ'是一个单纯复形，满足 $\mathcal{F}(\Delta') \subset \mathcal{F}(\Delta)$。则称 Δ'是 Δ. 的一个子集。单纯形是指恰有一个面的单纯复形。Selvaraja 在 [16] 中引入了纯完全图和非纯完全图的概念。对于单纯复形，我们在下面的定义中推广这一概念。

定义 2.1. 设 Γ_1，.....，Γ_m 为具有一个公共顶点 x 的单纯形，且对所有 $k \in [m]$. ，$\dim\ \Gamma_k \geq 1$。对每个 $k \in [m]$，令 $s_k \in [\dim \Gamma_k]$. 。在 x 处通过连接骨架 $\Gamma^{(s_1)}{}_1$，.....，$\Gamma^{(s_m)}{}_m$ 得到的单纯复形称为骨架复形，记作 $\Gamma(x)$。此外，若对所有 $k \in [m]$， $s_k < \dim \Gamma_k$. ，则称 $\Gamma(x)$ 为纯骨架复形。否则，称 $\Gamma(x)$ 为非纯骨架复形。

例 2.2。具有以下极大面的单纯复形 Γ

$\{x_1, x_2, x_3\}$、$\{x_1, x_2, x_4\}$、$\{x_1, x_3, x_4\}$、$\{x_2, x_3, x_4\}$、$\{x_1, x_5, x_6\}$、$\{x_1, x_5, x_7\}$、$\{x_1, x_6, x_7\}$、$\{x_5, x_6, x_7\}$如图 1a 所示，是纯骨架复形的一个例子，而具有以下极大面的单纯复形Γ'

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_5, x_6\}$$

如图 1b 所示，是非纯骨架复形的一个例子。



(A) 纯骨架复形 Γ. (B) 非纯骨架复形 Γ'.

FIGURE 1. 纯骨架复形和非纯骨架复形。

如果对于每个 $r \neq s$，都存在一个由 Δ 的极大面 $F_{k_1}, \ldots, F_{k_q}$ 组成的序列，并且满足 $F_{k_1} = F_r$ 和 $F_{k_q} = F_s$，使得对于所有 $p \in [q-1]$. 都有 $F_{k_p} \cap F_{k_{p+1}} \neq \emptyset$，则称单纯复形 $\Delta = \langle F_1, \ldots, F_t \rangle$ 是连通的。若 Δ 的一个极大面 F 满足以下任一条件，则称其为叶面:

(i) Δ 恰好有一个面 F；或

(ii) 存在 Δ 的一个面 G，满足 $G \neq F$，使得对于每个 $H \in \Delta$，都有$H \neq F.$

（ii）中的面 G 称为 F 的一个分支。此外，若所有 Δ 的面可以按线性顺序排列为 F_{k_1}、.....、F_{k_t}，使得

$$F \cap F_{k_1} \supset \cdots \supset F \cap F_{k_t},$$

则 F 称为 $\Delta.$ 的好叶。若 Δ 的每个非空子集族都有一片叶子，则称 Δ 为森林。特别地，我们将连通森林称为单纯树。所谓好叶序，是指 Δ 的所有面按线性顺序排列为 F_1、.....、F_t，使得对于每个$k \in [t-1]$, F_k 都是 $\Delta.$ 的子集族 $\langle F_k$、.....、$F_t\rangle$ 中的一片好叶

文献 [12] 通过引入特殊环的概念刻画森林。由互不相同的顶点和面交替组成的序列 x_{i_1}、F_{i_1}、.....、x_{i_q}、F_{i_q}、$x_{i_{q+1}} = x_{i_1}$，若对每个 $p \in [q]$ 都有 x_{i_p}、$x_{i_{p+1}} \in F_{i_p}.$，则称为一个环。若一个环中没有任何面包含该环的三个或更多顶点，则称其为特殊环。

例 2.3. 设 Δ 是一个单纯复形，其极大面为 $\{x_1, x_2, x_3\}$、$\{x_2, x_4, x_5\}$、$\{x_2, x_3, x_5\}$、$\{x_3, x_5, x_6\}$，如图 2 所示。那么，环

$$x_2, \{x_1, x_2, x_3\}, x_3, \{x_3, x_5, x_6\}, x_5, \{x_2, x_4, x_5\}, x_2$$

是一个特殊环，而环

$$x_2, \{x_1, x_2, x_3\}, x_3, \{x_3, x_5, x_6\}, x_5, \{x_2, x_3, x_5\}, x_2$$

则不是特殊环。

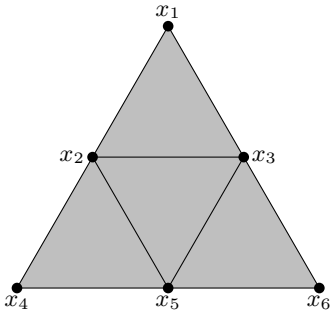


FIGURE 2. 环与特殊环。

下面的注给出了森林的等价条件。

定理 2.4. [12, 定理 3.2 和推论 3.4] 设 Δ 是一个单纯复形。那么
(a) Δ 是森林，当且仅当它没有长度为 $\geq 3.$ 的特殊环。(b) Δ 具有好叶序，当且仅当 Δ 是森林。特别地，每个森林都有一个好叶。

定义 2.5。设 Δ 是顶点集为 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}.$ 的单纯复形。V 的子集 W 称为 Δ 的圈覆盖，如果它与 Δ.的每个特殊环都有交集。

需要注意的是，如果 W 是单纯复形 Δ的圈覆盖，那么 $\Delta \setminus W$是一个森林。例如，$W = \{x_5\}$ 是图2所示单纯复形的一个圈覆盖。

设 F 是一个面 的单纯复形 $\Delta.$ 。由公式定义的单纯复形 a

$$\mathrm{del}_\Delta(F) = \{G \in \Delta : G \cap F = \emptyset\}$$

称为 F的删除，而由公式定义的单纯复形

$$\mathrm{link}_\Delta(F) = \{G \in \Delta : G \cap F = \emptyset, G \cup F \in \Delta\}$$

称为 $F.$ 的链接我们称顶点 x 是 Δ 的剥离顶点，如果对于 $\mathrm{link}_\Delta(x)$ 的每个面 F，都存在 $\mathrm{del}_\Delta(x)$ 的一个面 F'，使得 $F \subsetneq F'.$ 我们称单纯复形 Δ 是顶点可分解的，如果它是一个单纯形，或者它具有一个剥离顶点 x，使得 $\mathrm{del}_\Delta(x)$ 和 $\mathrm{link}_\Delta(x)$ 都是顶点可分解的。此外，如果 Δ，则称其为可壳化的】【。

存在一个对 Δ 的所有极大面的线性序 $F_{k_1} \ldots, F_{k_t}$，使得对于所有满足 $r < s$ 的 $r, s \in [t]$，存在满足 $F_{k_s} \setminus F_{k_j} = \{x\}$. 的 $x \in F_{k_s} \setminus F_{k_r}$ 和 $j \in [s-1]$

顶点集为 $\mathcal{H}$ 的超图是一个有序对 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$，其中 $\mathcal{E}$ 是 V. 的一个非空子集族。V 的元素和 $\mathcal{E}$ 的元素分别称为顶点和边。用 $V(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 的顶点集，用 $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$. 的边集。如果超图 $\mathcal{H}$ 的任何一条边都不真包含于另一条边中，则称其为简单超图。若 $E = \{x\}$ 对某个 $x \in V$. 成立，则称边 E 为平凡边。此外，如果 $\{x\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$，或对所有 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ 都有 $x \notin E$，则称顶点 $x \in V$ 为孤立顶点。每个顶点都是孤立顶点的超图称为孤立超图。本文只讨论简单超图。

记号：设 $\mathcal{H}$ 是一个超图。$\mathcal{H}^\circ$ 表示删除 $\mathcal{H}$. 的孤立顶点后得到的超图。

定义 2.6。设 $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}) \ \mathcal{E}(\mathcal{H}))$ 是一个超图。则

(i) $V(\mathcal{H})$ 的一个子集称为 $\mathcal{H}$ 的顶点覆盖，如果它与 $\mathcal{H}$. 的每条边都有交集。极小顶点覆盖是指关于包含关系在所有顶点覆盖中极小的顶点覆盖。(ii) $V(\mathcal{H})$ 的一个子集称为独立集，如果它不包含 $\mathcal{H}$. 的任何边。极大独立集是指关于包含关系在所有独立集中极大的独立集。

设 Δ 是定义在顶点集 V. 上的单纯复形。于是，我们将如下超图与 Δ 关联起来：$\mathcal{H}(\Delta) = (V, \mathcal{F}(\Delta))$。$V$ 的一个子集称为 Δ 的顶点覆盖，如果它是 $\mathcal{H}(\Delta)$ 的顶点覆盖。如果 Δ 的任意两个极小顶点覆盖具有相同的基数，则称 Δ 是无混合的。

由所有极大独立集生成的单纯复形称为 $\mathcal{H}$. 的独立复形。我们用 $\Delta(\mathcal{H})$ 表示超图 $\mathcal{H}$. 的独立复形。所谓 $\mathcal{H}$ 的剥离顶点，是指 $\Delta(\mathcal{H})$ 的剥离顶点。若超图 $\mathcal{H}$ 的独立复形 $\Delta(\mathcal{H})$ 是顶点可分解的，则称超图 $\mathcal{H}$ 是顶点可分解的。

设 $x \in V(\mathcal{H})$。考虑集合

$$\mathcal{E}_\star = \{E \setminus \{x\} : E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}), x \in E\}$$

and

$$\mathcal{E}^\star = \{E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) : x \notin E, F \setminus \{x\} \not\subset E \text{ for all } F \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) \setminus \{E\}\}.$$

顶点的收缩 $\mathcal{H}/x$ 的顶点 $x \in V(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{H}$ 中的作用是一个超图，其顶点集为 t

$$V(\mathcal{H}/x) = V(\mathcal{H}) \setminus \{x\}$$

且边集为

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}/x) = \mathcal{E}_\star \cup \mathcal{E}^\star.$$

此外，顶点 $x \in V(\mathcal{H})$ 的删除 $\mathcal{H} \setminus x$ 是一个超图，其顶点集为

$$V(\mathcal{H} \setminus x) = V(\mathcal{H}) \setminus \{x\}$$

且边集为

$$\mathcal{E}(\mathcal{H} \setminus x) = \{E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) : x \notin E\}.$$

注意，如果 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H} \setminus x)$，那么 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$。此外，如果 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}/x)$，那么要么 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$，要么 $E \cup \{x\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$。

例 2.7。设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，其顶点集为 $V(\mathcal{H}) = \{x_1, \ldots, x_{10}\}$，边集为

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \left\{ \begin{array}{c} \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_3, x_5\}, \{x_1, x_4, x_5\}, \{x_1, x_3, x_6\}, \\ \{x_5, x_7, x_9\}, \{x_6, x_7, x_9\}, \{x_5, x_8, x_9\}, \{x_5, x_7, x_{10}\} \end{array} \right\}.$$

注意，对于 $i = 2$、4、8、10、$\{x_i\} \notin \mathcal{E}(\mathcal{H})$。因此，$\{x_i\} \notin \mathcal{E}(\mathcal{H} \setminus x_5)$，然而 x_i 是 $\mathcal{H} \setminus x_5$. 中的一个孤立顶点。此外，$\{x_6\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ 和 $\{x_5, x_6\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ 均不成立。因此，$\{x_6\} \notin \mathcal{E}(\mathcal{H}/x_5)$，然而 x_6 是 $\mathcal{H}/x_5$. 中的一个孤立顶点

我们用记号 $\mathcal{H}/(x_1, \ldots, x_p)$ 表示超图 $((\mathcal{H}/x_1) \cdots)/x_p$，用 $\mathcal{H} \setminus (x_1, \ldots, x_p)$ 表示超图 $((\mathcal{H} \setminus x_1) \ldots) \setminus x_p$.

设 $\mathbb{K}$ 是一个域。我们将超图 $\mathcal{H}$ 的顶点与多项式环 $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. 的变量对应起来。$\mathcal{H}$ 的边理想 $I(\mathcal{H})$ 是由下式定义的平方自由单项式理想

$$I(\mathcal{H}) = \langle x_{j_1} \cdots x_{j_q} : \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) \rangle.$$

需要注意的是，$I(\mathcal{H}/x) = I(\mathcal{H})$: x 以及 $I(\mathcal{H} \setminus x) = I(\mathcal{H}) \cap k[x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n]$，其中 $x = x_j \in V(\mathcal{H})$。设 I_Δ 表示单纯复形 Δ. 的 Stanley–Reisner 理想。于是我们有 $I_{\text{link}_\Delta(x)} = (I_\Delta : x, x)$，而 $I_{\text{del}_\Delta(x)} = (I_\Delta, x)$。由于 $I(\mathcal{H}) = I_{\Delta(\mathcal{H})}$，因此立即可得 $\Delta(\mathcal{H}/x) = \text{link}^{\Delta(\mathcal{H})}(x)$，且 $\Delta(\mathcal{H} \setminus x) = \text{del}^{\Delta(\mathcal{H})}(x)$。因此，超图的顶点可分解性定义可表述如下。

定义 2.8。如果超图 $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$ 是孤立超图，或者存在一个剥离顶点 x，使得 $\mathcal{H}/x$ 和 $H \setminus x$ 都具有顶点可分解性，则称其为顶点可分解的。

注: 顶点可分解超图的不交并是顶点可分解的 e.

本文的主要目的是研究覆盖理想。$\mathcal{H}$ 的覆盖理想 $J(\mathcal{H})$ 是由下式给出的平方自由单项式理想

$$J(\mathcal{H}) = \langle x_{j_1} \cdots x_{j_q} : \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}\} \text{ is a vertex cover of } \mathcal{H} \rangle.$$

容易验证，$J(\mathcal{H}) = I(\mathcal{H})^\vee$，其中 $I(\mathcal{H})^\vee$ 是 $I(\mathcal{H})$ 的 Alexander 对偶。单纯复形 Δ 的面理想记作 $I(\Delta)$，它是 R 中由下式给出的平方自由单项式理想

$$I(\Delta) = \langle x_{j_1} \cdots x_{j_q} : \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}\} \in \mathcal{F}(\Delta) \rangle.$$

可以写成 $I(\Delta) = I(\mathcal{H}(\Delta))$。因此，我们可以将 Δ 的顶点覆盖理想定义为 $J(\Delta) = J(\mathcal{H}(\Delta))$，或者等价地定义为 $J(\Delta) = I(\Delta)^\vee$.

设 M 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-分次 R-模。若 $\beta_{i,\ j}^R(M)$ 表示 M 的 $(i, j)^{th}$ 分次 Betti 数，则 M 的 Castelnuovo-Mumford 正则性记作 $\text{reg}(M)$，定义为

$$\text{reg}(M) = \max\{j - i : \beta_{i,j}^R(M) \neq 0\}.$$

若存在一个整数 d，使得对所有 i 和所有 $b \neq d.$，$\beta_{i,i+b}^R(M) = 0$，则称模 M 具有线性分解。此外，若存在一个有限序列，则称 R-模 M 是序贯科恩-麦考利

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

由分次 R-子模组成，使得对于所有 $i \in [r]$，商模 M_i/M_{i-1} 都是 Cohen-Macaulay 的，并且对于所有 $i \in [r-1].$，$\dim(M_i/M_{i-1}) < \dim(M_{i+1}/M_i)$。特别地，如果 R/I_Δ 是 Cohen-Macaulay（分别为序贯 Cohen-Macaulay）环，则称单纯复形 Δ 在 $\mathbb{K}$. 上是 Cohen-Macaulay（分别为序贯 Cohen-Macaulay）的。称超图 $\mathcal{H}$

是可壳化的（分别为序贯 Cohen-Macaulay）等价于称其独立复形 $\Delta(\mathcal{H})$ 是可壳化的（分别为序贯 Cohen-Macaulay）。对于超图，以下蕴含关系是已知的。

顶点可分解 $\Rightarrow$可壳化 $\Rightarrow$ 序贯科恩-麦考利。

定义 2.9. 设 I 是 $R.$ 的一个齐次理想。对于 $j \in \mathbb{N}$，令 $I_{<j>}$ 表示由 I 中所有次数为 $j.$ 的齐次元素生成的理想。若对所有 $j.$，I 都有线性分解，则称 I 是逐分量线性的。

线性商这一概念是一种极其有用的技术，可用于判断一个理想是否逐分量线性。

定义 2.10. 若单项式理想 $I \subset R$ 的极小生成元存在一种排序$u_1, \ldots, u_r$，使得对所有 $2 \leq i \leq r.$，理想 $\langle u_1, \ldots, u_{i-1}\rangle$: $\langle u_i\rangle$ 都由 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的一个子集生成，则称 I 具有线性商。

现在，我们回顾平方自由单项式理想的第 ℓ 符号幂这一概念。

定义 2.11. 设 I 是 R 中的一个平方自由单项式理想，且设 $I = \wp_1 \cap \cdots \cap \wp_t$ 是 I 的不可约主分解，其中 $\wp_i$ 是由 $\{x_1, \ldots, x_n\}.$ 的一个子集生成的理想。那么对于 $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$，I 的 ℓ 次符号幂 $I^{(\ell)}$ 定义为

$$I^{(\ell)} = \wp_1^{\ell} \cap \cdots \cap \wp_t^{\ell}.$$

我们以引入极化的概念结束本节。它是将单项式理想转化为平方自由单项式理想的一个非常有用的工具。

定义 2.12. 对每个 $i \in [m]$，令 $u_i = \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}}$ 为 R 中的一个单项式，并令 $I = \langle u_1, \ldots, u_m\rangle \subset R.$ 若 $j \in [n]$，则我们定义 $a_j = \max\{a_{ij} : i \in [m]\}.$ 考虑一个多项式环

$$T = \mathbb{K}[x_{11}, \ldots, x_{1a_1}, x_{21}, \ldots, x_{2a_2}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{na_n}].$$

那么，由平方自由单项式 w_1、.....、w_m、$\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{a_{ij}} x_{jk}$，称为 I 的极化。

3. Vertex Decomposable Hypergraphs

本节将介绍一些基本工具，用于证明超图的顶点可分解性。令 $\ell, a \in \mathbb{N}_{>0}$ and $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_a) \in [\ell]^a.$ We write $|\mathbf{f}|$ for the sum $\sum_{p=1}^{a} f_p$.

以下构造引自 [3], ，是本文的主要工具。若 ℓ 是非负整数，且 $\mathcal{H}$ 是超图，则构造 3.1 生成一个新的超图 $\mathcal{H}(\ell)$，使得 $J(\mathcal{H})^{(\ell)} = J(\mathcal{H}(\ell))$。

构造 3.1. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，其顶点集为 $V(\mathcal{H}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{F_1, \ldots, F_t\}$。假设 $F = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\}$ 是 $\mathcal{H}.$ 中的一条边。我们构造一个新的超图 $F(\ell)$，其顶点集为

$$V(F(\ell)) = \{x_{j_p,f} : p \in [a], f \in [\ell]\}$$

以及边集

$$\mathcal{E}(F(\ell)) = \{\{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\} : |\mathbf{f}| \leq \ell + a - 1\},$$

where $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$. 按照惯例， $F(0)$ 是顶点集上的孤立超图 t

$$V(F(0)) = \{x_{j_1,1}, \ldots, x_{j_a,1}\}.$$

设 $(\ell_1, \ldots, \ell_t) \in \mathbb{N}^t$ 为一个有序元组。我们构造一个新的超图 $\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t)$，其顶点集为

$$V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t)) = \bigcup_{i=1}^{t} V(F_i(\ell_i))$$

边集为

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t)) = \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{E}(F_i(\ell_i)).$$

当对所有 $i \in [t]$都有 $\ell_i = \ell$时，我们将超图 $\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t)$ 记为 $\mathcal{H}(\ell)$。

下面给出构造 3.1 的一个说明性例子。

例3.2. 设 $\mathcal{H}$ 是一个顶点集为 $V(\mathcal{H}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 且边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}$. 的超图。超图 $\mathcal{H}(1,2,3,2)$ 的边集为

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}(2)) = \left\{ \begin{array}{ccccc} \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}\}, & \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{4,1}\}, & \{x_{1,2}, x_{2,1}, x_{4,1}\}, & \{x_{1,1}, x_{2,2}, x_{4,1}\}, \\ \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{4,2}\}, & \{x_{1,1}, x_{3,1}, x_{4,1}\}, & \{x_{1,2}, x_{3,1}, x_{4,1}\}, & \{x_{1,1}, x_{3,2}, x_{4,1}\}, \\ \{x_{1,1}, x_{3,1}, x_{4,2}\}, & \{x_{1,3}, x_{3,1}, x_{4,1}\}, & \{x_{1,1}, x_{3,3}, x_{4,1}\}, & \{x_{1,1}, x_{3,1}, x_{4,3}\}, \\ \{x_{1,2}, x_{3,2}, x_{4,1}\}, & \{x_{1,2}, x_{3,1}, x_{4,2}\}, & \{x_{1,1}, x_{3,2}, x_{4,2}\}, & \{x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}\}, \\ \{x_{2,2}, x_{3,1}, x_{4,1}\}, & \{x_{2,1}, x_{3,2}, x_{4,1}\}, & \{x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,2}\} & & \end{array} \right\}.$$

引理3.3. 设 $\mathcal{H}$ 为一个超图，使得 $\mathcal{H}(\ell)$是顶点可分解的； $\ell \in \mathbb{N}$. 则$J(\mathcal{H})^{(\ell)}$ 具有线性商，因此它是逐分量线性的。

证明. 由于 $\mathcal{H}(\ell)$是顶点可分解的，我们得到 $\mathcal{H}(\ell)$是可壳化的。现在根据 [3, 引理3.5], $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，有 $J(\mathcal{H})^{(\ell)} = J(\mathcal{H}(\ell))$。因此根据 [11,定理8.2.5]， $J(\mathcal{H})^{(\ell)}$具有线性商。由[17,引理3.5]可知， $J(\mathcal{H})^{(\ell)}$具有线性商。因此根据 [11,定理8.2.15], $J(\Delta)^{(\ell)}$是逐分量线性的。□

我们固定一些贯穿全文使用的术语。令 $\mathcal{C}$ 表示所有项取自集合 $\{D, L\}$. 的无限字符串的集合。对于任意无限字符串 $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$，我们将其第 r项记为 $\mathcal{P}_r$。如果 $p \in \mathbb{N}$ 且 $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$，则我们定义

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}, p) = \{\mathcal{S} \in \mathcal{C} : \mathcal{S}_r = \mathcal{P}_r \text{ for all } r \in [p]\}.$$

由于 $[0] = \emptyset$，可知对于所有 $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$., $\mathcal{C}(\mathcal{P}, 0) = \mathcal{C}$

设 $\mathcal{H}$ 为顶点集 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 和边集 $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{F_1, \ldots, F_t\}$ 上的超图，并且 $(\ell_1, \ldots, \ell_t) \in \mathbb{N}^t_{>0}$.。我们将序列 $\boldsymbol{x}$. 的第 p 项记为 $\boldsymbol{x}_p$。设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个无限字符串，且 $\boldsymbol{x} = (x_{i_r,\ c_r})_{r=1}^{\alpha}$ 是 $V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t)$ 中的互不相同顶点序列。我们递归地定义超图序列 $(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r])_{r=0}^{\infty}$，如下所示：定义

$$\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; 0] = \mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t).$$

假设 $r \geq 1$ 和 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x};\ r-1]$ 已定义。定义

$$\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r] = \begin{cases} \mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r-1]/x_{i_r,c_r} & \text{for } r \in [\alpha] \text{ and } \mathcal{S}_r = L; \\ \mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r-1] \setminus x_{i_r,c_r} & \text{for } r \in [\alpha] \text{ and } \mathcal{S}_r = D; \\ \mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; \alpha] & \text{for } r > \alpha. \end{cases}$$

超图 $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x};\ r]$ 称为由字符串 $\mathcal{S}$ 和序列 $\boldsymbol{x}$.确定的第 r 个超图

我们称序列 $\boldsymbol{x}$ 满足关于 $\mathcal{S}$ 的性质 $\mathfrak{P}$，如果对于所有的 $\delta,\ \epsilon\in[\alpha]$，其中$\delta<\epsilon$ 且 $\mathcal{S}_\delta=\mathcal{S}_\epsilon=L$，都有 $x_{i_\delta}\neq x_{i_\epsilon}$. 。设 $\boldsymbol{x}$ 满足关于 $\mathcal{S}$和 $r\geq 0$. 的性质 $\mathfrak{P}$ 。我们定义

$$A[\mathcal{S},\boldsymbol{x};r]=\{x_{i_p}\in V(\mathcal{H}):x_{i_p,c_p}=\boldsymbol{x}_p,\mathcal{S}_p=L,p\in[\min\{r,\alpha\}]\}$$

and

$$B[\mathcal{S},\boldsymbol{x};r]=\{x_{i_p}\in V(\mathcal{H}):x_{i_p,c_p}=\boldsymbol{x}_p,\mathcal{S}_p=D,p\in[\min\{r,\alpha\}]\}.$$

那么，集合 $A[\mathcal{S},\boldsymbol{x};\ r]$ 称为由字符串 $\mathcal{S}$和序列 $\boldsymbol{x}$确定的收缩的第 r个顶点集，而集合 $B[\mathcal{S},\boldsymbol{x};\ r]$ 称为由字符串 $\mathcal{S}$和序列 $\boldsymbol{x}$. 确定的删除的第 r个顶点集。注意，对于所有的 $r\geq\alpha.$，都有 $A[\mathcal{S},\boldsymbol{x};\ r]=A[\mathcal{S},\boldsymbol{x};\ \alpha]$ 以及 $B[\mathcal{S},\boldsymbol{x};\ r]=B[\mathcal{S},\boldsymbol{x};\ \alpha]$ 。每当字符串 $\mathcal{S}$ 和序列 $\boldsymbol{x}$ 的含义由上下文明确时，我们用记号 A_r 表示集合 $A[\mathcal{S},\boldsymbol{x};\ r]$，并用 B_r 表示集合 $B[\mathcal{S},\boldsymbol{x};\ r].$ 。此外，若 $r\in\mathbb{N}$ 且 $k\in[t]$，则令 $\ell_{k,\ r}=\max\{0,\ell_k-d_{k,r}\}$，其中

$$d_{k,r}=-|F_k\cap A_r|+\sum_{\substack{x_{i_p}\in F_k\cap A_r,\\ x_{i_p,c_p}=\boldsymbol{x}_p}}c_p.$$

若 $r\in[\alpha]$ 满足 $\mathcal{S}_r=L$，则 $x_{i_r}\notin A_{r-1}$. 因此，每个 $\ell_{k,\ r}$ 都是良定义的。

我们称 $E=\{x_{j_1,f_1},\ldots,x_{j_a,f_a}\}\subset V(\mathcal{H}(\ell_1,\ldots,\ell_t))$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}$ 中是可构造的；$r]$ 若存在 $k\in[t]$ 使得满足以下条件：

(i) $\{x_{j_1},\ldots,x_{j_a}\}=F_k\setminus A_r$；以及 (ii) $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_a)\in[\ell_k]^a$ 满足 $f_q>c_p$，只要 $x_{j_q}=x_{i_p}\in B_r\setminus A_r$ 且 $|\mathbf{f}|\leq\ell_{k,\ r}+a-1.$

例 3.4。设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，其顶点集为 $V=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ $=\{F_1=\{x_1,x_2,x_3\},F_2=\{x_1,x_2,x_4\},F_3=\{x_1,x_3,x_4\},F_4=\{x_2,x_3,x_4\}\}.$。令$\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的一个无限字符串，使得 $\mathcal{S}_1=\mathcal{S}_3=D$ 且 $\mathcal{S}_2=L.$ 。考虑顶点序列$\boldsymbol{x}=(x_{1,\ 1},x_{1,\ 2},x_{2,\ 1})$，其中顶点属于 $V(\mathcal{H}($ 2))。我们得到

$$\mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x};1])^\circ)=\left\{\begin{array}{l}\{x_{1,2},x_{2,1},x_{3,1}\},\{x_{1,2},x_{2,1},x_{4,1}\},\{x_{1,2},x_{3,1},x_{4,1}\},\{x_{2,1},x_{3,1},x_{4,1}\},\\ \{x_{2,2},x_{3,1},x_{4,1}\},\{x_{2,1},x_{3,2},x_{4,1}\},\{x_{2,1},x_{3,1},x_{4,2}\}\end{array}\right\}$$

and

$$\mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x};2])^\circ)=\Big\{\{x_{2,1},x_{3,1}\},\{x_{2,1},x_{4,1}\},\{x_{3,1},x_{4,1}\}\Big\}.$$

此外，对于每个 $r\geq 3$，我们有

$$\mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x};r])^\circ)=\Big\{\{x_{3,1},x_{4,1}\}\Big\}.$$

容易看出，集合 $\{x_{2,2},x_{3,1},x_{4,1}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}$ 中是可构造的；$3]$ 但 $\{x_{2,1},x_{3,2},x_{4,1}\}$ 不是。

本文中我们反复使用以下引理。

引理 3.5. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，且 $(\ell_1,\ldots,\ell_t)\in\mathbb{N}^t_{>0}$，其中 t 是 $\mathcal{H}.$ 的边数。此外，设 $p\in\mathbb{N}$，且 $\mathcal{P}$ 是任意无限字符串。假设对于每个 $\mathcal{S}\in\mathcal{C}(\mathcal{P},p)$，在 $\mathcal{H}(\ell_1,\ldots,\ell_t)$ 中都存在一个由顶点组成的序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$，其含有 $\alpha(\mathcal{S})$ 项，使得

(1) $\alpha(\mathcal{S})\geq p$，(2) $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$；$\alpha(\mathcal{S})]$ 是一个顶点可分解超图，

(3) 若 $\alpha(\mathcal{S}) > p$ 且 $p \le p' < \alpha(\mathcal{S})$，则对于每个 $\mathcal{S}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}, p')$，都有 $p' < \alpha(\mathcal{S}')$和$\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_r = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}')_r$ 对所有 $r \in [p'+1]$成立；(4) $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_r$是$(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r-1])^\circ$的剥离顶点，对所有 $p < r \le \alpha(\mathcal{S})$成立。

于是 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r]$ 对所有 $r \ge p$ 以及所有 $\mathcal{S} \in \mathcal{C}(\mathcal{P}, p)$ 都是顶点可分解超图 .

证明。令 $\alpha_0 = \max\{\alpha(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \in \mathcal{C}(\mathcal{P}, p)\}$. 于是 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r] = \mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha(\mathcal{S})]$ 对所有$r \ge \alpha_0$ 以及所有 $\mathcal{S} \in \mathcal{C}(\mathcal{P}, p)$均成立。因此，我们假设 $p \le r \le \alpha_0$. 。我们对 $\alpha_0 - r$. 使用归纳法。该结果对 $r = \alpha_0$. 成立。现在，设 $p \le r < \alpha_0$，且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}(\mathcal{P}, p)$ 中的任意无限字符串。如果 $r \ge \alpha(\mathcal{S})$，那么

$$\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r] = \mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r+1],$$

因此该结果由归纳法得出。另一方面，假设 $r \in [\alpha(\mathcal{S}) - 1] \cup \{0\}$ 且 $\mathcal{S}_{r+1} = D$. 。于是

$$\left(((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r])^\circ) \setminus \boldsymbol{x}(\mathcal{S})_{r+1}\right)^\circ = (\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r+1])^\circ.$$

现在，考虑字符串 $\mathcal{S}'$，其中对所有 $s \ne r+1$ 都有 $\mathcal{S}'_s = \mathcal{S}_s$，并且 $\mathcal{S}'_{r+1} = L$. 。于是 $\mathcal{S}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}, r)$。因此，根据给定假设，我们有

$$\left(((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r])^\circ)/\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_{r+1}\right)^\circ = (\mathcal{H}[\mathcal{S}', \boldsymbol{x}(\mathcal{S}'); r+1])^\circ.$$

因此由归纳法可知，$(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r])^\circ) \setminus \boldsymbol{x}(\mathcal{S})_{r+1}$和 $((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r])^\circ)/\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_{r+1}$是顶点可分解超图。由于 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_{r+1}$是超图 $(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r])^\circ$的剥离顶点，我们得到 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r]$ 是顶点可分解超图。类似地，当 $\mathcal{S}_{r+1} = L$. □时，我们也可以证明该结论

注 3.6. 设 $\mathcal{H}$ 为一个超图， $\mathcal{S}$为 $\mathcal{C}$中的一个无限字符串，且 $(\ell_1, \ldots, \ell_t) \in \mathbb{N}^t_{>0}$，其中 t 是 $\mathcal{H}$. 的边数。此外，设 $\boldsymbol{x} = (x_{i_r, c_r})_{r=1}^{\alpha}$ 为 $V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t))$ 中满足关于 $\mathcal{S}$和 $c_r =$的性质 $\mathfrak{P}$的顶点序列，其中 $\{c$的最小值为 $x_{i_r,c} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r-1])^\circ)\}$. 假设 $q \in [\alpha]$.

(a) 令 $x_{i_q} = x_{i_p}$ 对于某个 $p \in [q-1]$ 满足 $\mathcal{S}_p = D$. 注意到

$$V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; q-1])^\circ) \subset V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; p'])^\circ) \tag{3.1}$$

对于所有 $0 \le p' \le q-1$. 由 (3.1) 可知 $x_{i_q,\ c_q} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; p-1])^\circ)$。因此，我们有 $c_q \ge c_p$. 此外，注意到

$$\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; p] = \mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; p-1] \setminus x_{i_p, c_p}.$$

这迫使 $x_{i_p,\ c_p} \notin V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; p])^\circ)$。因此，根据 (3.1)，我们可以说 $c_q > c_p$.(b) 令 E为 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}$ 中的一条边； $q-1]$满足 $x_{i_q,\ c_q} \in E$.如果 E 是一条平凡边，则 $E = \{x_{i_q, c_q}\}$.由于 $x_{i_q,\ c_q} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; q-1])^\circ)$，存在一条边 $E' \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; q-1])^\circ)$，使得 $x_{i_q,\ c_q} \in E'$. 于是 $E \subsetneq E'$, ，这与 $E' \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; q-1])^\circ)$ 的事实相矛盾。因此，我们必须有 $E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; q-1])^\circ)$。

以下定理在 [3] 中针对特殊情形 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta)$ 得到了证明，其中 Δ 是单纯树。可以验证，该证明并不需要单纯树的性质，因此可以推广到任意超图。这里，我们陈述适用于任意超图的定理，并省略证明。

定理 3.7。采用注 3.6 的记号， E 中的任意边 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r]$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}$中是可构造的； $r]$. 反之，对于 E中的每个可构造集 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r]$，存在一条边 E'在$\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r]$ 包含于 E.

根据定理 3.7， $E = \{x_{j,f}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}$中是可构造的； $r]$ 当且仅当 E是 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}$中的一条边； $r]$. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，其顶点集为 $V = \{x_1, \ldots, x_5\}$，边集为$\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$.注意，$\{x_{1,2}\} \notin \mathcal{E}(\mathcal{H}(2) \setminus x_{3,\ 1})$。因此， $\{x_{1,2}\}$在 $\mathcal{H}(2)\setminus x_{3,\ 1}$ 中不可构造（见例 2.7）。

推论 3.8. 采用注 3.6 中的记号，设 $r \geq 0$ 和 $x_{j,\ f} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r])^\circ)$。那么 $x_j \notin A_r$. 此外，如果 $x_j = x_{i_p} \in B_r \setminus A_r$，则 $f > c_p$.

证明。由于 $x_{j,\ f} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r])^\circ)$，存在一条边 $E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}; r])^\circ)$，使得 $x_{j,\ f} \in E$. 现在，利用定理 3.7， E 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}$ 中是可构造的； $r]$. 因此我们得到所需结果。□

4. Non-Pure skeleton complexes and componentwise linear ideals

本节证明本文的第一个主要结果：如果 Δ 是由单纯复形 Δ 通过将非纯骨架复形附加到 Δ 的圈覆盖中的每个顶点上得到的单纯复形，那么对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$， $J(\bar{\Delta})^{(\ell)}$ 是逐分量线性的。我们从以下定义开始。

定义 4.1. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，且 $(\ell_1, \ldots, \ell_t) \in \mathbb{N}^t_{>0}$，其中 t 是 $\mathcal{H}$. 中边的数量

(i) 顶点影子在 $\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t)$ 上诱导的序，记为‘$\prec_s$’，是 $V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t))$ 上定义的全序，其定义为：若满足以下条件之一，则 $x_{i,c} \prec_s x_{j,d}$： (i) $c < d$；或 (ii) $c = d$ 且 $i < j$。(ii) 顶点指标在 $\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t)$ 上诱导的序，记为‘$\prec_v$’，是 $V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t))$ 上定义的全序，其定义为：若满足以下条件之一，则 $x_{i,c} \prec_v x_{j,d}$： (i) $i < j$；或 (ii) $i = j$ 且 $c < d$.

由于 $V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t))$ 是有限集，因此 $\prec_s$ 和 $\prec_v$ 是 $V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t))$ 上的良序。

定理 4.2. 设 Γ 是顶点集 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的单纯形，且 $\mathcal{H} = \mathcal{H}\ (\Gamma^{(s)})$ ，其中 $s \in [n-1] \cup \{0\}$. 。那么，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$.，超图 $\mathcal{H}\ (\ell)$ 都是顶点可分解的

证明。对于 $s = 0$， $\mathcal{H}\ (\ell)$ 是一个孤立超图，因此它是顶点可分解的。假设 $s \geq 1$. 。令 $\Gamma^{(s)} = \langle F_1$、.....、$F_t\rangle$ 和（ℓ_1、.....、ℓ_t） $\in \mathbb{N}^t_{>0}$ 是一个有序元组，满足对于所有 $k \in [t]$. ， $\ell_k = \ell$ 。设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}$. 中的一个无限字符串。我们递归地定义一个序列（$\boldsymbol{x}$（$\mathcal{S}$、p））$_{p=1}^{\infty}$，其中 $\boldsymbol{x}$（$\mathcal{S}$、p）是 $\mathcal{H}\ (\ell)$ 中的一个满足相对于 $\mathcal{S}$ 的性质 $\mathfrak{P}$ 的有限顶点序列，如下所示：对于 $p = 1$，定义

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, 1) = (x_{1,1}).$$

现在，设 $p \geq 1$ 为整数，并设序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$ 满足关于 $\mathcal{S}$ 的性质 $\mathfrak{P}$ 。若 $V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p); p])^\circ) \neq \emptyset$，则定义 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)$ 为

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)_q = \begin{cases} \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)_q & \text{if } q \in [p]; \\ \min\left(V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p); p])^\circ), \prec_s\right) & \text{if } q = p+1. \end{cases}$$

另一方面，如果 $V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p); p])^\circ) = \emptyset$，那么我们定义 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p') = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$ 对所有$p' > p$. 为真。为了证明 $x(\mathcal{S}, p+1)$ 满足关于 $\mathcal{S}$ 的性质 $\mathfrak{P}$，令 $\delta, \epsilon \in [p+1]$ 满足 $\delta < \epsilon$和 $\mathcal{S}_\delta = \mathcal{S}_\epsilon = L$. 。如果 $x(\mathcal{S}, p+1) = x(\mathcal{S}, p)$，或者 $\epsilon < p+1$，那么结论显然成立。现在，令$x(\mathcal{S}, p+1) \neq x(\mathcal{S}, p)$ 且 $\epsilon = p+1$. 。如果 $x(\mathcal{S}, p+1)_\epsilon = x_{j,f}$，那么由推论 3.8 可得 $x_j \notin A[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p); p]$，因此 $x(\mathcal{S}, p+1)$ 满足关于 $\mathcal{S}$. 的性质 $\mathfrak{P}$

令 $\alpha(\mathcal{S})$ 为 th 使 $V((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S},\alpha(\mathcal{S}))];\ \alpha(\mathcal{S})])^\circ) = \emptyset.$ 成立的最小整数。现在，我们看 t

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}) = \boldsymbol{x}(\mathcal{S},\alpha(\mathcal{S})).$$

注意， $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 有 $\alpha(\mathcal{S})$ 项，并且它满足关于 $\mathcal{S}.$ 的性质 $\mathfrak{P}$ 。我们证明序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 满足引理 3.5 关于 $p=0.$ 的假设。显然， $\alpha(\mathcal{S}) \geq 0.$。注意， $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ ； $\alpha(\mathcal{S})]$ 是一个孤立超图，因为 $V((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$； $\alpha(\mathcal{S})])^\circ) = \emptyset.$。因此， $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$； $\alpha(\mathcal{S})]$ 是顶点可分解的。令 $0 \leq p' < \alpha(\mathcal{S})$ 和 $\mathcal{S}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S},p')$。如果 $\alpha(\mathcal{S}') \leq p'$，则 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}',\alpha(\mathcal{S}')) = \boldsymbol{x}(\mathcal{S},\alpha(\mathcal{S}'))$，从而

$$\mathcal{H}[\mathcal{S}',\boldsymbol{x}(\mathcal{S}',\alpha(\mathcal{S}'));\alpha(\mathcal{S}')] = \mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S},\alpha(\mathcal{S}'));\alpha(\mathcal{S}')].$$

现在，事实 $V((\mathcal{H}[\mathcal{S}',\boldsymbol{x}(\mathcal{S}',\alpha(\mathcal{S}'))];\ \alpha(\mathcal{S}')])^\circ) = \emptyset$ 意味着 $\alpha(\mathcal{S}') \geq \alpha(\mathcal{S}) > p'$，矛盾。因此，对于所有 $\mathcal{S}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S},p')$，都有 $p' < \alpha(\mathcal{S}')$。此外，对于所有$r \in [p'+1].$，我们有 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_r = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}')_r$

现在，仍需证明 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_r$ 是 $(\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})];r-1])^\circ$ 对于所有$r \in [\alpha(\mathcal{S})].$ 的剥离顶点。注意到

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_r = \min\left(V((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S});r-1])^\circ),\prec_s\right).$$

令 $r \in [\alpha(\mathcal{S})]$ 且 $U \in$链接$_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_r)$，其中 $\mathcal{D} = \Delta((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})];r-1])^\circ)$。假设 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_r = x_{i_r}$、$_{c_r}$ 以及 $F \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})];\ r-1])^\circ)$，且 x_{i_r}、$_{c_r} \in F.$。那么存在 $j \in [n]$，满足 $j \neq i_r$，使得 x_j、$_c \in F \setminus U$，其中某个 $c \in [\ell].$。令 f 为满足 x_j、$_f \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})];\ r-1])^\circ) \setminus U.$的最大整数。我们声称 $U \cup \{x_{j,f}\} \in \mathcal{D}.$。反之，假设$U \cup \{x_{j,f}\} \notin \mathcal{D}.$。那么存在一条边 $E = \{x_{j_1,f_1},\ldots,x_{j_a,f_a}\} \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})];\ r-1])^\circ)$，使得 $E \subset U \cup \{x_{j,f}\}.$。由于 $U \in \mathcal{D}$，可知 x_j、$_f \in E.$。不失一般性，假设 x_j、$_f = x_{j_1}$、$_{f_1}.$。记 $A_{r-1} = A[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$； $r-1]$ 以及 $B_{r-1} = B[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$； $r-1].$。此外，如果 $k \in [t]$，则令 ℓ_k、$_{r-1} = \max\{0,\ell_k - d_{k,r-1}\}$，其中

$$d_{k,r-1} = -|F_k \cap A_{r-1}| + \sum_{\substack{x_{i_p} \in F_k \cap A_{r-1},\\ x_{i_p,c_p} = \boldsymbol{x}_p}} c_p.$$

利用定理 3.7，存在 $k \in [t]$ 使得 $\{x_{j_1},\ldots,x_{j_a}\} = F_k \setminus A_{r-1}$ 且 $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_a) \in [\ell]^a$ 满足

$$f_q > c_p \text{ if } x_{j_q} = x_{i_p} \in B_{r-1} \setminus A_{r-1} \text{ and } |\mathbf{f}| \leq \ell_{k,r-1} + a - 1.$$

现在，我们有以下两种情况。

情况 1. 当 $x_{i_r} \in F_k.$ 不失一般性，假设 $x_{i_r} = x_{j_2}.$ 于是 $f_2 > c_r \geq 1.$由于 $|\mathbf{f}| \leq \ell_k,$ $_{r-1} + a - 1 \leq \ell + a - 1$，我们得到 $f = f_1 < \ell.$ 因此，该集合

$$\bar{E} = \{x_{j_1,f_1+1}, x_{j_2,c_r},\ldots,x_{j_a,f_a}\} \subset V(\mathcal{H}(\ell)).$$

现在，由于 $|\mathbf{f}| - f_2 + c_r + 1 \leq |\mathbf{f}| \leq \ell_k,$ $_{r-1} + a - 1$，根据注记 3.6(a)，可知 E在 $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中是可构造的； $r-1].$根据定理 3.7，存在一条边 E'位于 $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中； $r-1]$且满足 $E' \subset \bar{E}.$由于 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$； $r-1])$，我们必有 $E' \cap \{x_{j_1,f_1+1}, x_{j_2,c_r}\} \neq \emptyset.$假设 $E' \notin \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$； $r-1])^\circ)$。根据注记 3.6(b)，可得 $E' = \{x_{j_1,f_1+1}\}.$ E' 是 $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中的一条边； $r-1]$ 这表明 $\{x_{j_1,f_1}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中是可构造的； $r-1]$。现在利用定理 3.7，可得 $\{x_{j_1,f_1}\}$ 是 $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中的一条边； $r-1].$因此 $E \notin \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$； $r-1])^\circ)$，矛盾。因此，我们有 $E' \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$； $r-1])^\circ)$。现在，由 f 的极大性，我们有 $E' \subset U \cup \{x_{i_r,c_r}\}.$这与 $U \in$链接$_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_r)$ 的事实相矛盾。

情形 2。当 $x_{i_r} \notin F_k$. 由于 Γ 是一个单纯形，因此可知 $(F_k \setminus \{x_{j_1}\}) \cup \{x_{i_r}\} = F_{k'}$ 对于某个 $k' \in [t]$. 根据推论 3.8，我们有 $F_{k'} \cap A_{r-1} = F_k \cap A_{r-1}$ 以及

$$F_{k'} \setminus A_{r-1} = \{x_{i_r}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_a}\}.$$

因此，$\ell_{k',\ r-1} = \ell_{k,\ r-1}$. 注意到 $f_1 \geq c_r$. 于是 $f_1 - f_1 + c_r \leq \ell_{k',\ r-1} + a - 1$，并且由注记 3.6(a)可知，$E = \{x_{i_r,c_r}, x_{j_2,f_2}, \ldots, x_{j_a,f_a}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1]$ 中是可构造的；根据定理 3.7，存在一条边 E' 属于 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1]$ 且 $E' \subset E$. 由于 $E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])^\circ)$，我们得到 $x_{i_r,\ c_r} \in E'$. 鉴于注记 3.6(b)，我们有 $E' \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])^\circ)$。现在，事实 $E' \subset U \cup \{x_{i_r,c_r}\}$ 导致矛盾。

根据上述两种情况，我们得到 $U \cup \{x_{j,f}\} \in \mathcal{D}$. 由于 $i_r \neq j$，因此我们得出 $U \cup \{x_{j,f}\} \in \mathrm{del}_{\mathcal{D}}(x_{i_r,\ c_r})$。所以，$x_{i_r,\ c_r}$ 是 $(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])^\circ$. 的剥离顶点。这就证明了该定理。□

设 Γ 是顶点集 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 上的单纯形，并且 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma^{(2)})$。然后，正如定理 4.2 的证明中所见，$x_{1,\ 1}$ 是 $\mathcal{H}(2)$ 的剥离顶点。容易看出，$x_{1,\ 2}$ 不是 $\mathcal{H}(2) \setminus x_{1,\ 1}$ 的剥离顶点，但超图 $\mathcal{H}(2) \setminus (x_{1,\ 1},\ x_{1,\ 2})$ 和 $(\mathcal{H}(2) \setminus x_{1,\ 1})/x_{1,\ 2}$是顶点可分解的。这促使我们证明下面这个有用的结果。

定理 4.3. 设 Γ 是顶点集 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的单纯形，且 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma^{(s)})$，其中 $s \in [n-1]$. 。假设 $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ 且 $\nu \in [\ell - 1]$. 。那么超图 $\mathcal{H}(\ell)/x_{1,\ 1}$，$(\mathcal{H}(\ell) \setminus (x_{1,\ 1},\ \ldots,\ x_{1,\ \nu}))/x_{1,\ \nu+1}$ 以及 $\mathcal{H}(\ell) \setminus (x_{1,\ 1},\ \ldots,\ x_{1,\ \ell})$ 都是顶点可分解的。

证明。设 Γ' 是顶点集 $\{x_2, \ldots, x_n\}$ 上的单纯形，$\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\Gamma'^{(s-1)})$ 且 $\mathcal{H}'' = \mathcal{H}(\Gamma'^{(s)})$。那么 $(\mathcal{H}(\ell)/x_1,\ 1)^\circ = (\mathcal{H}'(\ell))^\circ$ 以及 $(\mathcal{H}(\ell) \setminus (x_1,\ 1,\ \ldots,\ x_1,\ \ell))^\circ \simeq (\mathcal{H}''(\ell))^\circ$. 。由定理 4.2 可知，超图 $\mathcal{H}(\ell)/x_1,\ 1$ 和 $\mathcal{H}(\ell) \setminus (x_1,\ 1,\ \ldots,\ x_1,\ \ell)$ 是顶点可分解的。现在，我们证明 $(\mathcal{H}(\ell) \setminus (x_1,\ 1,\ \ldots,\ x_1,\ \nu))/x_1,\ \nu+1$ 是一个顶点可分解超图。设 $\Gamma^{(s)} = \langle F_1,\ \ldots,\ F_t \rangle$ 和 $(\ell_1,\ \ldots,\ \ell_t) \in \mathbb{N}^t_{>0}$ 是一个有序元组，满足对所有 $k \in [t]$. 均有 $\ell_k = \ell$。假设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个无限字符串，且对于 $r \in [\nu]$ 有 $\mathcal{P}_r = D$，并且 $\mathcal{P}_{\nu+1} = L$ 和 $\mathcal{S} \in \mathcal{C}(\mathcal{P},\ \nu+1)$。我们递归地定义一个序列 $(\boldsymbol{x}(\mathcal{S},\ p))_{p=1}^{\infty}$，其中 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S},\ p)$ 是 $\mathcal{H}(\ell)$ 中满足关于 $\mathcal{S}$ 的性质 $\mathfrak{P}$ 的顶点有限序列，具体如下：对于 $p = 1$，定义

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, 1) = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,\nu}, x_{1,\nu+1}).$$

现在，设 $p \geq 1$ 为满足相对于 $\mathcal{S}$ 的性质 $\mathfrak{P}$ 的整数和序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$。如果 $V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p);\ \nu+p])^\circ) \neq \emptyset$，则我们将 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)$ 定义为

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)_q = \begin{cases} \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)_q & \text{if } q \in [\nu + p]; \\ \min\left(V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p); \nu + p])^\circ), \prec_s\right) & \text{if } q = \nu + p + 1. \end{cases}$$

另一方面，如果 $V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p); \nu + p])^\circ) = \emptyset$，则对于所有 $p' > p.$，我们将 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p')$ 定义为 $= \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$。我们证明 $x(\mathcal{S}, p+1)$ 满足相对于 $\mathcal{S}.$ 的性质 $\mathfrak{P}$。为此，设 $\delta, \epsilon \in [\nu + p + 1]$，其中 $\delta < \epsilon$ 且 $\mathcal{S}_\delta = \mathcal{S}_\epsilon = L.$。如果 $x(\mathcal{S}, p+1) = x(\mathcal{S}, p)$，或 $\epsilon < \nu + p + 1$，则结论成立。现在，设 $x(\mathcal{S}, p+1) \neq x(\mathcal{S}, p)$ 且 $\epsilon = \nu + p + 1.$。如果 $x(\mathcal{S}, p+1)_\epsilon = x_{j,f}$，则根据推论 3.8，可得 $x_j \notin A[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p); \nu + p]$. 因此，$x(\mathcal{S}, p+1)$ 满足相对于 $\mathcal{S}.$ 的性质 $\mathfrak{P}$

让 $\gamma(\mathcal{S})$ 为满足 $V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, \gamma(\mathcal{S}));\ \nu + \gamma(\mathcal{S})])^\circ)$ 的最小整数 $= \emptyset$. 现在，我们设定

$$\alpha(\mathcal{S}) = \nu + \gamma(\mathcal{S}),$$

and

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}) = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, \gamma(\mathcal{S})).$$

序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 有 $\alpha(\mathcal{S})$ 项，并且它关于 $\mathcal{S}$. 满足性质 $\mathfrak{P}$。注意，$\alpha(\mathcal{S}) \geq \nu+1$ 且 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \nu+1] = (\mathcal{H}(\ell) \setminus (x_1, 1, \ldots, x_{1,\nu}))/x_{1,\nu+1}$。现在，利用定理 4.2 的证明中给出的类似论证，我们观察到序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 满足引理 3.5 的假设，因此 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r]$ 对所有 $r \geq \nu+1$. 都是顶点可分解超图。特别地，$(\mathcal{H}(\ell) \setminus (x_1, 1, \ldots, x_{1,\nu}))/x_{1,\nu+1}$ 是顶点可分解超图。□

现在，我们为本节其余部分确定一些记号。

设定 4.4。令 $\Delta = \langle F_1, \ldots, F_s \rangle$ 为顶点集 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的任意单纯复形，且 W 为 Δ 的一个圈覆盖。不失一般性，假设 $W = \{x_1, \ldots, x_m\}$.令

$$\bar{\Delta} = \Delta(\Gamma(x_1), \ldots, \Gamma(x_m))$$

通过对 Δ 在顶点 x_i 处附加非纯骨架复形 $\Gamma(x_i)$（对所有 $i \in [m].$）得到的单纯复形。对于每个 $i \in [m]$，令

$$\Gamma(x_i) = \Gamma_{i,1}^{(s_{i,1})} \cup \cdots \cup \Gamma_{i,\eta_i}^{(s_{i,\eta_i})},$$

其中 $\Gamma_{i,\ j}$ 是一个单纯形，且 $s_{i,\ j} \in [$维$\Gamma_{i,\ j}]$. 由于每个 $\Gamma(x_i)$ 都是非纯骨架复形，因此存在 $j \in [\eta_i]$ 使得 $s_{i,\ j} =$ 维$\Gamma_{i,\ j}$. 不失一般性，我们可以假设对于每个 $i \in [m]$，$s_{i,\ 1} =$ 维$\Gamma_{i,\ 1}$。此外，对于每个 $i \in [m]$，令

$$\Gamma_{i,1} = \langle F_{s+i} = \{x_i, x_{n_{i-1}+1}, \ldots, x_{n_i}\} \rangle$$

与 $n = n_0 < n_1 < \cdots < n_m.$ 一起，我们可以写成

$$\bar{\Delta} = \langle F_1, \ldots, F_s, F_{s+1}, \ldots, F_{s+m}, \ldots, F_t \rangle,$$

其中，对于每个 $k \geq s+m+1$，F_k 是某个 $i \in [m].$的 $\Gamma(x_i)$ 的一个面

令 $\Upsilon_i = \{k \in [t] :$ 对于 $i \in [m].$， $x_i \in F_k\}$。我们称一个元组（ℓ_1，.....，ℓ_t）$\in \mathbb{N}_{>0}^t$ 满足$^-$条件（$\star$），如果对于每个 $i \in [m]$，$\ell_{s+i} \geq \ell_k$ 对所有 $k \in \Upsilon_i$. 均成立。现在，设 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta)$，且（$\ell_1$，.....，$\ell_t$）$\in \mathbb{N}_{>0}^t$ 满足条件（$\star$）。对于 $\mathcal{C}$中的每个无限字符串 $\mathcal{S}$，我们定义一个由 $\mathcal{H}(\ell_1$，.....，$\ell_t)$ 中顶点组成的有限序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$。为此，我们定义一个序列 $(\boldsymbol{x}(\mathcal{S},\ p))_{p=1}^{\infty}$，其中 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S},\ p)$ 是 $\mathcal{H}(\ell_1$，.....，$\ell_t)$ 中顶点组成的有限序列，并递归定义如下：对于 $p=1$，定义$\boldsymbol{x}(\mathcal{S},\ 1) = (x_1,\ 1)$。现在，设 $p \geq 1$ 为一个整数，且序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S},\ p)$ 已定义。考虑集合

$$V[\mathcal{S}; p] = \{x_{i,c} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p); p])^{\circ}) : x_i \in W\}.$$

如果 $V[\mathcal{S};\ p] \neq \emptyset$，那么我们将 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)$ 定义为

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)_q \ = \ \begin{cases} \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)_q & \text{if } q \in [p]; \\ \min\left(V[\mathcal{S}; p], \prec_v\right) & \text{if } q = p+1. \end{cases}$$

另一方面，如果 $V[\mathcal{S};\ p] = \emptyset$，那么对于所有 $p' > p.$，我们定义 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p') = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$。令 $\alpha(\mathcal{S})$ 为满足 $V[\mathcal{S}\ ;\ \alpha(\mathcal{S})] = \emptyset.$ 的最小整数。我们定义

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}) = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, \alpha(\mathcal{S})).$$

注意，$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$ 对每个 $p \in [\alpha(\mathcal{S})].$ 都有 p 项。因此，特别地，$\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 有 $\alpha(\mathcal{S})$ 项。对于每个 $r \geq 0$，记 $A_r = A[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r]$ 以及 $B_r = B[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r].$ 此外，如果 $r \in \mathbb{N}$ 且$k \in [t]$，则设 $\ell_{k,\ r} =$ max $\{0, \ell_k - d_{k,r}\}$，其中

$$d_{k,r} = -|F_k \cap A_r| + \sum_{\substack{x_{i_p} \in F_k \cap A_r, \\ x_{i_p, c_p} = \boldsymbol{x}_p}} c_p.$$

注 4.5。在设定 4.4 的记号下,

(a) 设 $k \in [t]$. 那么，要么是 $F_k \subset V$，要么对于某个 $F_k \cap V \subset \{x_i\}$ $i \in [m]$. 此外， if

$$F_k \cap \{x_{n_{i-1}+1}, \ldots, x_{n_i}\} \neq \emptyset$$

对于某个 $i \in [m]$，则 $k = s + i$.

(b) 如果 $r \geq \alpha(\mathcal{S})$，那么 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, r) = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, \alpha(\mathcal{S}))$ 且 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, r); r] = \mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, \alpha(\mathcal{S}))$; $\alpha(\mathcal{S})]$.因此，我们得到 $V[\mathcal{S}; r] = V[\mathcal{S}; \alpha(\mathcal{S})] = \emptyset$.

(c) 我们通过对 p. 使用归纳法，证明序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$ 对所有 $p \geq 1$ 都满足关于 $\mathcal{S}$ 的性质 $\mathfrak{P}$。当 $p = 1$. 时，结论成立。现在，设 $p \geq 1$ ，且序列$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$ 满足关于 $\mathcal{S}$. 的性质 $\mathfrak{P}$。假设 δ, $\epsilon \in [p+1]$，其中 $\delta < \epsilon$ 且 $\mathcal{S}_\delta = \mathcal{S}_\epsilon = L$.。如果 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1) = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$，或者 $\epsilon < p+1$，那么根据归纳假设，$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)$ 满足关于 $\mathcal{S}$. 的性质 $\mathfrak{P}$。现在，设 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1) \neq \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$ 且 $\epsilon = p+1$.。那么

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)_\epsilon = \min(V[\mathcal{S}; p], \prec_v).$$

如果 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)_\epsilon = x_{j,\ f}$，那么根据推论 3.8 可得 $x_j \notin A[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p)$; $p]$.因此， $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}, p+1)$ 满足关于 $\mathcal{S}$. 的性质 $\mathfrak{P}$。特别地， $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 满足关于 $\mathcal{S}$.的性质 $\mathfrak{P}$

(d) 令 $0 \leq p' < \alpha(\mathcal{S})$ 和 $\mathcal{S}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}, p')$。若 $\alpha(\mathcal{S}') \leq p'$，则 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}', \alpha(\mathcal{S}')) = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, \alpha(\mathcal{S}'))$，因此

$$\mathcal{H}[\mathcal{S}', \boldsymbol{x}(\mathcal{S}', \alpha(\mathcal{S}')); \alpha(\mathcal{S}')] = \mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, \alpha(\mathcal{S}')); \alpha(\mathcal{S}')].$$

现在，事实 $V[\mathcal{S}'; \alpha(\mathcal{S}')] = \emptyset$ 意味着 $\alpha(\mathcal{S}') \geq \alpha(\mathcal{S}) > p'$，这就产生了矛盾。因此，对于所有 $\mathcal{S}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}, p')$，都有$p' < \alpha(\mathcal{S}')$。此外，对于所有 $r \in [p'+1]$.，我们有 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})_r = \boldsymbol{x}(\mathcal{S}')_r$。

(e) 令 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}) = (x_{i_q,\ c_q})_{q=1}^{\alpha(\mathcal{S})}$. 则 $c_q = \min\{c : x_{i_q,\ c} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$; $q-1])^\circ)\}$ 以及 $i_q = \min\{i : x_i \in W$, $x_{i,\ c} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$; $q-1])^\circ)$, 其中 $c \geq 1\}$. 此外，对所有 $q \in [\alpha(\mathcal{S})]$, 均有 $x_{i_q} \in W$, 从而 A_q, 对所有 $q \geq 1$.均有 $B_q \subset W$

引理 4.6. 采用设定 4.4 的记号，令 $\boldsymbol{x} = (x_{i_q,\ c_q})_{q=1}^{\alpha(\mathcal{S})}$ 以及 $I = \{i_r \in [m] : r \in [\alpha(\mathcal{S})]\}$. 此外，对于 $i \in I$，令 $\mu_i = \min C_i$和 $\nu_i + 1 = \max C_i$，其中

$$C_i = \{c : x_{i,c} = x_{i_r, c_r} \text{ for some } r \in [\alpha]\}.$$

(1) 对每个 $\mu_i \leq c \leq \nu_i + 1$, $c \in C_i$.(2) 如果 $x_{i,\ \mu_i} = x_{i_r,\ c_r}$ 并且 $\mu_i < \nu_i + 1$,

则对所有 $r \leq q \leq r + \nu_i - \mu_i$.均有 $\mathcal{S}_q = D$

证明。（1）如果 $\mu_i = \nu_i + 1$，那么我们就完成了。因此，我们假设 $\mu_i < \nu_i + 1$.。注意 $\mu_i \in C_i$.。假设 $\mu_i < c \leq \nu_i + 1$ 且 $c - 1 \in C_i$.。选取 $r \in [\alpha]$ 使得 $x_{i,c-1} = x_{i_r, c_r}$.。只需证明 $x_{i,c} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$; $r])^\circ)$。对于满足 $\mu_i < c'$ 的 $c' \in C_i$，令 $x_{i,c'} = x_{i_{r'}, c_{r'}}$.。于是我们注意到 $r < r'$.。由于

$$V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r + \nu_i - \mu_i])^\circ) \subset V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r])^\circ),$$

我们得到 $x_{i,\nu_i+1} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$; $r])^\circ)$。令 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\} \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$; $r])^\circ)$ 满足 $x_{i,\nu_i+1} \in E$.。根据定理 3.7，存在 $k \in [t]$ 使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\} = F_k \setminus A_r$，且 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_a) \in [\ell_k]^a$，其中

$$f_q > c_p \text{ if } x_{j_q} = x_{i_p} \in B_r \setminus A_r \text{ and } |\mathbf{f}| \leq \ell_{k,r} + a - 1.$$

假设 $x_{i,\ \nu_i+1} = x_{j_1,\ f_1}$. 则 $i = j_1$ 且 $\nu_i + 1 = f_1$. 考虑集合

$$F = \{x_{j_1,c}, x_{j_2,f_2}, \ldots, x_{j_a,f_a}\}.$$

设 $x_{j_1} = x_{i_p} \in B_r \setminus A_r$. 若 $p = r$，则 $c_p = c_r = c - 1$，这意味着 $c > c_p$. 另一方面，若 $p < r$，则 $x_{j_1} = x_{i_p} \in B_{r-1} \setminus A_{r-1}$. 由于 $x_{i_r,\ c_r} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r])^\circ)$，根据推论 3.8可知 $c > c - 1 > c_p$. 现在，事实 $|\mathbf{f}|-f_1+c \leq |\mathbf{f}| \leq \ell_k,\ _r + a - 1$意味着 F在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r].)$ 中是可构造的再次利用定理 3.7，存在一条边 $F' \in \mathcal{E}(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r])$，使得 $F' \subset F$. 由于 F'，$E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r])$，我们得到 $F' \not\subset E$，从而 $x_{i,\ c} \in F'$. 进一步地，若 $F' = \{x_{i,c}\}$，则利用定理 3.7，存在 $k' \in [t]$使得 $\{x_i\} = F_{k'} \setminus A_r$ 且 $c \in [\ell_{k',r}]$. 此外，由于 $x_{i,\ _{\nu_i+1}} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r])^\circ)$，根据推论 3.8，我们看到 $x_i \notin A_r$. 因此，$A_r = A_{r-1}$，从而 $\ell_{k'},\ _r = \ell_{k'},\ _{r-1}$. 这意味着 $\{x_{i,c-1}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r-1].$ 中是可构造的因此，根据定理 3.7，我们得到 $\{x_{i,c-1}\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])$。这意味着 $x_{i,\ c-1} \notin V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])^\circ)$，矛盾。因此，我们得到 $\{x_{i,c}\} \subsetneq F'$，这意味着 $x_{i,\ c} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r])^\circ)$。

(2) 令 $r \leq q \leq r + \nu_i - \mu_i$. 利用第 (1) 部分，对于每个 $r \leq p \leq r + \nu_i - \mu_i + 1$，我们有 $i_p = i$.现在，由于 $x_{i_{q+1},\ c_{q+1}} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); q])^\circ)$，根据推论 3.8 可得 $x_{i_{q+1}} \notin A_q$，即 $x_q \notin A_q$. 这意味着 $\mathcal{S}_q = D$.

□

引理 4.7. 采用设定 4.4 的记号，令 $r \geq \alpha(\mathcal{S})$，且 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\}$ 是 $(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r])^\circ$.中的一条边。则存在 $k \in [t]$ 使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\} = F_k \setminus W$，并且 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_a) \in [\ell_k]^a$ 满足 $|\mathbf{f}| \leq \ell_{k,\ _r} + a - 1$.

证明。设 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}) = (x_{i_q,\ c_q})_{q=1}^{\alpha(\mathcal{S})}$. 根据定理 3.7，存在 $k \in [t]$ 使得$\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\} = F_k \setminus A_r$ 且 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_a) \in [\ell_k]^a$ 满足

$$f_q > c_p \text{ if } x_{j_q} = x_{i_p} \in B_r \setminus A_r \text{ and } |\mathbf{f}| \leq \ell_{k,r} + a - 1.$$

此外，由注记 4.5(b)，有 $V[\mathcal{S};\ r] = \emptyset$. 由于 $x_{j_q,\ f_q} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}, r); r])^\circ)$ 对所有$q \in [a]$成立，因此可得 $x_{j_q} \notin W$ 对所有 $q \in [a].$ 成立。现在，注记 4.5(e) 表明 $F_k \setminus W \subset F_k \setminus A_r$，从而 $F_k \setminus W = F_k \setminus A_r$ 且 $(F_k \setminus A_r) \cap B_r = \emptyset$. 这就证明了该引理。□

引理 4.8. 按照设定 4.4 中的记号，设 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}) = (x_{i_q,\ c_q})_{q=1}^{\alpha(\mathcal{S})}$，$r \in [\alpha(\mathcal{S})]$, 和 $i = i_r$。则

$$E = \{x_{i,c_r}, x_{n_{i-1}+1,1}, \ldots, x_{n_i,1}\} \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r-1])^\circ).$$

证明。由于 $(\ell_1, \ldots, \ell_t) \in \mathbb{N}_{>0}^t$ 满足条件 $(\star)$，因此

$$\ell_{s+i} = \max\{c : x_{i,c} \in V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t))\},$$

因此 $c_r \leq \ell_{s+i}$.。此外，事实 $x_{i,\ c_r} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])^\circ)$ 以及推论 3.8 表明 $x_i \notin A_{r-1}$.。注意 $\{x_{n_{i-1}+1}, \ldots, x_{n_i}\} \cap W = \emptyset$.。因此，应用注记 4.5(e)，可得 $F_{s+i} \cap A_{r-1} = \emptyset$ 和 $F_{s+i} \cap B_{r-1} \subset \{x_i\}$（回想 $F_{s+i} = \{x_i, x_{n_{i-1}+1}, \ldots, x_{n_i}\}$）。于是，$F_{s+i} = F_{s+i} \setminus A_{r-1}$ 和 $\ell_{s+i,\ r-1} = \ell_{s+i}$.。此外，若 $a = n_i - n_{i-1} + 1$，则 $c_r + a - 1 \leq \ell_{s+i,\ r-1} + a - 1$.。注意，对所有 $j \in \{n_{i-1} + 1, \ldots, n_i\}.$，$x_j \notin B_{r-1} \setminus A_{r-1}$。因此，由注记 3.6(a) 可知，$E$在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r-1].$ 中是可构造的。利用定理 3.7，存在一条边 $E' = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])$，满足 $E' \subset E$，其中

$$\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\} = F_k \setminus A_{r-1}$$

且 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_a) \in [\ell_k]^a$ 其中 $|\mathbf{f}| \leq \ell_{k,\ r-1} + a - 1$ 对于某个 $k \in [t].$ 为得到该结论，只需证明 $k = s+i$. 反之，假设 $k \neq s+i$. 那么，根据注记 4.5(a)，我们有

$$(F_k \setminus A_{r-1}) \cap \{x_{n_{i-1}+1}, \ldots, x_{n_i}\} = \emptyset.$$

事实 $E' \subset E$ 意味着 $E' = \{x_{i,c_r}\}$. 这与注 3.6(b 矛盾). □

引理 4.9. 采用设定 4.4 中的记号，令 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S}) = (x_{i_q,\ c_q})_{q=1}^{\alpha(\mathcal{S})}$ 且 $r \in [\alpha(\mathcal{S})]$. 则$x_{i_r,\ c_r}$是超图 $(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r-1])^\circ$. 的剥离顶点

证明。令 $i = i_r$和 $U \in$link$_{\mathcal{D}}(x_{i_r,\ c_r})$，其中 $\mathcal{D} = \Delta((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])^\circ)$。由于 $U \cup \{x_{i_r,c_r}\} \in \mathcal{D}$，由引理 4.8 可知，存在 $j \in \{n_{i-1}+1, \ldots, n_i\}$ 使得

$$\{x_{j,1}, \ldots, x_{j,\ell_{s+i}}\} \cap V(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r-1])^\circ) \not\subset U.$$

令 f为满足 $x_{j,\ f} \in V(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])^\circ) \setminus U.$ 的最大正整数。我们断言 $U \cup \{x_{j,f}\} \in \mathcal{D}.$。假设存在一条边 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\} \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ r-1])^\circ)$，满足 $E \subset U \cup \{x_{j,f}\}.$。根据定理 3.7，存在一个 $k \in [t]$ 使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\} = F_k \setminus A_{r-1}$，且 $\mathbf{f} = (f_1,\ \ldots,\ f_a) \in [\ell_k]^a$，其中

$$f_q > c_p \text{ if } x_{j_q} = x_{i_p} \in B_{r-1} \setminus A_{r-1} \text{ and } |\mathbf{f}| \leq \ell_{k,r-1} + a - 1.$$

由于 $U \in \mathcal{D}$，可得 $x_{j,\ f} \in E.$ 这意味着 $(F_k \setminus A_{r-1}) \cap \{x_{n_{i-1}+1}, \ldots, x_{n_i}\} \neq \emptyset$.利用注记 4.5(a)，我们得到 $k = s + i.$ 此外，根据推论 3.8，有 $x_i \notin A_{r-1}.$ 由于

$$\{x_{n_{i-1}+1}, \ldots, x_{n_i}\} \cap W = \emptyset,$$

根据注记 4.5(e)，可知 $F_k \setminus A_{r-1} = F_{s+i}$ 和 $F_{s+i} \cap B_{r-1} \subset \{x_i\}.$ 这意味着 $x_i \in F_k \setminus A_{r-1}.$ 不妨设 $x_j = x_{j_1}$ 和 $x_i = x_{j_2}.$ 那么$f = f_1.$由于 $x_{j_2,\ f_2} \in E \setminus \{x_{j,f}\} \subset U$ 且 $U \in$链接$_{\mathcal{D}}(x_{i_r,\ c_r})$，根据注记 4.5(e)可得 $f_2 > c_r \geq 1.$ 再次，由于 $|\mathbf{f}| \leq \ell_{k,\ r-1} + a - 1$ 且 $\ell_{k,\ r-1} \leq \ell_k = \ell_{s+i}$，可得$f < \ell_{s+i}$，因此集合

$$F = \{x_{j_1,f_1+1}, x_{j_2,c_r}, \ldots, x_{j_a,f_a}\} \subset V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t)).$$

注意 $(f_1 + 1) + c_r + \cdots + f_a \leq \ell_{k,\ r-1} + a - 1.$ 因此，由事实 $F_{s+i} \cap B_{r-1} \subset \{x_i\}$和注记 3.6(a)，$F$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中是可构造的；$r-1].$ 根据定理 3.7，存在一条边 $F' = \{x_{j'_1,f'_1}, \ldots, x_{j'_b,f'_b}\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r-1])$，使得 $F' \subset F$，其中 $\{x_{j'_1}, \ldots, x_{j'_b}\} = F_{k'} \setminus A_{r-1}$ 并且

$$\mathbf{f}' = (f'_1, \ldots, f'_b) \in [\ell_{k'}]^b \text{ with } |\mathbf{f}'| \leq \ell_{k',r-1} + b - 1$$

对于某个 $k' \in [t].$ 我们断言 $k' = s + i.$ 反过来，假设 $k' \neq s + i.$ 那么，根据注记 4.5(a)，我们有

$$(F_{k'} \setminus A_{r-1}) \cap \{x_{n_{i-1}+1}, \ldots, x_{n_i}\} = \emptyset.$$

由于 $F_{k'} \setminus A_{r-1} \subset F_{s+i}$，可知 $F_{k'} \setminus A_{r-1} = \{x_{j_2}\}.$因此 $F' = \{x_{i,c_r}\}.$这与注记 3.6(b) 矛盾。因此，我们得到 $k' = s + i$，即 $F' = F.$ 现在，由 f 的极大性，我们有 $F \subset U \cup \{x_{i_r,c_r}\}.$这与以下事实矛盾：$U \notin$链接$_{\mathcal{D}}(x_{i_r,\ c_r})$。由于 $x_j \neq x_i$，可知 $U \cup \{x_{j,f}\} \in$删$_{\mathcal{D}}(x_{i_r,\ c_r})$。引理得证。□

注记 4.10。采用设定 4.4 中的记号，令 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\} \subset V(\mathcal{H}(\ell_1, \ldots, \ell_t))$。˜于是，我们将 E记作集合 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\} \subset V(\mathcal{H})$。回顾一下，$\Delta$ 是定义在顶点集 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的单纯复形，而 $W = \{x_1, \ldots, x_m\}$ 是 $\Delta.$ 的圈覆盖。为简单起见，令 $\alpha = \alpha(\mathcal{S})$。考虑集合

$$\mathcal{X} = \{\tilde{E} : E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ)\}.$$

Let $\mathcal{X}_{\max}$ 表示按包含关系而言，$\mathcal{X}$ 的所有极大元组成的集合 .

(a) 首先假设 $\{X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{\max} : \ X \subset V\} \neq \emptyset$ 且 $\{X_1, \ldots, X_\rho\} = \{X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{\max} : \ X \subset V\}$.。令 $Y = \{y_1, \ldots, y_\rho\}$ 和 $Z = Z$.。考虑顶点集为 $V' = (V \setminus W) \cup Y \cup Z$ 的单纯复形 $\mathcal{T}$，其定义如下:

$$\mathcal{T} = \langle X : X \in \mathcal{X}_{\max}, X \subset V \rangle \cup \langle X_l \cup \{y_l\} : l \in [\rho] \rangle \cup \langle \{y_l, z_l\} : l \in [\rho] \rangle.$$

设 $T_1, \ldots, T_\tau$ 是 $\mathcal{T}$ 的所有极大面，使得对所有 $h \in [\rho]$., $T_h = \{y_h, z_h\}$ 成立。于是，对于每个 $h \in [\rho]$, T_h 都是 $\mathcal{T}$. 的好叶。

(i) 我们证明 $\mathcal{T}$ 是一个森林。假设 $\mathcal{T}$ 有一个特殊环

$$w_1, T_{h_1}, w_2, \ldots, w_q, T_{h_q}, w_{q+1} = w_1$$

其中 $q \geq 3$.。由于对于每个 $h \in [\rho]$, T_h 都是 $\mathcal{T}$ 的好叶，因此对所有 $p \in [q]$., $h_p \geq \rho + 1$ 成立。于是, $\{w_1, \ldots, w_q\} \cap Z = \emptyset$.。我们声称 $\{w_1, \ldots, w_q\} \cap Y = \emptyset$.。反之，假设 $\{w_1, \ldots, w_q\} \cap Y \neq \emptyset$.。不失一般性，我们进一步假设 $y_1 \in \{w_1, \ldots, w_q\}$.。于是，对于某个 $p \neq p'$., $y_1 \in T_{h_p} \cap T_{h_{p'}}$。因此，我们必有 $T_{h_p} = X_l \cup \{y_l\}$ 且对于某个 l, $T_{h_{p'}} = X_{l'} \cup \{y_{l'}\}$, 其中 $l' \in [\rho]$ 与 $l \neq l'$.。这意味着 $y_1 \in X_l$ 或 $y_1 \in X_{l'}$, 矛盾。因此，我们得到

$$\{w_1, \ldots, w_q\} \cap (Y \cup Z) = \emptyset.$$

设 $p \in [q]$。那么，要么 $T_{h_p} \in \mathcal{X}_{\max}$，要么对于某个 $l \in [\rho]$. 有 $T_{h_p} = X_l \cup \{y_l\}$。因此，对于某个 $E \in \mathcal{E}$, $T_{h_p} \setminus Y = E$ （$(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ$）。利用引理 4.7，我们得到

$$T_{h_p} \setminus Y = F_{k_p} \setminus W$$

对于某个 $k_p \in [s]$.。现在， $w_1, F_{k_1}, w_2, \ldots, w_q, F_{k_q}, w_{q+1} = w_1$ 是 Δ 中的一个特殊环，且 $\{w_1, \ldots, w_q\} \cap W = \emptyset$.。这与 W 是 Δ. 的圈覆盖这一事实矛盾。因此，$\mathcal{T}$ 不含长度为 ≥ 3 的特殊环，由定理 2.4 可知 $\mathcal{T}$ 是一片森林，进而 $\mathcal{T}$ 存在一个好叶序。不失一般性，我们可以假设对于所有 $h \geq \rho + 1$., T_h 是 $\mathcal{T}$ 的子集 $\langle T_h, \ldots, T_\tau \rangle$ 中的一个好叶。

(ii) 对于 $h \in [\rho]$, 令 $\ell'_h = 1$. 现在，假设 $h \geq \rho + 1$. 那么，对于某个$E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ)$, 有 $T_h \setminus Y = E$。根据引理 4.7, $T_h \setminus Y = F_k \setminus W$，其中某个 $k \in [s]$.。因此该集合

$$U_h = \{\ell_{k,\alpha} : k \in [s], T_h \setminus Y = F_k \setminus W\}$$

非空。选取 $k_h \in [s]$ 使得 $\ell_{k_h, \ \alpha} = \max U_h$. 此外，假设

$$T_h \setminus Y = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\}.$$

对于 $p \in [a]$, 我们定义

$$c'_p = \min\{c : x_{j_p,c} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ)\} - 1.$$

由于 $x_{j_p, \ c} \in E$，其中某个 $c \geq 1$, c'_p 定义良好。现在，令 $\ell'_h = \max\{0, \ell_{k_h,\alpha} - d_h\}$，其中 $d_h = \sum_{p \in [a]} c'_p$.。现在，如果 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_a) \in [\ell_{k_h}]^a$ 且 $\mathbf{f}' = (f_1 - c'_1, \ldots, f_a - c'_a) \in [\ell'_h]^a$, 那么

$$|\mathbf{f}| \leq \ell_{k_h,\alpha} + a - 1 \text{ if and only if } |\mathbf{f}'| \leq \ell'_h + a - 1.$$

(iii) 设 $\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\mathcal{T})$。那么 $\mathcal{E}(\mathcal{H}') = \{T_1, \ldots, T_\tau\}$. 此外，设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个无限字符串，且对所有 $r \in [\rho]$ 都有 $\mathcal{P}_r = L$，而 $\boldsymbol{y} = (y_{1,1}, \ldots, y_{\rho,1})$ 是 $V(\mathcal{H}'(\ell'_1, \ldots, \ell'_\tau))$ 中的一个顶点有限序列。那么，我们有

$$\mathcal{H}'[\mathcal{P}, \boldsymbol{y}; \rho] = \mathcal{H}'(\ell'_1, \ldots, \ell'_\tau) / \{y_{1,1}, \ldots, y_{\rho,1}\},$$

其中 $\mathcal{H}'[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho]$ 是由字符串 $\mathcal{P}$ 和序列 $\boldsymbol{y}$. 确定的第 ρ 个超图。此外，我们有 $A[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho]=Y$ 和 $B[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho]=\emptyset$，其中 $A[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho]$ 是由字符串 $\mathcal{P}$ 和序列 $\boldsymbol{y}$ 确定的收缩的第 ρ 个顶点集，而 $B[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho]$ 是由字符串 $\mathcal{P}$ 和序列 $\boldsymbol{y}$. 确定的删除的第 ρ 个顶点集。设 $F=\{x_{j_1,f_1'},\ldots,x_{j_a,f_a'}\}$，其中 $\{x_{j_1},\ldots,x_{j_a}\}\subset V.$。那么， F 在 $\mathcal{H}'[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho]$ 中可构造，当且仅当存在 $h\geq\rho+1$ 使得

$$\{x_{j_1},\ldots,x_{j_a}\}=T_h\setminus Y$$

以及 $\mathbf{f}'=(f_1',\ldots,f_a')\in[\ell_h']^a$ 与 $|\mathbf{f}'|\leq\ell_h'+a-1.$

(b) 假设 S uppose that $\{X\in\mathcal{X}\setminus\mathcal{X}_{\max}\colon\ X\subset V\}=\emptyset.$ 设 $\mathcal{K}=\langle X\colon\ X\in\mathcal{X},X\subset V\rangle$.

(i) 令 $K_1,\ldots,K_\sigma$ 为 $\mathcal{K}.$ 的所有极大面。按照（a）中的类似步骤，我们可以说 $\mathcal{K}$ 是一个森林。~(ii) 令 $h\in[\sigma].$。那么，对于某个 $E\in\mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ \alpha])^\circ)$，有 $K_h=E$。根据引理 4.7，存在 $k\in[s]$ 使得 $K_h=F_k\setminus W.$ 因此该集合

$$U_h'=\{\ell_{k,\alpha}:k\in[s],K_h=F_k\setminus W\}$$

i非空。选择 $k_h\in[s]$ 使得 $\ell_{k_h,\ \alpha}=$最大。现在，假设 tha t

$$K_h=\{x_{j_1}\ldots x_{j_a}\}.$$

对于 $p\in[a]$, 我们定义

$$c_p'=\min\{c:x_{j_p,c}\in V((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S});\alpha])^\circ)\}-1.$$

As in part (a), let $d_h=\sum_{p\in[a]}c_p'$ and $\ell_h'=\max\{0,\ell_{k_h,\alpha}-d_h\}$. Then

$$|\mathbf{f}|\leq\ell_{k_h,\alpha}+a-1\text{ if and only if }|\mathbf{f}'|\leq\ell_h'+a-1,$$

where $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_a)\in[\ell_{k_h}]$ and $\mathbf{f}'=(f_1-c_1',\ldots,f_a-c_a')\in[\ell_h']^a.$

以下引理对于证明定理 4.18 很有用。

引理 4.11. 使用设定 4.4 和注记 4.10(a) 中的记号，设 $E=\{x_{j_1,f_1},\ldots,x_{j_a,f_a}\}$~ 是 $(\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ \alpha])^\circ$ 中的一条边，且 $E\subset V.$。那么， $F=\{x_{j_1,f_1'},\ldots,x_{j_a,f_a'}\}$ 是 $\mathcal{H}'[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho]$ 中的一条边，其中对所有 $p\in[a].$， $f_p'=f_p-c_p'$。

~证明. 设 $E=\{x_{j_1,f_1},\ldots,x_{j_a,f_a}\}\in\mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ \alpha])^\circ)$，且 $E\subset V.$。根据引理 4.7，存在 $k\in[s]$，使得 ~ $E=F_k\setminus W$，并且 $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_a)\in[\ell_k]^a$，其中 $|\mathbf{f}|\leq\ell_{k,\ \alpha}+a-1.$。现在，

~ ~由于 $E=F_k\setminus W\in\mathcal{X}$ 和 $E\subset V$，可知 $F_k\setminus W=T_h\setminus Y$ 对某个 $h\geq\rho+1.$ 成立。注意到 $\ell_{k,\ \alpha}\in U_h$，因此 $|\mathbf{f}|\leq\ell_{k_h,\ \alpha}+a-1.$。由注记 4.10(a) 的第 (ii) 部分可知，$|\mathbf{f}'|\leq\ \ell_h'+a-1$，其中 $\mathbf{f}'=(f_1',\ldots,f_a')$。因此，利用注记 4.10(a) 的第 (iii) 部分，我们得到 $F=\{x_{j_1,f_1'},\ldots,x_{j_a,f_a'}\}$ 在 $\mathcal{H}'[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho].$ 中是可构造的。根据定理 3.7，存在一条边 $F'\in\mathcal{E}(\mathcal{H}'[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho])$，满足 $F'\subset F.$。不妨设 $F'=\{x_{j_1,f_1'},\ldots,x_{j_b,f_b'}\}$ 对某个 $b\in[a].$ 成立。由于 F' 在 $\mathcal{H}'[\mathcal{P},\boldsymbol{y};\ \rho]$ 中是可构造的，且 $E\subset V$，存在 $h'\geq\rho+1$，使得 $\{x_{j_1},\ldots,x_{j_b}\}=T_{h'}\setminus Y$，并且

$$\mathbf{e}'=(f_1',\ldots,f_b')\in[\ell_{h'}']^b\text{ with }|\mathbf{e}'|\leq\ell_{h'}'+b-1.$$

~再次，由于 $T_{h'}\setminus Y\in\mathcal{X}$，存在一条边 $E_1\in\mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ \alpha])^\circ)$，使得 $T_{h'}\setminus Y=E_1.$这意味着 $b>1.$ 利用注记 4.10(a) 的 (ii) 部分，我们得到 $T_{h'}\setminus Y=F_{k_{h'}}\setminus W$ 以及$|\mathbf{e}|\leq\ell_{k_{h'},\ \alpha}+b-1$，其中 $\mathbf{e}=(f_1,\ .....,\ f_b)$。注意到 $F_{k_{h'}}\setminus A_\alpha\subset F_{k_{h'}}\setminus W.$ 因此，利用注记 4.5(e)，我们得到 $E'=\{x_{j_1,f_1},\ldots,x_{j_b,f_b}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S},\boldsymbol{x}(\mathcal{S});\ \alpha]$ 中是可构造的，并且

因此利用定理 3.7，存在一条边 E'' 是 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha]$，满足 $E'' \subset E' \subset E$. 由于E是 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha]$ 中的一条边，我们必有 $F' = F$. □

下述引理说明，上述引理的逆命题成立。

引理 4.12. 采用设定 4.4 和注记 4.10(a) 的记号，设 $F = \{x_{j_1,f_1'}, \ldots, x_{j_a,f_a'}\}$ 是 $(\mathcal{H}'[\mathcal{P}, \boldsymbol{y}; \rho])^\circ$. 中的一条边。那么 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\}$ 是 $(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ$ 中的一条边，其中 $f_p = f_p' + c_p'$ 对所有 $p \in [a]$.成立

证明。设 $F = \{x_{j_1,f_1'}, \ldots, x_{j_a,f_a'}\} \in \mathcal{E}((\mathcal{H}'[\mathcal{P}, \boldsymbol{y}; \rho])^\circ)$。正如引理 4.11 的证明中所见，$E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中是可构造的；$\alpha]$. 因此，根据定理 3.7，存在一条边 E' 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中；$\alpha]$ 使得 $E' \subset E$. 假设 $E' = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$. 设$b = 1$. 由于 $f_1 \geq c_p' + 1$，利用事实 $x_{j_1, c_p'+1} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ)$，并由推论 3.8，我们得到 $\{x_{j_1,c_p'+1}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中是可构造的；$\alpha]$. 现在，由定理 3.7 可知$\{x_{j_1,c_p'+1}\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ$。因此，$x_{j_1,c_p'+1} \notin V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ)$，矛盾。因此，~ ~我们必须有 $b > 1$. 此外，我们有 $E' \subset E$. 根据引理 4.11，$F' = \{x_{j_1,f_1'}, \ldots, x_{j_b,f_b'}\}$ 是 $(\mathcal{H}'[\mathcal{P}, \boldsymbol{y}; \rho])^\circ$. 中的一条边。由于 $F \in \mathcal{E}(\mathcal{H}'[\mathcal{P}, \boldsymbol{y}; \rho])^\circ)$ 且 $F' \subset F$，可得 $b = a$. 这证明了 $E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ)$. □

引理 4.13. 采用设定 4.4 和注记 4.10(b)中的记号，令 $\mathcal{H}'' = \mathcal{H}(\mathcal{K})$。那么，~ $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\}$ 是 $(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ$ 中的一条边，且 $E \subset V$，当且仅当 $F = \{x_{j_1,f_1'}, \ldots, x_{j_a,f_a'}\}$ 是 $\mathcal{H}''(\ell_1', \ldots, \ell_\sigma')$中的一条边，其中 $f_p = f_p' + c_p'$对所有 $p \in [a]$.

证明。我们有 $\mathcal{E}(\mathcal{H}'') = \{K_1, \ldots, K_\sigma\}$. 令 $E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\} \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ)$ ~ ~，其中 $E \subset V$.。由引理 4.7可知，存在 $k \in [s]$ 使得 $E = F_k \setminus W$ ~且 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_a) \in [\ell_k]$，其中 $|\mathbf{f}| \leq \ell_{k,\alpha} + a - 1$.。此外，存在 $h \in [\sigma]$ 使得 $E = K_h$.。 注意到 $\ell_{k,\alpha} \in U_h'$，因此 $|\mathbf{f}'| \leq \ell_h' + a - 1$，其中 $\mathbf{f}' = (f_1 - c_1', \ldots, f_a - c_a') \in [\ell_h']^a$.。因此，$F = \{x_{j_1,f_1'}, \ldots, x_{j_a,f_a'}\}$ 是 $\mathcal{H}''(\ell_1', \ldots, \ell_\sigma')$中的一条边。

反之，设 $F = \{x_{j_1,f_1'}, \ldots, x_{j_a,f_a'}\}$ 是 $\mathcal{H}''(\ell_1', \ldots, \ell_\sigma')$ 中的一条边。根据构造 3.1，存在 $h \in [\sigma]$ 使得 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_a}\} = K_h$ 且 $\mathbf{f}' = (f_1 - c_1', \ldots, f_a - c_a') \in [\ell_h']^a$ with$|\mathbf{f}'| \leq \ell_h' + a - 1$. 现在，利用注记 4.10(b) 的第 (ii) 部分，我们得到 $K_h = F_{k_h} \setminus W = F_{k_h} \setminus A_\alpha$ 以及 $|\mathbf{f}| \leq \ell_{k_h,\alpha} + a - 1$. 另外，注意到 $(F_{k_h} \setminus A_\alpha) \cap B_\alpha = \emptyset$. 因此，$E = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_a,f_a}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中是可构造的；$\alpha]$. 于是，再由定理 3.7，存在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中的一条边 E'；$\alpha]$ 使得 $E' \subset E$. 令 $E' = \{x_{j_1,f_1}, \ldots, x_{j_b,f_b}\}$. 假设 $b = 1$. 由于 $f_1 \geq c_p' + 1$，利用以下事实 $x_{j_1,c_p'+1} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ)$ 以及推论 3.8，我们得到 $\{x_{j_1,c_p'+1}\}$ 在 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中是可构造的；$\alpha]$. 现在，由定理 3.7 可知 $\{x_{j_1,c_p'+1}\} \in \mathcal{E}(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ$。因此我们得到 $x_{j_1,c_p'+1} \notin V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ)$，矛盾。所以，~ $b > 1$. 由于 $E' \subset E$，如上所见，$\{x_{j_1,f_1'}, \ldots, x_{j_b,f_b'}\}$ 是 $\mathcal{H}''(\ell_1', \ldots, \ell_\sigma')$ 中的一条边。因此$b = a$，从而 $E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ)$. □

引理 4.14. 采用设定 4.4 和注记 4.10 中的记号，设 $\ell_k = \ell$ 对所有 $k \in [t]$~，且 $\mathcal{H}_1$是边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{H}_1) = \{E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ) : E \cap V = \emptyset\}$.的超图。则 $\mathcal{H}_1$ 是顶点可分解的。

证明。令 $\boldsymbol{x} = (x_{i_q,c_q})_{q=1}^{\alpha(\mathcal{S})}$ 和 $I = \{i_r \in [m] : r \in [\alpha(\mathcal{S})]\}$. 对于 $i \in I$，令 $\mu_i = \min C_i$ 和 $\nu_i + 1 = \max C_i$，其中 $C_i = \{c : x_{i,c} = x_{i_r,c_r}$ 对某个 $r \in [\alpha]\}$. 。根据引理 4.6，我们可以写成

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{S}) = (x_{1,\mu_1}, \ldots, x_{1,\nu_1+1}, \ldots, x_{i,\mu_i}, \ldots, x_{i,\nu_i+1}, \ldots).$$

若 $i \in I$，则 $x_{i,\mu_i} = x_{i_r,c_r}$ 对于某个 $r \in [\alpha]$. 在这种情况下，我们令 $r' = r + \nu_i - \mu_i + 1$. 接下来注意到 $x_{i,\nu_i+1} = x_{i_{r'},c_{r'}}$.

回忆一下，对于每个 $i \in [m]$, $\Gamma(x_i) = \Gamma^{(s_{i,1})}{}_{i,\,1} \cup \cdots \cup \Gamma_i^{(s_{i,\eta_i})}{}_{,\,\eta_i}$ ·对于 $i \in [m]$ 和 $j \in [\eta_i]$，令$\mathcal{H}_{ij} = \mathcal{H}(\Gamma^{(s_{i,j})}{}_{i,\,j})$，并且

$$\overline{\mathcal{H}}_{ij} = \begin{cases} (\mathcal{H}_{ij}(\ell) \setminus (x_{i,\mu_i}, \ldots, x_{i,\nu_i+1}))^\circ & \text{if } i \in I \text{ and } \mathcal{S}_{r'} = D; \\ ((\mathcal{H}_{ij}(\ell) \setminus (x_{i,\mu_i}, \ldots, x_{i,\nu_i}))/x_{i,\nu_i+1})^\circ & i \in I,\ r < r',\ \text{and } \mathcal{S}_{r'} = L; \\ (\mathcal{H}_{ij}(\ell)/x_{i,\mu_i})^\circ & \text{if } i \in I \text{ and } \mathcal{S}_r = L; \\ (\mathcal{H}_{ij}(\ell) \setminus (x_{i,1}, \ldots, x_{i,\ell}))^\circ & \text{if } i \notin I. \end{cases}$$

如果 $i \in I$，那么 $x_{i,\,1}$、……、$x_{i,\,\mu_i-1}$是 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中的孤立顶点； $r-1]$ 以及 $x_{i,\,\nu_i+2}$、……、$x_{i,\,\ell}$是 $\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 中的孤立顶点； $r']$. 因此，我们有

$$\overline{\mathcal{H}}_{ij} = \begin{cases} (\mathcal{H}_{ij}(\ell) \setminus (x_{i,1}, \ldots, x_{i,\ell}))^\circ & \text{if } i \in I \text{ and } \mathcal{S}_{r'} = D; \\ ((\mathcal{H}_{ij}(\ell) \setminus (x_{i,1}, \ldots, x_{i,\nu_i}))/x_{i,\nu_i+1})^\circ & i \in I,\ r < r',\ \text{and } \mathcal{S}_{r'} = L; \\ ((\mathcal{H}_{ij}(\ell) \setminus (x_{i,1}, \ldots, x_{i,\mu_i-1}))/x_{i,\mu_i})^\circ & \text{if } i \in I \text{ and } \mathcal{S}_r = L; \\ (\mathcal{H}_{ij}(\ell) \setminus (x_{i,1}, \ldots, x_{i,\ell}))^\circ & \text{if } i \notin I. \end{cases}$$

容易看出， $\mathcal{H}_1 = \bigsqcup_{i=1}^m \bigsqcup_{j=1}^{\eta_i} \overline{\mathcal{H}}_{ij}$. 现在，由定理 4.3 可知， $\mathcal{H}_1$ 是顶点可分解的。□

引理 4.15。在设定 4.4 和注记 4.10 的记号下，令 $\ell_k = \ell$ 对所有 $k \in [t]$.则 $(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ$ 是一个顶点可分解超图。

~~证明。令 $E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$; $\alpha])^\circ)$。我们证明，若 $E \not\subset V$，则 $E \cap V = \emptyset$.。利用~~ ~~引理 4.7，存在 $k \in [t]$ 使得 $E = F_k \setminus W$.。因此， $E \cap W = \emptyset$.。由于~~ $E \not\subset V$， ~~由注记 4.5(a)可知 $E \cap V \subset F_k \cap V \subset W$.。于是，我们得到 $E \cap V = \emptyset$.~~

现在，我们考虑以下两种情况。

情况 1。当 $\{X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{\max} :\ X \subset V\} \neq \emptyset$. 在这种情况下，我们有 $\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\mathcal{T})$。首先，我们证明

$$(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ \simeq (\mathcal{H}'[\mathcal{P}, \boldsymbol{y}; \rho])^\circ \sqcup \mathcal{H}_1.$$

定义 $\phi :\ V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ) \to V((\mathcal{H}'[\mathcal{P}, \boldsymbol{y};\ \rho])^\circ \sqcup \mathcal{H}_1)$ 如下

$$\phi(x_{j_p,c}) = \begin{cases} x_{j_p,c-c'_p} & \text{if } x_{j_p} \in V; \\ x_{j_p,c} & \text{if } x_{j_p} \notin V, \end{cases}$$

其中 $c'_p = \min\{c : x_{j_p,c} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$; $\alpha])^\circ)\} - 1$. 如上所示，如果 $E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})$; $\alpha])^\circ)$, ~~那么~~ 要么 $E \subset V$，要么 $E \cap V = \emptyset$. 因此， ϕ 是一个定义良好的映射。鉴于引理 4.11 和 4.12， ϕ 是一个同构。

情形 2。当 $\{X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{\max} :\ X \subset V\} = \emptyset$. 在这种情形下，令 $\mathcal{H}'' = \mathcal{H}(\mathcal{K})$。我们证明

$$(\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ \simeq \mathcal{H}''(\ell'_1, \ldots, \ell'_\tau) \sqcup \mathcal{H}_1.$$

定义 $\psi :\ V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S})]; \alpha])^\circ) \to V(\overline{\mathcal{H}} \sqcup \mathcal{H}_1)$，其定义为

$$\psi(x_{j_p,c}) = \begin{cases} x_{j_p,c-c'_p} & \text{if } x_{j_p} \in V; \\ x_{j_p,c} & \text{if } x_{j_p} \notin V, \end{cases}$$

其中 $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}''(\ell'_1, \ldots, \ell'_\tau)$ 和 $c'_p = \min\{c : x_{j_p,\, c} \in V((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ)\} - 1$. 如果 $E \in \mathcal{E}((\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha])^\circ)$，那么或者 $E \subset V$，或者 $E \cap V = \emptyset$. 因此，ψ 是一个定义良好的映射。根据引理 4.13 ψ 是一个同构。

在这两种情况下，由引理 4.14 和 [3, 引理 3.20] 可知，$\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); \alpha]$ 是一个顶点可分解超图。□

引理 4.16。在设定 4.4 的记号下，令 $\ell_k = \ell$ 对所有 $k \in [t]$. 则对于所有 $r \geq 0$，$\mathcal{H}[\mathcal{S}, \boldsymbol{x}(\mathcal{S}); r]$ 是一个顶点可分解超图。特别地，$\mathcal{H}(\ell)$ 是一个顶点可分解超图。

证明。为简便起见，记 $\alpha = \alpha(\mathcal{S})$。考虑在设定 4.4 中得到的序列 $\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$。鉴于注记 4.5(d) 以及引理 4.9、4.15，$\boldsymbol{x}(\mathcal{S})$ 满足引理 3.5 对于 $p = 0.$ 的假设。因此，我们得到所需结果。□

下面的例子表明，我们不能去掉元组 $(\ell_1, \ldots, \ell_t)$ 上的条件 $(\star) \in \mathbb{N}^t_{>0}$.

例 4.17. 设 Δ 是顶点集为 $V = \{x_1, \ldots, x_8\}$、极大面为 $F_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, F_2 = \{x_3, x_4, x_5\}, F_3 = \{x_5, x_6, x_7\}, F_4 = \{x_1, x_7, x_8\}$ 的单纯复形，如图 3a 所示。那么 $W = \{x_1\}$ 是 Δ. 的一个圈覆盖。设 Δ 是通过将非纯骨架复形 $\Gamma(x_1)$ 附加到 Δ 上得到的单纯复形，如图 3b 和 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta)$ 所示。由于 $x_{1,\,1}$ 是 $\mathcal{H}(2, 1, 1, 2, 1)$ 的唯一剥离顶点，而 $\mathcal{H}(2, 1, 1, , 2, 1) \setminus x_{1,\,1}$ 没有剥离顶点，因此超图 $\mathcal{H}(2, 1, 1, 2, 1)$ 不是顶点可分解的。



(A) 单纯复形 Δ。　　(B) 单纯复形 $\bar{\Delta}$.

FIGURE 3. $\mathcal{H}(\Delta)(2, 1, 1, 2, 1)$ 不是顶点可分解的。

设 Δ 是例 4.17 中的单纯复形，$W = \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$ 是 Δ 的一个顶点¯覆盖。设 Δ 是在 W 的每个顶点处附加一维¯单纯形后，由 Δ 得到的单纯复形。容易验证，$\mathcal{H}(\Delta)(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ 不是顶点可分解超图。因此，如果将圈覆盖替换为顶点覆盖，引理 4.16 就不成立。

以下定理是本文的主要结果。

¯定理 4.18. 设 Δ 为一个单纯复形，W 为 Δ 的一个圈覆盖。设 Δ 是在 W 的所有顶点处附加非纯骨架后，由 Δ 得到的单纯复形。则 $J(\bar{\Delta})^{(\ell)}$ 具有线性商，因此它是逐分量线性的。

证明。由引理3.3和4.16可直接得出。□

下述结果是定理 4.18 的直接推论。

推论 4.19. 设 $\bar{\Delta}$是定理 4.18 中的单纯复形。若对所有 $\ell \geq 1$, $J(\bar{\Delta})^{(\ell)} = J(\bar{\Delta})^{\ell}$, 则 $\operatorname{reg}(J(\bar{\Delta})^{(\ell)} = \ell \operatorname{deg}(J(\bar{\Delta}))$, 其中 $\operatorname{deg}(J(\bar{\Delta}))$ 表示 $J(\Delta)$ 的极小单项式生成元的最大次数¯。

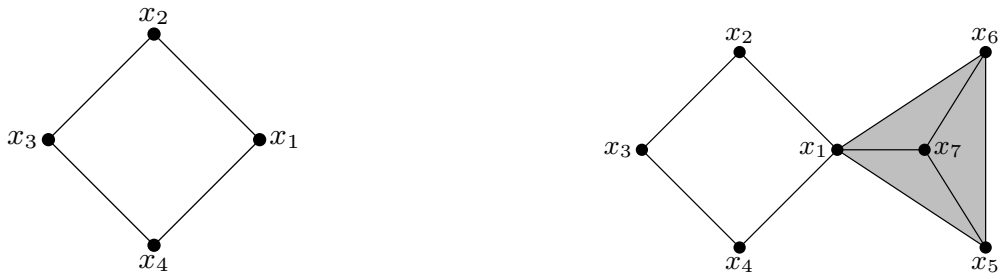
由推论 4.19 和定理 4.18, 我们得到以下结果。

定理 4.20. 设 $\bar{\Delta}$是定理 4.18 中的单纯复形。若对所有 $\ell \geq 1$, $J(\bar{\Delta})^{(\ell)} = J(\bar{\Delta})^{\ell}$, 则以下命题等价。

¯(a) $J(\Delta)$ 有线性分解。(b) 对某个 $\ell \geq 1$, $J(\bar{\Delta})^{\ell}$ 有线性分解。(c) 对所有 $\ell \geq 1$, $J(\bar{\Delta})^{\ell}$ 都有线性分解。¯(d) $R/I(\Delta)$ 是 Cohen-Macaulay。¯(e) Δ 是无混合的。

¯令 Δ 为一个单纯复形, W 为 Δ. 上的一个圈。此外, 令 Δ 为通过在 W. 的每个顶点处附加一个纯骨架复形而从 Δ 得到的单纯复形。那么, ¯下面的例子表明, 对于所有 $\ell \geq 1$., $\mathcal{H}(\Delta)(\ell)$ 不一定是顶点可分解的。

例 4.21。考虑如图 4a 所示的单纯复形 $\Delta = C_4$ 。显然, $W = \{x_1\}$ 是 Δ. 的一个圈覆盖。令 $\bar{\Delta} = \Delta \cup \Gamma^{(2)}$, 其中 Γ 是顶点集$\{x_1, x_5, x_6, x_7\}$.上的单纯形。



(A) 单纯复形 Δ. (B) 单纯复形 $\bar{\Delta}$.

FIGURE 4. $\mathcal{H}(\Delta)(2)$ 不是顶点可分解的。

¯在 Macaulay2 上进行计算表明, 超图 $\mathcal{H}(\Delta)(2)$ 不是顶点可分解的。

致谢。第二作者感谢获得印度理工学院查谟分校种子基金的资助。

REFERENCES

[1] Jennifer Biermann、Christopher A. Francisco、Huy T`ai H`a 和 Adam Van Tuyl。部分着色、顶点可分解性与序贯科恩-麦考利单纯复形。《交换代数杂志》, 7(3): 337–352, 2015。[2] Jennifer Biermann 和 Adam Van Tuyl。平衡顶点可分解单纯复形及其h向量。《电子组合数学杂志》, 20(3): 论文15, 12页, 2013。[3] Bijender、AJAY KUMAR 和 Rajiv Kumar。单纯树的顶点覆盖理想的幂。预印本, 2022。

[4] Aldo Conca。有理正规曲线理想的幂的希尔伯特函数与分解。第152卷，第65–74页。2000年。交换代数、同调代数与表示论（卡塔尼亚/热那亚/罗马，1998）。[5] David Cook, II 和 Uwe Nagel。科恩-麦考利图与旗复形的面向量。SIAM离散数学杂志，26(1)：89–101，2012。[6] Anton Dochtermann 和 Alexander Engstr¨om。通过组合拓扑研究边理想的代数性质。《电子组合数学杂志》，16(2，《向 Anders Bj¨orner 致敬特刊》)：研究论文2，24页，2009。[7] Le Xuan Dung、Truong Thi Hien、Hop D. Nguyen 和 TranNam Trung。单项式理想符号幂的正则性与 Koszul性质。《数学杂志》，298(3-4)：1487–1522，2021。[8] Christopher A. Francisco 和 Huy T`ai H`a。胡须与序贯科恩-麦考利图。《组合理论杂志A辑》，115(2)：304–316，2008。[9] Yan Gu、Huy T`ai H`a 和 Joseph W. Skelton。图的覆盖理想的符号幂与 Koszul性质。《国际代数与计算杂志》，31(5)：865–881，2021。[10] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。逐分量线性理想。《名古屋数学杂志》，153：141–153，1999。[11] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。单项式理想，《数学研究生教材》第 260 卷。施普林格伦敦出版社有限公司，伦敦，2011。[12] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi、Ngˆo Viˆet Trung 和 Xinxian Zheng。标准分次顶点覆盖代数、环与叶。《美国数学会汇刊》，360：6231–6249，2006。[13] J¨urgen Herzog 和 Srikanth Iyengar。Koszul模。《纯粹与应用代数杂志》，201(1-3)：154–188，2005。[14] AJAY KUMAR 和 Rajiv Kumar。论顶点覆盖理想的幂。《纯粹与应用代数杂志》，226(1)：论文编号106808，10页，2022。[15] Tim R¨omer。论最小分次自由分解。博士论文，埃森大学，2001。[16] S. Selvaraja。顶点覆盖理想的符号幂。《国际代数与计算杂志》，30(06)：1167–1183，2020。[17] S. A. Seyed Fakhari。非常良好覆盖图与二部图的覆盖理想的符号幂。《美国数学会会刊》，146(1)：97–110，2018。[18] Bernd Sturmfels。组合代数几何中的四个反例。《代数杂志》，230(1)：282–294，2000。[19] Rafael H. Villarreal。科恩-麦考利图。《数学手稿》，66(3)：277–293，1990。[20] Russ Woodroofe。顶点可分解图与可壳性的障碍。《美国数学会会刊》，137(10)：3235–3246，2009。电子邮件地址：2019rma0011@iitjammu.ac.inDepartment of Mathematics、
Indian Institute of Technology Jammu、 J&K、 India - 181221.电子邮件地址：ajay.kumar@iitjammu.ac.inDepartment of Mathematics、
Indian Institute of Technology Jammu、 J&K、 India - 181221.