arXiv:2304.11644v1 [math.OA] 23 Apr 2023

C*-代数中的软算子

HANNES THIEL 和 EDUARD VILALTA

Abstract. 我们称一个 C*-代数是软的，如果它没有非零的含单位元商代数；我们将这一性质与 Hjelmborg-Rørdam 稳定性条件以及 Ortega-Perera-Rørdam 的性质 (S) 联系起来。进一步地，我们称 C*-代数中的一个算子是软的，如果与其对应的遗传子代数是软的，并为这一概念给出有用的谱刻画。

特别值得关注的是具有丰富软元素的 C*-代数，即每个遗传子代数都包含一个几乎满的软元素。我们证明，全局 Glimm 性质蕴含这一性质，并且每个具有丰富软元素的 C*-代数都是处处非散射的。这为长期存在的全局 Glimm 问题带来了新的认识：每个处处非散射的 C*-代数是否都具有全局 Glimm 性质。

1. Introduction

在非单 C*-代数的研究中，一种反复出现、能够确保充分非交换性的性质，是不含非零初等理想商这一概念；例如，参见 [ER06, RT17, APRT22]。鉴于这类 C*-代数与散射的 C*-代数（Jensen 在[Jen77]中给出了定义）之间存在鲜明对比，[TV21b]将这一性质称为处处非散射性。

尽管在许多情形下，这一概念是单性的自然替代，但人们往往会采用更具技术性的条件，即具有全局 Glimm 性质。Kirchberg 和 Rørdam 在 [KR02], 中引入了这一性质；它蕴含处处非散射性。事实上，已知对于一大类 C*-代数，这两个概念是一致的。然而，这两个条件在一般情况下是否相同，仍是一个开放问题，称为全局 Glimm 问题；关于这一主题的综述，参见 [TV22b, Section 1] 。从本质上说，与算子代数中的许多其他问题一样，全局 Glimm 问题探讨的是：一个自然条件是否与其更实用（尽管技术性更强）的强化条件等价。

在 [TV22b], 中，人们提出了一种解决这一问题的新方法：将全局 Glimm 问题重新表述为关于 Cuntz 半群的问题。Cuntz 半群是 C*-代数的一个强有力的不变量，由 Cuntz 在 [Cun76] 中引入，后由 Coward、Elliott 和 Ivanescu 在 [CEI08] 中从更抽象的角度加以研究。Cuntz 半群理论在 [APT18、APT20a、APT20b、APT20c、APRT21], 中得到进一步发展，并已在 C*-代数的结构与分类研究中取得许多重要应用；例如参见 [Tom08、Rob12、Win12、RT17、Thi20b、APRT22]。关于该理论的近期入门介绍，请参见 [GP23]。

为了利用 [TV22b], 的方法，我们必须加深对全局 Glimm 性质的理解。本文通过用软元素刻画这一性质来实现这一点。

Date：2023年4月25日。第一作者的部分研究经费由克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会（KAW 2021.0140）资助。第二作者的部分研究经费由 MINECO（资助编号 PID2020-113047GB-I00 和 PRE2018-083419）以及加泰罗尼亚政府研究与大学部（资助编号 2021-SGR-01015）资助。

定义 A（3.1）。给定一个 C*-代数 A，若正元素 $a \in A_+$ 的任意非零商 $\overline{aAa}$ 都不含单位元，则称其为软的。

这个定义类似于具有软的 Cuntz 类这一概念，该概念由 [APT18]，引入，并且受到 [KR00，第 4.24] 定理中对纯无限 C*-代数的稳定性所作刻画的启发：一个 σ-含单位元的纯无限 C*-代数是稳定的，当且仅当它的非零商中没有一个是含单位元的。事实上，尽管软性从未拥有一个名称，这一概念却贯穿于相关文献之中。例如，可以将 [BGSW22，定理 B] 的一部分重新表述为：一个可分的、核的 $\mathcal{O}_\infty$-稳定 C*-代数具有有限分解秩，当且仅当其中的每个正元素 A 都是软的。

我们首先通过发展 C*-代数软性的基本理论来展开研究；如果一个 C*-代数没有非零的含单位商，则称其为软的；参见定义 2.1。我们将这一性质与稳定性的 Hjelmborg-Rørdam 条件以及 Ortega-Perera-Rørdam 的性质 (S) 联系起来；参见命题 2.14。随后，我们给出软性的谱刻画：

命题 B (3.6). C*-代数 A 中的正元素 a 是软的，当且仅当对每个闭理想 $I \subseteq A$，要么 $a \in I$，要么 $a + I \in A/I$ 的谱以 0 为聚点。

第 4 节旨在为 Cuntz 类引入三种量身定制的软性定义，我们称之为函数软性、弱软性和强软性；参见定义 4.2。强软性蕴含弱软性，而弱软性又蕴含函数软性；在剩余稳定有限的 C*-代数的 Cuntz 半群中，这三种概念彼此等价；参见命题 4.5。在这种情况下，C*-代数中元素的软性可以用其 Cuntz 类来刻画：

命题 C (4.16). 设 A 为剩余稳定有限的 C*-代数。则元素 $a \in A_+$ 是软的，当且仅当其 Cuntz 类 $[a] \in \mathrm{Cu}(A)$ 是强软的（等价地：弱软的、函数软的）。

为了将全局 Glimm 问题与柔性算子联系起来，我们引入 C*-代数 A的丰富的软元素这一概念，其含义是：对于每个 $a \in A_+$ 和 $\varepsilon > 0$，在遗传子 C*-代数 $\overline{aAa}$中都存在一个正的、柔性的算子 b，使得截断 $(a-\varepsilon)_+$属于由 b生成的闭理想；见定义 5.2。这个定义与全局 Glimm 性质的精神相同，后者可以表述为“丰富的幂零元”；见[TV22b，定理 3.6]。（我们在第 7 节开头回顾全局 Glimm 性质的定义。）

尽管并非每个幂零元都是软的，但全局 Glimm 性质确实蕴含丰富的软元素；见命题 7.7。我们还证明，拥有丰富的软元素意味着无处散射（命题 7.4），因此将全局 Glimm 问题分解为两个子问题；见问题 7.8。

我们在定义 5.2 中引入 Cuntz 半群具有丰富的强软元素这一概念。由于软算子具有强软 Cuntz 类，因此，具有丰富软元素的 C*-代数，其带尺度的 Cuntz 半群也具有丰富的软元素。我们证明反向结论同样成立（定理 5.14），不过每个强软 Cuntz 类是否都能由一个软元素实现，目前仍不清楚（问题 4.17）。

我们所说的丰富的软元素与 2-分裂性质密切相关。Kirchberg 和 Rørdam 在 [KR15] 中引入了这一性质，以研究中心序列代数何时具有特征。在定理 5.14 中，我们证明，C*-代数具有丰富的软元素，当且仅当它具有

遗传 2-分裂性质（见定义 5.7），这是对 2-分裂性质的一种自然强化。

利用这些刻画，我们给出全局 Glimm 性质的一种新描述：

定理 D (7.14). 一个 C*-代数具有全局 Glimm 性质，当且仅当它拥有丰富的软元素，且其 Cuntz 半群是理想滤过的。

在与 Asadi-Vasfi 合作的后续工作中，[AVTV23], 我们将利用丰富的软元素，为某些数值型 C*-代数不变量寻找界，例如比较半径，以及 [TV22a]中引入的 Cuntz 覆盖维数。

2. Soft C*-algebras

本节介绍 C*-代数的软性概念，见定义 2.1。我们在命题 2.9 中给出软性的若干有用刻画，并将其与 Hjelmborg-Rørdam 稳定性条件以及 Ortega-Perera-Rørdam 的性质 (S) 联系起来；见命题 2.14。

我们还证明了基本的保持性质：软性在理想、商与扩张下保持（命题 2.16），在张量积下保持（命题 2.19），也在归纳极限下保持（命题 2.18）。

定义 2.1. 如果对每个真闭理想$I \subseteq A$ 而言，商 A/I 都不含单位元，我们就称 C*-代数 A 是软的。

注 2.2. 我们对 C*-代数的软性概念与 Farsi 在 [Far02] 中引入的概念无关。后者是根据软多项式关系来定义的。我们的术语受到其与 Cuntz 半群中的软元素（见命题 4.16）的密切联系启发，因此最终源自 Goodearl 和 Handelman 在 [GH82] 中引入的软区间概念；另见 [APT18, 第 5 节。3]。

下一个结果可由定义直接推出。从某种意义上说，它是 [APT18, 命题 5.3.16] 的 C*-代数类比。

命题 2.3。单 C*-代数要么是含单位元的，要么是软的。

记号 2.4。设 A 是一个 C*-代数。 $a \in A_+$ 的湮灭子为

$$\mathrm{Ann}(a) := \big\{x \in A : xa = ax = 0\big\}.$$

当我们想强调湮灭子是在代数 A 内考虑时，记作 $\mathrm{Ann}_A(a)$。注意，$\mathrm{Ann}(a)$ 是 A 的一个遗传子 C*-代数。

If $a, b \in A_+$，则：

- 若 b 在 a 上作为单位元作用，即若 $a = ab$，则记作 $a \ll b$；
- 我们写作 $a \lhd b$，表示 a 属于由 b 生成的闭理想，即 $a \in \overline{\text{张成}AbA}$。
- 如果 $ab = 0$，我们写作 $a \perp b$。

引理 2.5. 设 $\pi\colon A \to B$ 是 C*-代数之间的满射 *-同态，并设 $a, b \in A_+$ 满足 $a \ll b$。则 $\mathrm{Ann}_B(\pi(b)) \subseteq \pi(\mathrm{Ann}_A(a))$。

证明。必要时，通过向 A 添加入一个单位元，我们可以假设 A 是含单位元的。令$x \in \mathrm{Ann}_B(\pi(b))$。提升 x，得到满足 $\pi(y) = x$ 的 $y \in A$。令 $z := (1-b)y(1-b) \in A$。于是 $\pi(z) = x$。此外，利用 $a \ll b$，可得 $a(1-b) = (1-b)a = 0$，因此 $z \in \mathrm{Ann}_A(a)$。□

引理 2.6. 设 A 是一个 C*-代数， $B \subseteq A$ 是一个软的子 C*-代数，且$p \in B$ 是一个投影。则 $\mathrm{Ann}(p)$ 在 A 中是满的。

证明. 设 I 表示由湮灭子 $\mathrm{Ann}_A(p)$ 在 A 中生成的闭理想，并设 $\pi\colon A \to A/I$ 表示商映射。由于 $p \ll p$，我们可以在第一步应用引理 2.5，得到

$$\mathrm{Ann}_{A/I}(\pi(p)) \subseteq \pi(\mathrm{Ann}_A(p)) \subseteq \pi(I) = \{0\}.$$

因此，投影 $\pi(p)$ 在 A/I 中的湮灭子为零。假设 $\pi(p) \neq 0$，则可得 $\pi(p)$ 是 A/I 的单位元，因而也是 $\pi(B)$ 的单位元。这与 B 的软性矛盾，并表明 $\pi(p) = 0$，由此推出 $A/I = \{0\}$，进而得到 $I = A$。□

记号 2.7. 按照 [BK19], 中的记号，我们设

$$A_c := \big\{a \in A_+ : a \ll b \text{ for some } b \in A_+\big\}.$$

A 由 A_c 生成的（非闭）理想称为 Pedersen 理想——它是 A 的最小稠密理想；参见 [Bla06, TheoremII.5.2.4]。

请注意，在 [OPR12] 和 [HRW07] 中，A_c 记作 $F(A)$。我们不采用这种记号，以避免与 A 的中心序列代数混淆。在 [Bla06] 中，A_c记作 A_+^c

引理 2.8. 设 A 是一个 C*-代数，设 $B \subseteq A$ 是一个软的子 C*-代数，并设 $a \in B_c$。则 $\mathrm{Ann}(a)$ 在 A 中是满的。

证明. 令 I 表示由 $\mathrm{Ann}_A(a)$ 在 A 中生成的闭理想。我们将证明 $I = A$。取 $b \in B_+$ 使得 $a \ll b$。令 $f, g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 由下式给出

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, \frac{1}{2}] \\ 2t-1, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 1, & t \in [1, \infty), \end{cases} \quad \text{and} \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \\ 2t, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & t \in [\frac{1}{2}, \infty). \end{cases}$$

于是 $a \ll f(b) \ll g(b)$。

令 J 表示由 $g(b) - f(b)$ 生成的闭理想，并令 $\pi_J\colon A \to A/J$ 表示商映射。注意到 $g(b) - f(b) \in \mathrm{Ann}_A(a)$。因此，$J \subseteq I$。

于是 $\pi_J(f(b)) \ll \pi_J(g(b)) = \pi_J(f(b))$，这表明 $\pi_J(f(b))$ 是一个投影。利用 B 是软的这一点，容易推出 $\pi_J(B)$ 也是软的。于是，根据引理 2.6，$\pi_J(f(b))$ 在 A/J 中的湮灭子是满的。由于 $a \ll f(b)$，我们可以应用引理 2.5 得到

$$\mathrm{Ann}_{A/J}(\pi_J(f(b))) \subseteq \pi_J(\mathrm{Ann}_A(a)).$$

由此可得 $\pi_J(I) = A/J$。结合 $J \subseteq I$，我们得到 $I = A$。 □

下一个结果类似于 [HR98] 中的 Hjelmborg-Rørdam 稳定性刻画。

命题 2.9. 设 A 为 C*-代数。则以下各项等价：

(1) A是软的；(2) 对每个 $a \in A_c$，代数 $\mathrm{Ann}(a)$ 在 A 中都是满的；(3) 对每个 $a \in A_c$，都存在 $b \in A_+$，使得 $a \perp b$ 和 $a \lhd b$；(4) 对每个 $a \in A_+$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 b、$c \in A_+$，使得 $\|a - b\| < \varepsilon$、$b \perp c$ 和 $b \lhd c$。

证明。由引理 2.8 可知，(1) 蕴含 (2)。为证明 (2) 蕴含 (3)，假设 $\mathrm{Ann}(a)$ 是满的。这意味着 a 属于由 $\mathrm{Ann}(a)$ 生成的闭理想，因此我们可以选取一个序列 $(b_n)_n$，使其属于 $\mathrm{Ann}(a)_+$，且 a 属于由 $\{b_n$ 生成的闭理想：$n \in \mathbb{N}\}$。令 $b := \sum_n \frac{1}{2^n \|b_n\| + 1} b_n$。则 b 属于 $\mathrm{Ann}(a)$。此外，对每个 n，都有 $b_n \leq (2^n \|b_n\| + 1)\, b$，这意味着 b_n 属于由 b 生成的闭理想。因此，a 属于由 b 生成的闭理想。

为证明 (3) 蕴含 (4)，假设 (3) 成立，并令 $a \in A_+$ 和 $\varepsilon > 0$。令 $b := (a - \frac{\varepsilon}{2})_+$。则 $b \in A_c$ 和 $\|a - b\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$。应用 (3)，我们得到 $c \in A_+$，使得 $b \perp c$ 和 $b \lhd c$。

最后，为证明 (4) 蕴含 (1)，假设 (4) 成立，并令 $I \subseteq A$ 为一个真闭理想。为导出矛盾，假设 A/I 含单位元。取 $a \in A_+$，使其在 A/I 中的像为单位元。将 (4) 应用于 $\varepsilon = 1$，我们得到 b、$c \in A_+$，使得 $\|a - b\| < 1$ 且 $b \lhd c$。由此可知，b 在商 A/I 中的像到单位元的距离小于 1，因而是严格正的。因此，c 在 A/I 中的像为零，即 $c \in I$。于是得到 $b \in I$，这意味着 $A/I = \{0\}$。□

2.10. 给定 C*-代数 A 中的两个正元素 a、b，如果存在 A 中的一个序列 $(r_n)_n$，使得 $a = \lim_n r_n b r_n^*$，我们称 a Cuntz 次等价于 b，记作 $a \precsim b$。进一步地，如果 $a \precsim b \precsim a$，则称 a 与 b Cuntz等价，记作 $a \sim b$。

C*-代数 A 的 Cuntz 半群 Cu(A) 是商 $(A \otimes \mathbb{K})_+ / \sim$，其序由 Cuntz 次等价诱导，加法由正交元素的加法诱导；详情请参见 [APT11, APT18] 。

我们用 QT(A) 表示由 $[0, \infty]$ 值的下半连续 2-准迹构成的锥，定义在 $(A \otimes \mathbb{K})_+$上。每个元素 $[a] \in$ Cu(A) 都诱导一个线性下半连续映射 $\widehat{[a]}$: QT(A) $\to [0, \infty]$，其定义为 $\widehat{[a]}(\tau) := \lim_{n\to\infty} \tau(a^{1/n})$，其中 $\tau \in$QT(A)；参见 [ERS11, Rob13, APRT21]。

在 [HR98], 中，Hjelmborg 和 Rørdam 为 C*-代数引入了一种性质，该性质刻画了 σ-含单位元情形下的稳定性。我们称一个 C*-代数具有 Hjelmborg-Rørdam 性质，若对每个 $a \in A_c$，都存在 $b \in A_+$ 使得$a \perp b$，并且对于某个 $x \in A$，有 $a = x^*x$ 和 $b = xx^*$。

命题 2.11。C*-代数 A 具有 Hjelmborg-Rørdam 性质，当且仅当对于每个 $a \in A_c$，存在 $b \in A_+$，使得 $a \perp b$ 并且 $[a] \leq [b]$ 属于 Cu(A)。
证明。对于每个 $x \in A$，我们有 $[x^*x] = [xx^*]$ 属于 Cu(A)。这证明了正向蕴含。

反之，设 $a \in A_c$ 并取 $\varepsilon > 0$。根据假设，存在 $b \in A_+$，使得 $a \perp b$ 并且 $[a] \leq [b]$ 属于 Cu(A)。因此，由 [Rør92，命题 2.4]可知，存在满足以下条件的 $x \in A$

$$(a - \varepsilon)_+ = xx^*, \quad \text{and} \quad x^*x \in \overline{bAb}.$$

特别地，注意到 xx^* 与 x^*x 正交。应用 [HR98，命题 2.2], ，我们看到 A 具有 Hjelmborg-Rørdam 性质。□

对于 Cuntz 半群中的元素 $[a], [b]$，记作 $[a] <_s [b]$ if $(n+1)[a] \leq n[b]$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$ 满足此条件。按照 [OPR12，定义 4.1], ，若对每个 $a \in A_c$，都存在 $b \in A_+$ 使得 $a \perp b$ 且 $[a] <_s [b]$ 属于 Cu(A)，则称 C*-代数 A 具有性质 (S)。

命题 2.12. C*-代数 A 具有性质 (S)，当且仅当对每个 $a \in \widehat{A_c}$，都存在 $b \in A_+$ 使得 $a \perp b$ 且 $[a] \leq [b]$。
$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$证明。设 $[a], [b]$ 属于 Cu(A)。一般而言，$[a] <_s [b]$ 蕴含 $[a] \leq [b]$。这证明了正向蕴含。
反过来，设 $a \in A_c$。仿照引理 2.8 的证明，我们可以找到 $b \in A_c$，使得 $a \ll b$。对 b 应用假设，可得$\frown$ $\frown c \in A_+$，使得 $b \perp c$ 且 $[b] \leq [c]$。

注意，$[a]$ 在 Cu(A) 中远小于 $[b]$，记作 $[a] \ll [b]$; 详情请见第 4.1 段。这使我们可以选择 $\varepsilon > 0$，使得 $[a] \ll [(b - \varepsilon)_+]$。利用

$\widehat{[(b-\varepsilon)_+]} \ll [b]$，我们可以应用 [Rob13，引理 2.2。5]，从而推得 $[(b-\varepsilon)_+]$ 在半群 $\mathrm{QT}(A) \to [0,\infty]$ 的线性下半连续$\widehat{\ }$函数中远小于 $2[b]$（因此也远小于 $2[c]$）。这使我们可以选择 $\delta > 0$，使得 $[(b-\varepsilon)_+] \leq \widehat{2[(c-\delta)_+]}$。

注意到 $b + (c-\delta)_+$ 属于 A_c。再次应用该假设，我们得到$d \in A_+$ 使得

$$b + (c-\delta)_+ \perp d, \quad \text{and} \quad \widehat{[b]} + \widehat{[(c-\delta)_+]} \leq \widehat{[d]},$$

其中在第二个不等式处，我们使用了 $b \perp (c-\delta)_+$。

Then

$$2\widehat{[(b-\varepsilon)_+]} \leq \widehat{[b]} + \widehat{[(b-\varepsilon)_+]} \leq \widehat{[b]} + 2\widehat{[(c-\delta)_+]} \leq \widehat{[(c-\delta)_+]} + \widehat{[d]}.$$

因此，$[(b-\varepsilon)_+] <_s [(c-\delta)_+] + [d]$。第一步使用了 $[a] \ll [(b-\varepsilon)_+]$，并应用 [APT18，定理 5.2。13],我们得到

$$[a] <_s [(c-\delta)_+] + [d] = [(c-\delta)_+ + d].$$

由于 $a \perp (c-\delta)_+ + d$，我们看到 $(c-\delta)_+ + d$ 具有所需的性质。 □

注 2.13。对于 C*-代数中的正元素 a 和 b，当且仅当 $[a] \leq \infty[b]$ 属于 $\mathrm{Cu}(A)$ 时，有 $a \lhd b$；例如参见 [APT18，第 5 节。1]。

因此，命题 2.11、2.12 和 2.9 表明，对于一个 C*-代数 A，Hjelmborg-Rørdam 性质、性质 (S) 和软性可以用非常相似的方式刻画：对于每个 $a \in A_c$，存在 $b \in A_+$，使得 $a \perp b$，并且

- $[a] \leq [b]$ 对于 Hjelmborg-Rørdam 性质；
- $[a] \leq [b]$ 对于性质 (S)；
- $[a] \leq \infty[b]$ 对于软性。

对于 Cuntz 半群中的元素 $[a]$、$[b]$，我们有以下蕴含关系：

$$[a] \leq [b] \quad \Rightarrow \quad \widehat{[a]} \leq \widehat{[b]} \quad \Rightarrow \quad [a] \leq \infty[b].$$

这证明了下一个结果。

命题 2.14. 对于每个 C*-代数，以下蕴含关系成立：

$$\textit{Hjelmborg-Rørdam property} \quad \Rightarrow \quad \textit{property (S)} \quad \Rightarrow \quad \textit{softness}.$$

命题 2.15（[OPR12，命题 4.5]）。可分的 C*-代数具有性质 (S)，当且仅当它是软的且没有有界拟迹。

现在我们转而讨论软性的保持性质。鉴于第 7 节讨论的软性、全局 Glimm 性质与处处非散射性之间的密切联系，我们指出，类似的保持性质也适用于处处非散射性（[TV21b，第 4 节）和全局 Glimm 性质（[TV22b，第 3 节）。

命题 2.16. 设 A 是 C*-代数，且 $I \subseteq A$ 是一个闭理想。那么，A是软的，当且仅当 I 和 A/I 都是软的。

证明。首先假设 A 是软的，并设 I 是 A的一个闭理想。显然，A/I是软的。为证明 I 也是软的，反设存在一个真理想 $J \subseteq I$，使得 I/J 是含单位元的，其单位元为 $e \in I/J$。那么 I/J 是 A/J的含单位元理想，这意味着 A/J 分解为 I/J与理想 $K := \mathrm{Ann}_{A/J}(e)$ 的直和。因此，$I/J = (A/J)/K$ 是 A的一个真理想含单位商，矛盾。

现在假设 I 和 A/I 是软的。再次用反证法，假设存在一个真理想 $J \subseteq A$，使得 A/J 含单位元。那么，

$A/(I+J)$ 同构于 A/I 和 A/J各自的一个商。由于 A/I 是软的，且A/J 含单位元，我们得到 $A/(I+J)$ 既是软的又含单位元，因此 $A = I + J$。

由此可得 $A/J \cong I/(I \cap J)$。利用 I 是软的这一点，我们看到 $A = J$。这与 J 是真性的这一事实相矛盾。□

如果对于每个有限集合 a_1，……，$a_n \in A$ 以及 $\varepsilon > 0$，都存在$\lambda \in \Lambda$ 和 b_1，……，$b_n \in A_\lambda$，使得对于 $j = 1$，……，n 有 $\|a_j - b_j\| < \varepsilon$，则称 C*-代数 A 可由子 C*-代数 $A_\lambda \subseteq A$ 的族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 逼近。

命题 2.17。若一个 C*-代数可由软的子 C*-代数族逼近，则它是软的。

证明。设 A 是一个 C*-代数，并设 $A_\lambda \subseteq A$ 是逼近 A 的软的子 C*-代数。为证明 A 是软的，我们验证命题 2.9 中的条件 (4)。设 $a \in A_+$ 和 $\varepsilon > 0$。选取 λ 和 $\bar{a} \in A_\lambda$，使得 $\|a - \bar{a}\| < \frac{\varepsilon}{2}$。进一步注意，我们可以假设 $\bar{a}$ 为正的；例如可参见 TV21a 中命题 3.7] 的证明。

利用 A_λ 是软的这一点，我们可以应用命题 2.9，得到 b、$c \in (A_\lambda)_+$，使得 $\|\bar{a} - b\| < \frac{\varepsilon}{2}$、$b \perp c$，并且 $b \in$ 张成$\overline{A_\lambda c A_\lambda}$。然后

$$\|a - b\| \le \|a - \bar{a}\| + \|\bar{a} - b\| < \varepsilon, \quad \text{and} \quad b \in \overline{\operatorname{span}} A_\lambda c A_\lambda \subseteq \overline{\operatorname{span}} AcA$$

这表明，在 A 中考察的 b 和 c 具有所需的性质。 □

命题 2.18。软性可传递到归纳极限。

证明。这与 [Thi21 的证明中命题 2.4] 的论证相同，可由命题 2.16 和命题 2.17 得出。为方便读者，我们补充一些细节。设 A 为由软的 C*-代数 A_j 构成的归纳系统的归纳极限。对于每个 j，考虑自然映射 $A_j \to A$ 及其像 $B_j \subseteq A$。由于 B_j 是 A_j 的一个商，根据命题 2.16，它是软的。现在，利用 A 可由族 B_j 逼近这一事实，根据命题 2.17 可得 A 是软的。□

命题 2.19. 设 A, B 是 C*-代数。则下列条件等价：

(1) A 或 B 是软的；(2) 极大张量积 $A \otimes_{\max} B$ 是软的；(3) 对某个（等价地，对任意）交叉范数 ϱ，张量积 $A \otimes_\varrho B$ 是软的；(4) 极小张量积 $A \otimes_{\min} B$ 是软的。

证明. 对每个交叉范数 ϱ，张量积 $A \otimes_\varrho B$ 是 $A \otimes_{\max} B$ 的商，而 $A \otimes_{\min} B$ 是 $A \otimes_\varrho B$ 的商。由于根据命题 2.16，软性在商下保持，因此 (2) 推出 (3)，且 (3) 推出 (4)。

下面证明 (4) 推出 (1)。为导出矛盾，假设 A 和 B 都不是软的。那么存在真闭理想 $I \subseteq A$ 和 $J \subseteq B$，使得 A/I 和 B/J 含单位元。商映射 $A \to A/I$ 和 $B \to B/J$ 诱导出一个自然的满射 $*$- 同态 $A \otimes_{\min} B \to (A/I) \otimes_{\min} (B/J)$（例如参见 [Bla06, II.9.6.6]）。由于 $(A/I) \otimes_{\min} (B/J)$ 含单位元，这表明 $A \otimes_{\min} B$ 不是软的。

最后，我们证明 (1) 蕴含 (2)。为导出矛盾，假设$A \otimes_{\max} B$不是软的。于是存在某个希尔伯特空间 H 上的一个 $*$-表示 $\pi\colon A \otimes_{\max} B \to \mathcal{B}(H)$，使得恒等元 $1 \in \mathcal{B}(H)$ 属于 π 的像。根据 [Bla06, Theorem II.9.2.1]，存在唯一的 $*$-表示 $\pi_A\colon A \to \mathcal{B}(H)$ 和 $\pi_B\colon B \to \mathcal{B}(H)$，使得对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，都有 $\pi(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b) = \pi_B(b)\pi_A(a)$。

选取 A 的近似单位 $(a_\lambda)_\lambda$ 以及 B的近似单位 $(b_\mu)_\mu$。那么 $(a_\lambda \otimes b_\mu)_{\lambda,\,\mu}$ 是 $A \otimes_{\max} B$ 的一个近似单位，因此 $\pi(a_\lambda \otimes b_\mu)$ 在范数下收敛于 $1 \in \mathcal{B}(H)$。于是，通过对充分大的 λ 和 μ设定 $a := a_\lambda$ 以及 $b := b_\mu$，算子 $\pi(a \otimes b)$ 是可逆的。利用 $\pi(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b) = \pi_B(b)\pi_A(a)$,

我们推得 $\pi_A(a)$ 和 $\pi_B(b)$ 都是可逆的。这意味着 1 属于 π_A 和 π_B的像。因此，$\ker(\pi_A)$ 和 $\ker(\pi_B)$ 分别是 A和 B 的真闭理想，且其商为含单位商，这表明 A 和 B 都不是软的。□

下一个结果表明，软性是一种稳定性质。

命题 2.20. 设 A 是一个 C*-代数，且设 $n \geq 1$。则 A 是软的，当且仅当 $M_n(A)$ 是软的。

证明。正向蕴含直接由命题 2.19 得出。

反之，假设 $M_n(A)$ 是软的。因此，利用命题 2.19，我们知道 $M_n(\mathbb{C})$ 或 A 是软的。由于 $M_n(\mathbb{C})$ 不是软的，我们必有 A 是软的，如所要求。□

问题 2.21. 软性是否满足 L¨öwenheim-Skolem 条件？这里，如果对于每个满足 $\mathcal{P}$ 的 C*-代数 A ，都存在一个由可分的子 C*-代数构成的 σ-完备、余终子集，使得其中每个代数都满足 $\mathcal{P}$，则称 C*-代数的性质 $\mathcal{P}$ 满足 L¨öwenheim-Skolem 条件；进一步细节参见 [TV21b 的第 4] 节。

3. Soft operators

本节介绍并研究 C*-代数中算子的软性概念；见定义 3.1。我们将在第 5 节看到，这一概念与 Cuntz 半群中元素的软性概念密切相关。

定义 3.1. 我们称 C*-代数 A 中的元素 x 是软的，如果遗传子 C*-代数 $\overline{x^*Ax}$ 是软的。

下面的结果表明，在上述定义中使用 $\overline{xAx^*}$ 代替 $\overline{x^*Ax}$也是等价的。下文的命题 3.6 将给出正算子软性的进一步刻画。

命题 3.2. 设 A是一个 C*-代数，并且 $x \in A$。则以下命题等价：

(1) 元素 x是软的。(2) 元素 x^* 是软的。(3) 元素 x^*x是软的。(4) 元素 xx^* 是软的。

证明。根据 [Bla06, 命题 II.3.4.2], ，我们有 $\overline{x^*Ax} = \overline{x^*xAx^*x}$。这表明 (1) 与 (3) 等价，同样地，(2) 与 (4) 等价。利用 $\overline{x^*Ax}$ 与 $\overline{xAx^*}$ 同构，可得 (1) 与 (2) 的等价性。事实上，若 $x = v|x|$ 是 x 在 A^{**}中的极分解，则 $a \mapsto vav^*$ 是 $\overline{x^*Ax} \to \overline{xAx^*}$上的良定义同构；另见 [ORT11, 引理 4.2]。□

注 3.3。算子的软性取决于其所在的 C* 代数。例如，若 a 是单的、非含幺 C* 代数 A中的严格正元素，则由于 $\overline{aAa} = A$， a 在 A 中是软的；根据命题 2.3，$\overline{aAa} = A$是软的，而 a 作为交换 C*代数 $C^*(a)$的元素并不是软的。

按照 Robert 的说法， [Rob16], ，如果一个 C*-代数的任何商中都不含有非零投影，则称其为无投影。

命题 3.4. C*-代数 A 无投影，当且仅当A中的每个元素都是软的。

证明。设 A 为 C*-代数。首先假设 A 无投影。给定任意遗传子 C*-代数 $B \subseteq A$以及一个闭理想 $I \subseteq B$，令 J为由 I生成的 A 的闭理想。则商 B/I 自然同构于 A/J的一个遗传子 C*-代数。由于 A/J 不含非零投影， B/I 不可能是含单位元且非零的。这表明 A 的每个遗传子 C*-代数都是软的，因此 A中的每个元素也都是软的。

反过来，假设 A 不是无投影的。取一个闭理想 $I \subseteq A$和一个非零投影 $p \in A/I$。取 p的一个正提升 $a \in A$ 。那么 a 不是软的，因为 $\overline{aAa}$ 具有非零的含单位商 $p(A/I)p$。□

记号 3.5. 给定 $\varepsilon > 0$，我们令 $g_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为如下连续函数

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \in (-\infty, 0] \cup [\varepsilon, \infty) \\ t, & \text{if } t \in [0, \frac{\varepsilon}{2}] \\ \varepsilon - t, & \text{if } t \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon] \end{cases}$$

下一结果中 (1) 与 (3) 的等价性类似于 Bosa 对稳定元素的刻画；参见 [Bos22, 引理 2.3]。

命题 3.6. 设 A 是一个 C*-代数，且 $a \in A_+$。那么以下条件等价：

(1) 元素 a 是软的。(2) 对每个闭理想 $I \subseteq A$，要么 $a \in I$，要么 $a + I \in A/I$的谱以 0 为聚点。(3) 对每个 $\varepsilon > 0$，都有 $a \lhd g_\varepsilon(a)$。(4) 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $b \in \overline{aAa}_+$，使得 $b \perp (a - \varepsilon)_+$ 且 $a \lhd b$。

证明。我们来证明 (1) 蕴含 (2)。假设 a 是软的，令 $I \subseteq A$ 为满足 $a \notin I$ 的闭理想。为导出矛盾，假设 0 在 $a + I$ 的谱中是孤立点。于是，$(0, \infty)$ 的特征函数在 $a + I$ 的谱上连续；应用函数演算，我们得到 A/I 中的一个投影，该投影生成与 $a+I$ 相同的遗传 C*-代数。因此， $\overline{aAa}$ 具有一个非零的含单位商，这正是所需的矛盾。

我们来证明 (2) 蕴含 (3)。假设 (2) 成立，令 $\varepsilon > 0$。置 $I := \overline{\text{张成 } Ag_\varepsilon(a)A}$。则 $a+I$ 的谱包含于 $\{0\} \cup [\varepsilon, \infty)$ 中。根据假设，这意味着 $a \in I$，从而 $a \lhd g_\varepsilon(a)$。

显然，(3) 蕴含 (4)。为证明 (4) 蕴含 (1)，令 $I \subseteq \overline{aAa}$ 为一个真闭理想，并令 $\pi\colon \overline{aAa} \to \overline{aAa}/I$ 为商映射。为导出矛盾，假设 $\overline{aAa}/I$ 是含单位的且 $\overline{aAa}/I \neq \{0\}$。由于 a 是严格正的， $\pi(a)$ 在 $\overline{aAa}/I$ 中可逆，于是我们得到 $\varepsilon > 0$，使得 $\pi(a)$ 的谱包含于 $[\varepsilon, \infty)$ 中。

应用关于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的假设，我们得到一个满元 $b \in \overline{aAa}_+$ 使得$b \perp (a - \frac{\varepsilon}{2})_+$。我们有 $\pi((a - \frac{\varepsilon}{2})_+) = (\pi(a) - \frac{\varepsilon}{2})_+$，其谱包含于$[\frac{\varepsilon}{2}, \infty)$中。因此， $\pi((a-\frac{\varepsilon}{2})_+)$ 在 $\overline{aAa}/I$ 中是严格正的，这意味着 $\pi(b) = 0$，矛盾。□

如果 C*-代数之间的完全正映射保持正元素之间的零乘积，则称其为零阶映射。根据 [GT22，第 4.8], 条推论，完全正零阶映射这一类，可以等价地描述为保持零乘积的正映射这一类。

目前尚不清楚是否可以在下一个结果中去掉软的元素的正性假设；参见问题 3.9。

命题 3.7. 设 $\varphi\colon A \to B$ 是 C*-代数之间的完全正、零阶映射，且 $a \in A_+$ 是软的。那么 $\varphi(a)$ 是软的。

证明。我们使用命题 3.6(4) 中对软性的刻画。设 $\varepsilon > 0$。我们需要找到一个正元素 $b \in \varphi(a)B\varphi(a)$，使其与 $(\varphi(a) - \varepsilon)_+$ 正交，并且满足 $\varphi(a) \lhd b$。

利用 a 是软的，并应用命题 3.6(3)，我们看到 $a \lhd g_\varepsilon(a)$。令 $b := \varphi(g_\varepsilon(a))$。我们有 $g_\varepsilon(a) \leq a$，因此 $b = \varphi(g_\varepsilon(a)) \leq \varphi(a)$，从而 $b \in \varphi(a)B\varphi(a)$。

此外，我们有 $g_\varepsilon(a) \perp (a - \varepsilon)_+$，并且由于 φ 保持正元素之间的正交性，我们得到 $b \perp \varphi((a - \varepsilon)_+)$。如 APT18 的证明中所述，命题 2.2.7], 我们有 $(\varphi(a) - \varepsilon)_+ \leq \varphi((a - \varepsilon)_+)$，这意味着 b 与 $(\varphi(a) - \varepsilon)_+$ 正交。

设 $x, y \in A_+$ with $x \lhd y$。那么 $[x] \leq \infty[y]$ in Cu(A)，并且由于 φ 通过 [WZ09,Corollary 4.5] (另见 [APT18, 3.2.5]) 自然地诱导出一个广义 Cu-态射Cu(A) $\to$ Cu(B)，我们得到 $[\varphi(x)] \leq \infty[\varphi(y)]$ in Cu(B)，由此 $\varphi(x) \lhd \varphi(y)$。对 $a \lhd g_\varepsilon(a)$应用此论证，我们推得 $\varphi(a) \lhd b$，这表明b 具有所需的性质。□

将上述结果应用于由闭理想确定的商映射，可得：

命题 3.8. 设 $I \subseteq A$ 是 C*-代数 A中的一个闭理想，且 $a \in A_+$是软的。那么 $a + I \in A/I$ 是软的。

问题 3.9. 设 $\varphi\colon A \to B$ 是 C*-代数之间的一个完全正零阶映射。给定一个（不一定为正的）软元素 $x \in A$，$\varphi(x)$ 是否软?

4. Shades of softness in Cu-semigroups

本节中，我们介绍 Cu-半群中元素的强软性、弱软性和函数软性概念；见定义 4.2。（我们在下文第 4.1 段回顾 Cu- 半群的定义。）我们证明每个强软元素都是弱软的，而每个弱软元素都是函数软的。对于剩余稳定有限的 Cu-半群，我们证明这三个概念彼此等价；见命题 4.5。

函数软元素首次在 [APT18, 定义 5.3.1], 中被考察，当时它们仅被称为“软”元素。强软元素也已在 [APT18, 第 5 节.3] 中被隐含地考察。我们使用“函数软”这一术语，以明确其与其他概念的区别。

我们在命题 4.16 中分析 C*-代数中的软元素与其 Cuntz 半群中的（强）软元素之间的关系。特别地，在稳定有限的 C*-代数中，一个正元素是软元素，当且仅当其 Cuntz 类是软的。

4.1. 给定偏序幺半群中的两个元素 x, y，其中递增序列的上确界存在，回顾我们记 $x \ll y$，其含义是：对于满足 $y \leq \sup_n z_n$ 的每个递增序列 $(z_n)_n$，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x \leq z_n$。

沿用 [CEI08], 的说法，如果一个偏序交换幺半群 S 满足以下条件，则称其为 Cu-半群：

（O1） S 中的每个递增序列都有上确界。（O2） S 中的每个元素都可以写成某个 $\ll$-递增序列的上确界。（O3）给定 x'、x、y'、$y \in S$，满足 $x' \ll x$ 和 $y' \ll y$，则有 $x' + y' \ll x + y$。（O4）给定 S中的两个递增序列（x_n）$_n$、（y_n）$_n$，则有 $\sup_n$（$x_n + y_n$） $= \sup_n x_n + \sup_n y_n$。

如 [CEI08], 所示，任意 C*-代数 A 的 Cuntz 半群 Cu(A) 都是 Cu-半群。随后，[APT18], [Rob13] 和 [APRT21]分别证明了 Cu(A) 还满足以下性质：

(O5) 给定 x'、x、y'、y、$z \in S$，满足 $x' \ll x$、$y' \ll y$和 $x+y \leq z$，则存在 $c \in S$，使得 $x'+c \leq z \leq x+c$ 且 $y' \ll c$。(O6) 给定 x'、x、y、$z \in S$，满足 $x' \ll x \leq y+z$，则存在元素 e、f，使得 $e \leq x$、y、$f \leq x$、z且 $x' \leq e+f$。(O7) 给定 x'、x、y'、y、$z \in S$，满足 $x' \ll x \leq z$和 $y' \ll y \leq z$，则存在 $w \in S$，满足 x'、$y' \ll w \leq z$、$x+y$。

我们将经常使用 (O6) 的等价表述：对于 $x' \ll x \leq y_1+\ldots+y_n$，存在 e_1，……，e_n，使得 $x' \leq e_1+\ldots+e_n$，并且对于所有 j，都有 $e_j \leq x$、y_j。类似地，我们也将使用 (O7) 的一个等价表述：对于给定的 $x'_j \ll x_j \leq z$，对于 $j=1$，……，n，存在满足 $x'_j \ll w \leq z$、$x_1+\ldots+x_n$ 的 $w \in S$。

最近，人们发现每个 C*-代数的 Cuntz 半群都满足一个额外性质，称为 (O8)；参见 [TV21b，定理 7.4]。

定义 4.2. 设 S 是一个 Cu-半群，并设 $x \in S$。如果对于每个满足 $x' \ll x$ 的 $x' \in S$，都存在使得 $t \in S$，则称 x 是强软的。

$$x'+t \ll x, \quad \text{and} \quad x' \ll \infty t.$$

我们称 x 为弱软的，如果对于满足 $x' \ll x$ 的每个 $x' \in S$，都存在$n \geq 1$和 t_1、……、$t_n \in S$，使得

$$x'+t_j \ll x \quad \text{for } j=1,\ldots,n, \quad \text{and} \quad x' \ll t_1+\ldots+t_n.$$

我们称 x 为函数软的，如果对于满足 $x' \ll x$ 的每个 $x' \in S$，都存在 $n \geq 1$，使得

$$(n+1)x' \ll nx.$$

注 4.3. 在 [APT18，定义 5.3.1], 中，Cu-半群 S 中的元素 x 被定义为“软的”，如果对于满足 $x' \ll x$ 的每个 $x' \in S$，都存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $(n+1)x' \leq nx$。注意，x 在此意义下是“软的”，当且仅当 x 在定义 4.2 的意义下是函数软的。事实上，逆向蕴含是显然的。反之，若 x 是“软的”且 $x' \ll x$，则选取满足 $x' \ll x'' \ll x$ 的 x''。应用定义可得 n，使得 $(n+1)x'' \leq nx$，从而 $(n+1)x' \ll nx$。

定义 4.2 中的概念与 [ERS11], 引入的纯非紧性概念，以及 [APT18] 中对其的推广——弱纯非紧性——密切相关。回顾这些定义后，我们将看到这些概念之间的关系。关于 Cu-半群的理想和商的详细内容，请参见 [APT18，第 5 节。1]

定义 4.4. 设 S 为一个 Cu-半群，且 $x \in S$。若对于每个理想 $I \subseteq S$，只要 x 在商 S/I 中的像 x_I 是紧的，就有 $2x_I = x_I$，则称 x 为纯非紧。

若对于每个理想 $I \subseteq S$，只要 x_I 是紧的，就存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $(n+1)x_I = nx_I$，则称 x 为弱纯非紧。

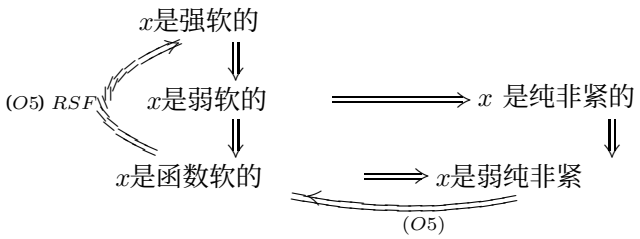
若对所有满足 $x+y \ll x$ 的 x、$y \in S$，都有 $y=0$，则称 Cu-半群 S 为稳定有限。注意，这比 [APT18], 中的定义更严格，不过当 S 为单时，这两个概念一致。此外，若 S 的每个商都是稳定有限的，则称 S 为剩余稳定有限。

稳定有限的 C*-代数具有稳定有限的 Cuntz 半群，而剩余稳定有限的 C*-代数具有剩余稳定有限的 Cuntz 半群。

命题 4.5. 设 S 是一个 Cu-半群，且 $x \in S$。如果 x 是强软的，那么 x 是弱软的，而这进一步意味着 x 是函数软的和纯非紧的。此外，只要 x 是纯非紧的或函数软的，它就是弱纯非紧的。

如果 S 满足 (O5)，那么 x 是函数软的，当且仅当 x 是弱纯非紧的。如果 S 满足 (O5) 且是剩余稳定有限的，那么定义 4.2 和 4.4 中的所有概念都等价。

这些蕴含关系如下图所示：



证明。显然，强软性蕴含弱软性，而纯非紧性蕴含弱纯非紧性。

为证明弱软性蕴含函数软性，假设 x 是弱软的，并令 $x' \in S$ 满足 $x' \ll x$。我们得到 $n \geq 1$ 和 t_1, ..., $t_n \in S$，使得

$$x' + t_j \ll x \quad \text{for } j = 1, \ldots, n, \quad \text{and} \quad x' \ll t_1 + \ldots + t_n.$$

Then

$$(n+1)x' \leq nx' + t_1 + \ldots + t_n \ll nx.$$

为证明弱软性蕴含纯非紧性，假设 x 是弱软的，并令 $I \subseteq S$ 为满足 $\pi(x) \ll \pi(x)$ 的理想，其中 $\pi\colon S \to S/I$ 表示商映射。利用 π 保持递增序列的上确界，我们得到 $x' \in S$，使得 $x' \ll x$ 且 $\pi(x) \leq \pi(x')$，这进而蕴含 $\pi(x) = \pi(x')$。根据定义 4.2，我们得到 $n \geq 1$ 和 t_1, ..., $t_n \in S$，使得

$$x' + t_j \ll x \quad \text{for } j = 1, \ldots, n, \quad \text{and} \quad x' \ll t_1 + \ldots + t_n.$$

对于每个 j，我们得到 $\pi(x) + \pi(t_j) = \pi(x)$，因此

$$2\pi(x) = \pi(x) + \pi(x') \leq \pi(x) + \pi(t_1) + \ldots + \pi(t_n) = \pi(x),$$

如所要求的。

文献 [APT18, Proposition5.3.5] 中证明了，函数软性蕴含弱纯非紧性；反之，如果 S 满足 (O5)，则该蕴含关系也成立。

最后，假设 S 满足 (O5) 且是剩余稳定有限的，并且 x 是函数软的。在这种情况下，文献 [APT18, Lemma 5.3.8] 证明了 x 是强软的。注意，文献 [APT 18], 使用了更强的稳定有限性概念，但对于文献 [APT18, Lemma 5.3.8] 中的论证，上面定义的较弱概念已经足够。为方便起见，我们给出简短的论证。

为验证 x 是强软的，令 $x' \in S$ 满足 $x' \ll x$。取 y'、$y \in S$ 使得 $x' \ll y' \ll y \ll x$。

由于 x 是函数软的，我们得到 $n \in \mathbb{N}$，使得 $(n+1)y \ll nx$。对 $y' \ll y \leq x$ 应用 (O5)，我们得到 $t \in S$，使得

$$y' + t \leq x \leq y + t.$$

令 $I := \{s \in S : s \leq \infty t\}$ 为由 t 生成的理想，并令 $\pi\colon S \to S/I$ 表示商映射。则 $\pi(x) \leq \pi(y)$，因此

$$n\pi(x) + \pi(x) = (n+1)\pi(x) \leq (n+1)\pi(y) \ll n\pi(x).$$

利用 S/I 是稳定有限的，我们得到 $\pi(x) = 0$，因而得到 $x \leq \infty t$。利用 $x' \ll x \leq \infty t$，我们可以选取 $t' \in S$，使得 $t' \ll t$ 且 $x' \ll \infty t'$。由于 $x' \ll y'$ 且 $t' \ll t$，我们有 $x' + t' \ll y' + t \leq x$，这表明 t' 具有所需的性质。□

回顾一下，若对所有满足 $x+z \ll y+z$的元素x、 y、 z，都有 $x \ll y$，则称 Cu-半群满足弱消去性。容易验证，弱消去性在商下保持，并且蕴含稳定有限性。因此，每个弱可消去 Cu-半群都是剩余稳定有限的。

RW10 中的定理 4.3] 表明，稳定秩一 C*-代数的 Cuntz 半群始终满足弱消去性。

推论 4.6. 设 A为剩余稳定有限的 C*-代数。（例如，具有稳定秩一的 C*-代数。）则对于 Cu(A) 中的元素，定义 4.2 和 4.4 中的所有概念均等价。

命题 4.7. 设 S 为一个 Cu-半群，且设 $x \in S$ 为紧的。则 x 是强软，当且仅当 x 是弱软，当且仅当 x 是纯非紧，当且仅当 $2x = x$。

此外， x 是函数软，当且仅当 x 是弱纯非紧，当且仅当存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $(n+1)$ $x = nx$。

证明。如果 $2x = x$，那么容易看出 x 是强软的。一般而言，强软性蕴含弱软性，而根据命题 4.5，弱软性又蕴含纯非紧性。此外，如果 x 是纯非紧且紧的，那么根据定义， $2x = x$ 。

类似地，如果对于某个 n，$(n+1)x = nx$ ，那么容易看出 x 是函数软的，而根据命题 4.5，这又蕴含 x 是弱纯非紧的。此外，如果 x 是弱纯非紧且紧的，那么根据定义，对于某个 n ，$(n+1)x = nx$ 。□

例 4.8。给定 $k \geq 1$，令 $E_k = \{0, 1, 2, \ldots, k, \infty\}$，其中序是代数序，并且两个元素 x、 y 的和在 $x+y \leq k$ 时为 $x+y$，否则为 ∞。那么 E_k 是满足 (O5) 的 Cu- 半群；更多细节请参见 [APT18，第 5.1 段。16]

元素 $x := 1$ 是紧的，并满足 $(k+2)x = \infty = (k+1)x$，但不满足$2x = x$。因此， x 是函数软且弱纯非紧的，但既非强软，也非弱软或纯非紧。

例 4.9。Rørdam 在 [Rør03] 中证明，存在含单位元的 C*代数 A ，使得 A 的单位元是有限的，而 $M_2(A)$的单位元是真无限的。这意味着，在 Cu(A) 中， A 的单位元的类 $[1_A]$ 是一个满足$3[1_A] = 2[1_A] \neq [1_A]$的紧元素。根据命题 4.7， $[1_A]$ 是函数软且弱纯非紧的，但既非强软，也非弱软或纯非紧。

例 4.9 表明，对于 Cuntz 半群中的元素，命题 4.5 中较低的向下蕴含不可逆转。其他蕴含的情况尚不明确。

问题 4.10. 对于 C*-代数的 Cuntz 半群中的元素，弱软性是否蕴含强软性？纯非紧性是否蕴含弱软性?

例 4.11. 设 S 是一个 Cu-半群。若元素 $x \in S$ 满足 $2x = x$，则称其为幂等元。若 S 中的每个元素都是幂等元，则称 S 为幂等的。容易看出，幂等元是强软的。因此，幂等 Cu-半群中的每个元素都是强软的。

给定一个 C*-代数 A，文献 [APT18 第 7 节2] 指出，Cu(A) 是幂等的，当且仅当 A 是纯无限的。因此，纯无限 C*-代数的 Cuntz 半群中的每个元素都是强软的。

若存在 $n \in \mathbb{N}$ ，使得对于每个 $x \in$Cu(A)，都有 $(n+1)x = nx$，则称 C*-代数 A 为弱纯无限代数。此类元素是函数软的。因此，弱纯无限 C*-代数的 Cuntz 半群满足其中每个元素都是函数软的。

每个弱纯无限 C*-代数是否都是纯无限代数，仍是一个开放问题；参见 [KR02, 问题 9.5]。

下一个结果提供了一种在 Cu-半群中构造强软元素的方法。

引理 4.12. 设 S 是一个 Cu-半群，并设 $(y_n)_n$ 是 S 中的一个序列，使得对每个 $n \geq 0$ 都有 $y_n \leq \infty y_{n+1}$。则元素 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 是强软的。

证明. 为验证 $y := \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 是强软的，设 $y' \in S$ 使得 $y' \ll y$。由此可知，存在某个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $y' \ll \sum_{n=0}^{m} y_n$。

利用对每个 n 都有 $y_n \leq \infty y_{n+1}$，我们得到

$$\sum_{n=0}^{m} y_n \leq \infty y_1 + \sum_{n=1}^{m} y_n \leq \infty y_2 + \sum_{n=2}^{m} y_n \leq \ldots \leq \infty y_m \leq \infty y_{m+1}$$

因此，$y' \ll \infty y_{m+1}$。

令 $t \in S$，使得 $t \ll y_{m+1}$ 且 $y' \ll \infty t$。于是，

$$y' + t \ll \left(\sum_{n=0}^{m} y_n \right) + y_{m+1} \leq y, \quad \text{and} \quad y' \ll \infty t,$$

如所愿。 □

命题 4.13。设 S 是一个 Cu-半群，并设 $x \in S$。则以下各项等价：

(1) 元素 x是强软的。(2) 对于每个满足 $x' \ll x$ 的 $x' \in S$，都存在一个强软元素 $t \in S$ 使得

$$x' + t \leq x \leq \infty t.$$

(3) 对于每个满足 $x' \ll x$ 的 $x' \in S$，存在 $t \in S$ 使得

$$x' + t \leq x, \quad and \quad x' \leq \infty t.$$

证明。显然，(2) 蕴含 (3)。为了证明 (1) 蕴含 (2)，假设 x 是强软的。选择一个 $\ll$-递增序列 $(x_n)_n$，其上确界为 x，且满足 $x_0 = x'$。我们通过归纳法找到 y_n 和 t_n，使得

$$y_n + t_n \ll y_{n+1} \ll x, \quad y_n \ll \infty t_n, \quad \text{and} \quad x_{n+1} \ll y_{n+1}$$

对所有 $n \geq 0$。我们首先令 $y_0 := x_0$。由于 x 是强软的，我们得到 $t_0 \in S$，使得 $y_0 + t_0 \ll x$ 且 $y_0 \ll \infty t_0$。现在令 $n \geq 0$，并假设我们已为所有 $k \leq n$ 选取了 y_k 和 t_k。然后，利用 $y_n + t_n \ll x$ 和 $x_{n+1} \ll x$，我们选取 $y_{n+1} \ll x$，使得

$$y_n + t_n \ll y_{n+1}, \quad \text{and} \quad x_{n+1} \ll y_{n+1}.$$

由于 x 是强软的，我们得到 $t_{n+1} \in S$，使得 $y_{n+1} + t_{n+1} \ll x$ 且 $y_{n+1} \ll \infty t_{n+1}$，由此归纳论证完成。

对于每个 $n \geq 0$，我们有

$$x_0 + \sum_{k=0}^{n} t_k = y_0 + t_0 + t_1 + \ldots + t_n \leq y_1 + t_1 + \ldots + t_n \leq \ldots \leq y_{n+1} \leq x.$$

令 $t := \sum_{k=0}^{\infty} t_k$，显然 $x' + t \leq x \leq \infty t$。此外，由引理 4.12 可知，$t$ 是强软的。

为证明 (3) 蕴含 (1)，假设 x 满足 (3)，并令 $x' \in S$ 满足$x' \ll x$。选取 $x'' \in S$ 使得 $x' \ll x'' \ll x$。将 (3) 应用于 $x'' \ll x$，我们得到$t \in S$ 使得

$$x'' + t \leq x, \quad \text{and} \quad x'' \leq \infty t.$$

利用 $x' \ll x''$，我们可以选取 $t' \in S$ 使得

$$x' \ll \infty t', \quad \text{and} \quad t' \ll t,$$

这表明 $x' + t' \ll x$，正如所需。 □

下一个结果是关于强软元素的 [APT18, 定理 5.3。11]的类似结果。

定理 4.14. 设 S 是一个 Cu-半群，并令 S_{soft} 表示 S 中强软元素的集合。那么：

(1) S_{soft} 是 S 的子幺半群，并且在递增序列的上确界下封闭。(2) S_{soft} 具有如下吸收性：若 x、$y \in S$ 满足 $x \leq \infty y$，且 y是强软的，则 $x + y$也是强软的。

证明。为证明 S_{soft} 在加法下封闭，取 $x, y \in S_{\text{soft}}$。为验证$x + y$ 是强软的，取满足 $w \ll x + y$的 $w \in S$。选择 $x', y' \in S$ 使得

$$w \ll x' + y', \quad x' \ll x, \quad \text{and} \quad y' \ll y.$$

由于 x 和 y 都是强软的，我们得到 r、$s \in S$，使得

$$x' + r \ll x, \quad x' \ll \infty r, \quad y' + s \ll y, \quad \text{and} \quad y' \ll \infty s.$$

Then

$$w + (r + s) \leq x' + y' + r + s \ll x + y, \quad \text{and} \quad w \leq x' + y' \ll \infty(r + s).$$

利用 0 是强软的这一点，可知 S_{soft} 是一个子幺半群。

为证明 S_{soft} 对递增序列的上确界封闭，取 S_{soft}中的一个递增序列 $(x_n)_n$，并设 $x := \sup_n x_n$。为验证 x 是强软的，取满足 $x' \ll x$的 $x' \in S$。我们得到 $n \in \mathbb{N}$，使得 $x' \ll x_n$。由于 x_n 是强软的，我们得到 $r \in S$，使得

$$x' + r \ll x_n, \quad \text{and} \quad x' \ll \infty r.$$

于是，$x' + r \ll x$ 和 $x' \ll \infty r$，正如所需。

现在证明 (2)。因此，取满足 $x \leq \infty y$的 x、$y \in S$，并假设 y是强软的。我们验证 $x + y$满足命题 4.13 的条件 (3)。取满足 $w \ll x + y$的 $w \in S$，并选取 $y' \in S$，使得

$$w \ll x + y', \quad \text{and} \quad y' \ll y.$$

由于 y 是强软的，我们可以应用命题 4.13，得到 $r \in S$，使得

$$y' + r \leq y \leq \infty r.$$

利用第三步中的 $x \leq \infty y$，我们得到

$$w + r \leq x + y' + r \leq x + y \leq \infty y \leq \infty r,$$

如所需。 □

下一个结果是命题 3.7 的 Cu 版本。

引理 4.15. 设 $\varphi\colon S \to T$ 是 Cu-半群之间的广义 Cu-态射，并设 $x \in S$。若 x 是（函数意义上、弱、强）软的，则 $\varphi(x)$ 也具有相同性质。

证明. 令 $y := \varphi(x)$。假设 x 是强软的，我们应用命题 4.13(3) 来验证 y 是软的。设 $y \in T$ 满足 $y' \ll y$。利用 φ 保持递增序列的上确界这一点，我们得到 $x' \in S$，使得 $x' \ll x$ 且 $y' \leq \varphi(x')$。根据命题 4.13，我们得到 $t \in S$，使得 $x' + t \leq x \leq \infty t$。于是

$$y' + \varphi(t) \leq \varphi(x') + \varphi(t) = \varphi(x' + t) \leq \varphi(x) = y \leq \varphi(\infty t) = \infty\varphi(t),$$

这表明 $\varphi(t)$ 具有所需的性质。

类似地，可以证明函数软性和弱软性可从 x 传递到 y。 □

如果 p 在 C*-代数 A 中满足 $p \oplus p \precsim p \oplus 0$在 $M_2(A)$中，则称投影为真无限投影。

注意，只要 A 是剩余稳定有限的，下面的命题 4.16 就说明： $a \in A_+$ 是软的，当且仅当 $a + I$ 没有任何 Cuntz 代表元是非零投影；参见 [BC09，定理 3.5]。因此，在这些假设下，可以将软性理解为纯正性的一种推广，纯正性的定义见 [PT07，定义 2.1]。

命题 4.16。设 A 是一个 C*-代数，且 $a \in A_+$。考虑以下陈述：

(1) 元素 a 是软的。(2) 类 $[a] \in$Cu(A) 是强软的。(3) 对每个闭理想 $I \subseteq A$，要么 $a \in I$，要么谱 sp($a + I$) 以 0 为聚点，要么 $(0, \infty)$ 的特征函数 χ 在 sp(a) 上连续，且相应的投影 $p := \chi(a)$ 是真无限的；

于是蕴含关系“(1)⇒(2)⇒(3)”成立。如果 A 是剩余稳定有限的，那么蕴含关系“(3)⇒(1)”也成立，因此在这种情况下 (1)-(3) 等价。

证明. 为证明 (1) 推出 (2)，令 $x := [a] \in$ Cu(A)，并设 $x' \in$ Cu(A) 满足 $x' \ll x$。那么，存在满足 $x' \leq [(a - \varepsilon)_+] \leq x$ 的 $\varepsilon > 0$。利用命题 3.6，我们得到与 ($\underline{a - \varepsilon}$)+ 正交的 $b \in \overline{aAa_+}$，使得 $a \in$张成AbA。令 $t := [b]$ 属于 Cu(A)，则有

$$x' + t \leq x \leq \infty t.$$

现在由命题 4.13 可知， $x = [a]$ 是强软的。

为证明 (2) 推出 (3)，设 $I \subseteq A$ 是一个闭理想。那么，Cu(I) 自然是 Cu(A) 中的一个理想，并且 Cu(A/I) 与 Cu(A)/Cu(I) 典范同构；参见 [CRS10] 和 [APT18，第 5 节1]。类 $[a + I] \in$ Cu(A/I) 对应于 $[a]$ 在商映射 Cu(A) → Cu(A)/Cu(I) 下的像。由引理 4.15，$[a + I]$ 是强软的。

因此，不失一般性，我们可以假设 a 非零且 $I = \{0\}$。我们还可以假设 0 是谱 σ(a) 中的孤立点，这意味着存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\sigma(a) \subseteq \{0\} \cup [\varepsilon, \infty)$。这意味着 χ 在 $\sigma(a)$ 上连续。应用函数演算，我们得到一个投影 $p := \chi(a)$，它满足 $[p] = [a]$。我们有 $[p] \ll [p]$，因此由命题 4.7 可知 $[p] = 2[p]$。这意味着 $p \oplus p$ Cuntz 次等价于 p，因而也 Murray-von Neumann 次等价于 p。因此， p 是一个适当无限投影。

最后，如果 A 是剩余稳定有限的，那么 A 的任何商都不包含非零的真无限投影，这表明由命题 3.6 可知 (3) 推出 (1)。□

问题 4.17. 设 A 是一个稳定的 C*-代数，且 $x \in$ Cu(A) 是强软的。是否存在一个软元素 $a \in A_+$，使得 $x = [a]$?

5. Abundance of soft elements

在本节中，我们研究具有丰富的软元素这一性质的 C*-代数和 Cu-半群；这一概念将在下文定义 5.2 中引入。我们已在命题 4.16 中证明，C*-代数中的软元素具有（强）软的 Cuntz 类；由此立即可知，若一个稳定的 C*-代数具有丰富的软元素这一性质，则相应的 Cuntz 半群也具有这一性质。本节的主要结果表明，反过来也成立；见定理 5.14。

对于非稳定的 C*-代数，我们必须考虑带标度的 Cu-半群。Cu-半群 S 中的尺度是一个子集 $\Sigma \subseteq S$，它对递增序列的上确界封闭、向下遗传，并生成一个理想 S；参见

[APT20c，定义 4.1]。在这种情况下，称有序对 (S,Σ) 为带标度的 Cu-半群。

给定一个 C*-代数 A，其自然关联的尺度 $\Sigma_A \subseteq \mathrm{Cu}(A)$ 是

$$\Sigma_A = \big\{x \in \mathrm{Cu}(A) : x \leq [a] \text{ for some } a \in A_+\big\};$$

参见 [APT20c, 4.2]以及 [TV22b, 引理 3.3(2)]。

给定 C*-代数中的元素 a和 b，回顾一下，当 a属于由 b生成的闭理想时，我们记作 $a \lhd b$。我们将在 Cu-半群中使用类似的记号。

记号 5.1。给定 Cu-半群 S中的元素 x 和 y，当 x属于由 y生成的 S 的理想时，即当 $x \leq \infty y$时，我们记作 $x \lhd y$。

定义 5.2。我们称 C*-代数 A 具有丰富的软元素，是指对每个 $a \in A_+$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个正的软元素 $b \in \overline{aAa}$，使得 $(a-\varepsilon)_+ \lhd b$。

如果对于每个满足 $x' \ll x$ 的 $x', x \in \Sigma$，都存在一个强软元素 $y \in S$ 使得 $x' \lhd y \leq x$，我们就称带标度的 Cu-半群 (S,Σ) 具有丰富的强软元素。

注 5.3. 设 S 是一个 Cu-半群，我们将其视为具有平凡尺度 $\Sigma = S$ 的带标度 Cu-半群。在这种情况下，定义 5.2 表明，如果对于每个满足 $x' \ll x$ 的 $x', x \in S$，都存在一个强软元素 $y \in S$ 使得 $x' \lhd y \leq x$，那么 S 就具有丰富的强软元素。

我们首先介绍 Cu-半群中关系 $\lhd$ 的基本性质。

引理 5.4. 设 S 是一个 Cu-半群，并设 $x', x, y \in S$ 满足 $x' \ll x \lhd y$。那么：

(1) 存在 $y' \in S$ 使得 $x' \lhd y' \ll y$。(2) 若 S 满足 (O6) 和 (O7)，则存在 $z \in S$ 使得 $z \leq y$ 且 $x' \lhd z \lhd x$。

证明。陈述 (1) 显然。为验证 (2)，假设 S 满足 (O6) 和 (O7)。取 $x'' \in S$ 使得 $x' \ll x'' \ll x$。于是 $x'' \ll x \leq \infty y$，从而我们得到 $n \in \mathbb{N}$使得 $x'' \leq ny$。

由 (O6) 应用于 $x' \ll x'' \leq ny = y + \ldots + y$可知，存在$e_1$、.....、$e_n \in S$使得

$$x' \ll e_1 + \ldots + e_n, \quad \text{and} \quad e_j \leq x'', y \text{ for } j = 1, \ldots, n.$$

选择 $e_j' \in S$ 使得

$$x' \ll e_1' + \ldots + e_n', \quad \text{and} \quad e_j' \ll e_j \text{ for } j = 1, \ldots, n.$$

由 (O7) 应用于 $e_j' \ll e_j \leq y$可知，存在 $z \in S$ 使得

$$e_1', \ldots, e_n' \leq z \leq y, e_1 + \ldots + e_n.$$

Then

$$x' \ll e_1' + \ldots + e_n' \leq nz, \quad \text{and} \quad z \leq e_1 + \ldots + e_n \leq nx'',$$

因此 $x' \lhd z \lhd x$。 □

接下来，我们展示在 Cu-半群中具有丰富的软元素的一个有用推论；参见命题 5.6。作为准备工作，我们先证明下面的引理。

引理 5.5. 设 (S,Σ) 是一个具有强软元素的丰 abundance 的带标度的 Cu-半群。那么，对于每个强软元素 $x \in \Sigma$ 以及每个满足 $x' \ll x$ 的 $x' \in S$，存在一个满足 $x' \ll y \ll x$ 的强软元素 $y \in S$。

证明. 我们改写 [APT18，命题 5.3.18] 的证明。取 z'、$z \in S$ 满足 $x' \ll z' \ll z \ll x$。由于 x 是强软的，根据命题 4.13，我们知道存在 $t \in S$ 使得

$$z + t \leq x \leq \infty t.$$

取 $t' \in S$ 使得

$$t' \ll t, \quad \text{and} \quad z \ll \infty t'.$$

由于 $t \leq x \in \Sigma$，我们有 $t \in \Sigma$。利用 (S, Σ) 具有丰富的软元素这一事实，我们得到一个强软元素 $u \in S$ 使得

$$t' \lhd u \ll t.$$

置 $y := z' + u$。则

$$x' \ll z' \leq z' + u = y, \quad \text{and} \quad y = z' + u \ll z + t \leq x.$$

此外，利用 $z' \leq \infty t' \leq \infty u$，由定理 4.14 可知 $y = z' + u$是强软的。□

如 [TV21a，定义 4.1], 中所定义的，回顾一下，Cu-半群 S 的子幺半群 T 是 S 的子 Cu-半群，当且仅当它对递增序列的上确界封闭，并且对于任意满足 $x' \ll x$的 $x \in T$ 和 $x' \in S$，存在$y \in T$使得 $x' \ll y \ll x$。

命题 5.6. 设 S 是一个具有丰富强软元素的 Cu-半群。那么， S 中强软元素组成的集合 S_{soft} 是 S的子 Cu-半群。

证明. 根据定理 4.14， S_{soft} 是 S 的一个子幺半群，并且对递增序列的上确界封闭。此外，根据引理 5.5，对于所有满足$x' \ll x$的 $x \in S_{\mathrm{soft}}$ 和 $x' \in S$，存在 $y \in S_{\mathrm{soft}}$ 使得 $x' \ll y \ll x$。□

在 [KR15 的定义 5.1], 中，Kirchberg 和 Rørdam 将一个 C*-代数 A 称为具有 2-分裂性质，如果存在满足 $a \perp b$的满元 a、$b \in A_+$。他们仅将其定义应用于含单位元的 C*-代数。下面我们提出一个概念，将 2-分裂性质扩展到所有遗传子 C*-代数，并允许存在一个小的“误差”（这仅与非含单位元子代数有关）。

定义 5.7. 如果一个 C*-代数 A 具有遗传 2-分裂性质，是指对于每个 $a \in A_+$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在正元素 b、$c \in \overline{aAa}$，使得 $b \perp c$ 且 $(a - \varepsilon)_+ \lhd b$、$c$。

如果一个带标度的 Cu-半群（S、Σ）具有遗传 2-分裂性质，是指对于满足 $x' \ll x$ 的每个 x'、$x \in \Sigma$，都存在 y、$z \in S$，使得 $y + z \leq x$，且 $x' \lhd y$、z。

我们首先证明，在满足 (O5)-(O7) 的 Cu-半群中（这些性质总是在 C*-代数的 Cuntz 半群中成立），可以确保在遗传 2-分裂性质的定义中，至少有一个“分裂”元素生成的理想不仅包含 x'，甚至还包含 x。

引理 5.8. 设 (S, Σ) 是一个满足 (O5)-(O7) 且具有遗传 2-分裂性质的带标度的 Cu-半群。设 x'、$x \in \Sigma$ 满足 $x' \ll x$。则存在 y、$z \in \Sigma$ 使得

$$y + z \leq x, \quad x' \lhd y, \quad and \quad x \lhd z.$$

证明。选取 x_1、x_2、$x_3 \in S$，使得

$$x' \ll x_1 \ll x_2 \ll x_3 \ll x.$$

利用 $x_3 \ll x$ 的遗传 2-分裂性质，我们得到 s、$t \in S$，使得

$$s + t \leq x, \quad \text{and} \quad x_3 \lhd s, t.$$

应用引理 5.4(2) 于 $x_1 \ll x_2 \lhd s$，我们得到 s'，使得

$$x_1 \lhd s' \lhd x_2, \quad \text{and} \quad s' \leq s.$$

应用引理 5.4(1) 于 $x' \ll x_1 \lhd s'$ 和 $x_2 \ll x_3 \lhd t$，我们得到 s'' 和 t'，使得

$$x' \lhd s'' \ll s', \quad \text{and} \quad x_2 \lhd t' \ll t.$$

对 $s' + t \leq x$、$s'' \ll s'$ 和 $t' \ll t$ 使用 (O5)，我们得到 $c \in S$，使得

$$s'' + c \leq x \leq s' + c, \quad \text{and} \quad t' \leq c.$$

我们有 $s' \lhd x_2 \lhd t' \leq c$，因此有 $x \lhd c$。此外，$x' \lhd s''$。这表明 $y :=s''$ 和 $z := c$ 具有所需的性质。□

定理 5.9. 设 (S, Σ) 是满足 (O5)-(O7) 的带标度的 Cu-半群。则以下条件等价:

(1) 对于每个 $x \in \Sigma$，都存在一个强软 $y \in S$，使得 $x \lhd y \leq x$。(2) (S, Σ) 具有丰富的强软元素，也就是说，对于每个 x'，若 $x \in\Sigma$ 满足 $x' \ll x$，则存在一个强软 $y \in S$，使得 $x' \lhd y \leq x$。(3) (S, Σ) 具有 2-分裂性质，也就是说，对于每个 x'，若 $x \in \Sigma$ 满足 $x' \ll x$，则存在 $y, z \in S$，使得 $y + z \leq x$，且 $x' \lhd y, z$。

证明。(1) 蕴含 (2) 是显然的。利用命题 4.13，我们可知 (2) 蕴含 (3)。

为证明 (3) 蕴含 (1)，设 $x \in \Sigma$。我们需要找到一个强软 $y \in S$，使得 $y \leq x \lhd y$。

取一个以 x 为上确界的 $\ll$-递增序列 $(x_n)_n$。我们将归纳地找出元素 $z_n \in S$（对于 $n \geq 0$）以及 $y_n \in S$（对于 $n \geq 1$），使得

$$y_{n+1} + z_{n+1} \leq z_n, \quad x_{n+1} \lhd y_{n+1}, \quad \text{and} \quad x \lhd z_n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

首先，令 $z_0 := x$。现在，取 $n \geq 0$，并假设我们已选定 z_n。对 $x_{n+1} \ll x \lhd z_n$ 使用引理 5.4(1)，可得 z_n'，使得

$$x_{n+1} \lhd z_n' \ll z_n.$$

对 $z_n' \ll z_n$ 应用引理 5.8，可得 y_{n+1}、z_{n+1}，使得

$$y_{n+1} + z_{n+1} \leq z_n, \quad z_n' \lhd y_{n+1}, \quad \text{and} \quad z_n \lhd z_{n+1}.$$

那么，$x_{n+1} \lhd z_n' \lhd y_{n+1}$ 和 $x \lhd z_n \lhd z_{n+1}$，正如所需。

接下来，我们调整元素 y_n，使它们生成一个递增理想序列。给定 $n \geq 1$，对 $x_{n-1} \ll x_n \lhd y_n$ 应用引理 5.4(2)，得到 y_n'，使得

$$x_{n-1} \lhd y_n' \lhd x_n, \quad \text{and} \quad y_n' \leq y_n.$$

令 $y := \sum_{n=1}^{\infty} y_n'$。对每个 $n \geq 1$，我们得到 $y_n' \lhd x_n \lhd y_{n+1}'$。因此，根据引理 4.12，$y$ 是强软的。

对于每个 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} y_1' + \ldots + y_{n-1}' + y_n' &\leq y_1 + \ldots + y_{n-1} + y_n + z_n \\ &\leq y_1 + \ldots + y_{n-1} + z_{n-1} \leq \ldots \leq y_1 + z_1 \leq z_0 = x \end{aligned}$$

因此 $y = \sup_n \sum_{j=1}^{n} y_j' \leq x$。此外，对于每个 $n \geq 1$，我们有

$$x_n \lhd y_n' \leq y,$$

并且，因此，$x = \text{上标}_n\, x_n \lhd y$。 □

备注 5.10。在定理 5.9 中，蕴含关系‘(1)⇒(2)⇒(3)’对任意 Cu-半群均成立。假设 (O5)-(O7) 仅对蕴含关系‘(1)⇐(3)’是必要的。

以下引理是引理 4.12 的 C^* 类比。

引理 5.11. 设 A 是一个 C*-代数，且令 $(a_n)_n$ 为 A 中一列正的、压缩的、两两正交元素。假设对于每个$n \in \mathbb{N}$，都有 $a_n \lhd a_{n+1}$。那么 $a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n$ 是软的。

证明. 我们验证命题 3.6 的条件 (3)。设 $\varepsilon > 0$。取 $N \in \mathbb{N}$ 使得$\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$。对于 $n \geq N$，我们有 $\frac{1}{2^n} a_n - \varepsilon \leq 0$，因此 $(\frac{1}{2^n} a_n - \varepsilon)_+ = 0$。由于这些 a_n两两正交，我们有

$$(a - \varepsilon)_+ = \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2^n} a_n - \varepsilon)_+ = \sum_{n=0}^{N} (\tfrac{1}{2^n} a_n - \varepsilon)_+.$$

令 $b := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n$。则 $b \perp (a - \varepsilon)_+$。对于 $n \geq N + 1$，显然$a_n \in$ 张成AbA。对于 $n \leq N$，由假设可得 $a_n \in$ 张成AbA。这意味着 $a \in$ 张成AbA，如所需。□

以下引理是引理 5.4 的 C^* 类比。

引理 5.12。设 A 是一个 C*-代数，并设 a、$b \in A_+$ 满足 $a \lhd b$。则：

(1) 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $(a - \varepsilon)_+ \lhd (b - \delta)_+$。(2) 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $c \in \overline{bAb}_+$ 使得 $(a - \varepsilon)_+ \lhd c \lhd a$。

证明。为证明 (1)，取 $\varepsilon > 0$。利用 [Bla06, 推论 II.5.2。13], 令 $N \in \mathbb{N}$ 和 $r_n \in A$ 对于 $n = 1$、...、N 满足 $\|a - \sum_{n=1}^{N} r_n^* b r_n\| < \varepsilon$。于是，存在$\delta > 0$ 使得

$$\left\| a - \sum_{n=1}^{N} r_n^* (b - \delta)_+ r_n \right\| < \varepsilon$$

应用 [KR00, 引理 2.5(ii)],，我们得到一个元素 $r \in A$，使得 $(a-\varepsilon)_+ = \sum_{n=1}^{N} (r_n r)^* (b - \delta)_+ (r_n r)$，如所要求。

为证明（2），取 $\varepsilon > 0$。令 $I :=$ 张成AaA。于是，$\overline{bAb} \cap I$ 生成 I 这个闭理想。因此，利用 $\overline{bAb} \cap I$中的一个近似单位，我们可以找到一个正元素 $c \in \overline{bAb} \cap I$，使得 a 到由 c生成的理想的距离至多为 ε。使用与（1）中类似的论证，可以证明 $(a - \varepsilon)_+ \lhd c$。因此，$c$具有所需的性质。□

引理 5.13。设 A 为一个 C*-代数，设 a、$c \in A_+$，设 $\varepsilon > 0$，并设 $(s_n)_n$ 为 Cu(A) 中的强软元素序列，满足对所有 n都有 $[a] \leq \infty s_n$，且

$$\ldots \ll s_2 \ll s_1 \ll s_0 \leq [c].$$

则存在一个软元素 $b \in \overline{cAc}$，使得 $(a - \varepsilon)_+ \lhd b$。

证明。对每个 $n \in \mathbb{N}$，利用 $s_{n+1} \ll s_n$ 以及 s_n 是强软元素这一事实，我们得到$t_{n+1} \in$ Cu(A)，使得

$$s_{n+1} + t_{n+1} \ll s_n, \quad \text{and} \quad s_{n+1} \ll \infty t_{n+1}.$$

选取 $s_n', t_{n+1}' \in$ Cu(A)，使得

$$s_n' \ll s_n, \quad s_{n+1} + t_{n+1} \ll s_n', \quad t_{n+1}' \ll t_{n+1}, \quad \text{and} \quad s_{n+1} \ll \infty t_{n+1}'.$$

接下来，我们归纳地选择 $c_n \in A_+$ 作为 $n \in \mathbb{N}$，选择 $d_n \in A_+$ 作为 $n \geq 1$，使得c_{n+1}、d_{n+1} 是$\overline{c_n A c_n}$中的正交元素，并且

$$s_n' \leq [c_n] \leq s_n, \quad \text{and} \quad t_n' \leq [d_n] \leq t_n.$$

对于 $n = 0$, 令 $c_0 := c_\circ$ 现在固定 $n \in \mathbb{N}$, 并假设我们已经选择了元素 c_0、...、$c_n \in A_+$ 以及 d_1、...、$d_n \in A_{+\circ}$ 于是

$$s'_{n+1} \ll s_{n+1}, \quad t'_{n+1} \ll t_{n+1}, \quad \text{and} \quad s_{n+1} + t_{n+1} \leq s'_n \leq [c_n],$$

应用 [RR13, 引理 2.3(ii)], , 我们在 $\overline{c_n A c_n}$ 中找到正交元素 c_{n+1} 和 d_{n+1}, 使得

$$s'_{n+1} \ll [c_{n+1}] \ll s_{n+1}, \quad \text{and} \quad t'_{n+1} \ll [d_{n+1}] \ll t_{n+1},$$

这就完成了归纳论证。

现在选取一个严格递减的正数序列 $(\gamma_n)_n$, 使得

$$\ldots < \gamma_2 < \gamma_1 < \gamma_0 = \varepsilon.$$

给定 $n \geq 1$, 我们有

$$[a] \leq \infty s_n \leq \infty t'_n \leq \infty [d_n],$$

因此 $(a - \gamma_{n+1})_+ \lhd a \lhd d_{n\circ}$

利用等式 $(a - \gamma_n)_+ = ((a - \gamma_{n+1})_+ - (\gamma_n - \gamma_{n+1}))_+$, 并应用引理 5.12 (2), 我们得到一个正元素 b_n in $\overline{d_n A d_n}$, 使得

$$(a - \gamma_n)_+ \lhd b_n \lhd (a - \gamma_{n+1})_+.$$

由构造可知, 元素 $b_1, b_2, \ldots$ 两两正交, 且对每个 $n \geq 1$, 都有 $b_n \lhd b_{n+1\circ}$ 因此, 根据引理 5.11, 元素 $b := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \|b_k\|} b_k$ 是软元素。注意, 由于每个 b_n 都在 $\overline{cAc}$ 中, 我们有 $b \in \overline{cAc}_\circ$ 此外, 还可得到

$$(a - \varepsilon)_+ = (a - \gamma_0)_+ \lhd b_1 \lhd b,$$

如所需。 □

定理 5.14. 设 A 为一个 C*-代数。则下列命题等价:

(1) A具有丰富的软元素。(2) A具有遗传 2-分裂性质。(

3) (Cu(A) Σ_A) 具有强软元素的丰 abundance。(4) (Cu(A)

Σ_A) 具有遗传 2-分裂性质。

证明。为说明 (1) 推出 (2), 假设 A 有丰富的软元, 并令 $a \in A_+$ 和 $\varepsilon > 0_\circ$ 我们需要找到正元素 b、$c \in \overline{aAa}$, 使得 $b \perp c$ 且 $(a - \varepsilon)_+ \lhd b$、$c_\circ$ 根据假设, 存在软元素 $d \in \overline{aAa}$, 满足 $(a - \frac{\varepsilon}{2})_+ \lhd d_\circ$ 注意,

$$(a - \varepsilon)_+ = \left((a - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)_+.$$

因此, 我们可以应用引理 5.12(1), 得到 $\delta > 0$, 使得

$$(a - \varepsilon)_+ \lhd (d - \delta)_+.$$

利用 d 是软的这一点, 由命题 3.6(3)可得正元素 $c \in \overline{dAd}$, 使得 $c \perp (d - \delta)_+$ 且 $d \lhd c_\circ$ 设 $b := (d - \delta)_{+\circ}$ 那么 b 和 c 具有所需的性质。

下面证明 (2) 推出 (4)。设 x'、$x \in \Sigma_A$ 满足 $x' \ll x_\circ$ 我们需要找到y、$z \in \in$Cu(A), 使得 $y + z \leq x$ 且 $x' \lhd y$、$z_\circ$

根据 [TV22b, 引理 3.3(1)], , 我们得到 $a \in A_+$ 使得 $x' \ll [a] \ll x_\circ$ 选择 $\varepsilon > 0$ 使得 $x' \ll [(a - \varepsilon)_+]_\circ$ 根据假设, 我们得到正交正元素 b、$c \in \overline{aAa}$, 满足 $(a - \varepsilon)_+ \lhd b$、$c_\circ$ 那么 $y : = [b]$ 和 $z : = [c]$ 具有所需的性质。

由于 Cuntz 半群 C*-代数满足 (O5)-(O7), 由定理 5.9 可知 (4) 蕴含 (3)。最后, 为证明 (3) 蕴含 (1), 假设 Cu(A) Σ_A 具有强软元素的丰 abundance, 并取 $a \in A_+$ 和 $\varepsilon > 0_\circ$ 我们需要找到一个软元素 $b \in \overline{aAa}$, 使得 $(a - \varepsilon)_+ \lhd b_\circ$

利用 Cu(A) Σ_A 对于 $[a] \in \Sigma_A$ 和 $[(a - \frac{\varepsilon}{3})_+] \ll [a]$ 具有强软元素的丰 abundance，我们得到一个强软的 $s_0 \in$ Cu(A)，使得

$$[(a - \tfrac{\varepsilon}{3})_+] \lhd s_0 \leq [a].$$

由于 $[(a - \frac{2\varepsilon}{3})_+] \ll [(a - \frac{\varepsilon}{3})_+]$，我们可以选取 $s_0' \in$ Cu(A) 使得

$$[(a - \tfrac{2\varepsilon}{3})_+] \lhd s_0' \ll s_0.$$

对 $s_0' \ll s_0$ 应用引理 5.5，我们得到一个强软 $s_1 \in$ Cu(A)，满足$s_0' \ll s_1 \ll s_0$。归纳地，我们得到 Cu(A) 中的强软元素序列 $(s_n)_n$，使得

$$\ldots \ll s_2 \ll s_1 \ll s_0 \leq [a],$$

并且对所有 n，都有 $[(a - \frac{2\varepsilon}{3})_+] \lhd s_0' \lhd s_n$。

应用引理 5.13（取 $\frac{\varepsilon}{3}$），我们得到一个软元素 $b \in \overline{aAa}$，使得

$$[(a - \varepsilon)_+] = [((a - \tfrac{2\varepsilon}{3})_+ - \tfrac{\varepsilon}{3})_+] \lhd b.$$

如所要求。 □

推论 5.15. 稳定的 C*-代数具有丰富的软元素，当且仅当其 Cuntz 半群具有丰富的强软元素。

设 A 是一个（非稳定）C*-代数。如果 $A \otimes \mathbb{K}$ 拥有丰富的软元素，那么 A 也如此。利用 Cu(A) $\cong$ Cu($A \otimes \mathbb{K}$)，我们推得，只要 A 的 Cuntz 半群拥有丰富的软元素，A 就拥有丰富的软元素。反过来则仍不明确：

问题 5.16。设 A 是一个 C*-代数。如果一个 A 具有丰富的软元素，那么它的稳定化是否也具有?

鉴于定理 5.14，上述问题等价于以下问题：如果 A 是一个 C*-代数，使得 (Cu(A) Σ_A) 具有强软元素的丰 abundance，那么 Cu(A) 是否具有强软元素的丰 abundance? 也可以在满足诸如 (O5)-(O8) 等附加性质的带标度 Cu-半群这一更抽象的框架下提出这个问题。

6. Completely soft elements in C*-algebras

我们将完全软算子定义为 C*-代数中的正元素，其每个截断都是软的；见定义 6.1。我们通过谱性质刻画这些元素；见命题 6.2。本节的主要结果是定理 6.10，其中我们证明：只要 C*-代数拥有丰富的软元素，它就也拥有丰富的此类元素。为了在 C*-代数中构造完全软元素，我们沿用 [Thi20a] 中提出的一种策略，将正元素视为开投影的适当“路径”。

定义 6.1. 我们称 C*-代数中的正元素 a 是完全软的，如果对于每个 $\varepsilon \geq 0$，元素 $(a - \varepsilon)_+$ 都是软的。

命题 6.2. 设 A 是一个 C*-代数，且 $a \in A_+$。那么以下条件等价：

(1) 元素 a 是完全软的。(2) 对于每个闭理想 $I \subseteq A$，$a + I \in A/I$ 的谱为 $[0, \|a + I\|]$。(3) 对于每个闭理想 $I \subseteq A$，$a + I \in a/I$ 的谱是连通的，且包含 0。

证明。设 $\varepsilon \geq 0$，设 $I \subseteq A$ 为一个闭理想，并设 $\pi_I \colon A \to A/I$ 表示商映射。那么 $(\pi_I(a) - \varepsilon)_+ = \pi_I((a - \varepsilon)_+)$。利用谱映射定理（例如参见 [Bla06，命题 II.2.3。2]），我们看到 ε 包含于

$\mathrm{sp}(\pi_I(a)) \cap (\varepsilon, \infty)$ 的闭包中，当且仅当 0 不是（$\pi_I(a) - \varepsilon$）$_+$的谱中的孤立点。

由命题 3.6， a 是完全软的，当且仅当对于每个 $\varepsilon \geq 0$ 以及每个闭理想 $I \subseteq A$, 元素 $\pi_I((a-\varepsilon)_+)$ 要么为零，要么 0 在其谱中不是孤立点。利用上述考虑，这又等价于 (2)，而显然也等价于 (3)。□

命题 6.2 的直接推论是，完全软元素在商中的像仍然是完全软的，这与命题 3.8 类似。命题 3.7 的类似结论是否也成立，目前尚不清楚：

问题 6.3。设 $\varphi\colon A \to B$ 是 C*-代数之间的一个完全正零阶映射。给定一个完全软元素 $a \in A_+$， $\varphi(a)$ 是否完全软?

6.4. 设 A 是一个 C*-代数。回顾一下，若投影 $p \in A^{**}$ 是 A_+中某个递增网的弱*极限，则称其为开投影；记 $\mathcal{O}(A)$ 为 A中所有开投影的集合。对于每个开投影 p , 子 C*-代数 $pA^{**}p \cap A$ 都是遗传的；反过来， A 的每个遗传子 C*-代数都由 A的某个唯一开投影以此形式给出；参见 [Ped79，第 77 页及后续页]。

与 [Thi20a 第 2], 节中一样，我们通过设定 $p \prec q$ 来定义 $\prec$ 在 $\mathcal{O}(A)$ 上的关系，条件是存在 $a \in A_+$ 使得 $p \leq a \leq q$。也就是说，若存在 $a \in A_+$ 使得 $p = pa$ 且 $a = aq$。若与 $p \in \mathcal{O}(A)$ 相关联的遗传子 C*-代数 $A_p := pA^{**}p \cap A$ 是软的，我们就称 $p \in \mathcal{O}(A)$ 是软的。我们用 $\mathrm{supp}(a)$ 表示任意正元素 $a \in A_+$ 的支撑投影。注意，$\mathrm{supp}(a)$ 属于 $\mathcal{O}(A)$。

根据 [Thi20a，定义 2.4], , 若映射 $f\colon (-\infty, 0] \to \mathcal{O}(A)$ 满足 $f(s) = \sup\{f(s') : s' < s\}$ 对所有 $s \in (-\infty, 0]$ 均成立，且只要 $s < t$ 属于 $(-\infty, 0]$，就有 $f(s) \prec f(t)$，则称该映射为一条路径。

给定一个正收缩元 $a \in A$，映射 $f_a\colon (-\infty, 0] \to \mathcal{O}(A)$ 由$f_a(t)$ 定义为: $= \mathrm{supp}((a+t)_+)$ 是一条满足 $f_a(-1) = 0$ 的路径。反之，根据 [Thi20a，命题 2.6], , 每条满足 $f(-1) = 0$ 的路径 f 都以这种方式由一个正收缩元产生。

引理 6.5. 设 A 是一个具有丰富的软元素的 C*-代数，设 $p, q \in \mathcal{O}(A)$ 满足 $p \prec q$, 并假设 q 是软的。则存在 $r \in \mathcal{O}(A)$，使得 r 是软的且 $p \prec r \prec q$。

证明。给定任意 $\varepsilon > 0$，令 $f_\varepsilon\colon [0, \infty) \to [0, 1]$ 为如下映射：在 $[0, \varepsilon/2]$ 中取值 0，在 $[\varepsilon, \infty)$ 中取值 1，并从 $\varepsilon/2$ 到 ε 线性取值。

由于 $p \prec q$，存在 $a \in A_+$ 使得 $p \leq a \leq q$。因此，有

$$p \leq f_1(a) \ll f_{1/2}(a) \ll f_{1/4}(a) \leq q.$$

利用 $f_{1/4}(a) \in A_q$，可知存在 $(A_q)_+$ 中的一个元素，它作为 $f_{1/2}(a)$ 的单位元。由命题 2.9，我们得到一个满足 $f_{1/2}(a) \lhd d \perp f_{1/2}(a)$ 的正元素 $d \in A_q$。应用引理 5.12(1)，我们得到 $\delta > 0$, 使得 $(f_{1/2}(a) - \frac{1}{2})_+ \lhd (d-\delta)_+$。注意到有 $f_1(a) \lhd (f_{1/2}(a) - \frac{1}{2})_+$。

应用 A对于 $(d - \frac{\delta}{2})_+$和 $\frac{\delta}{2}$具有丰富的软元素这一事实，我们得到一个软元素 e , 使得

$$\left((d-\tfrac{\delta}{2})_+ - \tfrac{\delta}{2}\right)_+ \lhd e, \quad \text{and} \quad e \in \overline{(d-\tfrac{\delta}{2})_+ A (d-\tfrac{\delta}{2})_+},$$

并且不妨假设 e 是压缩的。

于是，有

$$f_1(a) \lhd (f_{1/2}(a) - \tfrac{1}{2})_+ \lhd (d-\delta)_+ = \left((d-\tfrac{\delta}{2})_+ - \tfrac{\delta}{2}\right)_+ \lhd e.$$

此外，利用 $f_1(a) \perp e$ 和 $f_1(a) \lhd e$，可知 $f_1(a) + e$ 是软的，因此，开投影 $r := \mathrm{supp}(f_1(a) + e)$ 也是软的。由于$f_1(a) + e$ 是压缩的，我们有 $p \leq f_1(a) \leq f_1(a) + e \leq \mathrm{supp}(f_1(a) + e) = r$, 因此 $p \prec r$。

我们还有 $e \in \overline{(d-\frac{\delta}{2})_+ A (d-\frac{\delta}{2})_+}$ 和 $(d-\frac{\delta}{2})_+ \ll f_{\delta/2}(d)$，因此 $e \ll f_{\delta/2}(d)$。此外，我们还有 $f_1(a) \ll f_{1/2}(a)$，以及 $f_{1/2}(a) \perp f_{\delta/2}(d)$。这意味着

$$f_1(a) + e \ll f_{1/2}(a) + f_{\delta/2}(d).$$

因此，

$$r = \operatorname{supp}(f_1(a) + e) \leq f_{1/2}(a) + f_{\delta/2}(d) \leq q,$$

因此 $r \prec q$。 □

为准备引理 6.7 的证明，我们回顾 Bice 和 Koszmider 在 [BK19] 中的一个结果。按照 [BK19，我们将 1], 记作 $a \ll_\varepsilon b$ 正元素 a 以及 b 在 C*-代数中的元素，并且 $\varepsilon > 0$ 当 $\|a - ab\| < \varepsilon$ 时。

定理 6.6（[BK19，推论 4.2]）。对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得以下条件成立：如果 a、b、c、d 是 C*-代数 A 中的正压缩元，使得

$$a \ll b \ll_\delta c \ll d$$

~则存在一个酉元 $u \in A$ 使得

$$uau^* \ll d, \quad and \quad \|u - 1\| < \varepsilon.$$

给定开投影 $p, q, r \in \mathcal{O}(A)$，满足 $p, q \prec r$。注意，一般而言，不存在满足 p, $q \prec r' \prec r$ 的开投影 r'。不过，借助 [BK19], 中的结果，我们将在下文的引理 6.7 中证明，这一结论的近似版本确实成立。

若存在 $a \in A_+$ 使得 $\|p - pa\| < \varepsilon$ 且 $a \leq q$，我们记作 $p \prec_\varepsilon q$。

引理 6.7. 设 p, q, r 是 C*-代数 A 中满足 $p, q \prec r$ 的开投影。取 $\varepsilon > 0$。则存在 $r' \in \mathcal{O}(A)$，使得 $p \prec r' \prec r$ 且 $q \prec_\varepsilon r'$。

证明. 利用函数演算，我们可以在 A 中找到正的压缩元素 a', a, b', b，使得

$$p \leq a' \ll a \leq r, \quad \text{and} \quad q \leq b' \ll b \leq r.$$

取 $\delta > 0$，使定理 6.6 对 $\varepsilon/3$ 和 δ 成立；注意，我们可以假设 $\delta \leq \varepsilon/3$。利用函数演算以及 A_r 中的一个近似单位，我们可以找到正的压缩元素 $c', c \in A$，使得

$$a \ll_\delta c' \ll c, \quad \text{and} \quad b \ll_\delta c' \ll c.$$

~现在，根据定理 6.6，存在一个酉元 $u \in A_r$ 使得

$$ua'u^* \ll c, \quad \text{and} \quad \|1 - u\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Then

$$a' \ll u^* c u, \quad \text{and} \quad b \ll_\delta c' \ll_{2\varepsilon/3} u^* c u,$$

因此 $b \ll_\varepsilon u^* c u$。现在 $r' := \operatorname{supp}(u^* c u)$ 具有所需的性质。 □

引理 6.8。设 A 是一个 C*-代数，且 $(p_j)_j$ 是 $\prec$-定向的软开投影族，包含于 A 中。则开投影 $\sup_j p_j$ 是软的。

证明。设 p 是 $(p_j)_j$ 的上确界。于是，

$$A \cap pA^{**}p = \overline{A \cap \left(\bigcup_j p_j A^{**} p_j \right)}.$$

由此可知，每个 $A \cap p_j A^{**} p_j$ 都是 $A \cap pA^{**}p$ 的子 C*-代数，并且族 $(A \cap p_j A^{**} p_j)_j$ 逼近 $A \cap pA^{**}p$。由于每个 $A \cap p_j A^{**} p_j$ 都是软的，根据命题 2.17，我们知道 $A \cap pA^{**}p$ 是软的。根据定义， p 是软的。□

定理 6.9. 设 A是一个具有丰富的软元素的 C*-代数，且 $a \in A_+$ 是软的。那么存在一个压缩的、完全软的元素 b，使得 $\overline{aAa} = \overline{bAb}$。

证明。令 $p(0) := \mathrm{supp}(a)$。首先证明存在一个软开投影序列 $p(-\frac{1}{2^n}) \in \mathcal{O}(A)$，使得

$$\mathrm{supp}((a - \tfrac{1}{2^n})_+) \prec_{1/2^n} p(-\tfrac{1}{2^n}) \prec p(-\tfrac{1}{2^{n+1}}) \prec p(0)$$

对每个 $n \geq 1$ 均成立。

对于 $n = 1$，将引理 6.5 应用于 $\mathrm{supp}((a - \frac{1}{2})_+) \prec p(0)$，即可得到一个具有所需性质的软开投影 $p(-\frac{1}{2})$。

现在固定 $n \in \mathbb{N}$，并假设我们已为每个 $k \leq n$ 找到投影 $p(-\frac{1}{2^k})$。将引理 6.7 应用于 $p(-\frac{1}{2^n})$、$\mathrm{supp}((a - \frac{1}{2^{n+1}})_+) \prec p(0)$ 和 $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$，可得到 $r \in \mathcal{O}(A)$，使得

$$p(-\tfrac{1}{2^n}) \prec r \prec p(0), \quad \text{and} \quad \mathrm{supp}((a - \tfrac{1}{2^{n+1}})_+) \prec_{1/2^{n+1}} r.$$

由于 $r \prec p(0)$，由引理 6.5 可知存在一个软开投影 $p(-\frac{1}{2^{n+1}})$，使得 $r \prec p(-\frac{1}{2^{n+1}}) \prec p(0)$，如所需。特别要注意，$p(0) = \sup_n p(-\frac{1}{2^n})$。

对每个 $p(-\frac{1}{2^n})$ 重复应用前述构造，我们便能为每个二进有理数 $t \in [-1, 0]$ 找到软开投影 $p(t)$，使得 $p(-1) = 0$，并且当 $s < t$ 时，$p(s) \prec p(t)$。

令 $r(-1) = 0$，并且

$$r(t) := \sup\big\{p(s) : s \in [-1, t) \text{ dyadic}\big\}.$$

对每个 $t \in (-1, 0]$。

注意

$$r(0) \leq p(0), \quad \text{and} \quad r(0) \geq \sup_n p(-\tfrac{1}{2^n}) = p(0),$$

这意味着 $r(0) = p(0)$。此外，由引理 6.8 可知，每个 $r(t)$ 都是软的。

因此，$r\colon [-1, 0] \to \mathcal{O}(A)$ 是 [Thi20a，定义 2.4] 意义下的一条路径。根据 [Thi20a，命题 2.6]，存在唯一的正元素 $b \in A_+$，使得对每个 $t \in [-1, 0]$，$\mathrm{supp}((b + t)_+) = r(t)$。由于 $r(-1) = 0$，元素 b 是压缩的。此外，由于 $\mathrm{supp}(b) = r(0) = p(0) = \mathrm{supp}(a)$，我们有 $\overline{aAa} = \overline{bAb}$。

最后，按照构造，b 的每个截断都是软的，正如所要求的。 □

回顾定义 5.2，如果对于每个 $a \in A_+$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个正的软元素 $b \in \overline{aAa}$，使得 $(a - \varepsilon)_+ \lhd b$，我们就称 C*-代数 A 具有丰富的软元素。因此，下一个结果中的陈述 (2) 也可以表述为“A 具有丰富的完全软元素”。

定理 6.10。设 A 为 C*-代数。则以下各条件等价：

(1) C*-代数 A 具有丰富的软元素。(2) 对于每个 $a \in A_+$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在一个正的完全软元素$b \in \overline{aAa}$，使得 $(a - \varepsilon)_+ \lhd b$。

证明。显然，（2）蕴含（1）。反之，假设 A 具有丰富的软元素。为验证（2），取 $a \in A_+$ 和 $\varepsilon > 0$。由于 A 具有丰富的软元素，因此可以找到一个软元素 $c \in \overline{aAa}_+$，使得 $(a - \varepsilon)_+ \in$ 张成AcA。根据定理 6.9，存在一个完全软元素 $b \in A_+$，使得 $\overline{cAc} = \overline{bAb}$。这意味着 $b \in \overline{aAa}_+$ 且 $(a - \varepsilon)_+ \in$ 张成AbA，从而得到（2）。□

7. Softness and the Global Glimm Property

按照 [KR02，定义 4.12], ，如果对于每个 $a \in A_+$、每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个 $k \geq 2$ ，都存在一个 $*$-同态 $\varphi\colon C_0(0,1] \otimes M_k \to \overline{aAa}$，使得 $(a-\varepsilon)_+$ 属于由 φ 的像生成的理想，则称 C*-代数 A 具有全局 Glimm 性质。

具有全局 Glimm 性质的每个 C*-代数都没有非零的初等理想商（也就是说，按照 [TV21b] 的意义，它是处处非散射的）。判断每个处处非散射的 C*-代数是否都具有全局 Glimm 性质，是一个被称为全局 Glimm 问题的开放问题；参见 [TV22b]。

我们证明了全局 Glimm 性质蕴含丰富的软元素，而丰富的软元素又蕴含处处非散射性，从而为这一问题带来了新的认识；参见命题 7.4 和 7.7。这将全局 Glimm 问题分解为两个子问题；参见问题 7.8。

为证明这些结果，我们利用了以下事实：C*-代数 A 的处处非散射性和全局 Glimm 性质，反映在其 Cuntz 半群 $\mathrm{Cu}(A)$ 的可除性上（第 7.1 段回顾了这些性质）。更准确地说， A 处处非散射，当且仅当 $\mathrm{Cu}(A)$ 是弱 $(2,\omega)$-可除的；参见 [TV21b，定理 8.9]。此外， A 具有全局 Glimm 性质，当且仅当 $\mathrm{Cu}(A)$ 是 $(2,\omega)$-可除的；参见 [TV22b，定理 3.6]。

这将全局 Glimm 问题转化为一个关于 Cuntz 半群的问题：弱 $(2,\omega)$-可除性是否蕴含 $(2,\omega)$-可除性?

在 [TV22b] 中，我们确定了 Cu-半群的两个条件，它们恰好刻画了所期望的可除性蕴含关系成立的情形：理想滤过性和性质 (V)。更确切地说，满足 (O5)-(O8) 的 Cu-半群是 $(2,\omega)$-可除的，当且仅当它是弱 $(2,\omega)$-可除的、理想滤过的，并且具有性质 (V)；参见[TV22b, 定理 6.3]。下面，我们将理想滤过性和性质 (V) 直接推广到带标度的 Cu- 半群（定义 7.9 和 7.10 ），并指出 [TV22b] 的主要结果可以推广到带标度的情形。

我们证明，丰富的强软元素蕴含性质 (V)（引理 7.11），由此可得，满足 (O5)-(O8) 的 Cu-半群是 $(2,\omega)$-可除的，当且仅当它是理想滤过的，并且具有丰富的强软元素；参见定理 7.12。由此可知，一个 C*-代数具有全局 Glimm 性质，当且仅当它具有丰富的软元素，并且其带尺度的 Cuntz 半群是理想滤过的；参见定理 7.14。

7.1. 按照 [RR13, 定义 5.1], ，若一个 S Cu-半群 S 对于每一对 $x' \ll x$ in S，都存在有限多个元素y_1、……、$y_n \in S$，使得 $x' \leq y_1 + \ldots + y_n$，并且对每个 $j \leq n$ 都有 $2y_j \leq x$，则称其为弱 $(2,\omega)$-可除的。

类似地，若 S in S 时，存在 $y \in S$ 和 $n \in \mathbb{N}$，使得 $2y \leq x$ 和 $x' \leq ny$，则称其为 $(2,\omega)$- 可除的。

在 [TV22b 的引理 3.5], 中，我们证明了，满足 (O5)-(O7) 的 Cu-半群，只要尺度中的所有元素都具有该性质，它就是 $(2,\omega)$-可除的。下一个结果表明，对于弱 $(2,\omega)$-可除性，相应的结论同样成立。

引理 7.2. 设 (S,Σ) 是满足 (O6) 的带标度的 Cu-半群，并假设 Σ 中的每个元素都是弱 $(2,\omega)$-可分的。那么 S 是弱 $(2,\omega)$-可分的。

证明。为证明 S 中的每个元素都是弱 ω-可除的，令 x'、$x \in S$ 满足 $x' \ll x$。取 $x'' \in S$ 使得 $x' \ll x'' \ll x$。由于 Σ 是一个尺度，存在 n 和 y_1，……，$y_n \in \Sigma$，使得 $x'' \leq y_1 + \ldots + y_n$。应用 (O6)，我们得到 z_1，……，z_n，使得

$$x' \ll z_1 + \ldots + z_n, \quad \text{and} \quad z_j \leq x \text{ for } j = 1, \ldots, n.$$

选取 z_j' 使得

$$x' \ll z_1' + \ldots + z_n', \quad \text{and} \quad z_j' \ll z_j \text{ for } j = 1, \ldots, n.$$

每个 z_j 都属于 Σ，因此是弱 $(2,\omega)$-可除的。于是我们得到元素 $v_{j,\,1}$、……、$v_{j,\,N_j}$，使得

$$z_j' \leq v_{j,1} + \ldots + v_{j,N_j}, \quad \text{and} \quad 2v_{j,k} \leq z_j \text{ for } k = 1, \ldots, N_j.$$

于是，对于每个 j 和 k，都有 $2v_{j,\,k} \leq z_j \leq x$，并且

$$x' \leq \sum_j z_j' \leq \sum_{j,k} v_{j,k}.$$

这表明元素 $v_{j,\,k}$ 具有所需的性质。 □

接下来，我们证明：只要一个 C*-代数中存在大量强软元素，它就是处处非散射的；见下方的命题 7.4。为证明这一点，我们需要下面的引理。

引理 7.3。设 S 是满足 (O6) 的 Cu-半群，且 $x \in S$ 是弱软的。那么 x 是弱 $(2,\omega)$-可除的。

证明。为验证 x 是弱 $(2,\omega)$-可分的，设 $x' \in S$ 满足 $x' \ll x$。取$x'' \in S$ 使得 $x' \ll x'' \ll x$。由于 x 是弱软的，我们得到 $n \geq 1$ 和t_1，……，$t_n \in S$使得

$$x'' + t_1 \ll x, \quad \ldots, \quad x'' + t_n \ll x, \quad \text{and} \quad x'' \ll t_1 + \ldots + t_n.$$

将 (O6) 应用于 $x' \ll x'' \ll t_1 + \ldots + t_n$，我们得到 z_1，……，$z_n \in S$使得

$$x' \ll z_1 + \ldots + z_n, \quad z_1 \ll x'', t_1, \quad \ldots, \quad z_n \ll x'', t_n.$$

Then

$$2z_j \ll x'' + t_j \ll x$$

对于每个 $j = 1$，……，n。因此，z_1，……，z_n具有所需的性质。 □

命题 7.4. 设 (S, Σ) 是满足 (O6) 且具有丰富强软元素的带标度 Cu-半群。那么 S 是弱 $(2,\omega)$-可分的。

因此，如果一个 C*-代数具有丰富的软元素，那么它处处非散射。

证明。根据引理 7.2，只需验证 Σ 中的每个元素都是弱（$2,\omega$）-可除的。设 x'、$x \in \Sigma$满足 $x' \ll x$。取满足 $x' \ll x'' \ll x''' \ll x$的 x''、$x''' \in S$。于是存在满足 $x''' \lhd y \ll x$的强软元素 $y \in S$。取满足 $y' \ll y$和 $x'' \lhd y'$的 $y' \in S$。根据引理 7.3，y是弱（$2,\omega$）-可除的，这意味着我们可以找到 n和 z_1，……，$z_n \in S$，使得

$$y' \leq z_1 + \ldots + z_n, \quad \text{and} \quad 2z_j \leq y \text{ for } j = 1, \ldots, n.$$

利用 $x' \ll x'' \lhd y'$，我们得到满足 $x' \leq Ny'$的 $N \in \mathbb{N}$。然后，分别取 N个 z_1、……、z_n的副本，即可得到具有所需性质的元素。

对于该陈述的第二部分，设 A 是一个具有丰富软元素的 C*-代数。根据定理 5.14，带标度的 Cu-半群 $(\mathrm{Cu}(A)\ \Sigma_A)$ 具有丰富的强软元素。由于 C*-代数的 Cuntz 半群总是满足 (O6)，我们可以应用上述论证，推得 $\mathrm{Cu}(A)$ 是弱 $(2,\omega)$-可除的。因此，根据 [TV21b，定理 8.9]，A 处处非散射。□

下面的命题 7.7 展示了拥有大量强软元素与为 $(2,\omega)$-可除之间的确切区别：在第一种情况下，对于每个元素 x，都可以找到一个强软元素 y，使得 $y \leq x \leq \infty y$（定理 5.9）。在第二种情况下，可以选择 y，使得 $2y \leq x \leq \infty y$。

在下面引理 7.6 的证明中，我们将应用 (O5) 的以下有用推论：

引理 7.5（[TV22b，引理 2.2]）。设 S 是满足 (O5) 的 Cu-半群，并设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $x', x, z \in S$ 满足 $x' \ll x$ 和 $(k+1)x \leq z$。那么存在 $y \in S$，使得 $kx' + y \leq z \leq (k+1)y$ 并且 $x' \ll y$。

引理 7.6。设 $k \in \mathbb{N}$，并设 S 是满足 (O5) 的 $(2,\omega)$-可除 Cu-半群。那么，每当 $(x_n)_n$ 是 S中的一个 $\ll$-递增序列时，都存在一个序列 $(y_n)_n$，使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} k y_n \leq \sup_n x_n, \quad \textit{and} \quad y_n, x_{n+1} \ll \infty y_{n+1}$$

对每个 $n \geq 0$。

证明。下面我们将用到，根据 [TV22b，引理 3.4]，S 是 $(k+1,\omega)$-可除的。

令 $(x_n)_n$ 为 S中的一个 $\ll$-递增序列，并令 x 为其上确界。对 n使用归纳法，我们将找出元素 y_j、$c_j \in S$，使得对于 $j \in \mathbb{N}$

$$k y_{j+1} + c_{j+1} \leq c_j \leq \infty c_{j+1}, \quad y_j \ll c_j, \quad \text{and} \quad y_j, x_{j+1} \ll \infty y_{j+1}.$$

对所有 $j \geq 0$均成立，并且 $k y_0 + c_0 \leq x \leq (k+1)c_0$。

首先，利用 S对 $x_0 \ll x$是（$k+1$，ω）-可除的这一事实，我们找到 $z \in S$使得

$$(k+1)z \ll x, \quad \text{and} \quad x_0 \ll \infty z.$$

取 $y_0 \in S$ 使得

$$y_0 \ll z, \quad \text{and} \quad x_0 \ll \infty y_0.$$

然后，由引理 7.5可知，存在 $c_0 \in S$ 满足

$$k y_0 + c_0 \leq x \leq (k+1)c_0, \quad \text{and} \quad y_0 \ll c_0,$$

并且容易验证，c_0、y_0 满足所要求的条件。

现在固定 $n \in \mathbb{N}$，并假设对于每个 $j \leq n$，我们都已找到元素 y_j、c_j。特别地，我们有 $x \leq \infty c_0 \leq \infty c_n$。选取 $c_n' \in S$ 使得

$$c_n' \ll c_n, \quad y_n \ll c_n', \quad \text{and} \quad x_{n+1} \ll \infty c_n'.$$

利用 S 对于 $c_n' \ll c_n$ 是 $(k+1,\omega)$-可除的这一事实，可找到 $z_{n+1} \in S$ 使得

$$(k+1)z_{n+1} \ll c_n, \quad \text{and} \quad c_n' \ll \infty z_{n+1}.$$

选取 $y_{n+1} \in S$ 使得

$$y_{n+1} \ll z_{n+1}, \quad \text{and} \quad c_n' \ll \infty y_{n+1}.$$

应用引理 7.5，我们找到 $c_{n+1} \in S$，满足

$$k y_{n+1} + c_{n+1} \leq c_n \leq (k+1)c_{n+1}, \quad \text{and} \quad y_{n+1} \ll c_{n+1},$$

这就完成了归纳论证。

最后，注意到对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\begin{aligned} k y_0 + \ldots + k y_n &\leq k y_0 + \ldots + k y_n + c_n \leq k y_0 + \ldots + k y_{n-1} + c_{n-1} \\ &\leq \ldots \leq k y_0 + c_0 \leq x. \end{aligned}$$

对 n 取上确界，即得所需结果。 □

命题 7.7. 设 S 是满足 (O5) 的 $(2,\omega)$-可除 Cu-半群。则对于每个 $x \in S$ 和 $k \in \mathbb{N}$，存在一个强软元素 $y \in S$，使得 $ky \leq x \leq \infty y$。特别地，S 具有丰富的强软元素。

因此，如果 C*-代数具有全局 Glimm 性质，那么它就有丰富的软元素。

证明。设 $x \in S$ 和 $k \in \mathbb{N}$，并设 $(x_n)_n$ 是 S 中的一个 $\ll$-递增序列，其上确界为 x。利用引理 7.6，我们找到一个序列 $(y_n)_n$，使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} k y_n \leq x, \quad \text{and} \quad y_n, x_{n+1} \ll \infty y_{n+1}$$

对每个 $n \geq 0$。

令 $y := \sum_{n=0}^{\infty} y_n$，按构造可知其满足 $ky \leq x$。然后，由于我们有

$$x_n \leq \infty y_n \leq \infty y,$$

对每个 n，我们可推出 $x \leq \infty y$。此外，根据引理 4.12，y 是强软的。

对于陈述的第二部分，设 A 是一个具有全局 Glimm 性质的 C*-代数。根据 TV22b 的定理 3.6]，Cu(A) 是 $(2, \omega)$-可除的。由于 C*-代数的 Cuntz 半群总是满足 (O5)，我们可以应用上述论证，推出 Cu(A) 拥有丰富的强软元素。因此，根据定理 5.14，A（事实上，甚至 $A \otimes \mathbb{K}$）拥有丰富的软元素。□

根据命题 7.7，若一个 C*-代数具有全局 Glimm 性质，则它拥有丰富的软元素；根据命题 7.4，若一个 C*-代数拥有丰富的软元素，则它处处非散射。因此，全局 Glimm 问题（即询问每个处处非散射的 C*-代数是否都具有全局 Glimm 性质）可分解为以下子问题：

问题 7.8。如果一个 C*-代数处处非散射，它是否具有丰富的软元素？如果一个 C*-代数具有丰富的软元素，它是否具有全局 Glimm 性质？

在 [TV22b，定义 4.1、5.1], 中，我们为 Cu-半群定义了理想滤性和性质 (V)。我们将对带尺度 Cu-半群使用以下直接的推广。

定义 7.9。若一个带标度的 Cu-半群 (S, Σ) 对于所有满足以下条件的 $v', v \in S$ 以及 x, $y \in \Sigma$ 都是理想滤过的：

$$v' \ll v \ll \infty x, \infty y,$$

存在 $z \in S$ 使得

$$v' \ll \infty z, \quad \text{and} \quad z \ll x, y.$$

定义 7.10。若给定满足以下条件的 $d_1', d_1, d_2', d_2, c, x \in \Sigma$，一个带标度的 Cu-半群 (S, Σ) 具有性质 (V)：

$$d_1' \ll d_1, \quad d_2' \ll d_2, \quad d_1, d_2 \ll c, \quad \text{and} \quad c + d_1, c + d_2 \ll x,$$

存在 $y, z \in S$ 满足

$$y + z \leq x, \quad \text{and} \quad d_1' + d_2' \leq \infty y, \infty z.$$

引理 7.11. 设 (S, Σ) 是一个具有强软元素的丰 abundance 的带标度 Cu-半群。那么，(S, Σ) 具有性质 (V)。

证明. 设 $d_1', d_1, d_2', d_2, c, x \in \Sigma$ 使得

$$d_1' \ll d_1, \quad d_2' \ll d_2, \quad d_1, d_2 \ll c, \quad \text{and} \quad c + d_1, c + d_2 \ll x.$$

选择 $x'', x' \in S$ 使得

$$x'' \ll x' \ll x, \quad \text{and} \quad c + d_1, c + d_2 \ll x''.$$

利用 (S, Σ) 对 $x' \ll x$ 具有强软元素的丰 abundance 这一点，我们找到一个满足 $x' \lhd s \ll x$ 的强软元素 $s \in S$。选取 $y \in S$ 使得 $x'' \lhd y \ll s \ll x$。

由于 s 是强软的，根据命题 4.13，我们知道存在满足 $y + z \leq s \leq \infty z$ 的 $z \in S$。容易验证，元素 y, z 具有所需的性质。□

定理 7.12. 设 S 是满足 (O5)-(O8) 的 Cu-半群。那么以下条件等价：

(1) S 是 $(2, \omega)$-可除的。(2) Σ 中的每个元素都是 $(2, \omega)$-可除的。(3) Σ 中的每个元素都是弱 $(2, \omega)$-可除的，并且 (S, Σ) 是理想滤过的且具有性质 (V)。(4) (S, Σ) 是理想滤过的，并且对于 S 中的每个 x，都存在一个强软元素 $y \in S$，使得 $2y \leq x \leq \infty y$；(5) (S, Σ) 是理想滤过的，且强软元素极为丰富。

证明。由 [TV22b，引理 3.5]，可知 (1) 和 (2) 等价。

[TV22b] 第 6 节中的结果及证明，可以直接推广到（弱）$(2, \omega)$-可除性、理想滤性和性质 (V) 的缩放版本。特别地，[TV22b，定理 6.3] 的缩放版本表明 (2) 和 (3) 等价。

利用命题 7.7，我们看到 (1) 蕴含 (4)，而 (4) 蕴含 (5) 显然成立。最后，由引理 7.11 和命题 7.4，(5) 蕴含 (3)。□

推论 7.13. 设 S 是满足 (O5)-(O8) 的 Cu-半群。假设 $S = S_{\mathrm{soft}}$。那么 S 是 $(2, \omega)$-可除的，当且仅当 S 是理想滤过的。

定理 7.14. 设 A 是一个 C*-代数。则以下条件等价：

(1) A 具有全局 Glimm 性质。(2) A 具有丰富的软元素，且 $(\mathrm{Cu}(A)\ \Sigma_A)$ 是理想滤过的。(3) A 具有丰富的软元素，且 $\mathrm{Cu}(A)$ 是理想滤过的。

证明. 设 A 是一个 C*-代数。由 [TV22b, 定理 3.6] 可知，A 具有全局 Glimm 性质，当且仅当 $\mathrm{Cu}(A)$ 是 $(2, \omega)$-可除的。因此，[TV22b, 定理 6.3] 与命题 7.7 一起表明 (1) 蕴含 (3)，而 (3) 蕴含 (2) 显然成立。

利用定理 7.12，我们知道 $\mathrm{Cu}(A)$ 是 $(2, \omega)$-可除的，当且仅当 $\mathrm{Cu}(A)$ 中强软元素的丰富度足够，且 $(\mathrm{Cu}(A)\ \Sigma_A)$ 是理想滤过的。根据定理 5.14，A 具有丰富的软元素，当且仅当 $(\mathrm{Cu}(A)\ \Sigma_A)$ 中强软元素的丰富度足够。这表明 (2) 推出 (1)，证毕。□

References

[APRT21] R. Antoine, F. Perera和 L. Robert, 《C*-代数上拟迹的 Edwards 条件》, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **151** (2021), 525–547。[APRT22] R. Antoine, F. Perera和 L. Robert, 《稳定秩一的 C*-代数及其 Cuntz 半群》, *Duke Math. J.* **171** (2022), 33–99。[APT18] R. Antoine, F. Perera和 H. Thiel, 《Cuntz 半群的张量积与正则性》, *Mem. Amer. Math. Soc.* **251** (2018), viii+191。[APT20a] R. Antoine F. Perera H. Thiel *Int.*, , 和, *Math. Res. Not. IMRN* 2020 5342 5386 《抽象双变 Cuntz 半群》, (), –。[APT20b] R. Antoine, F. Perera和 H. Thiel, 《抽象双变 Cuntz 半群 II》, *Forum Math.* **32** (2020), 45–62。[APT20c] R. Antoine, F. Perera和 H. Thiel, 《超积 C*-代数的 Cuntz 半群》, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **102** (2020), 994–1029。[APT11] P. Ara, F. Perera和 A. S. Toms, 《算子代数的 K-理论。C*-代数的分类》, 载于 *Aspects of operator algebras and applications*, *Contemp. Math.* **534**, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2011, 第 1–71 页。

[AVTV23] M. A. Asadi-Vasfi, H. Thiel和 E. Vilalta, 《软 Cuntz 半群的维数与比较半径》, 准备中, 2023。[BK19] T. Bice 和 P. Koszmider, 《具有和不具有 ≪-递增近似单位的 C*-代数》, *J. Math. Anal. Appl.* **477** (2019), 1396–1418。[Bla06] B. Blackadar, *Operator algebras, Encyclopaedia of Mathematical Sciences* **122**, Springer-Verlag, 柏林, 2006, 《C*-代数与冯·诺伊曼代数理论》, 《算子代数与非交换几何》, III。[Bos22] J. Bosa, 《稳定元素与性质 (S)》, *J. Math. Anal. Appl.* **512** (2022), 论文编号 126171, 16 页。[BGSW22] J. Bosa, J. Gabe, A. Sims和 S. White, 《 $\mathcal{O}_\infty$-稳定 C*-代数的核维数》, *Adv. Math.* **401** (2022), 论文编号 108250, 51 页。[BC09] N. P. Brown 和 A. Ciuperca, 《稳定有限 C*-代数上的希尔伯特模同构》, *J. Funct. Anal.* **257** (2009), 332–339。[CRS10] A. Ciuperca, L. Robert和 L. Santiago, 《理想与商的 Cuntz 半群及广义 Kasparov 稳定化定理》, *J. Operator Theory* **64** (2010), 155–169。[CEI08] K. T. Coward, G. A. Elliott和 C. Ivanescu, 《Cuntz 半群作为 C*-代数的不变量》, *J. Reine Angew. Math.* **623** (2008), 161–193。[Cun76] J. Cuntz, 《算子代数上半范数的连续性》, *Math. Ann.* **220** (1976), 171–183。[ERS11] G. A. Elliott, L. Robert和 L. Santiago, 《C*-代数上的下半连续迹之泛函锥》, *Amer. J. Math.* **133** (2011), 969–1005。[ER06] G. A. Elliott 和 M. Rørdam, 《Hausdorff矩序列的扰动及其在实秩零 C*-代数理论中的应用》, 载于 *Operator Algebras:The Abel Symposium 2004, Abel Symp.* **1**, Springer, 柏林, 2006, 第 97–115 页。[Far02] C. Farsi, 《软 C*-代数》, *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* **45** (2002), 59–65。[GP23] E. Gardella 和 F. Perera, 《C*-代数 Cuntz 半群的现代理论》, 预印本（arXiv:2212.02290 [math.OA]）, 2023。[GT 22] E. Gardella 和 H. Thiel, 《C*-代数之间的加权同态》, 预印本（arXiv:2203.16702 [math.OA]）, 2022。[GH82] K. R. Goodearl 和 D. E. Handelman, 《维数群与 AF C*-代数中的狭窄性》, *J. Reine Angew. Math.* **332** (1982), 1–98。[HRW07] I. Hirshberg, M. Rørdam和 W. Winter, 《 $C_0(X)$-代数、稳定性与强自吸收 C*-代数》, *Math. Ann.* **339** (2007), 695–732。[HR98] J. v. B. Hjelmborg 和 M. Rørdam * *J. Funct. Anal.*, 《论 C -代 **155** 1998 153 170 数的稳定性》, ( ), –。[Jen77] H. E. n. Jensen, 《散射 C*-代数》, *Math. Scand.* **41** (1977), 308–314。[KR00] E. Kirchberg 和 M. Rørdam * *Amer. J.*, 《非单纯 *Math.* **122** 2000 637 666 纯无限 C -代数》, ( ), –。[KR02] E. Kirchberg和 M. Rørdam, 《无限非单纯 C*-代数: 吸收 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_\infty$》, *Adv. Math.* **167** (2002), 195–264。[KR15] E. Kirchberg 和 M. Rørdam, 《中心序列 C*-代数何时具有特征》, *Internat. J. Math.* **26** (2015), 1550049, 32 页。[OPR 12] E. Ortega, F. Perera和 M. Rørdam, 《C*-代数的冠因子分解性质、稳定性与 Cuntz 半群》, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2012), 34–66。[ORT11] E. Ortega, M. Rørdam和 H. Thiel, 《Cuntz 半群与开投影的比较》, *J. Funct. Anal.* **260** (2011), 3474–3493。[Ped 79] G. K. Pedersen, 《C *-algebras and their automorphism groups London Mathematical》, , *Society Monographs* **14** [Academic Press, Inc. Harcourt Brace Jovanovich, 出版社], 伦敦—纽约, 1979。[PT 07] F. Perera 和 A. S. Toms, 《重构 Elliott猜想》, *Math. Ann.* **338** (2007), 669–702。[Rob12] L. Robert, 1 *Adv.*, 《-维 *Math.* **231** 2012 2802 2836 NCCW 复形归纳极限的分类》, ( ), –。[Rob13] L. Robert, 《Cuntz 半群上的泛函锥》, *Math. Scand.* **113**(2013), 161–186。[Rob16] L. Robert, 《关于 $\mathcal{Z}$-稳定无投影 C*-代数的评注》, *Glasg. Math. J.* **58** (2016), 273–277。[RR13] L. Robert 和 M. Rørdam * *Proc. Lond. Math.*, 《C -代数 *Soc. (3)* **106** 2013 1330 1370 的可除性》, ( ), –。[RT17] L. Robert 和 A. Tikuisis, 《非单 C*-代数的核维数与 $\mathcal{Z}$-稳定性》, *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017), 4631–4670。

[Rør92] M. Rørdam, 关于与 UHF-代数张量积的单 C*-代数的结构。II, *J. Funct. Anal.* **107** (1992), 255–269。
[Rør03] M. Rørdam, * *Acta Math.* 一
191 2003 109 142
个具有有限投影和无限投影的单 C -代数, ( ), –。[RW10] M. Rørdam 和
W. Winter *J. Reine Angew. Math.*, 重新审视 Jiang-Su 代数,
642 2010 129 155
( ), –。[Thi20a] H. Thiel, 弥散迹与 Haar 酉元, Amer. J. Math.(即将出版), 预印本 (arXiv:2009.06940 [
math.OA]), 2020。[Thi20b] H. Thiel,
* *Comm.* 具有稳定秩一的单 C -代数中
Math. Phys. **377** 2020 37 76
的算子秩, ( ), –。[Thi21] H. Thiel, C*-代数的生成元秩, *J. Funct. Anal.* **280** (2021), 108874, 34。[
TV21a] H. Thiel 和 E. Vilalta *Internat. J.*,
Math. **32** 2021 27 2150100
Cuntz 半群的覆盖维数 II, ( ), p., 论文编号 。[TV21b] H. Thiel 和 E. Vilalta, 处处非散射的 C*-代数, J.
Noncommut. Geom.(即将出版), 预印本 (arXiv:2112.09877 [math.OA]), 2021。[TV22a] H. Thiel 和
E. Vilalta, Cuntz 半群的覆盖维数, *Adv. Math.* **394** (2022), 44 页, 文章编号 108016。[TV22b] H. Thiel
和 E. Vilalta, 全局 Glimm 性质, Trans. Amer. Math. Soc.(即将出版), 预印本 (arXiv:2204.13059 [math.OA]),
2022。[Tom08] A. S. Toms,
* *Ann. of Math. (2)* 关于核的 C -代数的分类问题,
167 2008 1029 1044
( ), –。[WZ09] W. Winter 和
J. Zacharias *Münster J.*, 零阶的完全正映射, ( ), –
Math. **2** 2009 311 324
。[Win12] W. Winter, $\mathcal{Z}$ * *Invent. Math.*
187 2012 259 342
纯 C -代数的核维数与 -稳定性, ( ), –。

Hannes Thiel、 Department of Mathematical Sciences、 Chalmers University of Technology and University of Gothenburg、 Gothenburg SE-412 96、 Sweden.*Email address*: hannes.thiel@chalmers.se*URL*: www.hannesthiel.org

Eduard Vilalta、 Departament de Matemàtiques、
Universitat Autònoma de Barcelona、08193 Bellaterra、 Barcelona、 Spain
Email address: eduard.vilalta@uab.cat*URL*: www.eduardvilalta.com