arXiv:2304.11652v1 [cs.LO] 23 Apr 2023

交替（非）依赖友好逻辑

Dylan Bellier、Massimo Benerecetti、Dario Della Monica 和 Fabio Mogavero

摘要

Hintikka 和 Sandu 最初提出了独立友好逻辑（IF），将其作为一种不完全信息的一阶逻辑，用以描述自然语言语义背后的博弈论现象。该逻辑能够表达量化变量之间的独立性约束，与 Henkin 量词的做法相似，并且具有一种优雅的博弈论语义，即通过不完全信息博弈来解释。不过， IF 语义存在一些局限。它对玩家的处理并不对称：在评估句子的真值或假时，只将两个玩家中的一个视为拥有不完全信息。此外，句子的真与假分别等同于语义不完全信息博弈中某一玩家存在一致获胜策略。因此， IF 确实存在既非真也非假的未定句子，从而不满足排中律。本文研究了 IF的一种扩展，称为交替依赖/独立友好逻辑（ADIF），旨在克服这些局限。为此，我们提出一种新颖的组合语义，将 Hodges 为 IF提出的基于王牌的语义加以推广。新语义（i）允许同时对两个玩家施加有意义的限制；（ii）具有博弈论确定性；（iii）使句子满足排中律；（iv）赋予 ADIF二阶逻辑的全部表达能力。我们还为 ADIF的前束片段提供了一种等价的赫布兰德–斯科伦语义，以及一种博弈论语义；后者通过一个定性的无限时长博弈来定义，该博弈在有限结构上能够精确刻画另外两种语义。

1. 引言

信息独立性是博弈论中自然产生的一种现象：博弈冯·诺伊曼和摩根斯坦，1944年）。在国际象棋或围棋等博弈中，双方玩家都对当前对局状态以及自己和对手此前所做的移动拥有完美信息。而在扑克和桥牌等纸牌博弈中，玩家只能依据关于对局状态的部分(即，不完美）信息作出决策。换言之，在后一类博弈中，玩家作出决策时不依赖于信息其他玩家所作出的某些选择。

鉴于博弈与逻辑之间联系紧密，例如博弈论语义学（Lorenzen，1961；Lorenz，1968；Hintikka，1973），学者提出了多种方案，以处理信息独立性问题或对其进行推理，其中最具代表性的是独立友好逻辑（Hintikka 和 Sandu，1989）、依赖逻辑（V¨a¨an¨anen，2007年）以及由此衍生的逻辑（Galliani，2012；Gr¨adel 和 V¨a¨an¨anen，2013；Kuusisto，2013；Clairambault 等，2013；Kuusisto，2015）。

独立友好逻辑（IF）最初由 Hintikka 和 Sandu（1989）提出，后来被 Mann 等人（2011）等学者广泛研究。它是在一阶逻辑（FOL）（Hilbert 和 Ackermann，1928）的基础上发展而来的扩展，将信息独立性作为一等概念，并旨在应用于自然语言语义。不同于 FOL：在其中，量化变量始终在函数上依赖于此前已经量化的所有变量；在 IF 中，量化变量的取值可以独立于公式中此前量化的某些特定变量的取值而选取。这在句法上通过所谓的斜杠算子记法来表示。例如，$(\exists x/W)\varphi$ 意味着变量 x 的选取必须独立于（即不知晓）变量集合 W 中所包含变量的取值。该逻辑具有优美的博弈论语义（Hintikka 和 Sandu，1997），这种语义以不完全信息博弈的形式给出：当验证者玩家通常称为 Eloise 时，若其拥有赢得语义博弈的策略，则一个句子为真。如果证伪者玩家 Abelard 拥有获胜策略，则该句子被判定为假。由于这里考虑的是不完全信息博弈，两种情况都可能不发生，因为具体博弈可能是未定的。在这种情况下，相应的句子既不为真也不为假，从而导致排中律失效。Hodges（1997a）后来为 IF 发展出一种组合语义：相对于一个赋值集合（称为团队；在这一思想的后续发展中也称为团队）来定义满足，而不是像经典塔斯基语义（Tarski，1936，1944）中的 FOL 那样相对于单个赋值来定义。这里的高层直觉是，团队编码了关于当前实际赋值为何的认知不确定性。

依赖逻辑（V¨a¨an¨anen，2007年）（DL）采用了略有不同的方法来解决这一问题，即将量词与依赖关系的指定分开。具体做法是在 FOL 中加入所谓的依赖原子，其形式为 $=(\vec{x}, y)$，其预期含义是：变量 y 的值完全由向量 $\vec{x}$ 中各变量的值决定，因此在函数意义上依赖于这些值。将依赖约束与量词分开，可以非常自然地表达量化变量和非量化变量上的依赖关系，也使得对依赖与独立性的推理方式相当灵活。DL 还扩展出了其他类型的原子，例如独立原子（Gr¨adel 和 V¨a¨an¨anen，2013年）以及包含／排斥原子（Galliani，2012年）。该逻辑在表达能力上等价于 IF 和二阶逻辑（SOL）的存在量词片段（Hilbert 和 Ackermann，1938年；Church，1956年；Shapiro，1991年）。因此， DL 仍允许未定句子，且在经典否定下不封闭。为了恢复否定下的封闭性，进而恢复排中律，V¨a¨an¨anen（2007年）引入了团队逻辑

（TL），这是 DL 的一种扩展，加入了所谓的矛盾否定 $\sim$；这一思想早已由 Hintikka（1996年）在 IF的语境下进行过研究，当时它只允许用于句子之前。 TL 的表达能力远强于 DL，达到了 SOL的完整描述能力，从而涵盖了整个多项式层次（Stockmeyer，1976年）。然而，为了恢复 FOL的优良性质，例如布尔联结词与量词之间的对偶性， TL需要为命题联结词采用两种不同的版本：否定 $\neg$ 和 $\sim$ 、合取 $\wedge$ 和 $\oplus$ 、析取 $\vee$ 和 $\otimes$ ；此外，还需要一个额外的伪量词 $!x$ ，称为惊叹号量词。这种方法也带来了显著的影响。尤其是， TL 缺乏任何有意义的直接博弈论解释，正如 V¨a¨an¨anen（2007年）也指出的那样；而 DL 仍保留了这种解释，这主要归功于它与存在量词 SOL的等价性。

关于信息独立性推理的逻辑，与通过偏序量词（又称分支量词或 Henkin 量词）扩展一阶逻辑之间，存在一种众所周知的联系。Henkin 最初提出这些量词（1961），旨在克服经典量词前缀固有的线性依赖（有关这一主题的全面综述，另见 Krynicki 和 Mostowski（1995））。例如，句子 $\binom{\forall x_1 \exists y_1}{\forall x_2 \exists y_2}\varphi$ 表示：对于所有 x_1 和 x_2，存在一个 y_1 的取值，它只依赖于 x_1；并且存在一个 y_2 的取值，它只依赖于 x_2，使得 φ 为真。此类句子很容易通过适当的变量独立性模式用 IF 表达。对于例句， $\forall x_1 \forall x_2 \exists(y_1/\{x_2\}) \exists(y_2/\{x_1\})\varphi$ 是一个等价的 IF 句子。与 IF 类似，带 Henkin 量词的逻辑的前束片段（即 Henkin 量词前缀后接一个 FOL 句子的片段）（Walkoe，1970）已知在表达能力上等价于 Σ^1_1，即 SOL 的存在片段；而 Enderton（1970）证明了完整的（非前束）逻辑能够表达 Δ^1_2-性质。

正如Blass 和 Gurevich (1986)所指出的，从博弈论的角度来看，带有 Henkin 量词的逻辑具有不对称性，因为它们通常只考虑存在玩家 Eloise 是否拥有能够证明某个公式为真的获胜策略。相反， IF通过引入两个满足关系（一个用于真，一个用于假），并根据玩家的一致策略来定义这两个关系，解决了这一问题，但代价是逻辑的不确定性（Mann 等人，2011）。具体而言，如果某个变量 x由某位玩家（Eloise 或 Abelard）控制，且要求独立于变量集 W，那么对于该玩家而言，若其策略在博弈中所有仅在 W 中变量取值上有所不同的状态下始终选择相同的值，该策略就称为一致策略。若要赢得博弈并证明句子为真，Eloise 必须拥有一个一致策略，使该策略所诱导的每一场对局都获胜。这些相容的对局不一定与对手的任何一致策略相容；也就是说，在评估句子的真值时，Abelard 控制的全称量词实际上不受任何限制。评估句子的假值时也会出现类似情况。在这种情况下，Abelard 必须拥有一个一致策略，使所有相容的对局都获胜。此时，存在变量上的限制则被忽略。

这些博弈的不完全信息特性体现在一致性要求上，而一致性要求会导致逻辑出现不确定性。反过来，这意味着有些句子既非真也非假。

上述情况也体现在 Hodges 在其为 IF 提出的组合语义中分别使用王牌和共王牌。利用赋值集合的想法，使得能够以组合方式模拟策略上的一致性约束。从本质上说，王牌记录了博弈可能处于的所有状态，此处这些状态由赋值表示；这些状态取决于 Abelard 可能作出的选择以及 Eloise 作出的相应回应。直观地说，这些赋值对应于与 Eloise 在评估公式时所遵循的策略相容的（部分）对局。于是，王牌可以编码 Eloise 对对局实际当前状态所具有的不确定性：当她必须选择一个独立于变量 W 的变量 x 的值时，仅在 W 中的变量上有所不同的赋值对于 Eloise 来说是不可区分的。这使 Eloise 能够以一致的方式在每个这样的状态下作出选择，并在试图证明公式的真值时遵守关于她的变量的一致性约束。类似地，共王牌编码由 Eloise 的可能选择所诱导的状态，并使 Abelard 能够在试图证伪公式时以一致的方式行动。

在这项工作中，我们研究了 IF的一个保守扩展，称为交替依赖/独立友好逻辑（ADIF）。该逻辑旨在同时考虑双方玩家所受的限制，即在评估真值和假值时均将其纳入考量，并克服该逻辑的不定性。为此，我们以一种新的方式推广了王牌/团队，使双方玩家的选择都记录在用于评估公式的语义结构中，从而使双方都能根据量词中独立性限制所要求的一致性约束作出选择。这一方法引出了超团队的概念，其定义为团队的集合，并提供一种双层结构：直观而言，每一层都与两名玩家中的一方相关联，并编码对手对于截至对局该阶段实际选择所具有的不确定性。从另一角度看，该结构可以视为编码底层博弈中的所有可能对局，其中既包括一名玩家的选择，也包括对手可能作出的回应。掌握了所有这些信息后，我们便能轻松得到对偶博弈的对局，即双方玩家交换角色后进行的博弈。玩家之间的角色互换，恰好对应于否定的博弈论解释。这使我们能够以非常自然的方式将否定纳入逻辑，同时恢复在 IF中丢失的排中律，避免出现未定句子，并对全称量词和存在量词中的独立性约束作对称处理。我们证明，由此得到的逻辑至少与完整的 Sol 和 TL一样强。我们还通过一种带有类奇偶获胜条件的定性无限时长一阶博弈，为该逻辑的前束片段提供了一种新颖的博弈论语义，并将这种博弈称为独立性博弈。对于任意 ADIF句子 φ和有限关系结构 $\mathfrak{A}$，我们都可以构造一个独立性博弈 $\mathcal{G}^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$，使得

Eloise拥有获胜策略，当且仅当 φ 在 $\mathfrak{A}$中为真。作为一个推论，鉴于存在从 TL 到 ADIF的翻译，独立性博弈间接地为 TL提供了博弈论解释。

2. 交替依赖/独立友好逻辑

交替依赖/独立友好逻辑（简称 ADIF）被定义为 FOL 的一种扩展。因此，在本文中，我们将遵循惯例，假设存在一个可数变量集 Vr 和一个通用签名$\mathcal{L}\langle\mathcal{R}, \mathsf{ar}\rangle$，它由一组 $\mathcal{R}$ 关系符号构成，其中包括表示等式的解释关系‘=’，以及一个函数 $\mathsf{ar}\colon\ \mathcal{R} \to \mathbb{N}$，用于给出 $\mathcal{R}$ 中每个关系的元数。除非另有说明，我们还固定一个$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}, \langle \mathrm{A}\ \{\mathrm{R}^{\mathfrak{A}}\}_{R\in\mathcal{R}}\rangle$，其论域为 A，每个关系 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}$的解释为 $\mathrm{R}^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathrm{A}^{\mathsf{ar}(R)}$，大小为 $|\mathfrak{A}|, |\mathrm{A}|$。

2.1. 语法

与 IF，ADIF 的做法类似， FOL 通过加入受限量词得到扩展，其中限制规定了可能的依赖／独立约束。基本上，这些限制允许出现形如 $\exists^{+\mathrm{W}}x.\varphi$ 和 $\exists^{-\mathrm{W}}x.\varphi$ 的公式，其直观含义最好用博弈论术语来理解：存在量词由玩家 Eloise（验证者）控制，而全称量词由玩家 Abelard（证伪者）控制。因此，$\exists^{+\mathrm{W}}x.\varphi$（分别地， $\exists^{-\mathrm{W}}x.\varphi$）的预期含义是，Eloise 必须为 x 选择一个值，该值仅取决于（分别地，独立于）变量 W 中各变量的取值，并使 φ 为真。类似地， $\forall^{+\mathrm{W}}x.\varphi$（分别地， $\forall^{-\mathrm{W}}x.\varphi$）意味着 Abelard 必须能够选择一个 x 的值，该值仅取决于（分别地，独立于）W 中的变量，从而使他能够证明论证 φ 为假。换言之，标记 $\pm$W 指定了与逻辑量词相关联的玩家在作出选择时可获得的信息。对于 $+$W，只有该集合中的变量可用；而对于 $-$W，则只有该集合之外的变量可见，即 Vr $\setminus$W 中的变量。

定义 1（ADIF语法）。交替依赖/独立友好逻辑（简称 ADIF）是根据以下语法构建的公式集合，其中 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}$、 $\vec{\mathbf{x}} \in$ 变量集合$^{\mathsf{ar}(R)}$、 $x \in$ 变量集合，以及 $\mathrm{W} \subseteq$ 变量集合，且$|\mathrm{W}| < \omega$:

$$\varphi := \bot \mid \top \mid R(\vec{\boldsymbol{x}}) \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists^{\pm\mathrm{W}}x.\varphi \mid \forall^{\pm\mathrm{W}}x.\varphi.$$

ADF（分别地， AIF）表示仅允许依赖（+W）（分别地，独立（-W））构造的片段。

谓词逻辑通常依赖于自由占位符这一概念来正确地定义公式的含义，而 ADIF 也不例外。不过，在 ADIF中，我们区分支撑变量和自由变量。具体而言，支撑

变量是出现在某个原子公式 R($\vec{x}$) 中、为了求出公式的真值而需要为其赋值的变量。而自由变量还包括出现在某个依赖／独立约束中的变量。我们用 sup: $\mathrm{ADIF} \to 2^{\mathrm{Vr}}$ 表示收集公式 φ 的所有支撑变量 sup(φ) 的函数，定义如下：

• sup($\bot$)，sup($\top$) $\emptyset$；• sup(R($\vec{x}$)) $\vec{x}$；• sup($\neg\varphi$) $\triangleq$ sup(φ)；

• sup($\varphi_1 \odot \varphi_2$) $\triangleq$ sup(φ_1) $\cup$ sup(φ_2)，对于所有联结词符号 $\odot \in \{\wedge, \vee\}$；

• sup($\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{w}} x.\varphi$) $\triangleq$ sup(φ) $\setminus \{x\}$，对于所有量词符号 Q $\in \{\exists, \forall\}$。

自由变量函数 free: $\mathrm{ADIF} \to 2^{\mathrm{Vr}}$ 的定义方式类似，但量词情形除外，具体如下：

• free($\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{w}} x.\varphi$) $\triangleq$ (free(φ) $\setminus \{x\}$) $\cup [\![\pm \mathrm{W}]\!]$，如果 $x \in$ free(φ)，而对于所有量词符号 Q $\in \{\exists, \forall\}$，若 $[\![\pm \mathrm{W}]\!]$ 表示符号‘+’对应的集合 W，其补集为符号‘ ’对应的变量集合 Vr $\setminus$W–，则 free($\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{w}} x.\varphi$) $\triangleq$free(φ)。

显然，sup(φ) $\subseteq$ free(φ)。句子 φ 是自由(φ) $= \emptyset$的公式。如果 sup(φ) $= \emptyset$，但 free(φ) $\neq \emptyset$，那么 φ 就只是一个伪句子。例如，$\varphi = \forall^{+\emptyset} x.\exists^{+\emptyset} y.(x = y)$ 是一个句子，而 $\varphi' = \forall^{+\emptyset} x.\exists^{+z} y.(x = y)$ 是一个伪句子，因为 sup(φ') $= \emptyset$，但 free(φ') $= \{z\}$。我们还定义 $\exists x.\varphi$、$\exists^{+\mathrm{w}} x.\varphi$ 和 $\forall x.\varphi$、$\forall^{+\mathrm{w}} x.\varphi$，其中 W $\triangleq$sup(φ) $\setminus \{x\}$。从现在起，我们用FOL 指称 ADIF 的句法片段，该片段由仅使用最后两个量词的公式组成。对于这类公式，有 sup(φ) =free(φ)。正如我们将在第3节中展示的，这个片段在语义上对应于塔斯基（1936年）所定义的经典FOL 。同样，我们稍后还将识别出 ADIF 的一个更丰富的片段，它在语义上对应于 Hodges（1997a）形式化的 IF 。

在给出组合语义的形式定义之前，值得先提供几个可以用 ADIF 表达的性质示例。在讨论这些示例时，我们将依赖上文给出的量词的非正式博弈论解释。

让我们设想一个进行两回合的博弈：首先选择的玩家 1 控制变量 x，随后选择的玩家 2 控制 y。设 $\psi(x, y)$ 是玩家 2 的目标，并考虑以下两个 ADF 句子：

$$\varphi_1 := \forall x.\exists^{+x} y.\psi(x, y); \qquad \varphi_2 := \exists x.\forall^{+x} y.\neg\psi(x, y).$$

句子 φ_1只要为真，就要求玩家 2（此处为 Eloise）能够回应玩家 1（此处为 Abelard）对 x 所作的每一个选择，从而使目标 $\psi(x, y)$ 始终得到满足。这对应于 Eloise 存在一个获胜策略，即在以目标 $\psi(x, y)$ 为目标的博弈中，能够赢得每一场诱导对局的策略。相反，在角色互换的情况下，φ_2 的真值确保 Eloise 存在一种选择，使得无论 Abelard 选择什么，都无法实现 $\psi(x, y)$。这意味着 Abelard 不可能拥有一个

针对 $\psi(x,y)$ 的获胜策略。相反，如果 φ_2 为假，则拥有针对 $\psi(x,y)$ 的获胜策略的是 Abelard，而 φ_1 为假则确保 Abelard 存在一种选择，使得无论 Eloise 选择什么，都无法实现 $\psi(x,y)$。请注意，这两个句子都属于上文介绍的 FOL 片段，其语义也对应于塔斯基语义。然而，ADF 句子

$$\varphi_3 := \forall x.\exists^{+\emptyset} y.\psi(x,y); \qquad \varphi_4 := \exists x.\forall^{+\emptyset} y.\neg\psi(x,y)$$

将不完全信息纳入其中，并且没有 FOL 对应物。句子φ_3 仍然假定 Eloise 存在一个获胜策略，但这一次还要求玩家在为 y做出选择时无法获取任何信息，尤其无法获取对手为 x 所选择的值。我们称这种策略为 $\emptyset$-一致策略。类似地，当 φ_4为真时，它证明 Abelard 不存在这样的一致获胜策略。 ADIF伪句子

$$\varphi_5 := \forall x.\exists^{-x} y.\psi(x,y); \qquad \varphi_6 := \exists x.\forall^{-x} y.\neg\psi(x,y)$$

分别与 φ_3 和 φ_4具有非常相似的含义，唯一的例外是，y可以依赖于不同于 x的任何变量，因为 free(φ_5) =free(φ_6) =变量集合$\setminus x$。

现在考虑一个三回合博弈，它扩展了之前的博弈：在玩家 2 走棋后，玩家 1 为其控制下的另一个变量选择值，我们将其称为 z。 ADF 句子

$$\varphi_7 := \exists x.\forall^{+\emptyset} y.\exists^{+x} z.(\psi_1(x,y)\wedge\psi_2(y,z))$$

稍微复杂一些。首先，它说明玩家 2，即 Abelard，看不到为 x所做的选择。此外，虽然玩家 1，即 Eloise，不知道y，但她可以获取自己先前为 x 所选择的值。该句子只要为真，就确保 Eloise 存在一种选择，使 Abelard 无论选择什么都无法阻止 $\psi_1(x,y)$ 发生。此外，Eloise 可以回应 Abelard 针对 y 所做的任何后续选择，并且仅通过查看 x的值来赢得目标 $\psi_2(y,z)$。这意味着 Abelard 无法阻止 $\psi_1(x,y)$，同时 Eloise 具有一个 x-一致策略，可以同时赢得 $\psi_2(y,z)$。

2.2. 语义

我们为 ADIF 定义的语义遵循一种与（Hodges，1997a）类似的方法，当时首次提出了 IF 的组合语义。Hodges 的想法是将自由变量的一个赋值扩展为赋值集合，按他的术语称为王牌（又称 团队（V¨a¨an¨anen，2007年）），以此捕捉 Eloise 对逻辑背后的语义博弈实际状态的不确定性（Hintikka 和 Sandu，1989）。这实质上相当于记录对手为自己的变量所作的可能选择，即 Abelard 的选择。然而，Hodges 语义虽然能够正确刻画 IF，却不适用于我们的目的。事实上，这种语义从设计上就具有内在的不对称性，

对两位玩家采取不同的处理方式。更具体地说，单个赋值集合只能完整地提供关于两位玩家中一方选择的信息（即，在王牌中是 Abelard，在共王牌中是 Eloise），而且只能限制对手的选择。这也与否定缺少经典性质有关，具体而言，就是排中律。

为了克服这些局限，以自然的方式将否定纳入 ADIF ，并获得一种完全定性的逻辑，我们在此提出 Hodges 方法的一种推广。接下来，为了给 ADIF公式 φ赋予语义，我们按如下方式进行。与 Hodges 类似，其基本思想是，自由变量的解释对应于两位玩家截至博弈当前阶段（即必须对公式 φ 进行求值的阶段）所能做出的选择。这些可能的选择由一种双层结构组织起来，即由赋值集合构成的集合，其中每一层都概括了玩家此前各回合可能做出的选择所包含的信息。于是，为了对公式 φ求值，一位玩家选择一个赋值集合，而对手则从该集合中选择一个必须满足 φ 的赋值。我们将使用一个标志 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$，称为交替标志，以跟踪哪位玩家对应哪一层选择。若 $\alpha = \exists\forall$，则由 Eloise 选择赋值集合，而 Abelard 从中选择一个赋值；若 $\alpha = \forall\exists$，则适用对偶的推理。某种意义上，与某位玩家（例如 Eloise）对应的层，编码了对手 Abelard 对她截至该阶段实际所做选择的不确定性。

给定一个标记 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$，我们用 $\overline{\alpha}$ 表示对偶标记，即 $\overline{\alpha} \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$，其中 $\overline{\alpha} \neq \alpha$。令 $\mathsf{Asg} \triangleq \mathsf{Vr} \rightharpoonup \mathsf{A}$ 表示 Vr 上（偏）赋值的集合，也就是从变量到结构的论域 A 中取值的偏函数。给定变量集合 $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{Vr}$，我们用 $\mathsf{Asg(V)}\ \{\chi \in \mathsf{Asg} \mid \mathrm{dom}(\chi) = \mathsf{V}\}$表示定义在 V 上的赋值，用 $\mathsf{Asg}\subseteq\mathsf{(V)}\ \{\chi \in \mathsf{Asg} \mid \mathsf{V} \subseteq \mathrm{dom}(\chi)\}$ 表示定义在 V 的某个超集上的赋值集合。一个（赋值）团队是由全赋值构成的集合，其中所有赋值都定义在同一个变量集上。形式化地说，$\mathsf{TAsg} \quad \{\mathsf{X} \subseteq \mathsf{Asg(V)} \mid \mathsf{V} \subseteq \mathsf{Vr}\}$ 汇集了 Vr 的某个子集上的所有可能团队，$\mathsf{TAsg(V)}\ \{\mathsf{X} \in \mathsf{TAsg} \mid \mathsf{X} \subseteq \mathsf{Asg(V)}\}$ 包含定义在 V 上的团队，而 $\mathsf{TAsg}\subseteq\mathsf{(V)}\ \{\mathsf{X} \in \mathsf{TAsg} \mid \mathsf{X} \subseteq \mathsf{Asg}\subseteq\mathsf{(V)}\}$ 表示定义在 V 的超集上的团队。由此，上述思想可用（赋值）超团队的概念来表达，即定义在任意变量集合 $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{Vr}$ 上的团队集合：

$$\mathrm{HAsg} \triangleq \{\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{TAsg(V)} \mid \mathrm{V} \subseteq \mathrm{Vr}\}.$$

我们用 $\mathsf{HAsg(V)}\ \left\{\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg} \;\middle|\; \mathfrak{X} \subseteq 2^{\mathrm{Asg(V)}}\right\}$ 表示 V 上的超团队集合，而 $\mathsf{HAsg}\subseteq\mathsf{(V)}\ \left\{\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg} \;\middle|\; \mathfrak{X} \subseteq 2^{\mathrm{Asg}\subseteq\mathrm{(V)}}\right\}$ 包含定义在 V 的超集上的超团队。团队 $\mathsf{X} \in \mathsf{TAsg}$ 或超团队$\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}$ 中的所有赋值都定义在相同的变量上，其变量集合分别由 $\mathsf{vr(X)}$ 和 $\mathsf{vr}(\mathfrak{X})$ 指示。我们将团队的空集 $\emptyset$ 称为空超团队；将每个包含空团队的集合（例如 $\{\emptyset\}$）称为零超团队；将包含单个团队的集合 $\{\{\varnothing\}\}$ 称为平凡超团队，该团队仅由空赋值组成。从本质上说，平凡超团队表示这样一种情形：玩家尚未作出任何选择，因此其中包含博弈的最小“相容”状态。从这个意义上说，零超团队和空超团队

并不传达有关博弈可能状态的任何有意义的信息，此处主要出于技术原因而将它们纳入，因为这样可以更简洁地形式化定义语义。因此，我们将既不是空超团队也不是零超团队的每个超团队称为正规超团队。

对于任意一对超团队 $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \in \mathrm{HAsg}$，我们写作 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq \mathfrak{X}_2$，表示对于所有团队 $X_1 \in \mathfrak{X}_1$，都存在一个团队 $X_2 \in \mathfrak{X}_2$，使得 $X_2 \subseteq X_1$。与往常一样，$\mathfrak{X}_1 \equiv \mathfrak{X}_2$ 表示 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq \mathfrak{X}_2$ 和 $\mathfrak{X}_2 \sqsubseteq \mathfrak{X}_1$ 均成立。显然，$\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$ 蕴含 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq \mathfrak{X}_2$，而后者又蕴含 $\mathrm{vr}(\mathfrak{X}_1) = \mathrm{vr}(\mathfrak{X}_2)$。显然，关系 $\sqsubseteq$ 具有自反性和传递性，因此是一个预序；由此立即可得，$\equiv$ 是一个等价关系。特别是，我们将在本节后文中证明（见推论1），$\equiv$ 刻画了超团队之间等价关系的直观概念，即关于 $\equiv$ 等价的两个超团队满足相同的 ADIF 公式。图1以图示形式呈现了预序关系 $\sqsubseteq$。

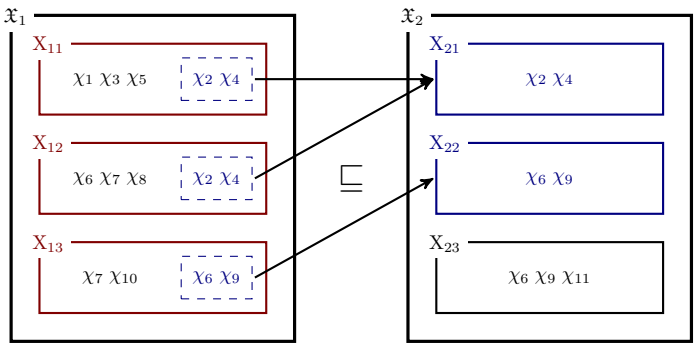


图1：具有 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq \mathfrak{X}_2$ 的两个超团队，但 $\mathfrak{X}_2 \not\sqsubseteq \mathfrak{X}_1$。

示例 1。在图1中，超团队 $\mathfrak{X}_1$ 被 $\sqsubseteq$-包含于超团队 $\mathfrak{X}_2$ 中，因为对于 $\mathfrak{X}_1$ 中的每个团队 X，$\mathfrak{X}_2$ 中都存在一个按集合包含于 X 的团队。例如，$\mathfrak{X}_1$ 的团队 X_{11} 包含赋值 χ_1、χ_2、χ_3、χ_4 和 χ_5，因此它包含由 χ_2 和 χ_4 组成的 $\mathfrak{X}_2$ 的团队 X_{21}。请注意，$\mathfrak{X}_2$ 中并非所有团队都被 $\mathfrak{X}_1$ 中的某个团队所包含，并且 $\mathfrak{X}_1$ 中的不同团队可以选择 $\mathfrak{X}_2$ 中的同一个团队来进行包含。

由于我们处理的是不完全信息，因此需要一种相对于依赖约束定义不可区分性概念的方法。直观而言，这些依赖约束由量词指定。给定一个超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}$ 和一个变量集合 $\subseteq \mathrm{Vr}$，我们定义 $\mathfrak{X}\restriction_W, \{X\restriction_W \mid X \in \mathfrak{X}\}$ 以及 $X\restriction_W, \{\chi\restriction_W \mid \chi \in X\}$，其中 $\chi\restriction_W$ 是将赋值 χ 限制到论域 $\mathrm{dom}(\chi) \cap W$ 后得到的结果。随后，我们可以相对于 W 比较超团队，写作 $\mathfrak{X}_1 =_W \mathfrak{X}_2$ 表示 $\mathfrak{X}_1\restriction_W = \mathfrak{X}_2\restriction_W$，意即仅考虑 W 中的变量时，这两个超团队是不可区分的。类似地，$\mathfrak{X}_1 \equiv_W \mathfrak{X}_2$ 表示 $\mathfrak{X}_1\restriction_W \equiv \mathfrak{X}_2\restriction_W$，意即它们在 W 上等价，而 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq_W \mathfrak{X}_2$ 是 $\mathfrak{X}_1\restriction_W \sqsubseteq \mathfrak{X}_2\restriction_W$的缩写

并将排序相对于依赖约束进行相对化。显然，对于所有 $\mathrm{W}' \subseteq \mathrm{W}$， $\mathfrak{X}_1 =_{\mathrm{W}} \mathfrak{X}_2$、$\mathfrak{X}_1 \equiv_{\mathrm{W}} \mathfrak{X}_2$和 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{W}} \mathfrak{X}_2$ 分别蕴含 $\mathfrak{X}_1 =_{\mathrm{W}'} \mathfrak{X}_2$、 $\mathfrak{X}_1 \equiv_{\mathrm{W}'} \mathfrak{X}_2$和$\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{W}'} \mathfrak{X}_2$。

例2。 在图 *1*中， $\mathfrak{X}_2$ 不被 $\sqsubseteq$包含于 $\mathfrak{X}_1$中，因为$\mathfrak{X}_2$ 的所有团队中没有一个包含 $\mathfrak{X}_1$的团队。现在，假设存在一个变量集 W，使得 $\{\chi_1, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7, \chi_{10}\}\restriction_{\mathrm{W}}$ 坍缩为 $\{\chi_1\}\restriction_{\mathrm{W}}$。于是，我们有：

$\mathfrak{X}_2\restriction_{\mathrm{W}}$	$\mathfrak{X}_1\restriction_{\mathrm{W}}$
$\mathrm{X}_{21}\restriction_{\mathrm{W}} = \{\chi_1\restriction_{\mathrm{W}}, \chi_2\restriction_{\mathrm{W}}\}$	$\mathrm{X}_{11}\restriction_{\mathrm{W}} = \{\chi_1\restriction_{\mathrm{W}}, \chi_2\restriction_{\mathrm{W}}\}$
$\mathrm{X}_{22}\restriction_{\mathrm{W}} = \{\chi_1\restriction_{\mathrm{W}}, \chi_9\restriction_{\mathrm{W}}\}$	$\mathrm{X}_{12}\restriction_{\mathrm{W}} = \{\chi_1\restriction_{\mathrm{W}}, \chi_2\restriction_{\mathrm{W}}, \chi_8\restriction_{\mathrm{W}}\}$
$\mathrm{X}_{23}\restriction_{\mathrm{W}} = \{\chi_1\restriction_{\mathrm{W}}, \chi_9\restriction_{\mathrm{W}}, \chi_{11}\restriction_{\mathrm{W}}\}$	$\mathrm{X}_{13}\restriction_{\mathrm{W}} = \{\chi_1\restriction_{\mathrm{W}}, \chi_9\restriction_{\mathrm{W}}\}$

现在，团队 $\mathrm{X}_{11}\restriction_{\mathrm{W}}$ 包含于 $\mathrm{X}_{21}\restriction_{\mathrm{W}}$ ，团队 $\mathrm{X}_{13}\restriction_{\mathrm{W}}$ 同时包含于 $\mathrm{X}_{22}\restriction_{\mathrm{W}}$ 和 $\mathrm{X}_{23}\restriction_{\mathrm{W}}$。因此，$\mathfrak{X}_2 \sqsubseteq_{\mathrm{W}} \mathfrak{X}_1$ ，所以 $\mathfrak{X}_1 \equiv_{\mathrm{W}} \mathfrak{X}_2$，因为 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq \mathfrak{X}_2$。

交替语义通过超团队 $\mathfrak{X}$ 与公式 φ之间的满足关系给出，该满足关系相对于$\mathfrak{X}$中玩家的给定解释而言，也就是说，相对于一个交替标志 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$而言。作为结果，我们将引入两个满足关系，即 $\models^{\exists\forall}$和 $\models^{\forall\exists}$，分别对应超团队中玩家的每一种解释。其直观含义是：当交替标志α 为 $\exists\forall$时，Eloise 以存在量词的方式选择一个团队，而其所有赋值（由 Abelard 以全称方式选择）都必须满足 φ。相反，当 α 为 $\forall\exists$时，所有团队（由 Abelard 以全称方式选择）都必须至少包含一个赋值（由 Eloise 以存在量词的方式选择），该赋值满足 φ。

语义的定义依赖于对超团队进行的三种基本操作：对偶化交换超团队中两位玩家的角色，从而将两个满足关系联系起来，并在后文对量词进行对称处理；扩展直接处理量化；最后，划分处理析取和合取。

首先考虑对偶化算子。给定一个超团队 $\mathfrak{X}$，对偶超团队 $\overline{\mathfrak{X}}$ 相对于 $\mathfrak{X}$交换两位玩家的角色。这意味着，如果 Eloise 是在 $\mathfrak{X}$ 中选择团队的玩家，而 Abelard 是在团队中选择赋值的玩家，那么在$\overline{\mathfrak{X}}$ 中将由 Abelard 选择团队，并由 Eloise 选择赋值。为确保交换两位玩家的选择顺序时，底层博弈的语义不发生改变，我们需要重新排列 $\mathfrak{X}$ 中的赋值，以模拟选择之间原有的依赖关系。为此，对于超团队 $\mathfrak{X}$，我们引入集合

$$\mathrm{Chc}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\mathfrak{d} \colon \mathfrak{X} \to \mathrm{Asg} \mid \forall \mathrm{X} \in \mathfrak{X}.\, \mathfrak{d}(\mathrm{X}) \in \mathrm{X}\}$$

选择函数，其定义在结构的论域 A 为无限集时，隐含地假设了选择公理。Chc($\mathfrak{X}$) 包含所有函数$\mathfrak{d}$ ： 对于 $\mathfrak{X}$ 中的每个团队 X，这些函数都会从该集合中选出一个特定的赋值 $\mathfrak{d}$(X)。每个这样的函数都模拟了先手玩家选择（团队）后，第二位玩家据此作出的一种可能选择。因此，对偶超团队 $\overline{\mathfrak{X}}$ 收集了 Chc($\mathfrak{X}$) 中各个选择函数的像。由此，我们得到一个

其中两位玩家的选择顺序颠倒的超团队：

$$\overline{\mathfrak{X}} \triangleq \{\mathsf{img}(\mathfrak{d}) \,|\, \mathfrak{d} \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})\}\,.$$

不难验证，与空超团队或零超团队等价的超团队只有它们本身，而且二者也互为对偶。因此，正规超团队类在对偶化下封闭。此外，平凡超团队是自对偶的。

命题 1. 1) $\mathfrak{X} \equiv \emptyset$ 当且仅当 $\mathfrak{X} = \emptyset$ 当且仅当 $\overline{\mathfrak{X}} = \{\emptyset\}$; 2) $\mathfrak{X} \equiv \{\emptyset\}$ 当且仅当 $\emptyset \in \mathfrak{X}$ 当且仅当 $\overline{\mathfrak{X}} = \emptyset$. 此外，3) $\overline{\{\{\varnothing\}\}} = \{\{\varnothing\}\}$. 最后，4) $\mathfrak{X}$ 是正规超团队，当且仅当 $\mathfrak{X}$ 也是正规超团队。

例 3. 考虑以下两个互为对偶的超团队

$$\mathfrak{X} = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{X}_1 = \{\chi_{11}, \chi_{12}\}, \\ \mathrm{X}_2 = \{\chi_{21}, \chi_{22}\}, \\ \mathrm{X}_3 = \{\chi_3\} \end{array} \right\} \quad \textit{and} \quad \overline{\mathfrak{X}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{img}(\mathfrak{d}_1) = \{\chi_{11}, \chi_{21}, \chi_3\}, \\ \mathsf{img}(\mathfrak{d}_2) = \{\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_3\}, \\ \mathsf{img}(\mathfrak{d}_3) = \{\chi_{12}, \chi_{21}, \chi_3\}, \\ \mathsf{img}(\mathfrak{d}_4) = \{\chi_{12}, \chi_{22}, \chi_3\} \end{array} \right\},$$

其中，团队分别为 $\mathrm{X}_1 = \{\chi_{11}, \chi_{12}\}$、$\mathrm{X}_2 = \{\chi_{21}, \chi_{22}\}$ 和 $\mathrm{X}_3 = \{\chi_3\}$。 $\overline{\mathfrak{X}}$ 中的每个团队，都是四个选择函数 $\mathfrak{d}_i \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})$ 之一的像；每个选择函数都恰好从 X_1，中选取一个赋值、从 X_2，中选取一个赋值，并从 X_3 中选取唯一的赋值。直观而言，在 $\mathfrak{X}$ 中，先手玩家（例如 Eloise）的策略只能选择最终赋值的颜色（X_1，为红色、X_2，为蓝色或 X_3为绿色），而 Abelard 的策略则决定每种颜色中选取哪个赋值。对偶化后，两位玩家选择的先后顺序互换。因此，在 $\overline{\mathfrak{X}}$中，先开始的 Abelard 会选取四个选择函数之一，为每种颜色选取一个赋值。后手玩家 Eloise 运用选择颜色的策略，给出最终赋值。换言之，超团队中编码的玩家原有策略及其依赖关系，不会因其在对偶超团队中的角色互换而改变。这个例子还表明，正如我们将很快证明的（见本节后文的定理 2），如果对一个超团队$\mathfrak{X}$ 进行对偶化，同时将玩家的原始解释 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$ 从 $\overline{\alpha}$互换，那么有序对 $(\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\alpha})$ 就是对原始有序对 $(\mathfrak{X}, \alpha)$ 所含信息的等价表示。

对偶化具有类似经典布尔否定的对合性质：对偶化两次后，我们得到一个与原超团队等价的超团队。这证实了该操作保留了超团队中编码的全部信息。

引理 1（对偶化 I）。对于所有超团队 $\mathfrak{X} \in$ H赋值，都成立 $\mathfrak{X} \equiv_{\mathrm{W}} \overline{\overline{\mathfrak{X}}}$，对于所有 W $\subseteq$变量集合。此外，$\mathfrak{X} \subseteq \overline{\overline{\mathfrak{X}}}$，如果 $\mathfrak{X}$ 是适当的。

该引理的证明，以及正文中所有非平凡结果的证明，均可在附录中找到。

请注意，带有交替标志 $\exists\forall$（分别为 $\forall\exists$）的超团队结构与析取范式（分别为合取范式）布尔公式的结构之间存在明显的类比，

其中，对偶化会在两种等价形式之间进行转换。下面的引理正式说明，这一操作会交换两位玩家的角色，同时保留其选择之间原有的依赖关系。

引理 2（对偶化 II）。对于所有超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{H}$赋值 和性质 $\Psi \subseteq$ 赋值，以下等价关系成立。

1) 陈述*1a* 和 *1b* 等价：

a）存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ （分别地，$X \in \overline{\mathfrak{X}}$），使得 $X \subseteq \Psi$；b）对于所有团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$ （分别地，$X' \in \mathfrak{X}$），均有 $X' \cap \Psi \neq \emptyset$。

2) 陈述*2a* 和 *2b* 等价：

a）存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ 使得 $X \cap \Psi \neq \emptyset$；b）存在一个团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$ 使得 $X' \cap \Psi \neq \emptyset$。

3) 陈述*3a* 和 *3b* 等价：

a) 对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，均有 $X \subseteq \Psi$；b) 对于所有团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$，均有 $X' \subseteq \Psi$。

条目 1 提供了该操作的语义含义，指出如果在 $\mathfrak{X}$ 中存在一个团队，其所有赋值都满足某个性质 Ψ，那么 $\overline{\mathfrak{X}}$ 中的每个团队都有一个满足该性质的赋值，并且 反之亦然。这直接连接了超团队的两种解释，即 $\forall\exists$ 和 $\exists\forall$。条目 2确立了 $\mathfrak{X}$中原始团队的任何赋值都不会丢失，而条目 3断言不会向 $\overline{\mathfrak{X}}$中添加任何新赋值。可以证明，满足该引理中三个条件的任意两个算子，在应用于同一个超团队时，都会产生等价的超团队，其含义为 $\equiv_{\mathrm{W}}$。

量化由扩展算子负责处理。令 $\mathrm{Fnc} \triangleq \mathrm{Asg} \to \mathrm{A}$ 为将赋值映射到结构 $\mathfrak{A}$ 的论域 A 中某个值的函数集。从本质上说，这些对象在 Skolem 语义中扮演 Skolem 函数的角色，或者等价地，在博弈论语义中扮演策略的角色。为考虑可能存在的不完全信息，我们需要确保这些函数在不可区分赋值上统一选择值。通过限制函数，使其必须为相对于某个给定变量集 W 不可区分的赋值选择相同的值，便可捕获这一约束。形式化地：

$$\mathrm{Fnc}_{\mathrm{W}} \triangleq \{\mathsf{F} \in \mathrm{Fnc} \mid \forall \chi \in \mathrm{Asg}.\, \mathsf{F}(\chi) = \mathsf{F}(\chi\restriction_{\mathrm{W}})\}\,.$$

显然，$\mathrm{Fnc} = \mathrm{Fnc}^{[\![+\mathrm{Vr}]\!]} = \mathrm{Fnc}^{[\![-\emptyset]\!]}$。对于变量 $x \in \mathrm{Vr}$，赋值 $\chi \in \mathrm{Asg}$ 通过函数 $\mathsf{F} \in \mathrm{Fnc}$ 的扩展定义为 $\mathrm{ext}(\chi, \mathsf{F}\ x) \quad \chi[x \mapsto \mathsf{F}(\chi)]_{,}$，即通过将函数 F 所规定的值 $\mathsf{F}(\chi)$ 赋给 χ with x，从而对其进行扩展。随后，可以用显然的方式将扩展运算提升到团队 $X \in \mathrm{TAsg}$，即令 $\mathrm{ext}(X, \mathsf{F}\ x) \{\mathrm{ext}(\chi, \mathsf{F}\ x) \mid \chi \in X\}$。该运算将 F 所编码的完整玩家策略嵌入 X 中。最后，

超团队 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}$ with x 的扩展x simply 是其所有团队通过所有可能函数进行扩展所得集合：

$$\mathsf{ext}_{\mathrm{W}}(\mathfrak{X}, x) \triangleq \{\mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathsf{F}, x) \mid \mathrm{X} \in \mathfrak{X}, \mathsf{F} \in \mathrm{Fnc}_{\mathrm{W}}\}.$$

扩展运算本质上将所有可能的（W-一致）策略嵌入到 $\mathfrak{X}$ 中，用于选择 x 的取值；每种策略都由 $\mathrm{Fnc}_{\mathrm{W}}$ 中的一个函数 F 编码。

例4。设 $\mathfrak{X} = \{\mathrm{X}_1 = \{\chi_1, \chi_2\}, \mathrm{X}_2 = \{\chi_1, \chi_3\}\}$ 是一个超团队。要用变量 x 在结构的论域 $\mathrm{A} = \{0, 1\}$ 上对 $\emptyset$ 进行 $\mathfrak{X}$ -一致扩展，需要用两个 $\emptyset$-一致（即常值）函数 $\mathrm{F}_0(\chi) = 0$ 和 $\mathrm{F}_1(\chi) = 1$ 扩展 $\mathfrak{X}$ 中的每个团队：

$$\mathsf{ext}_{\emptyset}(\mathfrak{X}, x) = \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{ext}(\mathrm{X}_1, \mathsf{F}_0, x) = \{\chi_1[x \mapsto 0], \chi_2[x \mapsto 0]\} \\ \mathsf{ext}(\mathrm{X}_1, \mathsf{F}_1, x) = \{\chi_1[x \mapsto 1], \chi_2[x \mapsto 1]\} \\ \mathsf{ext}(\mathrm{X}_2, \mathsf{F}_0, x) = \{\chi_1[x \mapsto 0], \chi_3[x \mapsto 0]\} \\ \mathsf{ext}(\mathrm{X}_2, \mathsf{F}_1, x) = \{\chi_1[x \mapsto 1], \chi_3[x \mapsto 1]\} \end{array} \right\}.$$

合取和析取通过划分算子处理。这里我们说明析取的直观含义；对偶的推理同样适用于合取。假设 $\mathfrak{X}$ 的两位玩家，其定义在变量$\{x, y\}$ 上，按照交替标志 $\forall\exists$ 进行解释：Abelard 选择团队，Eloise 选择团队中的赋值。那么在我们的设定中，为了满足例如 $(x = 0) \vee (x = 1)$，Eloise 必须证明，对于 Abelard 选择的每个团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，她都有办法从析取项 $x = i$ 中选择一个（满足 $i \in \{0, 1\}$），使给定团队存在一个满足该析取项的赋值。为刻画 Eloise 如何根据 Abelard 给出的团队选择析取项，对于一个超团队 $\mathfrak{X}$，我们定义以下集合

$$\mathsf{par}(\mathfrak{X}) \triangleq \left\{(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}} \,\middle|\, \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2 = \emptyset \wedge \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}\right\},$$

其中收集了 $\mathfrak{X}$ 的所有可能二分划分。直观地说，超团队 $\mathfrak{X}_1$将用于满足 $x = 0$，而 $\mathfrak{X}_2$ 将用于满足 $x = 1$。基本上，$\mathsf{par}(\mathfrak{X})$ 包含 Eloise 可以借以尝试满足这两个析取项的所有可能策略。于是，如果该集合中存在一对 $(\mathfrak{X}_1', \mathfrak{X}_2')$（因此是一种超团队划分策略），使得 $\mathfrak{X}_1'$满足左侧析取项且 $\mathfrak{X}_2'$ 满足右侧析取项，那么我们就说 Eloise 满足该析取。

因此， ADIF的组合语义可以定义如下，其中$\vec{\mathbf{x}}^{\chi}$ 表示底层结构 $\mathfrak{A}$ 中通过将赋值 χ 逐分量应用于变量元组 $\vec{\mathbf{x}}$ 而得到的元素元组。

定义 2（ADIF 语义）。Hodges 交替语义关系$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 对 ADIF 归纳定义如下：对所有 ADIF 公式φ、超团队 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}_{\subseteq}(\sup(\varphi))$ 和交替标记 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$:

1) a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \bot$ *if* $\emptyset \in \mathfrak{X}$*;* *b)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \bot$ *if* $\mathfrak{X} = \emptyset$*;*

2) a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \top$ *if* $\emptyset \notin \mathfrak{X}$*;* *b)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \top$ *if* $\mathfrak{X} \neq \emptyset$*;*

3) a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} R(\vec{}x)$ 当且仅当存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$，使得对所有赋值 $\chi \in X$，均有 $\vec{}x^{\chi} \in R^{\mathfrak{A}}$；b) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} R(\vec{}x)$ 当且仅当对所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，存在一个赋值 $\chi \in X$，使得 $\vec{}x^{\chi} \in R^{\mathfrak{A}}$；5) a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi_1 \wedge \phi_2$ 当且仅当对所有二分划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，均有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \phi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \phi_2$；b) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi_1 \wedge \phi_2$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \phi_1 \wedge \phi_2$；6) a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi_1 \vee \phi_2$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \phi_1 \vee \phi_2$；b) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi_1 \vee \phi_2$ 当且仅当存在一个二分划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\forall\exists} \phi_1$ 且 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\forall\exists} \phi_2$；7) a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \exists^{\pm w} x.\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathrm{ext}_{[\pm w]}(\mathfrak{X}, x) \models^{\exists\forall} \phi$；b) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \exists^{\pm w} x.\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \exists^{\pm w} x.\phi$；8) a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \forall^{\pm w} x.\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \forall^{\pm w} x.\phi$；b) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \forall^{\pm w} x.\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathrm{ext}_{[\pm w]}(\mathfrak{X}, x) \models^{\forall\exists} \phi$。

条目 1 和 2 处理布尔常量，例如，在 $\exists\forall$ 解释下，要求 $\top$ 由所有超团队（空超团队除外）满足；而在 $\forall\exists$ 下，则要求由空超团队满足。对 $\bot$ 也可作对偶推理。原子公式的另一个基例——条目 3——是显然的，遵循交替标志的解释。按照经典的博弈论解释，条目 4 通过交换超团队中玩家的解释来处理否定。其余布尔联结词（条目 5 和 6）以及量词（条目 7 和 8）的语义，直接应用了先前定义的划分算子和扩展算子。请注意，$\models^{\exists\forall}$ 与 $\models^{\forall\exists}$ 之间的切换（条目 5b、6a、7b 和 8a）是依据引理 2 进行的，也是我们的方法偏离 Hodges 语义（Hodges, 1997a,b）的关键所在。

对于每个 ADIF 公式 φ 和交替标志 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$，若存在一个正规超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}(\sup(\varphi))$，使得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$，则称 φ 在 $\mathfrak{A}$ 上是 α-可满足的，记作 $\mathfrak{A} \models^{\alpha} \varphi$。如前所述，这里不将空超团队和零超团队视为可能的超团队，因为它们不传达有意义的信息。若且唯若 φ 在某个结构 $\mathfrak{A}$ 上是 α-可满足的，我们就称 φ 是 α-可满足的。此外，对于结构 $\mathfrak{A}$，若对所有 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}_{\subseteq}(\sup(\varphi) \cup \sup(\phi))$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 蕴涵 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \phi$（分别地，$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \phi$），则称 φ α蕴涵（分别地，等价关系于）公式 ADIF ϕ，记作 $\varphi \Rightarrow^{\alpha}_{\mathfrak{A}} \phi$（分别地，$\varphi \equiv^{\alpha}_{\mathfrak{A}} \phi$）。若该蕴涵（分别地，等价关系）对所有结构 $\mathfrak{A}$ 都成立，我们就称 φ α蕴涵（分别地，等价关系于）ϕ，记作 $\varphi \Rightarrow^{\alpha} \phi$（分别地，$\varphi \equiv^{\alpha} \phi$）。最后，若 φ 既是 $\exists\forall$-可满足的，也是 $\forall\exists$-可满足的，则称其可满足；若 φ 蕴涵（分别地，等价关系于） ϕ，则

记作 $\varphi \Rightarrow \phi$（分别地，$\varphi \equiv \phi$），当且仅当 $\varphi \Rightarrow^{\exists\forall} \phi$ 和 $\varphi \Rightarrow^{\forall\exists} \phi$（分别地，$\varphi \equiv^{\exists\forall} \phi$和 $\varphi \equiv^{\forall\exists} \phi$）均成立。

2.3. 示例

为了熟悉所提出的 ADIF 组合语义，我们现在通过逐步展开涉及的所有语义规则，给出几个对公式进行求值的示例。

例5。考虑上文的句子 $\varphi_4 = \exists x.\forall^{+\emptyset} y.\neg\psi(x,y)$，其中我们将 $\psi(x,y)$ 实例化为 $(x=y)$。我们在二元结构 $\mathfrak{A} = \langle \{0,1\}, =^{\mathfrak{A}} \rangle$ 中，针对平凡超团队 $\{\{\varnothing\}\}$ 对 φ_4 求值。由于 $\{\{\varnothing\}\}$ 是自对偶的（见命题 1），交替标志无关紧要，因此不失一般性，我们可以选择 $\alpha = \exists\forall$。我们要检查 $\mathfrak{A}, \{\{\varnothing\}\} \models^{\exists\forall} \varphi_4$ 是否成立。存在量词 $\exists x$ 的语义规则要求计算 $\{\{\varnothing\}\}$ 的扩展 $\mathrm{ext}_\emptyset(\{\{\varnothing\}\}, x)$。由此得到

$$\mathfrak{A}, \{\{\varnothing\}\} \models^{\exists\forall} \exists x.\forall^{+\emptyset} y.\neg(x=y) \quad \text{iff} \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \forall^{+\emptyset} y.\neg(x=y),$$

其中 $\mathfrak{X} = \{\{x\colon 0\},\ \{x\colon 1\}\}$。全称量词 $\forall^{+\emptyset} y$的规则要求对超团队取对偶，并将标志切换为 $\forall\exists$。由于 $\mathfrak{X}$ 的每个团队都是单例，因此只有一个可能的选择函数，所以结果为

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \forall^{+\emptyset} y.\neg(x=y) \quad \text{iff} \quad \mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \forall^{+\emptyset} y.\neg(x=y),$$

其中 $\overline{\mathfrak{X}} = \{\{x:0,\ x:1\}\}$。现在，量词 $\forall^{+\emptyset} y$ 与交替标志$\forall\exists$ 是一致的，我们扩展超团队以得到 $\mathrm{ext}_\emptyset(\overline{\mathfrak{X}}, y)$；由于 y 不能依赖于 x，扩展时只能使用常函数。于是结果为

$$\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \forall^{+\emptyset} y.\neg(x=y) \quad \text{iff} \quad \mathfrak{A}, \mathrm{ext}_\emptyset(\overline{\mathfrak{X}}, y) \models^{\forall\exists} \neg(x=y),$$

其中 $\mathrm{ext}_\emptyset(\overline{\mathfrak{X}}, y) = \left\{\left\{x\colon 0, y\colon 0\right\}, \left\{x\colon 1, y\colon 1\right\}\right\}$。

否定运算 $\neg$ 的规则对标志取对偶，此外还要求超团队 $\mathrm{ext}_\emptyset(\overline{\mathfrak{X}}, y)$在 $\exists\forall$下不满足原子公式（$x=y$）。这意味着 $\mathrm{ext}_\emptyset(\overline{\mathfrak{X}}, y)$ 中的每个团队都必须包含一个使原子公式为假的赋值。但事实确实如此，因为每个团队都有一个赋值 χ，使得 $\chi(x) \neq \chi(y)$。因此，在 $\{\{\varnothing\}\}$下，φ_4 对 $\mathfrak{A}$ 的求值为真。相反，请注意，上文的句子 $\varphi_3 = \forall x.\exists^{+\emptyset} y.\psi(x,y)$ 在 $\{\{\varnothing\}\}$下对 $\mathfrak{A}$ 的求值为假，这等价于对 φ_4取否定。事实上，在这种情况下，按照量词的语义规则，我们最终仍会得到同一个超团队 $\mathrm{ext}_\emptyset(\overline{\mathfrak{X}}, y)$，并需要在该超团队下对矩阵 $x=y$进行求值。然而，这一次交替标志将为 $\exists\forall$；正如我们上面已经指出的，$\mathrm{ext}_\emptyset(\overline{\mathfrak{X}}, y)$ 中的每个团队都包含一个使 $x=y$为假的赋值。

例6. 考虑上文的伪句子 $\varphi_6 = \exists x.\forall^{-x} y.\neg\psi(x,y)$，其中我们再次将 $\psi(x,y)$ 实例化为 $(x=y)$。例 5 中的推理完全相同，表明 φ_6 在 $\mathfrak{A}$中相对于平凡超团队为真

$\{\{\varnothing\}\}$。因此，伪句子 $\varphi_5 = \forall x.\exists^{-x}y.\psi(x,y)$ 在 $\mathfrak{A}$ 中相对于 $\{\{\varnothing\}\}$ 为假，因为它等价于 φ_6 的否定。然而，这两个伪句子分别不等价于句子 φ_4 和 φ_3。为说明这一点，我们来计算 φ_5 在 $\mathfrak{A}$ 中相对于超团队 $\mathfrak{X} = \{\{z:0, z:1\}\}$ 关于交替标志 $\alpha = \forall\exists$ 的真值。注意，$z \in \mathsf{free}(\varphi_5) = [\![-x]\!] =$ 变量集合 $\setminus \{x\}$。$\forall x$ 的语义规则要求计算 $\mathfrak{X}$ 的扩展 $\mathsf{ext}_\emptyset(\mathfrak{X}, x)$。结果为

$$\mathfrak{A},\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \forall x.\exists^{-x}y.(x=y) \text{ iff } \mathfrak{A},\mathsf{ext}_\emptyset(\mathfrak{X},x) \models^{\forall\exists} \exists^{-x}y.(x=y),$$

其中 $\mathsf{ext}_\emptyset(\mathfrak{X},x) = \left\{\left\{\begin{matrix} z: & x & 0: \\ x: & 0 & z: \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} z: & x & 1: \\ x: & 1 & z: \end{matrix}\right\}\right\}$。$\exists^{-x}y$的规则要求对超团队进行对偶化，并将标记切换为 $\exists\forall$。由于 $\mathsf{ext}_\emptyset(\mathfrak{X},x)$中的两个团队都包含两个赋值，因此总共有四个选择函数，从而

$$\mathfrak{A},\mathsf{ext}_\emptyset(\mathfrak{X},x) \models^{\forall\exists} \exists^{-x}y.(x=y) \text{ iff } \mathfrak{A},\overline{\mathsf{ext}_\emptyset(\mathfrak{X},x)} \models^{\exists\forall} \exists^{-x}y.(x=y), \textit{where}$$

$$\overline{\mathsf{ext}_\emptyset(\mathfrak{X},x)} = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{X}_1 = \\ \left\{\begin{matrix} z:0 & z:0 \\ x:0\,' & x:1 \end{matrix}\right\} \end{matrix}, \begin{matrix} \mathrm{X}_2 = \\ \left\{\begin{matrix} z:0 & z:1 \\ x:0\,' & x:1 \end{matrix}\right\} \end{matrix}, \begin{matrix} \mathrm{X}_3 = \\ \left\{\begin{matrix} z:1 & z:0 \\ x:0\,' & x:1 \end{matrix}\right\} \end{matrix}, \begin{matrix} \mathrm{X}_4 = \\ \left\{\begin{matrix} z:1 & z:1 \\ x:0\,' & x:1 \end{matrix}\right\} \end{matrix} \right\}.$$

扩展 $\widehat{\mathfrak{X}}$，$\mathsf{ext}_{\mathrm{Vr}\setminus x}\Big(\underline{\mathsf{ext}_\emptyset(\mathfrak{X},x)\ y}\Big) = \underline{\mathsf{ext}_{\{z\}}\Big(\mathsf{ext}_\emptyset(\mathfrak{X},x)\ y\Big)}$，以及四个只能依赖于 z的函数，共包含12个团队，无法在此展示。不过，很容易验证，在这些团队中可以找到 $\mathrm{X} \triangleq \mathsf{ext}(\mathrm{X}_2, \mathrm{F}\ y) = \{\chi_1, \chi_2\}$，其中 $\chi_1(z) = \chi_1(x) = \chi_1(y) = 0$，$\chi_2(z) = \chi_2(x) = \chi_2(y) = 1$，且 $\mathrm{F}(\chi) = \chi(z)$。现在，最后一步需要检查 $\mathfrak{A}, \widehat{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} (x = y)$是否成立。由于X中的每个赋值都满足$(x = y)$，因此该伪句子在 $\mathfrak{A}$ 中针对 $\mathfrak{X}$为真。由此可立即得出，φ_6 在 $\mathfrak{A}$ 中针对 $\mathfrak{X}$的取值为假。相反，可以证明 φ_3 和 φ_4 在 $\mathfrak{X}$上的取值保持不变，即仍分别为假和真，因为它们是句子（这是稍后证明的推论1的直接结论）。

上述示例应能为那些公式 φ with $\sup(\varphi) = \emptyset$，但 $\mathsf{free}(\varphi) \neq \emptyset$ 的读者阐明选择“伪句子”这一名称背后的理由。至于句子，伪句子可以针对任意超团队进行验证；然而，与公式类似，其真值可能取决于具体的超团队。

例7。考虑上文的句子 $\varphi_7 = \exists x.\forall^{+\emptyset}y.\exists^{+x}z.(\psi_1(x,y) \wedge \psi_2(y,z))$，其中我们将 $\psi_1(x,y)$ 实例化为 $(x = y)$，将 $\psi_2(y,z)$ 实例化为 $(y = z)$。我们在与前面例子相同的结构 $\mathfrak{A}$ 和这个平凡超团队 $\{\{\varnothing\}\}$ 上评估该句子。另请注意，φ_7 与例5中的句子 φ_4 共享了大部分量词前缀。因此，按照之前相同的步骤，我们得到以下等价关系：

$$\mathfrak{A}, \{\{\varnothing\}\} \models^{\exists\forall} \varphi_7 \text{ iff } \mathfrak{A}, \mathsf{ext}_\emptyset\big(\overline{\mathfrak{X}}, y\big) \models^{\forall\exists} \exists^{+x}z.(x=y) \wedge (y=z),$$

其中 $\mathsf{ext}_{\emptyset}(\overline{\mathfrak{X}}, y) = \left\{\left\{x: y\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix}:, x: y\ \begin{matrix}1\\:0\end{matrix}\right\}, \left\{x: y\ \begin{matrix}0\\1\end{matrix}:, x: y\ \begin{matrix}1\\:1\end{matrix}\right\}\right\}$。应用 $\exists^{+x}z$ 的规则需要先进行对偶化，从而得到

$$\mathfrak{A}, \{\{\varnothing\}\} \models^{\exists\forall} \varphi_7 \ \text{ iff } \ \mathfrak{A}, \overline{\mathsf{ext}_{\emptyset}(\overline{\mathfrak{X}}, y)} \models^{\exists\forall} \exists^{+x}z.\,(x = y) \wedge (y = z), \textit{where}$$

$$\overline{\mathsf{ext}_{\emptyset}(\overline{\mathfrak{X}}, y)} = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{X}_1 = \\ \left\{\begin{matrix} x{:}0 \\ y{:}0 \end{matrix}\ \begin{matrix} x{:}0 \\ \text{'} y{:}1 \end{matrix}\right\} \end{matrix}, \begin{matrix} \mathrm{X}_2 = \\ \left\{\begin{matrix} x{:}0 \\ y{:}0 \end{matrix}\ \begin{matrix} x{:}1 \\ \text{'} y{:}1 \end{matrix}\right\} \end{matrix}, \begin{matrix} \mathrm{X}_3 = \\ \left\{\begin{matrix} x{:}1 \\ y{:}0 \end{matrix}\ \begin{matrix} x{:}0 \\ \text{'} y{:}1 \end{matrix}\right\} \end{matrix}, \begin{matrix} \mathrm{X}_4 = \\ \left\{\begin{matrix} x{:}1 \\ y{:}0 \end{matrix}\ \begin{matrix} x{:}1 \\ \text{'} y{:}1 \end{matrix}\right\} \end{matrix} \right\}.$$

扩展 $\widehat{\mathfrak{X}}$、$\mathsf{ext}_{\{x\}}\left(\mathsf{ext}_{\emptyset}(\overline{\mathfrak{X}}, y), z\right)$ 只能使用仅依赖于 x 的函数，并且这样的函数有四个。与前一个示例类似，$\widehat{\ }$超团队 $\mathfrak{X}$ 最终包含 12 个团队。在这些团队中，可以找到 $\mathrm{X} \triangleq \mathsf{ext}(\mathrm{X}_2, \mathrm{F}\ z) = \{\chi_1, \chi_2\}$，其中 $\chi_1(x) = \chi_1(y) = \chi_1(z) = 0$、$\chi_2(x) = \chi_2(y) = \chi_2(z) = 1$，且 $\mathrm{F}(\chi) = \chi(x)$。现在，最后一步需要检查 $\mathfrak{A}$、$\widehat{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} (x = y) \wedge (y = z)$ 是否成立。根据合取连接词的规则，对于所有二分划分 $(\widehat{\mathfrak{X}}_1, \widehat{\mathfrak{X}}_2) \in \mathsf{par}\left(\widehat{\mathfrak{X}}\right)$，当 $\mathfrak{A}$、$\widehat{\mathfrak{X}}_1 \models^{\exists\forall} (x = y)$ 或 $\mathfrak{A}$、$\widehat{\mathfrak{X}}_2 \models^{\exists\forall} (y = z)$ 时，该命题为真。显然，任何这样的划分都会将 X 包含在 $\widehat{\mathfrak{X}_1}$ 或 $\mathfrak{X}_2$ 中。由于 X 中的每个赋值都满足 $(x = y)$ 和 $(y = z)$，因此该句子在 $\mathfrak{A}$ 中针对 $\{\{\varnothing\}\}$ 被证明为真。

2.4. 基础

ADIF 具有若干经典性质，例如布尔律，以及否定范式（简称 nnf）中公式的规范表示；通常，人们认为在对否定封闭的逻辑中，这些性质都应成立。

我们从以下基本结果开始，它刻画了公式在零超团队和空超团队上的真值。

引理3（空与零超团队）。对于每个ADIF 公式 φ 和超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\varphi))$，以下结论成立：

1) a) $\mathfrak{A}, \emptyset \not\models^{\exists\forall} \varphi$; *b)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$, *where* $\emptyset \in \mathfrak{X}$;

2) a) $\mathfrak{A}, \emptyset \models^{\forall\exists} \varphi$; *b)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \not\models^{\forall\exists} \varphi$, *where* $\emptyset \in \mathfrak{X}$.

上文引入的超团队预序 $\sqsubseteq$ 刻画了相对于 ADIF 公式的满足强度这一直观概念。基本而言，若 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq \mathfrak{X}_2$，则超团队 $\mathfrak{X}_1$ 相对于 $\exists\forall$ （分别为 $\forall\exists$）语义关系满足的公式，比超团队 $\mathfrak{X}_2$少（分别多）。实际上，将 $\sqsubseteq$-预序限制在公式的自由变量集合上时，这一性质有更强的版本。对于原子公式，这一性质显然成立；对于非原子公式，则可通过结构归纳轻松证明。

定理 1（超团队细化）。设 φ 是一个 ADIF 公式，且 $\mathfrak{X}$、$\mathfrak{X}' \in \mathrm{H}^{\text{赋值}\subseteq}(\sup(\varphi))$ 是满足 $\mathfrak{X} \sqsubseteq_{\mathsf{free}(\varphi)} \mathfrak{X}'$的两个超团队。则：

1) if $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ *then* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$;

2) 如果 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$，那么 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。

由此可立即得到以下结果。

推论1（超团队等价）。设 φ 是一个 ADIF 公式，且 $\mathfrak{X}$、$\mathfrak{X}' \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\varphi))$ 是两个超团队，其中 $\mathfrak{X} \equiv_{\mathsf{free}(\varphi)} \mathfrak{X}'$。则：

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi \ \text{ iff } \ \mathfrak{A}, \mathfrak{X}' \models^{\alpha} \varphi.$$

根据定义，ADIF 句子 φ 满足 $\mathsf{free}(\varphi) = \emptyset$，因此只需考察其相对于平凡超团队 $\{\{\varnothing\}\}$，因为每个正规超团队在空变量集上都等价于 $\{\{\varnothing\}\}$。回想一下，正如例 6 中已经指出的，伪句子不一定具有这一性质。

推论2（句子可满足性）。设 φ 是一个 ADIF 句子。那么，φ 是 α-可满足的，当且仅当 $\mathfrak{A}$、$\{\{\varnothing\}\} \models^{\alpha} \varphi$，对某个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。

如例 3所述，交换超团队 $\mathfrak{X}$ 的玩家，即切换交替标志并交换玩家的选择，也就是对偶化 $\mathfrak{X}$，对满足的影响相同。此外，回想引理 1指出，对偶化具有对合性质。因此，同时对偶化交替标志 α 和超团队 $\mathfrak{X}$ 会保持公式的真值不变。以下结果将这些观察形式化。

定理 2（双重对偶化）。对于每个 ADIF 公式 φ 和超团队$\mathfrak{X} \in \mathrm{H}$赋值$^{\subseteq}(\sup(\varphi))$，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \varphi$。

上述性质还表明，公式的满足、蕴涵和等价关系不取决于超团队的具体解释 α：若对 α 的回答为肯定，则对 $\overline{\alpha}$也同样为肯定。这种不变性符合这样的直觉：Eloise 和 Abelard 对真公式和假公式，以及逻辑后承和等价关系的概念，都持有一致看法。

推论3（解释不变性）。设 φ 和 ϕ 为 ADIF 公式。那么，φ 是 $\exists\forall$-可满足的，当且仅当 φ 是 $\forall\exists$- 可满足的。此外，$\varphi \Rightarrow^{\exists\forall} \phi$ 当且仅当 $\varphi \Rightarrow^{\forall\exists} \phi$，且 $\varphi \equiv^{\exists\forall} \phi$ 当且仅当 $\varphi \equiv^{\forall\exists} \phi$。

鉴于超团队和否定具有博弈论性质，ADIF并不具备逻辑确定性，即不具备这样一种性质：相对于同一种语义关系，一个模型要么满足某个公式，要么满足其否定。不过，它满足下文所述的博弈论确定性，这与以下直觉相符：如果一名玩家无法证明某个公式为真，那么另一名玩家就能证明其否定为真。

推论4（博弈论确定性）。设 φ 是一个 ADIF 公式，且 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\varphi))$ 是一个超团队。那么：

1) either $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ *or* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\overline{\alpha}} \neg\varphi$*;*

2）或者 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{x} \models^{\alpha} \varphi$，或者 $\mathfrak{A}$，$\overline{\mathfrak{x}} \models^{\alpha} \neg\varphi$。

如前所述，由于句子的真值可以在平凡超团队 $\{\{\varnothing\}\}$ 上进行检验，而与具体的交替标志 α 无关，因此经典排中律对句子成立。下文中，我们用 $\mathfrak{A} \models \varphi$ 表示 φ 在 $\mathfrak{A}$ 上同时是 $\exists\forall$-可满足和 $\forall\exists$-可满足的事实。

推论 5（排中律）。设 φ 是一个 ADIF 句子。那么，$\mathfrak{A} \models \varphi$ 或 $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$。

借助上述性质，我们可以建立以下基本的布尔律，而这些布尔律又使得能够按照推论*nnf*中所述的方式，对6中的公式进行规范表示。

定理 3（布尔律）。设 φ_1、φ_2 和 φ 是 ADIF 公式。那么：

1) a) $\neg\bot \equiv \top$; b) $\neg\top \equiv \bot$; c) $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$;

2) a) $\varphi \wedge \bot \equiv \bot \wedge \varphi \equiv \bot$; b) $\varphi \wedge \top \equiv \top \wedge \varphi \equiv \varphi$;

3) a) $\varphi \vee \top \equiv \top \vee \varphi \equiv \top$; b) $\varphi \vee \bot \equiv \bot \vee \varphi \equiv \varphi$;

4) a) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1$; b) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$;

5) a) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1$; *b)* $\varphi_1 \wedge (\varphi \wedge \varphi_2) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi) \wedge \varphi_2$;

6) a) $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2$; *b)* $\varphi_1 \vee (\varphi \vee \varphi_2) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi) \vee \varphi_2$;

7) a) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$; b) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$;

8) a) $\exists^{\pm \mathrm{W}} x.\, \varphi \equiv \neg(\forall^{\pm \mathrm{W}} x.\, \neg\varphi)$; b) $\forall^{\pm \mathrm{W}} x.\, \varphi \equiv \neg(\exists^{\pm \mathrm{W}} x.\, \neg\varphi)$。

推论 6（否定范式）。每个 ADIF 公式都等价于一个处于否定范式中的 ADIF公式。

目前，我们尚不知道 ADIF 是否具有 前束范式（前束范式，简称 pnf）。因此，在第 4 节和第 5节中，我们主要考虑已经处于 前束范式中的公式。

开放问题1（ADIF前束范式）。每个 ADIF 公式是否都等价于一个处于前束范式中的 ADIF公式?

出于技术便利，我们现在将扩展算子推广到（有限）量词前缀 $\wp$，其集合记为 Qn。注意，不失一般性，我们只考虑满足以下条件的前缀：每个变量 x (i) 至多被量化一次，(ii) 不出现在其量词 $\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x$ 的依赖／独立约束集 $[\![\pm \mathrm{W}]\!]$ 中，且 (iii) 不能在量词 $\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}y$ 的辖域内被量化，若该量词的依赖／独立约束集 $[\![\pm \mathrm{W}]\!]$ 包含其自身。我们分别用 $\mathrm{vr}(\wp)$ 和 $\mathrm{dep}(\wp)$ 表示在 $\wp$ 中被量化的变量集，以及 $\wp$ 中所有依赖／独立约束集的并集。给定一个超团队 $\mathfrak{X}$ 和一个交替标志 α，算子 $\mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \wp)$ 对应于

按照特定顺序，对 $\wp$ 中出现的所有量词迭代应用扩展算子，从而将其应用于 $\mathfrak{X}$。为此，我们首先引入量词符号 $\mathsf{Q} \in \{\exists, \forall\}$ 与交替标志 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$ 相容的概念，定义如下：若 Q 满足 α 且 $\mathsf{Q} = \exists$，或满足 $\alpha = \exists\forall$ 且 $\mathsf{Q} = \forall$，则称 Q 为 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$ -相容。现在，将量词 $\mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x$ 应用于 $\mathfrak{X}$，记作 $\mathsf{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x)$，其语义遵循定义 2 的条目 7 和 8 中所定义的量词语义。更确切地说，当 Q 与 α 相容时，这仅对应于将 x 扩展到 $\mathfrak{X}$。反之，当 Q 与 $\overline{\alpha}$ 相容时，我们需要用 x 对 $\mathfrak{X}$ 的对偶进行扩展，并对结果取对偶。形式化地说：

$$\mathsf{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x) \triangleq \begin{cases} \mathsf{ext}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}, x), & \text{if } \mathsf{Q} \text{ is } \alpha\text{-coherent;} \\ \overline{\mathsf{ext}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}(\overline{\mathfrak{X}}, x)}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该算子自然可以扩展到任意量化前缀 $\wp$：1) $\mathsf{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \epsilon) \triangleq \mathfrak{X}$；2) $\mathsf{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\, \wp) \triangleq \mathsf{ext}_\alpha(\mathsf{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x)\ \wp)$。我们还定义 $\mathsf{ext}_\alpha(\wp) \triangleq \mathsf{ext}_\alpha(\{\{\varnothing\}\}, \wp)$。对量词前缀 $\wp \in \mathsf{Qn}$ 作简单的结构归纳可知，超团队 $\mathfrak{X}$ α 满足公式 $\wp\phi$，当且仅当其关于 $\wp$ 的 α-扩展 α 满足其矩阵 ϕ。

定理 4（前缀扩展）。设 $\wp\phi$ 是一个 ADIF 公式，其中 $\wp \in \mathsf{Qn}$ 是量词前缀，ϕ 是任意 ADIF 公式。那么，对于所有超团队 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\wp\phi))$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^\alpha \wp\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathsf{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \wp) \models^\alpha \phi$。

3. 充分性

在本节中，我们将展示，基于超团队的 Hodges 的交替语义是充分的，即，它是一个保守扩展，能够准确刻画 Tarski 满足关系（针对 FOL）以及 IF 的 Hodges 语义（等价的句法变体见定义3 和4），当分别限制在相应片段上时，正如下面定理5 和6 中形式化陈述的那样。

3.1. 一阶逻辑

现在我们可以证明，当关注 FOL 片段（属于 ADIF）时，如第2.1节所定义，定义2 中的满足关系对应于经典的塔斯基满足关系。这一 FOL 充分性性质对于原子公式显然成立；为了将其扩展到其余 FOL 组成部分，我们利用下面三个引理，分别处理对偶化、量词和二元布尔联结词。

正如前文详尽讨论的那样，对偶化交换了两个玩家所扮演的角色，同时仍保留其选择之间原有的依赖关系。事实上，如果某个 FOL 性质相对于给定的交替标志被一个超团队满足，那么相对于对偶标记，其对偶版本也会被该超团队满足，正如下述引理中的形式化陈述。

引理 4（FOL对偶化）。对于所有 FOL公式 φ 和超团队 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\varphi))$，以下等价关系成立。

1) 陈述*1a* 和*1b* 等价:

a) 存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$，对于所有赋值$\chi \in X$；b) 对于所有团队 $X \in \overline{\mathfrak{X}}$，存在一个赋值 $\chi \in X$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。

2) 陈述*2a* 和 *2b* 等价:

a) 对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，存在一个赋值 $\chi \in X$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$；b) 存在一个团队 $X \in \overline{\mathfrak{X}}$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$，对于所有赋值$\chi \in X$。

以下引理表明，当扩展算子应用于所有支撑变量时，它为经典 FOL 量化提供了恰当的语义。陈述 1 考虑了 Eloise 的选择，此时超团队的解释为 $\exists\forall$；而陈述 2 处理了 Abelard 的选择，此时解释为对偶的 $\forall\exists$。

引理 5（FOL量词）。对于所有 FOL 公式 φ、变量 $x \in \mathrm{Vr}$ 以及超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(V)$，其中 $V \triangleq \mathrm{sup}(\varphi) \setminus \{x\}$，以下等价关系成立。

1) 陈述*1a* 和 *1b* 等价:

a) 存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \exists x.\varphi$，对于所有 $\chi \in X$；b) 存在一个团队 $X \in \mathrm{ext}_V(\mathfrak{X}, x)$，使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$，对于所有 $\chi \in X$。

2) 陈述*2a* 和 *2b* 等价:

a) for all teams $X \in \mathfrak{X}$*, there exists* $\chi \in X$ *such that* $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \forall x.\varphi$*;*

b) for all teams $X \in \mathrm{ext}_V(\mathfrak{X}, x)$*, there exists* $\chi \in X$ *such that* $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$*.*

最后，当考虑底层超团队的修正解释时，划分算子准确地模拟了二元布尔联结词的语义。

引理 6（FOL 布尔联结词）。对于所有FOL 公式 φ_1 和 φ_2 以及超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(V)$，其中 $V \triangleq \mathrm{sup}(\varphi_1) \cup \mathrm{sup}(\varphi_2)$，以下等价关系成立。

1) 陈述*1a* 和 *1b* 等价:

a) 存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$，对所有 $\chi \in X$；b) 对于每个二分划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，存在一个索引 $i \in \{1, 2\}$ 和一个团队 $X \in \mathfrak{X}_i$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_i$，对所有 $\chi \in X$。

2）陈述*2a* 和*2b* 等价:

a）对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，存在 $\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_1 \vee \varphi_2$；b）存在一个二分划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得对于所有索引$i \in \{1,2\}$和团队 $X \in \mathfrak{X}_i$，都有 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_i$，其中某个 $\chi \in X$。

现在可以陈述 ADIF的 FOL 充分性性质。

定理5（FOL充分性）。对于所有 FOL 公式 φ 和超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}\subseteq(\mathrm{sup}(\varphi))$，有：

1） $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 当且仅当存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$，使得对于所有赋值 $\chi \in X$，都有 $\mathfrak{A}$， $\chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$；
2） $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$ 当且仅当对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，存在一个赋值 $\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}$， $\chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。

3.2. 依赖/独立友好逻辑

依赖/独立友好逻辑 （V¨a¨an¨anen，2007年； Hintikka 和 Sandu，1989）可以被视为的一个（句法变体）片段，其中：i）否定只能出现在原子公式前；ii）根据标志，只能限制一种量词。

定义 3（DIF语法）。 ∃/∀-依赖/独立友好逻辑（简称 ∃/∀-DIF）是根据以下语法构建的公式集合，其中 $R \in \mathcal{R}$， $\vec{x} \in \mathrm{Vr}^{\mathrm{ar}(R)}$, $x \in \mathrm{Vr}$， $W \subseteq \mathrm{Vr}$，且 $|W| < \omega$:

$$\exists\text{-DIF} \quad \varphi := R(\vec{x}) \mid \neg R(\vec{x}) \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists^{\pm W} x.\varphi \mid \forall^{-\emptyset} x.\varphi.$$

$$\forall\text{-DIF} \quad \varphi := R(\vec{x}) \mid \neg R(\vec{x}) \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists^{-\emptyset} x.\varphi \mid \forall^{\pm W} x.\varphi.$$

Hodges 公式的语义定义在团队上。语义规则有两种类型，分别对应每个标志 $\beta \in \{\exists, \forall\}$，二者互为对偶。 ∀-语义是 Hodges（1997a）中所述的经典语义，在 Mann 等人（2011）中也记作“+”-语义，而 ∃-语义则对应于“–”-语义的否定。在回顾这两种语义的定义之前，我们需要提供另外两个算子。对于布尔联结词，我们将团队的划分操作定义如下： $\mathrm{par}(X) \{(X_1, X_2) \in 2^X \times 2^X \mid X_1 \cap X_2 = \emptyset \wedge X_1 \cup X_2 = X\}$。量词的规则在量词与标志 β 不一致时使用扩展算子 ext；而当量词与该标志一致时，语义则要求在团队上使用柱化算子。直观地说，关于某个变量 x 的团队 X 的柱化，会用 x 的每个可能取值扩展其中的每个赋值。形式化地， $\mathrm{cyl}(X\ x)\ \{\chi[x \mapsto a] \mid \chi \in X\ a \in A\}$。

定义 4（DIF 语义）。Hodges 的语义关系 $\mathfrak{A}$， $X \models^{\beta}_{\mathrm{DIF}} \varphi$ for$\overline{\beta}$-DIF归纳定义如下：对于所有 $\overline{\beta}$-DIF 公式 φ 和团队 $X \subseteq$ 赋值⊆(free(φ))，其中 β、$\overline{\beta} \in \{\exists, \forall\}$和 $\beta \neq \overline{\beta}$:

1) a) $\mathfrak{A}, X \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} R(\vec{x})$ *if, for all* $\chi \in X$*, it holds that* $\vec{x}^{\chi} \in R^{\mathfrak{A}}$;

b) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \neg R(\vec{\boldsymbol{x}})$ *if, for all* $\chi \in \mathrm{X}$*, it holds that* $\vec{\boldsymbol{x}}^{\chi} \notin R^{\mathfrak{A}}$*;*

c) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ *if* $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ *and* $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$*;*

d) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1 \vee \varphi_2$ *if* $\mathfrak{A}, \mathrm{X}_1 \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ *and* $\mathfrak{A}, \mathrm{X}_2 \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$*, for some bipartition* $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathrm{X})$*;*

e) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \exists^{\pm \mathrm{W}} x.\, \varphi$ *if* $\mathfrak{A}, \mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathsf{F}, x) \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi$*, for some* $\mathsf{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$*;*

f) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \forall^{-\emptyset} x.\, \varphi$ *if* $\mathfrak{A}, \mathsf{cyl}(\mathrm{X}, x) \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi$*;*

2) a) $\mathfrak{A}$, $\mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \mathrm{R}(\vec{}\mathrm{x})$ 当且仅当存在 $\chi \in \mathrm{X}$，使得 $\vec{}\mathrm{x}^{\chi} \in \mathrm{R}^{\mathfrak{A}}$;

b) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \neg R(\vec{\boldsymbol{x}})$ *if there exists* $\chi \in \mathrm{X}$ *such that* $\vec{\boldsymbol{x}}^{\chi} \notin R^{\mathfrak{A}}$*;*

c) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ *if* $\mathfrak{A}, \mathrm{X}_1 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ *or* $\mathfrak{A}, \mathrm{X}_2 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$*, for all bipartitions* $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathrm{X})$*;*

d) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1 \vee \varphi_2$ *if* $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ *or* $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$*;*

e) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \exists^{-\emptyset} x.\, \varphi$ *if* $\mathfrak{A}, \mathsf{cyl}(\mathrm{X}, x) \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi$*;*

f) $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \forall^{\pm \mathrm{W}} x.\, \varphi$ *if* $\mathfrak{A}, \mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathsf{F}, x) \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi$*, for all* $\mathsf{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$.

为了证明 ADIF 确实是 DIF的保守扩展，我们需要能够用超团队上的语义来模拟团队上的语义。作为第一步，我们以显然的方式将柱化算子提升到超团队上，定义 $\mathsf{cyl}(\mathfrak{X}, x)$ $\{\mathsf{cyl}(\mathrm{X}\ x) \mid \mathrm{X} \in \mathfrak{X}\}$。虽然 ADIF的语义没有提供用于柱化的原始算子，但可以先对超团队进行对偶化，然后将 x 的扩展一致地应用于 $\mathfrak{X}$论域中的所有变量，最后再次对所得结果进行对偶化，从而轻松模拟这一操作。下面的引理确立了这两种不同操作之间的等价关系。

引理 7（柱状扩展）。设 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}$ 是一个超团队。那么，对于所有变量 $x \in \mathrm{Vr}$ 和变量集 W，均有 $\mathsf{cyl}(\mathfrak{X}, x) \equiv \mathsf{ext}_{\mathrm{W}}(\overline{\mathfrak{X}}, x)$，其中 $\mathsf{vr}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{W} \subseteq \mathrm{Vr}$。

对于 ADIF 的语义中不存在的团队划分算子，也会出现类似的问题。再次，可以通过对偶化算子与超团队划分算子来模拟该算子。具体而言，我们首先对超团队 $\mathfrak{X}$ 进行对偶化，然后进行划分，得到 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\overline{\mathfrak{X}})$，最后再次对得到的两个超团队进行对偶化，得到 $\overline{\mathfrak{X}_1}$ 和 $\overline{\mathfrak{X}_2}$；它们各自都包含一些团队，而这些团队正是对 $\mathfrak{X}$ 中的团队应用团队划分算子后得到的。

引理 8（团队划分）。设 $\mathfrak{X} \in$HAsg 是一个超团队。那么：
1）对于所有超团队二分（$\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$） $\in \mathsf{par}(\overline{\mathfrak{X}})$ 以及团队 $\mathrm{Y}_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$ 和 $\mathrm{Y}_2 \in \overline{\mathfrak{X}_2}$，存在一个团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2$；

2）对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$ 以及团队二分（X_1,X_2） $\in$ par(X)，存在一个超团队二分（$\mathfrak{X}_1$，$\mathfrak{X}_2$） $\in \mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$ 以及两个团队 $Y_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$ 和 $Y_2 \in \overline{\mathfrak{X}_2}$，使得 $Y_1 \subseteq X_1$ 且 $Y_2 \subseteq X_2$。

基于这两个引理，可以证明以下定理，该定理确立了所需的充分性结果。

定理 6（DIF 充分性）。对于所有 $\exists/\forall$-DIF 公式 $\varphi^{\exists}/\varphi^{\forall}$以及超团队$\mathfrak{X} \in$ HAsg$\subseteq$(sup($\varphi^{\exists}/\varphi^{\forall}$))，有：

1) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi^{\exists}$ 当且仅当存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{A}, X \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi^{\exists}$；

2) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi^{\forall}$ 当且仅当对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，都有 $\mathfrak{A}, X \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi^{\forall}$。

例 8。在例5中，我们已经注意到，两个 ADIF 句子$\varphi_3 = \forall x.\exists^{+\emptyset} y.(x = y)$和 $\varphi_4 = \exists x.\forall^{+\emptyset} y.\neg(x = y)$在二元结构 $\mathfrak{A} = \langle \{0,1\}, =^{\mathfrak{A}} \rangle$ 中针对平凡超团队 $\{\{\varnothing\}\}$分别取假值和真值。我们还声称，它们互为语义否定；借助推论 5和定理 3，现在可以很容易地证明这一点。现在注意到，对于两个 $\exists$-DIF 和 $\forall$-DIF 句子 $\varphi'_3 = \forall^{-\emptyset} x.\exists^{+\emptyset} y.(x = y)$ 和 $\varphi'_4 = \exists^{-\emptyset} x.\forall^{+\emptyset} y.\neg(x = y)$，所有这些性质同样成立。此时，我们可以说明，在 IF （等价地，在 DIF）中进行求值时，φ'_3 和 φ'_4 的真值与假分别传达了不同的含义。首先，回顾一下，Hodges（1997a）（另见 Mann 等人（2011））将一个 IF 句子 φ 定义为：若 $\mathfrak{A}$，$\{\varnothing\} \models^{+} \varphi$，则它在 $\mathfrak{A}$中为真；若 $\mathfrak{A}, \{\varnothing\} \models^{-} \varphi$，则它在 $\mathfrak{A}$上为假。如上所述，这意味着：若 $\mathfrak{A}, \{\varnothing\} \models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi_{\exists}$，则 φ 在 $\mathfrak{A}$中为真；若 $\mathfrak{A}, \{\varnothing\} \not\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_{\forall}$，则它在 $\mathfrak{A}$ 中为假，其中 $\varphi_{\exists}$ 和 $\varphi_{\forall}$ 分别是通过将 φ 中的全称量词和存在量词的限制替换为 $-\emptyset$ 而得到的 $\exists$-DIF 句子和 $\forall$-DIF 句子。现在，φ'_3 和 φ'_4 都是 IF 句子。此外，如上所述，φ'_3 是一个 $\exists$-DIF 句子，而 φ'_4 是一个 $\forall$-DIF 句子。因此，由定理 6，我们立即得到 $\mathfrak{A}, \{\varnothing\} \not\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi'_3$ 和 $\mathfrak{A}, \{\varnothing\} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi'_4$，因为$\mathfrak{A}$, $\{\{\varnothing\}\} \not\models \varphi'_3$ 和 $\mathfrak{A}, \{\{\varnothing\}\} \models \varphi'_4$。因此，在 IF中求值时，$\varphi'_3$ 不为真，而 φ'_4 不为假。然而，φ'_3 也不为假，φ'_4 也不为真，这意味着这两个句子都是未定的。事实上，$\mathfrak{A}, \{\varnothing\} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi'_{3\forall}$和 $\mathfrak{A}, \{\varnothing\} \not\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi'_{4\exists}$，其中 $\varphi'_{3\forall} = \forall^{-\emptyset} x.\exists^{-\emptyset} y.($ $x = y)$ 和$\varphi'_{4\exists} = \exists^{-\emptyset} x.\forall^{-\emptyset} y.\neg(x = y)$，因为 $\mathfrak{A}, \{\{\varnothing\}\} \models \varphi'_{3\forall}$和 $\mathfrak{A}, \{\{\varnothing\}\} \not\models \varphi'_{4\exists}$。

4. 元理论

现在，我们通过赫布兰德–斯科伦语义引入对量词的元层次解释，该语义扩展了基于超团队的组合语义。这一点至关重要，因为它有助于：1）解决模型检验问题；2）通过编码二阶逻辑（简称 SOL）（Hilbert 和 Ackermann，1938年；Church，1956年；Shapiro，1991年）与团队逻辑（简称 TL）（V¨a¨an¨anen，2007年），证明 ADIF 涵盖整个多项式层次；以及 3）确立第 5 节所述博弈论语义的充分性。

4.1. 元扩展

量词 $\exists^{\pm \mathrm{W}} x$ 和 $\forall^{\pm \mathrm{W}} x$ 的博弈论解释，隐含地确定了满足 $[\![\pm \mathrm{W}]\!]$-一致性约束的 Eloise 和 Abelard 的策略。我们在此提出的 ADIF元扩展通过引入两个量词 $\Sigma^{\pm \mathrm{W}} x$ 和$\Pi^{\pm \mathrm{W}} x$，使这些策略显式化；这两个量词的取值范围是 $[\![\pm \mathrm{W}]\!]$-一致的 Herbrand/Skolem 函数（Buss，1998年）。直观地说，$\Sigma^{\pm \mathrm{W}} x.\varphi$ 确保存在一个 $[\![\pm \mathrm{W}]\!]$-一致的 Skolem 函数，为 x 赋值，使 φ成立；而对于某个 $[\![\pm \mathrm{W}]\!]$-一致的 Herbrand 函数赋给 x 的所有值，$\Pi^{\pm \mathrm{W}} x.\varphi$ 都验证 φ。

定义 5 （META-ADIF 语法）。元 ADIF扩展（META-ADIF，简称）是根据定义 *1* 扩展如下而构成的公式集，其中 $x \in \mathrm{Vr}$ 和 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Vr}$ 满足 $|\mathrm{W}| < \omega$:

$$\varphi := \mathrm{ADIF} \mid \Sigma^{\pm \mathrm{W}} x.\varphi \mid \Pi^{\pm \mathrm{W}} x.\varphi.$$

公式 META-ADIF 的支撑变量集 $\mathsf{sup}(\varphi)$ 按照 ADIF 中的定义给出，另外增加以下两个简单情形：对于 $\mathsf{Q} \in \{\Sigma, \Pi\}$，$\mathsf{sup}(\mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\varphi) \triangleq \mathsf{sup}(\varphi) \setminus \{x\}$。而自由变量的定义要复杂得多，需要在（元）依赖上下文 free 下引入以下自由变量函数：$\text{META-ADIF} \times (\mathsf{Vr} \rightharpoonup 2^{\mathrm{Vr}}) \to 2^{\mathrm{Vr}}$，以及在（元）依赖上下文 dep 下引入依赖变量函数：$\text{META-ADIF} \times (\mathsf{Vr} \rightharpoonup 2^{\mathrm{Vr}}) \to 2^{\mathrm{Vr}}$，其中，依赖上下文是指任意偏函数$\iota \in \mathsf{Vr} \rightharpoonup 2^{\mathrm{Vr}}$。$\iota$ 的传递闭包是一个依赖上下文 $\iota^* \in \mathsf{dom}(\iota) \to 2^{\mathrm{Vr}}$，满足对于其论域中的每个变量 $x \in \mathsf{dom}(\iota)$，$\iota^*(x)$ 是满足以下条件的最小变量集：(a) $\iota(x) \subseteq \iota^*(x)$，以及 (b) $\iota(y) \subseteq \iota^*(x)$，其中对所有变量$y \in \iota^*(x) \cap \mathsf{dom}(\iota)$ 均成立。最后，对于所有变量 $x \in \mathsf{dom}(\iota)$，若 $x \notin \iota^*(x)$，则 ι 是无环的。函数 free 和 dep 可以按如下方式以互递归方式定义。

- $\mathsf{free}(\bot, \iota), \mathsf{free}(\top, \iota) \quad \emptyset$;
- $\mathsf{free}(\mathsf{R}(\vec{\mathsf{x}}), \iota) \quad \vec{\mathsf{x}} \cup \bigcup \{\iota^*(x) \mid x \in \vec{\mathsf{x}} \cap \mathsf{dom}(\iota)\}$;

- $\mathsf{free}(\neg \varphi, \iota) \triangleq \mathsf{free}(\varphi, \iota)$;
- $\mathsf{free}(\varphi_1 \odot \varphi_2, \iota) \triangleq \mathsf{free}(\varphi_1, \iota) \cup \mathsf{free}(\varphi_2, \iota)$，对于 $\odot \in \{\wedge, \vee\}$;
- $\mathsf{free}(\mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\varphi, \iota) \triangleq (\mathsf{free}(\varphi, \iota') \setminus \{x\}) \cup [\![\pm \mathrm{W}]\!]$，如果 $x \in \mathsf{free}(\varphi, \iota')$，并且 $\mathsf{free}(\mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\varphi, \iota) \triangleq \mathsf{free}(\varphi, \iota')$，否则，其中 $\iota', \iota \setminus \{x\}$，对于 $\mathsf{Q} \in \{\exists, \forall\}$;
- $\mathsf{free}(\mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\varphi, \iota) \triangleq \mathsf{free}(\varphi, \iota')$，若 $x \in \mathsf{dep}(\varphi, \iota')$，且 $\mathsf{free}(\mathsf{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\varphi, \iota) \triangleq \mathsf{free}(\varphi, \iota') \setminus \{x\}$；否则，其中 $\iota', \iota[x \mapsto [\![\pm \mathrm{W}]\!]]$，对于 $\mathsf{Q} \in \{\Sigma, \Pi\}$。

直观地说，一个变量 y 可以在依赖上下文 ι 下的 META-ADIF 公式 φ 中成为自由变量，原因可能是以下三种之一（始终位于遮蔽它的 y 量词的辖域之外）：（i）它在某个关系符号中被显式使用；（ii）它出现在某个

关系符号中使用的元量化变量 x 的（传递）依赖集 x （）中；（iii）它出现在某个自由变量 x的一阶量词 $\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x$的依赖/独立性约束集 $[\![\pm \mathrm{W}]\!]$ 中。注意，只有当某个变量 x 的元量词不出现在其矩阵的一阶依赖变量集中时，该元量词才会遮蔽该变量。

• 依存关系$(\bot, \iota)$, 依存关系$(\top, \iota)$, 依存关系$(\mathrm{R}(\vec{\ }\mathrm{x})\ \iota)\ \emptyset$;

• 依赖$(\neg\varphi, \iota) \triangleq$ 依赖(φ, ι);

• $\mathrm{dep}(\varphi_1 \odot \varphi_2, \iota) \triangleq \mathrm{dep}(\varphi_1, \iota) \cup \mathrm{dep}(\varphi_2, \iota)$，适用于 $\odot \in \{\wedge, \vee\}$;

• $\mathrm{dep}(\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{w}}x.\, \varphi, \iota) \triangleq (\mathrm{dep}(\varphi, \iota') \setminus \{x\}) \cup [\![\pm \mathrm{W}]\!]$, 如果 $x \in \mathrm{free}(\varphi, \iota')$, 并且 $\mathrm{dep}(\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{w}}x.\, \varphi, \iota) \triangleq \mathrm{dep}(\varphi, \iota')$, 否则，其中 $\iota', \iota \setminus \{x\}$, 对于 $\mathrm{Q} \in \{\exists, \forall\}$;

• $\mathrm{dep}(\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{w}}x.\, \varphi, \iota) \triangleq \mathrm{dep}(\varphi, \iota')$, 其中 $\iota', \iota[x \mapsto [\![\pm \mathrm{W}]\!]]$, 对于 $\mathrm{Q} \in \{\Sigma, \Pi\}$。

直观地说，如果变量 y 出现在某个自由变量 x 的一阶量词 $\mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x$ 的依赖/独立性约束集 $[\![\pm \mathrm{W}]\!]$ 中，并且同时未被移除，即不在另一个关于其自身 y 的一阶量词的辖域内，那么该变量就属于集合 $\mathrm{dep}(\varphi, \iota)$。请注意，这里不考虑由元量词量化的变量的依赖关系；这些依赖关系由依赖上下文 ι维护，因为它们仅用于确定哪些变量是自由的。此时， Meta-ADIF 公式 φ 的自由变量集合 $\mathrm{free}(\varphi)$定义为 $\mathrm{free}(\varphi, \varnothing)$。

为跟踪已经量化的 Herbrand/Skolem 函数，我们使用函数赋值 $\mathfrak{F} \in \mathrm{FAsg} \triangleq \mathrm{Vr} \rightharpoonup \mathrm{Fnc}$，将每个变量 $x \in \mathrm{V} \triangleq \mathrm{dom}(\mathfrak{F})$映射到一个函数 $\mathfrak{F}(x) \in \mathrm{Fnc}$。为了用 $\mathfrak{F}$扩展超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg(U)}$，我们使用扩展算子 $\mathrm{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ $\{\mathrm{ext(X}\ \mathfrak{F}) \mid \mathrm{X} \in \mathfrak{X}\}$，其中，(i) $\mathrm{ext(X}\ \mathfrak{F}) \triangleq \{\chi \in \mathrm{cyl(X, V)} \mid \forall x \in \mathrm{V} \setminus \mathrm{U}.\, \chi(x) = \mathfrak{F}(x)(\chi)\}$ 表示团队 X 在变量 V 上的扩展，因此赋值 χ 为每个（尚未赋值的）变量 $x \in \mathrm{V} \setminus \mathrm{U}$ 给出的值 $\chi(x)$与 $\mathfrak{F}(x)$所规定的值保持一致；(ii) $\mathrm{cyl(X, V)}$ $\{\chi \in \mathrm{Asg(U} \cup \mathrm{V)} \mid \chi\restriction_{\mathrm{U}} \in \mathrm{X}\}$ 表示团队 $\mathrm{X} \in \mathrm{TAsg(U)}$ 关于变量集 $\mathrm{V} \setminus \mathrm{U}$ 的柱化。最后，如果对于所有变量 $x \in \mathrm{dom}(\mathfrak{F})$，都有 $\mathfrak{F}(x) \in \mathrm{Fnc}$，其中 $\iota \in \mathrm{Vr} \rightharpoonup 2^{\mathrm{Vr}}$是某个无环依赖上下文，且 $\mathrm{dom}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathrm{dom}(\iota)$，则函数赋值$\mathfrak{F} \in \mathrm{FAsg}$ 是无环的。

定义 6（Meta-ADIF 语义）。Hodges 的交替语义关系 $\mathfrak{A}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 关于 Meta-ADIF 的归纳定义如下：对于所有Meta-ADIF公式 φ、函数赋值 $\mathfrak{F} \in \mathrm{FAsg}$、超团队 $\mathfrak{X} \in$HAsg$\subseteq$（$\mathrm{sup}(\varphi) \setminus \mathrm{dom}(\mathfrak{F})$）以及交替标记 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$:

1,2,4-8）除原子关系的情形外，所有 ADIF 情形都通过以显然的方式提升定义 *2* 中相应的条目到函数赋值来定义，即，后者不起作用；

3) a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \mathrm{R}(\vec{\ }\mathrm{x})$，如果存在一个团队 $\mathrm{X} \in \mathrm{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$，使得对于所有赋值 $\chi \in \mathrm{X}$，都有 $\vec{\ }\mathrm{x}^{\chi} \in \mathrm{R}^{\mathfrak{A}}$;

b) $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \mathrm{R}(\vec{}\mathrm{x})$，如果对于所有团队 $\mathrm{X} \in \mathsf{ext}(\mathfrak{X},\mathfrak{F})$，都存在一个赋值 $\chi \in \mathrm{X}$，使得 $\vec{}\mathrm{x}^{\chi} \in \mathrm{R}^{\mathfrak{A}}$；

9) $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X} \models^{\alpha} \Sigma^{\pm\mathrm{W}} x.\,\phi$ 若 $\mathfrak{A},\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}],\mathfrak{X} \models^{\alpha} \phi$，对于某个函数 $\mathrm{F} \in \mathsf{Fnc}^{[\pm\mathrm{W}]}$；

10) $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X} \models^{\alpha} \Pi^{\pm\mathrm{W}} x.\,\phi$ 若 $\mathfrak{A},\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}],\mathfrak{X} \models^{\alpha} \phi$，对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathsf{Fnc}^{[\pm\mathrm{W}]}$。

基本上，为了求一个原子公式 $R(\vec{}\boldsymbol{x})$ 的值，我们使用 $\mathfrak{X}$ 所规定的函数扩展它，然后按照标志 $\mathfrak{F}$ 给出的交替方式检查赋值，$\alpha \in \{\forall\exists, \exists\forall\}$ 正如普通的 ADIF中所做的那样。事实上，上面的条目 3 可以改写为以下等价形式，从而能够统一处理交替标记：

$$\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X} \models^{\alpha} R(\vec{\boldsymbol{x}}), \text{ if } \mathfrak{A},\mathsf{ext}(\mathfrak{X},\mathfrak{F}) \models^{\alpha} R(\vec{\boldsymbol{x}}),$$

其中，满足关系的第二次出现 $\models^{\alpha}$指的是 ADIF的 Hodges 交替语义关系，依据的是定义 2的条目 3。元量词 $\Sigma^{\pm\mathrm{W}} x$和 $\Pi^{\pm\mathrm{W}} x$的语义采用经典的二阶语义，其中，在元层级选择的函数会存储在赋值中$\mathfrak{F}$。

第 2.2 节末尾给出的满足、蕴涵和等价关系的概念，可直接推广到 Meta-ADIF。此外，第 ADIF 节中为 2.4 证明的所有相关结果，显然也可推广到 Meta-ADIF 的 ADIF 公式语义。这些结果确实以这种广义形式在附录 C中得到了证明。特别是，ADIF 中的满足与 Meta-ADIF 中的满足一致。

命题 2. $\mathfrak{A},\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A},\varnothing,\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$，对每个 ADIF 公式 φ 和超团队 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\varphi))$。

乍看之下，元量词的语义规则似乎仿照了 DIF 和 TL中相应的量词规则，因为这两种情况下都涉及选择一个 Skolem／Herbrand 函数。然而，与 DIF 和 TL不同，直到对原子公式求值时，才会将函数应用于超团队。这使得两种语义中的量化行为显著不同。上文给出的更复杂的自由变量定义也反映了这种差异。

下面的引理刻画了一阶量词 $\exists^{\pm\mathrm{W}} x$ 和 $\forall^{\pm\mathrm{W}} x$ 的组合语义与相应的 Skolem/Herbrand 函数选择之间的联系。

引理 9（扩展解释）。对于所有定义在 $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{Vr}$ 上的超团队 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}(\mathrm{V})$、定义在 $\mathrm{V} \cup \{x\}$ 且满足 $x \in \mathrm{Vr} \setminus \mathrm{V}$ 的性质 $\Psi \subseteq \mathsf{Asg}(\mathrm{V} \cup \{x\})$、变量集 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Vr}$ 以及量词符号 $\mathrm{Q} \in \{\exists, \forall\}$，以下四个等价关系均成立。

1) 陈述*1a* 和*1b* 等价，当且仅当 $\mathtt{Q}$ 是 α-相干的：

a) there exists $\mathrm{X}' \in \mathsf{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathtt{Q}^{\pm\mathrm{W}} x)$ *such that* $\mathrm{X}' \subseteq \Psi$*;*

b) 存在 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$ 和 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \subseteq \Psi$。

2) 陈述*2a* 和 *2b* 等价，当且仅当 $\mathtt{Q}$ 是 α-相干的：

a) 对于所有 $\mathrm{X}' \in \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}} x)$，均有 $\mathrm{X}' \cap \Psi \neq \emptyset$；b) 对于所有 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$ 和 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，均有 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \cap \Psi \neq \emptyset$。

3) 陈述*3a* 和 *3b* 等价，当且仅当 $\mathtt{Q}$ 是 $\overline{\alpha}$-相干的：

a) 存在 $\mathrm{X}' \in \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}} x)$，使得 $\mathrm{X}' \subseteq \Psi$；b) 对于所有 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$，均有 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \subseteq \Psi$，其中某个 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$。

4) 陈述*4a* 和 *4b* 等价，当且仅当 $\mathtt{Q}$ 是 $\overline{\alpha}$-相干的：

a) 对于所有 $\mathrm{X}' \in \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}} x)$，均有 $\mathrm{X}' \cap \Psi \neq \emptyset$；b) 存在 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$，使得对于所有 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，均有 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \cap \Psi \neq \emptyset$。

等价关系 1 和 4，当 $\mathtt{Q} = \exists$ 时，隐含地表明存在量词总能通过选择一个合适的 Skolem 函数来模拟，且不受超团队交替标志 α 的影响。反之，等价关系 2 和 3，当 $\mathtt{Q} = \forall$ 时，表明全称量词可以通过选择一个合适的 Herbrand 函数来模拟，同样不受 α的影响。这些观察可以在 META-ADIF 中表述如下。

定理 7（量词解释）。对于所有 FOL 公式 ϕ、变量 $x \in$ 变量集合 Vr、满足 $x \notin [\![\pm \mathrm{W}]\!]$ 的变量集合 $\mathrm{W} \subseteq$ 变量集合 Vr、定义域 $\mathrm{dom}(\mathfrak{F}) \cap [\![\pm \mathrm{W}]\!] = \emptyset$ 的无环函数赋值 $\mathfrak{F} \in$ 函数赋值 FAsg，以及满足 $x \notin \mathrm{vr}(\mathfrak{X})$ 的超团队 $\mathfrak{X} \in$ 超团队 $\mathrm{HAsg}^{\subseteq}((\sup(\phi) \setminus \{x\}) \setminus \mathrm{dom}(\mathfrak{F}))$，以下等价关系均成立：

1) $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \exists^{\pm \mathrm{W}} x.\, \phi$ iff $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \Sigma^{\pm \mathrm{W}} x.\, \phi$;

2) $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \forall^{\pm \mathrm{W}} x.\, \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \Pi^{\pm \mathrm{W}} x.\, \phi$。

给定一个带有量词前缀 $\wp \in \mathrm{Qn}$ 和矩阵 ϕ 的 ADIF公式 $\wp\phi$，我们可以从内到外，将 $\wp$ 中的每个量化转换为相应的元量化，只需适当地迭代上述结果即可。所得前缀中的元量词，与原始前缀中相应标准量词的顺序相反。为使这一想法形式化，我们引入 Herbrand-Skolem前缀函数 hsp，如下所示：

a) $\mathsf{hsp}(\varepsilon) \triangleq \varepsilon$;

b) $\mathsf{hsp}(\wp.\, \exists^{\pm \mathrm{W}} x) \triangleq \Sigma^{\pm \mathrm{W}} x.\, \mathsf{hsp}(\wp)$;

c) $\mathsf{hsp}(\wp.\, \forall^{\pm \mathrm{W}} x) \triangleq \Pi^{\pm \mathrm{W}} x.\, \mathsf{hsp}(\wp)$.

我们可以通过利用定理 $\wp\phi \equiv \mathsf{hsp}(\wp)\, \phi$ 来证明这一点。这种转换类似于将标准的 Skolem/Herbrand 化过程（van Heijenoort,

1967；Buss，1998）结合起来，将 FOL 句子转换为一个等可满足／等有效的 FOL 句子（其中不含存在量词或全称量词），或转换为一个等价的 SOL 公式。请注意，此处的 Herbrand 化方法与克赖塞尔反例的概念相关（Kreisel，1951，1952），该概念应用于DIF(Mann 等人，2011）。

定理8（赫布兰德–斯科伦定理）。设 $\wp\phi$ 是一个处于前束范式、量词前缀为 $\wp \in \mathsf{Qn}$ 且矩阵为 ϕ 的 ADIF 公式。那么，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \mathsf{hsp}(\wp)\,\phi$，对所有定义域 $\mathsf{dom}(\mathfrak{F}) \cap \mathsf{dep}(\wp) = \emptyset$ 的无环函数赋值 $\mathfrak{F} \in \mathsf{FAsg}$，以及满足 $\mathsf{sup}(\wp\phi) \setminus \mathsf{dom}(\mathfrak{F})$ 且 $\mathsf{vr}(\mathfrak{X}) \cap \mathsf{vr}(\wp) = \emptyset$ 的超团队 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}^{\subseteq}$ 均成立。

例9。我们再次考虑例7中的句子，即 $\varphi_7 = \exists x. \forall^{+\emptyset} y. \exists^{+x} z. (x = y) \wedge (y = z)$。我们已经看到，该句子在同一例子中的原始二元结构 $\mathfrak{A}$ 里为真。若通过函数 hsp 将 φ_7 转换为 META-ADIF，则得到 $\Sigma^{+x} z. \Pi^{+\emptyset} y. \Sigma^{+\emptyset} x. (x = y) \wedge (y = z)$。要证明该句子在 $\mathfrak{A}$ 中为真，只需为 z 赋予恒等函数，将赋给 x 的值复制过来。那么，无论为 y 选择什么值，都可以将同一值赋给 x。根据 META-ADIF 的语义，结论立即成立。

借助这一赫布兰德–斯科伦化过程，我们可以将一个ADIF前束范式句子转换为一个 META-ADIF 前束范式句子，其中只出现元量词 $\Sigma^{\pm \mathrm{W}} x$ 和 $\forall^{\pm \mathrm{W}} x$。由于表示量化函数所需的空间仅为底层结构规模的多项式空间，因此，这里同样可以采用用于 FOL 模型检验的方法。

定理9（模型检验问题）。设 $\mathfrak{A}$ 为一个有限结构，φ 为一个ADIF 前束范式句子。则模型检验问题 $\mathfrak{A} \models \varphi$ 可在关于 $|\mathfrak{A}|$的 PSPACE 中判定。

与 ADIF的情形一样，我们不知道 META-ADIF 是否具有前束范式，即使我们只考虑两个元量词 $\Sigma^{\pm \mathrm{W}}$和 $\Pi^{\pm \mathrm{W}}$。

开放问题2（META-ADIF 前束范式）。每个 META-ADIF公式是否都等价于一个 META-ADIF 前束范式公式?

4.2. 二阶逻辑与团队逻辑

我们此前已经证明，ADIF 是 DIF的保守扩展。然而，其博弈论确定性使我们获得了比 DIF表达力强得多的逻辑，即使不存在矛盾否定，它也具有完整的二阶逻辑特征。事实上，元理论解释使我们能够证明，每个 SOL 和 TL 公式都可以在 ADF 的ADIF片段中得到解释。反之，每个 ADF 公式在一类受限的超团队上，都可以通过相应的 SOL 句子和 TL 公式得到解释。这意味着，从描述复杂性视角来看，ADF 句子至少涵盖整个多项式层次 PH （Immerman，1999）。

每个定义在变量序列$\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{Vr}^*$上的非零超团队 $\mathfrak{X} \in \mathbf{HAsg}(\vec{\mathbf{x}})$，其基数至多与底层结构的论域$\mathfrak{A}$等势，即 $|\mathfrak{X}| \leq |\mathfrak{A}|$，都可以编码为一个 k元关系 $\mathbf{R}$，其中有 $k, |\vec{\mathbf{x}}| + 1$，其解释 $\mathbf{R}^{\mathfrak{A}}$、$\mathbf{Rel}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathbf{A}^k$ 按同构定义如下：对于每个团队 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$，存在一个元素 $a \in \mathbf{A}$；反之，对于每个元素$a \in \mathbf{A}$，都存在一个团队 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$，使得

$$\chi \in \mathbf{X} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \uplus \{\mathbf{Rel}(\mathfrak{X})\}, \chi[y \mapsto a] \models_{\mathrm{FOL}} R(\vec{x}y),$$

对所有赋值 $\chi \in$ 赋值($\vec{x}$)。目前尚不清楚是否存在其他关系编码，能够表示基数大于该结构论域的无限超团队。现在，根据定理 8，每个 ADIF 前束范式中的公式前束范式都可以转换为等价的 META-ADIF 公式，其中元量词的语义可以通过二阶量化轻松建模。由此得到以下结果：每个 ADF可定义的超团队（在上述限制下）也都是 SOL可定义的。

定理10（ADF-SOL解释）。对于签名 $\mathcal{L}$ 上带量词前缀 $\wp \in \mathbf{Qn}$ 的前束范式 ADF 公式 φ，其自由变量集 $\mathbf{free}(\varphi) \subseteq \mathbf{V} \subseteq$ 变量集合，且 $\mathbf{V} \cap \mathbf{vr}(\wp) = \emptyset$，以及关系符号 $\mathbf{R} \notin \mathcal{L}$，其中 $\mathbf{ar}(\mathbf{R}) = |\mathbf{V}| + 1$，存在两个 SOL 句子 $\Phi_{\exists\forall}$ 和 $\Phi_{\forall\exists}$，它们位于签名 $\mathcal{L} \uplus \{\mathbf{R}\}$ 上，使得对于所有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和带有 $|\mathfrak{X}| \leq |\mathfrak{A}|$的非零超团队 $\mathfrak{X} \in \mathbf{H}$赋值(V)，以下等价关系成立： $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A} \uplus \{\mathbf{Rel}(\mathfrak{X})\} \models_{\mathrm{SOL}} \Phi_{\alpha\circ}$

采用类似的方法，定义在变量集 $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Vr}$ 上的每个非空且非零的超团队 $\mathfrak{X} \in \mathbf{HAsg(V)}$，其中 $|\mathfrak{X}| \leq |\mathfrak{A}|$，都可以编码为团队 $\mathbf{Team}(\mathfrak{X}, y) \in \mathbf{TAsg}(\mathbf{V} \cup y)$，其中 $y \notin \mathbf{V}$，具体如下：对于每个团队 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$，都有一个元素 $a \in \mathbf{A}$；反过来，对于每个元素 $a \in \mathbf{A}$，都有一个团队 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$ 使得

$$\chi \in \mathbf{X} \quad \textit{iff} \quad \chi[y \mapsto a] \in \mathbf{Team}(\mathfrak{X}, y),$$

对所有赋值 $\chi \in$Asg(V)。由于每个 SOL可定义关系都可以编码为 TL可定义团队（Kontinen 和 V¨a¨an¨anen，2009；Kontinen 和 Nurmi，2009），下一个结果便可由前一个结果直接推出。

推论7（ADF-TL解释）。对于每个处于前束范式的 ADF 公式 φ，其量词前缀为 $\wp \in \mathbf{Qn}$，变量集 $\mathbf{free}(\varphi) \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{Vr}$，且 $\mathbf{V} \cap \mathbf{vr}(\wp) = \emptyset$，并且变量 $y \notin \mathbf{V}$，存在两个 TL 公式 $\Phi_{\exists\forall}$ 和 $\Phi_{\forall\exists}$，满足 $\mathbf{free}(\Phi_{\exists\forall}) = \mathbf{free}(\Phi_{\exists\forall}) = \mathbf{V} \cup y$，使得对于所有结构 $\mathfrak{A}$ 和非空且非零的超团队 $\mathfrak{X} \in \mathbf{HAsg(V)}$，其中 $|\mathfrak{X}| \leq |\mathfrak{A}|$，以下等价关系成立：$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\mathbf{Team}(\mathfrak{X}, y) \models_{\mathrm{TL}} \Phi_{\alpha\circ}$

尚不清楚，当违反对超团队大小和结构论域的约束 $|\mathfrak{X}| \leq |\mathfrak{A}|$ 时，上述两种解释结果是否仍然成立。

开放问题3(ADF-SOL/TL解释)。 是否可能获得与定理 *10* 和推论 *7*类似的解释结果，$|\mathfrak{X}| > |\mathfrak{A}|$?

此外，关于 ADIF 的可区分能力与超团队基数之间的关系，尤其是在无限情形下，目前尚不清楚。

开放问题4（超团队基数）。是否存在一个 ADIF 可满足的公式 φ，使得若 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$，则对于某个 $\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$有 $|\mathfrak{X}| > |\mathfrak{A}| \geq \omega$?

对于解释结果的逆向方向，给定一个$\mathcal{L}$-结构$\mathfrak{A}$、一个关系符号 $\mathrm{R} \in \mathcal{L}$以及一个变量序列 $\vec{\mathrm{x}} \in \mathrm{Vr}^{\mathrm{ar}(R)}$，我们将 $\mathrm{Team}\big(\mathrm{R}^{\mathfrak{A}}, \vec{\mathrm{x}}\big) \in \mathrm{TAsg}(\vec{\mathrm{x}})$ 记作关系 $\mathrm{R}^{\mathfrak{A}}$ 的在团队中的标准编码（在同构意义下），其中关系 R 定义如下：

$$\chi \in \mathsf{Team}\big(R^{\mathfrak{A}}, \vec{\boldsymbol{x}}\big) \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FoL}} R(\vec{\boldsymbol{x}}),$$

对于所有赋值 $\chi \in \mathrm{Asg}(\vec{\boldsymbol{x}})$。每个 SoL 句子都可以写成规范形式，其中每个函数量化都可以由一个元量词模拟，该元量词仅取决于函数所应用到的变量。因此，通过利用定理8，可以证明以下结果。

定理 11（SoL-ADF解释）。对于签名 $\mathcal{L}$ 上的每个 SoL 句子 Φ、关系符号 $\mathrm{R} \in \mathcal{L}$ 以及变量序列 $\vec{\mathrm{x}} \in \mathrm{Vr}^{\mathrm{ar}(R)}$，存在一个签名 $\mathcal{L}\setminus\mathrm{R}$ 上处于前束范式中的 ADF 公式 φ，满足 $\mathsf{sup}(\varphi) = \mathsf{free}(\varphi) = \vec{\mathrm{x}}$，使得对于所有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$，以下等价关系成立：$\mathfrak{A} \models_{\mathrm{SoL}} \Phi$当且仅当 $\mathfrak{A}\setminus\mathrm{R}\ \{\text{团队}(\mathrm{R}^{\mathfrak{A}}, \vec{\mathrm{x}})\} \models^{\exists\forall} \varphi$。

通过使用从 TL 到 SoL 的翻译（见（V¨a¨an¨anen，2007年；Harel，1979），对于句子，以及（Kontinen和V¨a¨an¨anen，2009年；Kontinen和Nurmi，2009年），对于公式），我们可以证明如下结果。

推论8（TL-ADF解释）。对于每个 TL 公式 Φ，存在一个处于前束范式中的 ADF 公式 φ，满足 $\mathsf{sup}(\varphi) = \mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\Phi)$，使得对于所有结构 $\mathfrak{A}$ 以及团队 $\mathrm{X} \in \mathrm{T}$ 赋值$\subseteq(\mathsf{free}(\Phi))$，以下等价关系成立：$\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models_{\mathrm{TL}} \Phi$当且仅当 $\mathfrak{A}$、$\{\mathrm{X}\} \models^{\exists\forall} \varphi$。

5. 博弈论语义

如第 2 节所述，交替的 Hodges 语义关系 $\mathfrak{A} \models \varphi$隐含地确保了一个由 Eloise 和 Abelard 进行的语义博弈 $\Game^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$的存在，并且 Eloise 获胜当且仅当 ADIF句子φ 确实在结构 $\mathfrak{A}$上得到满足。我们通过形式化这样一种博弈来结束本文，从而为 ADIF提供博弈论语义，并证明其相对于定义 2 的组合语义和定理8的赫布兰德–斯科伦语义的充分性。得益于推论8，这一结果还为 TL间接提供了博弈论语义；据我们所知，这一结果此前仍然缺失（V¨a¨an¨anen，2007年）。请注意，不同于DIF （Hintikka 和 Sandu，1997；Mann 等人，2011），$\Game^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$必须是一个零和完全信息博弈，才能符合该逻辑的博弈论定性（见推论4）；对于句子而言，这一点体现为排中律（见推论 5）。

一个双人轮流制竞技场 $\mathcal{A} = \langle \mathrm{Ps}, \mathrm{Ps}_{\mathtt{E}}, \mathrm{Ps}_{\mathtt{A}}, v_I, \mathrm{Mv} \rangle$是一个元组，其中 (i) Ps 是所有位置的集合；(ii) $\mathrm{Ps}_{\mathtt{E}}, \mathrm{Ps}_{\mathtt{A}} \subseteq \mathrm{Ps}$ 是由 Eloise 和 Abelard 分别拥有的位置集合，且 $\mathrm{Ps}_{\mathtt{E}} \cap \mathrm{Ps}_{\mathtt{A}} = \emptyset$；(iii) $v_I \in \mathrm{Ps}$ 是初始位置；(iv) $\mathrm{Mv} \subseteq (\mathrm{Ps}_{\mathtt{E}} \cup \mathrm{Ps}_{\mathtt{A}}) \times \mathrm{Ps}$ 是描述所有可能移动的二元左全关系。路径 $\pi \in \mathrm{Pth} \subseteq \mathrm{Ps}^{\infty}$是一个与移动关系相容的位置的有限或无限序列，即对于所有$i \in [0, |\pi| - 1$，$((\pi)_i, (\pi)_{i+1}) \in \mathrm{Mv}$；当 $|\pi| > 0$ 且 $\mathrm{fst}(\pi) = v_I$时，它是初始路径。玩家$\alpha \in \{\mathrm{E}, \mathrm{A}\}$ 的历史是一个有限初始路径 $\rho \in \mathrm{Hst}_\alpha \subseteq \mathrm{Pth} \cap (\mathrm{Ps}^* \cdot \mathrm{Ps}_\alpha)$，终止于一个$\alpha$-位置。对局 $\pi \in \mathrm{Play} \subseteq$Pth 是一个极大的（即不可延伸的）初始路径。玩家 $\alpha \in \{\mathrm{E}, \mathrm{A}\}$ 的策略是一个函数 $\sigma_\alpha \in \mathrm{Str}_\alpha \subseteq \mathrm{Hst}_\alpha \to \mathrm{Ps}$，它将每个 α-历史 $\rho \in \mathrm{Hst}_\alpha$ 映射到一个位置 $\sigma_\alpha(\rho) \in \mathrm{Ps}$，并且该位置与移动关系相容，即 $(\mathrm{lst}(\rho)\ \ \sigma_\alpha(\rho)) \in \mathrm{Mv}$。策略对 $(\sigma_{\mathtt{E}}, \sigma_{\mathtt{A}}) \in \mathrm{Str}_{\mathtt{E}} \times \mathrm{Str}_{\mathtt{A}}$所诱导的对局，是满足以下条件的唯一对局 $\pi \in \mathrm{Play}$：若 $(\pi)_i \in \mathrm{Ps}_{\mathtt{E}}$，则 $(\pi)_{i+1} = \sigma_{\mathtt{E}}((\pi)_{\leq i})$；否则，$(\pi)_{i+1} = \sigma_{\mathtt{A}}((\pi)_{\leq i})$；对所有 $i \in [0, |\pi| - 1$均如此。博弈$\mathcal{D} = \langle \mathcal{A}, \mathrm{Wn} \rangle$ 是一个元组，其中 $\mathcal{A}$ 是一个竞技场，而 $\mathrm{Wn} \subseteq \mathrm{Play}$ 是 Eloise 的获胜对局集合；其补集 $\mathrm{Play} \setminus \mathrm{Wn}$ 对 Abelard 而言是获胜的。若 Eloise（相应地，Abelard）拥有一个策略 $\sigma_{\mathtt{E}} \in \mathrm{Str}_{\mathtt{E}}$（相应地，$\sigma_{\mathtt{A}} \in \mathrm{Str}_{\mathtt{A}}$），使得对于所有对手策略 $\sigma_{\mathtt{A}} \in \mathrm{Str}_{\mathtt{A}}$（相应地，$\sigma_{\mathtt{E}} \in \mathrm{Str}_{\mathtt{E}}$），相应的诱导对局都（相应地，不）属于 Wn，则 Eloise（相应地，Abelard）赢得该博弈。若两位玩家中有一位获胜，则称该博弈是定性的。

有了这些记号，我们现在可以描述语义博弈，称为 独立性博弈，在该博弈中，玩家不仅执行与公式中算子相对应的选择，还会检查对手的选择是否符合相关的独立性约束。尽管可以为每个 ADIF 句法构造指定一次移动，但为使表述更简单，我们只定义量词的移动。任何无量词 FOL 公式 ψ实际上都可以解释为单一原子关系；一旦给定其所有自由变量上的赋值，就可以立即评估其真值。因此，我们假设 $\varphi = \wp\psi$ 处于 前束范式下，其中量词前缀为 $\wp \in \mathrm{Qn}$，且没有变量被量化两次。最后，作为描述复杂性视角下的标准假设（Immerman，1999； Gr¨adel 等，2005），我们仅限于有限结构。一般情形，以及将该方法推广到公式，将是未来工作的重点。

对于 $\varphi = \wp\psi$ 的博弈由两个反复进行的阶段组成，分别称为决策和挑战。决策阶段几乎与经典的 Hintikka FOL博弈（Hintikka 和 Sandu，1997）完全相同：与当前子公式 $\phi = \mathtt{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\, \phi'$ 相关联的玩家 φ 为约束变量 x 选择一个值，并将其存入当前赋值 χ。然而，一旦所有量词都被消去，博弈并不会像通常那样通过直接判定 $\mathfrak{A}$的真值 $\chi \models_{\mathrm{FOL}} \psi$来宣布胜者，而是进入挑战阶段。在此阶段，玩家仍按照量词顺序被要求确认或更改自己的选择。更改选择旨在检验 $\wp$ 中声明的独立性约束是否得到满足；毕竟，如果对手的选择确实独立于该玩家的选择，那么作出更改就不应影响公式的满足情况。具体而言，与 ϕ 相关联的玩家可以（i）确认

自己的选择，同时保持赋值 χ 和阶段不变；或者（ii）挑战对手：修改变量x在 χ中的赋值，删除 $\wp$ 中在 x之后量化的所有变量的赋值，并返回决策阶段。在这两种情况下，控制权都会交给量词 $\mathsf{Q}^{\pm\mathrm{w}}x$辖域内公式 ϕ' 的玩家，以便其回应挑战。显而易见，与 FOL的语义博弈不同， $\Game^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$是一种允许有限对局和无限对局的无限时长博弈。有限对局必然终止于挑战阶段的某个位置，此时当前子公式为 ψ，胜者可通过判定 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \psi$的真值来确定。至于无限对局，若一名玩家能够迫使对手无限次更改其自身某个变量 x 的值，以违反独立性约束，同时又无法迫使挑战者对 $\wp$中位于 x 之后的变量做出同样的更改，那么该玩家便获胜。我们稍后会进一步阐明这一点。

独立性博弈 $\Game^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$所依托的博弈场 $\mathcal{A}^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$ 的形式化定义如下，其中 $\mathsf{psf}(\varphi)$ 表示 φ 的最小子公式集合，称为前缀子公式，并满足：(i) $\varphi \in \mathsf{psf}(\varphi)$；(ii) 若 $\phi = \mathsf{Q}^{\pm\mathrm{w}}x.\,\phi' \in \mathsf{psf}(\varphi)$，则 $\phi' \in \mathsf{psf}(\varphi)$。例如，对于例5中给出的句子 $\varphi_4 = \exists x.\forall^{+\emptyset}y.\neg(x = y)$，我们有 $\mathsf{psf}(\varphi_4) = \{\varphi_4, \forall^{+\emptyset}y.\neg(x = y)\ \neg(x = y)\}$。

构造1（独立性博弈场）。对于有限结构 $\mathfrak{A}$ 和前束范式ADIF 句子 $\varphi = \wp\psi$，其中 $\psi \in \mathrm{FOL}$，独立性博弈场 $\mathcal{A}^{\mathfrak{A}}_{\varphi} = \langle \mathsf{Ps}, \mathsf{Ps}_{\mathtt{E}}, \mathsf{Ps}_{\mathtt{A}}, v_I, \mathsf{Mv} \rangle$ 定义如下：

1) 位置集合 $\mathsf{Ps} \subset \mathsf{psf}(\varphi) \times$赋值$\times \{\downarrow, \circlearrowleft\}$包含如下三元组 $(\phi, \chi, \blacklozenge)$：前缀子公式 $\phi \in \mathsf{psf}(\varphi)$（属于 φ）、赋值 $\chi \in$ 赋值以及阶段标记 $\blacklozenge \in \{\downarrow, \circlearrowleft\}$，并满足：若 $\blacklozenge = \downarrow$，则 $\chi \in$ 赋值$(\mathsf{free}(\phi))$；否则为 $\chi \in$ 赋值$(\mathsf{free}(\psi))$；2) Eloise 的位置集合 $\mathsf{Ps}_{\mathtt{E}}$（分别是 Abelard 的位置集合 $\mathsf{Ps}_{\mathtt{A}}$）包含形式为 $(\exists^{\pm\mathrm{w}}x\phi', \chi, \blacklozenge)$ 或 $(\psi, \chi, \downarrow)$（分别为 $(\forall^{\pm\mathrm{w}}x\phi', \chi, \blacklozenge)$）的三元组；3) 初始位置 v_I，$(\varphi, \varnothing, \downarrow)$ 包含原始句子 φ、与之关联的空赋值 $\varnothing$ 以及阶段标记 $\downarrow$；4) 移动关系 $\mathsf{Mv} \subseteq \mathsf{Ps} \times \mathsf{Ps}$ 恰好包含满足以下某一条件的位置对 $(v_1, v_2) \in \mathsf{Ps} \times \mathsf{Ps}$：a) $v_1 = (\mathsf{Q}^{\pm\mathrm{w}}x.\,\phi', \chi, \blacklozenge)$ 且 $v_2 = (\phi', \chi, \blacklozenge)$，其中 $x \notin \mathsf{free}(\phi')$；b) $v_1 = (\mathsf{Q}^{\pm\mathrm{w}}x.\,\phi', \chi, \downarrow)$ 且 $v_2 = (\phi', \chi[x \mapsto a], \downarrow)$，对于某个 $a \in \mathsf{A}$；c) $v_1 = (\psi, \chi, \downarrow)$ 且 $v_2 = (\varphi, \chi, \circlearrowleft)$；d) $v_1 = (\mathsf{Q}^{\pm\mathrm{w}}x.\,\phi', \chi, \circlearrowleft)$ 且 $v_2 = (\phi', \chi, \circlearrowleft)$；e) $v_1 = (\mathsf{Q}^{\pm\mathrm{w}}x.\,\phi', \chi, \circlearrowleft)$ 且 $v_2 = (\phi', \chi'[x \mapsto a], \downarrow)$，对于某个 $a \in \mathsf{A}$，且 $a \neq \chi(x)$，其中 $\chi', \chi \restriction \mathsf{free}(\mathsf{Q}^{\pm\mathrm{w}}x.\,\phi')$。

直观而言，位置 $(\phi, \chi, \blacklozenge)$ 记录了公式ϕ 中仍需进行对局的部分、赋值 χ（其中包含值已选定的变量），以及用于 $\blacklozenge$ 标识阶段的标记，阶段可以是$\downarrow$ 或 $\circlearrowleft$。条目4a 规定空量化的平凡移动，条目4b定义决策阶段的移动，条目4c 实现从决策阶段切换到挑战阶段，条目4d 定义对已作出选择的确认，最后，条目4e 描述对对手发起的挑战：阶段恢复为决策阶段，挑战所涉及变量的取值被更改，后续变量的所有取值均被删除。

该博弈的获胜条件定义如下。由于有限对局的胜者很容易判定，因为这只取决于最后一个位置上的赋值是否满足 ψ，因此我们将重点放在无限对局上。考虑任意一个前缀子公式 $\phi = \mathsf{Q}^{\pm\mathrm{W}} x.\, \phi' \in \mathsf{psf}(\varphi)$，其中$x \in \mathsf{V} \triangleq \mathsf{free}(\phi')$。我们用 $\mathcal{F}_\phi \colon \mathsf{Asg(V)} \to 2^{\mathrm{Fnc}_{\pm\mathrm{W}}}$ 表示这样的映射：它将定义在变量集 V 上的每个赋值 $\chi \in \mathsf{Asg(V)}$关联到集合 $\mathcal{F}_\phi(\chi)$ $\{\mathsf{F} \in \mathrm{Fnc}_{\pm\mathrm{W}} \mid \mathsf{F}(\chi) = \chi(x)\}$，该集合包含所有与 x 在 χ 中所赋的值相容的 $\pm$W-函数。此外，我们用 $\mathcal{B}_\phi \colon \mathsf{Hst} \to 2^{\mathrm{Fnc}_{\pm\mathrm{W}}}$ 表示这样的映射，其中 $\mathsf{Hst} \triangleq \mathsf{Hst}_{\mathtt{E}} \cup \mathsf{Hst}_{\mathtt{A}}$：它将每个历史 $\rho \in \mathsf{Hst}$ 关联到集合 $\mathcal{B}_\phi(\rho)$，该集合包含所有与沿 ρ最近赋值相容的 $\pm$W-函数。形式化地说：

- $\mathcal{B}_\phi(v_I) \triangleq \mathrm{Fnc}_{\pm\mathrm{W}}$;
- $\mathcal{B}_\phi(\rho \cdot (\phi', \chi, \downarrow)) \triangleq \begin{cases} \mathcal{F}_\phi(\chi), & \text{if } \mathcal{B}_\phi(\rho) \cap \mathcal{F}_\phi(\chi) = \emptyset; \\ \mathcal{B}_\phi(\rho) \cap \mathcal{F}_\phi(\chi), & \text{otherwise;} \end{cases}$
- $\mathcal{B}_\phi(\rho \cdot v) \triangleq \mathcal{B}_\phi(\rho)$, in all other cases, *i.e.*, $v \neq (\phi', _, \downarrow)$.

本质上，桶 $\mathcal{B}_\phi(\rho)$ 保存了最新的一组 Herbrand/Skolem 函数，供关联的玩家用于回应变量 x 所依赖的所有变量。对局开始时，尚未作出任何选择，因此 $\mathcal{B}_\phi(v_I)$ 是满的。经过历史ρ到达位置 $(\phi', \chi, \downarrow)$ 后，刚刚为 x 选定了一个新值 $\chi(x)$，以确定量词 Q，因此要更新桶：从 $\mathcal{B}_\phi(\rho)$ 中移除所有与这个新值不兼容的函数。如果更新后的集合为空，则该玩家被认定为作弊，并根据刚刚作出的选择重新填充桶。

一般而言，玩家作弊有两个原因。她/他要么改变变量的值，质询对手以证明其遵守独立性约束（条目 4e），要么因为无法同时实现其目标并遵守其变量上的约束，而选择一个新值（条目 4b）。显然，第二种作弊类型称为 防御性作弊，反过来可能诱发第一种作弊类型，即质询性作弊。因此，可能会出现由不同类型作弊组成的复杂链。为了确定最后一个被迫作弊的玩家，我们考虑任意映射 $\mathsf{pr}\colon\ \mathsf{psf}(\varphi) \to \mathbb{N}$，它为每个前缀子公式 $\phi = \mathtt{Q}^{\pm\mathrm{W}} x.\, \phi' \in \mathsf{psf}(\varphi)$ 赋予一个优先级 $\mathsf{pr}(\phi)$，使得 i） $\mathsf{pr}(\phi)$ 为偶数 当且仅当

Q $= \forall$ 以及 ii) pr(ϕ) $<$ pr(ϕ')。随后，我们可以通过映射 cht : Hst $\to \mathbb{N}^*$，为每个历史 $\rho \in$ Hst 分配其中发生的作弊序列 cht(ρ)，如下所示：

• cht(v_I)，0；

• cht($\rho \cdot (\phi', \chi, \downarrow)$) $\triangleq$ cht(ρ)$\cdot$pr(ϕ)，当且仅当 $\mathcal{B}_\phi(\rho) \cap \mathcal{F}_\phi(\chi) = \emptyset$；

• cht($\rho \cdot v$) $\triangleq$ cht(ρ) $\cdot\, 0$，其他情况均如此。

通过映射 cht : Play$^\omega \to \mathbb{N}^\omega$，这一构造可以轻松推广到无限对局 $\pi \in$ Play$^\omega$、Play$\cap$Ps$^\omega$：对所有 $i \in \mathbb{N}$，均有 (cht(π))$_i$ = cht((π)$\leq i$)。最后，pr(π) 表示沿着 cht(π) 无限次出现的最大优先级。请注意，每个无限对局必然包含无限多个挑战作弊（条目4e）。因此，pr(π) 唯一标识出相应玩家在哪个最右变量上作弊，却无法同时迫使对手也这样做。如果 pr(π) 是偶数，Abelard 就在无限次作弊，因此输掉对局 π，也就是说，Eloise 获胜。

构造 2（独立性博弈）。对于一个有限结构 $\mathfrak{A}$ 和一个前束范式ADIF 句子 $\varphi = \wp\psi$，其中 $\psi \in$ FOL，独立性博弈 $\Game^{\mathfrak{A}}_{\varphi} = \langle \mathcal{A}$的胜局集 Wn$\rangle$按以下规定定义：

1) $\mathcal{A}$ is the independence arena $\mathcal{A}^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$ defined in Construction 1;

2) Wn $\subseteq$ 对局是满足以下条件的所有对局 π 的集合：

a) 若 π 是无限的，则 pr(π) 为偶数；b) 若 π 是有限的，则 lst(π) $= (\psi, \chi, \lightning)$ 且 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\text{FOL}} \psi$，对于某个赋值$\chi \in$ Asg(free(ψ))。

例10. 考虑第 2.1 节例7中的句子 φ_7，它在该例的二元结构 $\mathfrak{A}$ 中为真。因此，负责控制变量 x 和 z取值的 Eloise 必须拥有一种能在独立性博弈 $\Game^{\mathfrak{A}}_{\varphi_7}$中获胜的策略。一种可能的策略是在决策阶段为 x 选择常值函数 f$_x = 0$，并为 z选择恒等函数 f$_z(x) = x$。显然，无论 Abelard 为 y选择常值函数 f$_y = 0$ 进行怎样的有限对局，她都能获胜，因为由此产生的赋值满足 $(x = y)$ 和 $(y = z)$。那么，假设他在决策阶段改为选择 f$_y = 1$。由于在该阶段结束时 Eloise 知道自己即将落败，她会通过将自己为 x 选择的函数 f$_x$ 改为常值 1，向 Abelard 发起挑战。这会将当前对局片段的优先级提升至 1。此时，如果 Abelard 坚持使用函数 f$_y = 1$ 为 y赋值，他就会输，因为 f$_z(x) = x$ 此时也会使 z 取值为 1，从而导致对局有限结束。因此，他需要将选择改为 f$_y = 0$，这次将对局片段的优先级提升至 2，并使 Eloise 面临关于 z的挑战。然而，Eloise 可以坚持使用恒等函数，从而进入新的挑战阶段。此时，由于当前赋值使 Eloise 即将落败，她会再次发起挑战，选择 f$_x = 0$ 并将优先级提升至 1。随后 Abelard 被迫更换函数并将优先级提升至 2，于是局面回到起点。这个循环过程

最终形成一场无限对局，其最大优先级为 2，因为 Eloise 可以迫使 Abelard 不断采取防御措施更换桶，从而满足她的获胜条件。

值得注意的是，上文设计的博弈与 Bradfield 提出的 组队游戏 (2013) 有一些相似之处，该游戏用于 DL (V¨a¨an¨anen， 2007年)。我们的博弈和他的博弈都是扩展 Hintikka 的 FOL 的完全信息博弈。此外，Bradfield 的博弈还通过挑战机制检验 Eloise 所作选择的一致性，在该机制中，玩家会反复进行该句子的博弈。不过，相似之处也仅止于此，因为这两种博弈在本质上存在显著差异。首先，在 Bradfield 的博弈中，对句子的重复评估使他能够在一局对局中组建团队：每个依赖原子对应一个团队，而该句子中出现的每个依赖原子对应一个团队φ 。随后，每个团队都被用来检验 Eloise 的选择是否遵循相应原子所编码的依赖约束。到目前为止，玩家在当前重复过程中所作选择由部分赋值记录；与此同时，所有这些团队也都在他的博弈的每个状态中被明确记录。从这个意义上说，Bradfield 的博弈场本质上是二阶的，因为它在每个状态中记录赋值集合，并包含更新这些集合的移动。其次，Bradfield 在有限结构上的博弈只允许有限对局，因此其获胜条件归结为简单的可达性。相反，我们的博弈是在纯粹的一阶博弈场中进行的，其状态只跟踪记录在部分赋值中的玩家选择。此外，它始终允许无限对局，玩家可以不断相互挑战，永无止境。因此，我们的博弈的二阶能力完全体现在获胜条件中，其中基于优先级的机制刻画了在对句子的、可能无限的重复评估过程中量词交替的情况。

总之，通过利用定理8，可以证明博弈论语义相对于定义6 中的模型论语义，以及进而相对于定义2中的组合语义，其中，通过计算 META-ADIF 句子$\mathsf{hsp}(\wp)\ \psi$ （分别为 $\neg\,\mathsf{hsp}(\wp)\,\psi$ ）的存在量词的（分别为全称）元量词所得到的 Herbrand/Skolem 函数，会在 $\eth^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$中诱导出 Eloise（分别为Abelard）的获胜策略。这也意味着独立性博弈具有确定性，而无需依赖拓扑确定性定理，例如 Martin （1975、1985）的定理。

定理 12（博弈论语义）。对于一个有限结构 $\mathfrak{A}$ 以及一个ADIF 前束形式的句子 φ ，存在一个独立性博弈 $\eth^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$，使得 $\mathfrak{A} \models \varphi$ （分别为 $\mathfrak{A} \not\models \varphi$）当且仅当 $\eth^{\mathfrak{A}}_{\varphi}$ 由 Eloise （分别为 Abelard）获胜。

6. 讨论

我们介绍了交替依赖/独立友好逻辑（ADIF），这是独立友好逻辑（IF）的一种保守扩展，以非常自然的方式纳入了否定，并避免了该逻辑中的不确定性。这是通过团队语义的一般化实现的，其中

双方玩家的选择都表示在一种称为超团队的双层结构中。这使我们能够对称地处理两位玩家，并迫使双方都根据相应量词中规定的（非）依赖约束作出选择。有趣的是，新语义赋予所提出的逻辑以二阶逻辑（SOL）的完整表达能力，从而也赋予其团队逻辑（TL）的完整表达能力，而无需在语言中加入额外的联结词。它还使句子的排中律得以恢复，并具有博弈论确定性的性质。对于前束片段，我们还提供了赫布兰德–斯科伦语义，该语义将 ADIF 直接与 SOL联系起来；此外，还给出了有限结构上的博弈论语义，其形式是在一阶博弈场上进行的一场定性的轮流进行的无限时长完全信息博弈。

仍有一些值得探讨的开放问题，例如该语言是否满足前束范式定理。ADIF的实际表达能力同样尚无定论。我们确实证明了它的表达能力至少不弱于 SOL，因此涵盖了完整的多项式层次 PH。然而，反方向的证明依赖于超团队$\mathfrak{X}$ 与底层结构 $\mathcal{A}$的论域 A 等势这一假设，这使我们能够借助适当的关系 $\mathbf{Rel}(\mathfrak{X})$ 对超团队进行编码。对于“大的”超团队，似乎没有直接的方法可以做到这一点。不过，这种“大的”超团队是否真的重要，目前也尚不清楚；换言之，是否存在某个公式能够区分“大的”和“小的”超团队。通常，人们会通过定义适当的 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈（EF），来精确刻画逻辑的表达能力。出于这个原因，人们或许也会想到对 ADIF 采取同样的做法。然而，我们预见到的主要困难在于如何处理量化，因为语义并未明确承诺某个特定的值（所有选择都以均等方式编码在超团队中）。而在经典的 EF 博弈中，与量词选择某个值相对应的移动则会作出明确承诺。目前，我们还不清楚如何弥合这一差异。

致谢

本研究部分由 GNCS 2020 项目“RagionamentoStrategico e Sintesi Automatica di Sistemi Multi-Agente”资助。

附录 A。第 **2** 节的证明

在每个定理的证明之前，我们会展示其依赖图：顶点是证明该定理时用到的结果（可以是引理、命题、其他定理等）。当结果 1 在结果 2 的证明中被明确使用时，就存在一条从结果 1 指向结果 2 的边。

令 $W \subseteq \mathrm{Vr}$ 且 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}$。对于团队 $X \in \mathfrak{X}_{\restriction W}$，我们将 $X^{\restriction W}$记为满足 $Y_{\restriction W} = X$ 的团队 $Y \in \mathfrak{X}$ 中的一个（任意选取）。

引理 1（对偶化 I）。对于所有超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}$，都有 $\mathfrak{X} \equiv_W \overline{\overline{\mathfrak{X}}}$，对于所有 $W \subseteq \mathrm{Vr}$。此外，$\mathfrak{X} \subseteq \overline{\overline{\mathfrak{X}}}$，如果 $\mathfrak{X}$ 是正规的。

证明。首先，注意到，根据命题 1，$\overline{\overline{\mathfrak{X}}} \equiv \mathfrak{X}$ 对于每个非正规超团队 $\mathfrak{X}$均成立。

接下来，我们证明 $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\overline{\mathfrak{X}}}$，对于正规超团队 $\mathfrak{X}$。令 $X \in \mathfrak{X}$。注意，由于 X 是正规的，对于所有 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$，$X' \cap X \neq \emptyset$。对于每个 $\chi \in X$，固定一个选择函数 $\mathfrak{b}_\chi \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{b}_\chi(X) = \chi \in X$。现在，考虑 $\mathfrak{d} \in \mathrm{Chc}(\overline{\mathfrak{X}})$，使得对于所有 $\chi \in X$，$\mathfrak{d}(\mathrm{img}(\mathfrak{b}_\chi)) = \chi$，并且对于 $\mathrm{img}(\mathfrak{b}_\chi) \mid \chi \in X\}$ 中的所有其他团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}} \setminus \{$，$\mathfrak{d}(X') \in X \cap X'$。显然，$X = \mathrm{img}(\mathfrak{d}) \in \overline{\mathfrak{X}}$，因此 $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathfrak{X}}$。

由于 $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathfrak{X}}$ 蕴含 $\mathfrak{X} \sqsubseteq \overline{\mathfrak{X}}$，只需证明 $\overline{\mathfrak{X}} \sqsubseteq \mathfrak{X}$ 成立，即可得到$\mathfrak{X} \equiv \overline{\mathfrak{X}}$。为此，令 $X' = \mathrm{img}(\mathfrak{d}) \in \overline{\mathfrak{X}}$，其中 $\mathfrak{d} \in \mathrm{Chc}(\overline{\mathfrak{X}})$。我们证明存在 $X \in \mathfrak{X}$，使得 $X \subseteq X'$。反设此结论不成立，即对于所有 $X \in \mathfrak{X}$，都存在 $\chi_X \in X \setminus X'$。接着，定义$\mathfrak{b} \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})$如下：$\mathfrak{b}(X) = \chi_X$ 对于所有 $X \in \mathfrak{X}$。显然，$\mathfrak{d}(\mathrm{img}(\mathfrak{b})) \notin X'$，因此产生矛盾。现在，根据 $\mathfrak{X} \equiv \overline{\mathfrak{X}}$ 等价于 $\mathfrak{X} \equiv_{\mathrm{Vr}} \overline{\mathfrak{X}}$这一观察，命题即可得出；这蕴含 $\mathfrak{X} \equiv_W \overline{\mathfrak{X}}$，因为 $W \subseteq$ 变量集合。 □

引理 2（对偶化 II）。对于所有超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}$ 和性质 $\Psi \subseteq \mathrm{Asg}$，以下等价关系成立。

1) 陈述*1a* 和 *1b* 等价：

a) 存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$（分别地，$X \in \overline{\mathfrak{X}}$），使得 $X \subseteq \Psi$；
b) 对于所有团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$（分别地，$X' \in \mathfrak{X}$），均有 $X' \cap \Psi \neq \emptyset$。

2) 陈述*2a* 和 *2b* 等价：

a) 存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ 使得 $X \cap \Psi \neq \emptyset$；b) 存在一个团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$ 使得 $X' \cap \Psi \neq \emptyset$。

3) 陈述*3a* 和 *3b* 等价：

a) 对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，均有 $X \subseteq \Psi$；b) 对于所有团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$，均有 $X' \subseteq \Psi$。

证明。我们分别考虑这三个等价关系。

1) 首先，我们证明存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ 当且仅当对于所有团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$，均有 $X' \cap \Psi \neq \emptyset$。

（仅当方向）设 X' 是 $\overline{\mathfrak{X}}$ 的一个一般元素。因此，对于某个 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})$，$X' = \mathrm{img}(\mathfrak{b})$。于是，$\mathfrak{b}(X) \in X \cap X'$。由 $X \subseteq \Psi$ 可得命题。

（如果方向）根据命题 1，若 $\overline{\mathfrak{X}} = \emptyset$，则 $\emptyset \in \mathfrak{X}$，由于 $\emptyset \subseteq \Psi$，命题立即得证。反之，若 $\overline{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$，则反设：对于所有 $X \in \mathfrak{X}$，均存在 $\chi_X \in X \setminus \Psi$。定义 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})$ 如下：$\mathfrak{b}(X) = \chi_X$，对所有 $X \in \mathfrak{X}$ 均成立。由于 $\mathrm{img}(\mathfrak{b}) \in \overline{\mathfrak{X}}$ 且 $\mathrm{img}(\mathfrak{b}) \cap \Psi = \emptyset$，我们得到矛盾。

命题的其余部分，即，存在一个团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$ 使得 $X' \subseteq \Psi$ 当且仅当对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，有 $X \cap \Psi \neq \emptyset$，由上述内容以及以下事实可得 $\mathfrak{X} \equiv \overline{\mathfrak{X}}$（引理1）。

2）（仅当方向）考虑 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{b}(X) \in X \cap \Psi$。该命题由 $\mathfrak{b}(X) \in \mathrm{img}(\mathfrak{b}) \in \overline{\mathfrak{X}}$ 得出。

（若方向）令 $X' = \mathrm{img}(\mathfrak{b}) \in \overline{\mathfrak{X}}$，对于某个 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})$，使得 $X' \cap \Psi \neq \emptyset$，并令 $\overline{\chi} \in X' \cap \Psi$。因此，存在 $X \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{b}(X) = \overline{\chi} \in X$，这意味着 $X \cap \Psi \neq \emptyset$，故命题得证。

3）通过在前一个断言中将 Ψ 实例化为带有赋值 $\setminus \Psi$ 的情形，并注意到 3a 和 3b 分别对应于 2a 和 2b 的否定，即可得到该结论。 □

引理3（空与零超团队）。对于每个ADIF 公式 φ 和超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\varphi))$，以下结论均成立：

1）a） $\mathfrak{A}, \emptyset \not\models^{\exists\forall} \varphi$；　　*b)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$, *where* $\emptyset \in \mathfrak{X}$;

2) a) $\mathfrak{A}, \emptyset \models^{\forall\exists} \varphi$;　　*b)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \not\models^{\forall\exists} \varphi$, *where* $\emptyset \in \mathfrak{X}$.

证明。 该结论由更一般的引理 11得出，该引理见 附录 C；将 $\mathfrak{F}$ 实例化为空函数 $\varnothing$即可。 □

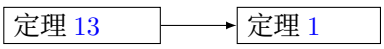


图 A.2：定理 1。

定理 1（超团队细化）。设 φ 是一个 ADIF 公式，且 $\mathfrak{X}$、$\mathfrak{X}' \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\varphi))$ 是两个具有 $\mathfrak{X} \sqsubseteq_{\mathsf{free}(\varphi)} \mathfrak{X}'$ 的超团队。则：

1) if $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ *then* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$;

2) if $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ *then* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$.

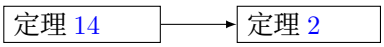


图 A.3：定理 2的依赖图。

证明。 该结论可由更一般的定理 13（见 附录 C）通过将 $\mathfrak{F}$ 和 ι 均实例化为空函数 $\varnothing$ 得出。 □

定理 2（双重对偶化）。对于每个 ADIF 公式 φ 和超团队$\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\varphi))$, 均有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \overline{\overline{\mathfrak{X}}} \models^{\overline{\alpha}} \varphi$。

证明。 该结论可由更一般的定理 14推出，详见 附录 C，只需将 $\mathfrak{F}$ 取为空函数 $\varnothing$。 □

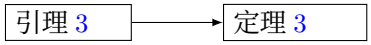


图 A.4：定理 3的依赖图。

定理 3（布尔律）。设 φ_1、 φ_2 和 φ 为 ADIF 公式。则:

1) a) $\neg\bot \equiv \top$; c) $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$; 2) a) $\varphi \vee \top \equiv \top \vee \varphi \equiv \top$; b) $\varphi \wedge \bot \equiv \bot \wedge \varphi \equiv \bot$; 3) a) $\varphi \vee \top \equiv \top \vee \varphi \equiv \top$; b) $\varphi \vee \bot \equiv \bot \vee \varphi \equiv \varphi$; 4) a) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1$; b) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$; 5) a) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1$; 6) a) $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2$; 7) a) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$; 8) a) $\exists^{\pm \mathrm{w}} x.\, \varphi \equiv \neg(\forall^{\pm \mathrm{w}} x.\, \neg\varphi)$; b) $\forall^{\pm \mathrm{w}} x.\, \varphi \equiv \neg(\exists^{\pm \mathrm{w}} x.\, \neg\varphi)$.

b) $\varphi_1 \wedge (\varphi \wedge \varphi_2) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi) \wedge \varphi_2$;

b) $\varphi_1 \vee (\varphi \vee \varphi_2) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi) \vee \varphi_2$;

b) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$;

证明。证明等价关系（分别地，蕴涵） $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ （分别地， $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$）成立，意味着要证明 $\varphi_1 \equiv^{\exists\forall} \varphi_2$ 和 $\varphi_1 \equiv^{\forall\exists} \varphi_2$ （分别地，$\varphi_1 \Rightarrow^{\exists\forall} \varphi_2$ 和 $\varphi_1 \Rightarrow^{\forall\exists} \varphi_2$）都成立。然而，根据定理 2，对于所有$\alpha \in \{\exists\forall, \forall\exists\}$， $\varphi_1 \equiv^{\alpha} \varphi_2$ 当且仅当 $\varphi_1 \equiv^{\overline{\alpha}} \varphi_2$ （分别地， $\varphi_1 \Rightarrow^{\alpha} \varphi_2$ 当且仅当 $\varphi_1 \Rightarrow^{\overline{\alpha}} \varphi_2$）。因此，对于定理陈述中的每一项主张，只需关注两个交替标记 $\exists\forall$ 和 $\forall\exists$ 中的一个即可。[1] 下文在证明等价关系 $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ （分别地，蕴涵 $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$）时，我们假设 $\mathfrak{X} \in \mathrm{H}$赋值$^{\subseteq}(\sup(\varphi_1) \cup \sup(\varphi_2))$。

[1]注意，可以给出一个不使用定理 2 的证明。因此，定理 2 不出现在定理 3 的依赖图中。

1) a) $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \neg\bot$ 语义。$\Leftrightarrow \mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \not\models^{\forall\exists} \bot$ 语义。$\Leftrightarrow \mathfrak{X} \neq \emptyset$ 语义。
$\Leftrightarrow \mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \top$。 b) $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \neg\top$ 语义。$\Leftrightarrow \mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \not\models^{\exists\forall} \top$ 语义。
$\Leftrightarrow \mathfrak{X} = \emptyset$ 语义。$\Leftrightarrow \mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \bot$。 c) $\mathfrak{X} \models^{\alpha} \neg\neg\varphi$ 语义。
$\Leftrightarrow \mathfrak{X} \not\models^{\overline{\alpha}} \neg\varphi$ 语义。$\Leftrightarrow \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$。

2) a) 首先，我们证明 $\varphi \wedge \bot \equiv \bot$ 成立。为此，我们证明，如果$\mathfrak{A}$，则 $\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \wedge \bot$，反之亦然。根据语义，$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \wedge \bot$ 意味着，对于所有 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \varphi$ 或$\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \bot$成立。特别地，由于 $(\emptyset, \mathfrak{X}) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，并且根据引理 3 的条目 1a，$\mathfrak{A}, \emptyset \not\models^{\exists\forall} \varphi$，我们有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \bot$。反过来，$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \bot$意味着 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。因此，对于每个 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，$\emptyset \in \mathfrak{X}_1$ 或 $\emptyset \in \mathfrak{X}_2$ 成立。根据引理 3 的条目 1b，我们有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \varphi$ 或$\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \bot$；根据 $\wedge$ 的语义，这意味着 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \wedge \bot$。最后，注意到，由于 $\wedge$ 的交换律，$\varphi \wedge \bot \equiv \bot \wedge \varphi$ 成立；其形式化证明见下文（条目 4a）。

b) 首先，我们证明 $\varphi \wedge \top \equiv \varphi$ 成立。为此，我们证明：若$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \wedge \top$，则 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$，反之亦然。根据语义，$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \wedge \top$ 意味着，对于所有 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \varphi$ 或$\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \top$。特别是，由于 $(\mathfrak{X}, \emptyset) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，且根据引理 3 的条目 1a，$\mathfrak{A}, \emptyset \not\models^{\exists\forall} \top$，因此有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$。反过来，假设$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$，并令 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$。若 $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$，则 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \varphi$；若 $\mathfrak{X}_1 \neq \mathfrak{X}$，则 $\mathfrak{X}_2 \neq \emptyset$，因此根据 $\top$ 的语义，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \top$。因此，对于每个 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \varphi$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \top$，根据 $\wedge$的语义，推出 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \wedge \top$。最后，注意到 $\varphi \wedge \top \equiv \top \wedge \varphi$ 成立，这是由于 $\wedge$满足交换律，形式化证明见下文（条目4a）。

3) a) 首先，我们证明 $\varphi \vee \top \equiv \top$ 成立。为此，我们证明：若$\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \vee \bot$，则 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \top$，反之亦然。根据语义，$\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \vee \top$ 意味着存在$(\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X}_1 \models^{\forall\exists} \varphi$ 且$\mathfrak{A},\ \mathfrak{X}_2 \models^{\forall\exists} \top$。根据引理 3 的条目 2b，对每个 $i \in \{1, 2\}$，必有 $\emptyset \notin \mathfrak{X}_i$，因此 $\emptyset \notin \mathfrak{X}$；根据 $\top$的语义，这意味着 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \top$。反过来，假设 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \top$。由此可得结论，因为$(\emptyset,\ \mathfrak{X}) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$满足 $\mathfrak{A},\ \emptyset \models^{\forall\exists} \varphi$ （根据引理 3 的条目 2a），且 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \top$，这意味着 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \vee \top$。最后，注意到 $\varphi \vee \top \equiv \top \vee \varphi$成立，这是由于 $\vee$满足交换律，形式化证明见下文（条目 4b）。

b) 首先，我们证明 $\varphi \vee \bot \equiv \varphi$ 成立。为此，我们证明若$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \vee \bot$，则 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$，反之亦然。根据语义，$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \vee \bot$ 意味着存在一个 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\forall\exists} \varphi$ 且 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\forall\exists} \bot$。由后者可得 $\mathfrak{X}_2 = \emptyset$，即 $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$。因此，我们有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。反过来，假设 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。根据以下事实即可得出该结论：$(\mathfrak{X}, \emptyset) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$ 满足 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$ 且$\mathfrak{A}, \emptyset \models^{\forall\exists} \bot$ （根据 $\bot$的语义），这意味着 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \vee \bot$。为了

得出结论，请注意，由于 $\vee$的交换律， $\varphi \vee \bot \equiv \bot \vee \varphi$ 成立；其形式化证明见下文（条目 4b）。4) 第4a项和第4b项均可由以下观察得出：$(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$ 当且仅当 $(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_1) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$。5) a) 若 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi_1 \wedge \varphi_2$，则对于所有 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \varphi_1$或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \varphi_2$。特别地，由于 $(\mathfrak{X}, \emptyset) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，我们有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi_1$。b) 该结论可由划分具有结合性这一观察得出。6) a) 假设 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi_1$。根据以下事实即可得出该结论：$(\mathfrak{X}, \emptyset) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$ 满足 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi_1$ 且 $\mathfrak{A}, \emptyset \models^{\forall\exists} \varphi_2$ （根据引理 3 的条目 2a），这意味着 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi_1 \vee \varphi_2$。b) 该结论可由划分具有结合性这一观察得出。7) a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$ sem. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \not\models^{\forall\exists} \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \Leftrightarrow$ 不成立的是 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ sem.$\Leftrightarrow$ 不存在 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$ 使得$\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\forall\exists} \neg\varphi_1$ 且 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\forall\exists} \neg\varphi_2 \Leftrightarrow$ ；对于所有 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \not\models^{\forall\exists} \neg\varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \not\models^{\forall\exists} \neg\varphi_2$ sem.$\Leftrightarrow$ 对于所有 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \varphi_2$ sem.$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi_1 \wedge \varphi_2$。b) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$ sem. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \not\models^{\exists\forall} \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \Leftrightarrow$不成立的是 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ sem.$\Leftrightarrow$ 存在 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \not\models^{\exists\forall} \neg\varphi_1$ 且 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \not\models^{\exists\forall} \neg\varphi_2$ sem.$\Leftrightarrow$ 存在 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\forall\exists} \varphi_1$ 且 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\forall\exists} \varphi_2$ sem.$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi_1 \vee \varphi_2$。8) a)
$\mathfrak{A}\ \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \neg\ \forall^{\pm W} x. \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}\ \mathfrak{X} \not\models^{\forall\exists} \forall^{\pm W} x. \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \quad [\![\pm W]\!]\ \mathfrak{X}\ x \not\models^{\forall\exists}, (\ )$
$\neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \quad [\![\pm W]\!]\ \mathfrak{X}\ x \models^{\exists\forall} \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}\ \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \exists^{\pm W} x. \varphi$
sem. , sem. , ext (,) sem. , ext (,) sem. , . b)
$\mathfrak{A}\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \neg\ \exists^{\pm W} x. \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}\ \mathfrak{X} \not\models^{\exists\forall} \exists^{\pm W} x. \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \quad [\![\pm W]\!]\ \mathfrak{X}\ x \not\models^{\exists\forall}, (\ )$
$\neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \quad [\![\pm W]\!]\ \mathfrak{X}\ x \models^{\forall\exists} \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}\ \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \forall^{\pm W} x. \varphi$ □
sem. , sem. , ext (,) sem. , ext (,) sem. , . 定理 4 定理 15

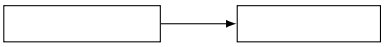


图 A.5：定理 4的依赖图。

定理 4（前缀扩展）。设 $\wp\phi$ 是一个 ADIF 公式，其中 $\wp \in \mathrm{Qn}$ 是量词前缀，而 ϕ 是任意公式。那么，对于所有超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\wp\phi))$， $\mathfrak{A}$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\mathrm{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \wp) \models^\alpha \phi$。

证明。该结论可由更一般的定理 15推出，该定理见 附录 C，只需将 $\mathfrak{F}$ 赋值为空函数 $\varnothing$。 □

以下结果说明了相对于预序 $\sqsubseteq$，对偶化、扩展和划分算子的单调性。

引理10（单调性 I）。设 $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}' \in \mathrm{HAsg}$ 是两个超团队，满足 $\mathfrak{X} \sqsubseteq_W \mathfrak{X}'$，其中 $W \subseteq$ 变量集合。则以下结论成立：

1) $\overline{\mathfrak{X}'} \sqsubseteq_W \overline{\mathfrak{X}}$;

2) a) $\mathfrak{X} =_W \mathrm{ext}_U(\mathfrak{X}, x)$，如果 $x \notin W$，且 $U \subseteq \mathrm{Vr}$;

b) $\mathrm{ext}_U(\mathfrak{X}, x) \sqsubseteq_{W\cup\{x\}} \mathrm{ext}_{U'}(\mathfrak{X}', x)$，其中 $x \in \mathrm{Vr}$，$U \subseteq U' \subseteq \mathrm{Vr}$，且 $U \subseteq W$;

3) 对于每个 $(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X}')$，存在 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq_W \mathfrak{X}'_1$且 $\mathfrak{X}_2 \sqsubseteq_W \mathfrak{X}'_2$。

证明。1) 根据 $\mathfrak{X} \sqsubseteq_W \mathfrak{X}'$，存在一个函数 $f: \mathfrak{X}\restriction_W \to \mathfrak{X}'\restriction_W$ 使得$f(X\restriction_W) \subseteq X\restriction_W$对所有 $X \in \mathfrak{X}$均成立。此外，对于所有 $X \in \mathfrak{X}$，由于 $f(X\restriction_W) \subseteq X\restriction_W$，存在一个函数 $g_X: \bigcup\{X' \in \mathfrak{X}' \mid X'\restriction_W = f(X\restriction_W)\} \to X$，使得 $\chi\restriction_W = (g_X(\chi))\restriction_W$ 对所有 χ in $\bigcup\{X' \in \mathfrak{X}' \mid X'\restriction_W = f(X\restriction_W)\}$均成立。为证明该断言，考虑一个一般团队 $X' \in \overline{\mathfrak{X}'}\restriction_W$。我们必须证明存在 $X \in \overline{\mathfrak{X}}$ 使得 $X\restriction_W \subseteq X'$。根据$\overline{\mathfrak{X}'}\restriction_W$的定义，有 $X' = (\mathrm{img}(\mathfrak{d}'))\restriction_W$，其中某个 $\mathfrak{d}' \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X}')$。我们将 $\mathfrak{d} \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})$ 定义为：对于所有 $X \in \mathfrak{X}$，$\mathfrak{d}(X) = g_X(\mathfrak{d}'((f(X\restriction_W))\restriction^W))$。显然，$(\mathrm{img}(\mathfrak{d}))\restriction_W \subseteq (\mathrm{img}(\mathfrak{d}'))\restriction_W = X'$。由于 $(\mathrm{img}(\mathfrak{d})) \in \overline{\mathfrak{X}}$，命题得证。

2a）该结论由以下事实得出：对于每个 $F \in \mathrm{Fnc}$，$\chi \in$ 赋值，且$x \notin W$，都有 $\mathrm{ext}(\chi, F\ x)\restriction_W = \chi\restriction_W$，这意味着 $\mathrm{ext}(X, F\ x)\restriction_W = X\restriction_W$ 对每个 $X \in \mathfrak{X}$ 以及 $F \in \mathrm{Fnc}_U$，结论得证。

2b）根据 $\mathfrak{X} \sqsubseteq_W \mathfrak{X}'$，存在一个函数 $f: \mathfrak{X}\restriction_W \to \mathfrak{X}'\restriction_W$ 使得 $f(X\restriction_W) \subseteq X\restriction_W$ 对所有$X \in \mathfrak{X}$都成立。为了证明该结论，取一个一般团队$\hat{} \hat{} X \in \mathrm{ext}_U(\mathfrak{X}, x)$。因此，对于某个$X \in \mathfrak{X}$和$F \in \mathrm{Fnc}_U$，有$X = \mathrm{ext}(X, F\ x) = \{\mathrm{ext}(\chi, F\ x) \mid \chi \in X\}$。令$X' = (f(X\restriction_W))\restriction^W \in \mathfrak{X}'$。显然，$X'\restriction_W = f(X\restriction_W) \subseteq X\restriction_W$。此外，$\mathrm{ext}(X', F\ x) \in \mathrm{ext}_{U'}(\mathfrak{X}', x)$，因为$F \in \mathrm{Fnc}_U \subseteq \mathrm{Fnc}_{U'}$（因为$U \subseteq U'$）。为了完成证明，只需证明$\mathrm{ext}(X', F\ x)\restriction_{W\cup\{x\}} \subseteq \hat{} X\restriction_{W\cup\{x\}}$。为此，取某个 $\chi' \in X'$的$\mathrm{ext}(\chi', F\ x)\restriction_{W\cup\{x\}}$。注意，$\chi'\restriction_W \in X'\restriction_W = f(X\restriction_W) \subseteq X\restriction_W$，这意味着存在 $\chi \in X$使得 $\chi\restriction_W = \chi'\restriction_W$。由于$U \subseteq W$，因此 $\chi\restriction_U = \chi'\restriction_U$成立，这意味着$F(\chi) = F(\chi')$，因为$F \in \mathrm{Fnc}_U$。因此，$\hat{} \mathrm{ext}(\chi', F\ x)\restriction_{W\cup\{x\}} = \mathrm{ext}(\chi, F\ x)\restriction_{W\cup\{x\}} \in X\restriction_{W\cup\{x\}}$。

3）根据 $\mathfrak{X} \sqsubseteq_W \mathfrak{X}'$，存在一个函数 $f: \mathfrak{X}\restriction_W \to \mathfrak{X}'\restriction_W$，使得对于所有 $X \in \mathfrak{X}$，$f(X\restriction_W) \subseteq X\restriction_W$。令 $(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X}')$，并定义 $\mathfrak{X}_i = \{X \in \mathfrak{X} \mid (f(X\restriction_W))\restriction^W \in \mathfrak{X}'_i\}$ for $i \in \{1, 2\}$。我们需要证明 $\mathfrak{X}_i \sqsubseteq_W \mathfrak{X}'_i$(
$i \in \{1, 2\}$ $\in \mathfrak{X}_i$ $f\ \restriction_W \restriction^W \in$)。为此，令 X, $\mathfrak{X}'_i$ $f\ \restriction_W \restriction^W \restriction_W = f\ \restriction_W \subseteq\ \restriction_W$
并考虑团队 ((X))。显然，(((X))) (X) X。由此可得命题，因为 $((f(X\restriction_W))\restriction^W)\restriction_W \in \mathfrak{X}'_i\restriction_W$□

附录 B. 第3节证明

引理 4（FOL对偶化）。对于所有 FOL公式 φ 和超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}\subseteq(\mathrm{sup}(\varphi))$，以下等价关系成立。

1) 陈述$1a$ 和 $1b$ 等价：

a) 存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$，对于所有赋值$\chi \in X$；b) 对于所有团队 $X \in \overline{\mathfrak{X}}$，存在一个赋值 $\chi \in X$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。

2) 陈述$2a$ 和 $2b$ 等价：

a) 对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，存在一个赋值 $\chi \in X$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$；b) 存在一个团队 $X \in \overline{\mathfrak{X}}$ 使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$，对于所有赋值$\chi \in X$。

证明。第一个等价关系由引理 2、条目 1得出，令 $\Psi = \{\chi \in \text{赋值}\subseteq(\text{上确界}(\varphi)) \mid \mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi\}$。第二个等价关系由第一个等价关系以及 $\mathfrak{X} \equiv \overline{\mathfrak{X}}$（引理 1）得出。 □

引理 5（FOL量词）。对于所有 FOL 公式 φ、变量 $x \in$ 变量集合 Vr 以及超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}\subseteq(V)$，其中 $V \triangleq \text{上确界}(\varphi) \setminus \{x\}$，以下等价关系成立。

1）陈述$1a$ 和$1b$ 等价：

a）存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$，使得 $\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \exists x.\varphi$，对于所有 $\chi \in X$；b）存在一个团队 $X \in \mathrm{ext}_V(\mathfrak{X}, x)$，使得 $\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$，对于所有 $\chi \in X$。

2）陈述$2a$ 和$2b$ 等价：

a）对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，存在 $\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \forall x.\varphi$；b）对于所有团队 $X \in \mathrm{ext}_V(\mathfrak{X}, x)$，存在 $\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。

证明。（$1a \Rightarrow 1b$）令 $X \in \mathfrak{X}$，使得 $\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \exists x.\varphi$ 对每个$\chi \in X$成立。根据标准 FOL语义，对于每个 $\chi \in X$，都存在一个元素 $a_\chi \in A$，使得 $\mathfrak{A}$、$\chi[x \mapsto a_\chi] \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。我们可以安全地假设，当 $\chi_1{\restriction_V} = \chi_2{\restriction_V}$时，对于所有 χ_1、$\chi_2 \in X$，$a_{\chi_1} = a_{\chi_2}$。令 $F \in \mathrm{Fnc}_V$，使得对于每个 $\chi \in X$，$F(\chi) = a_\chi$，并令 $X_F = \{\chi[x \mapsto F(\chi)] : \chi \in X\}$。由于 $X_F \in \mathrm{ext}_V(\mathfrak{X}, x)$，且 $\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$ 对每个 $\chi \in X_F$成立，因此该命题成立。

($1b \Rightarrow 1a$) 令 $X_F = \{\chi[x \mapsto F(\chi)] : \chi \in X\} \in \mathrm{ext}_V(\mathfrak{X}, x)$，其中某个 $X \in \mathfrak{X}$ 和 $F \in \mathrm{Fnc}_V$ 满足：对每个 $\chi \in X_F$，$\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$ 均成立。显然，根据标准 FOL 语义，这意味着对每个 $\chi \in X$，$\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \exists x.\varphi$ 均成立，因而命题得证。

($2a \Leftrightarrow 2b$) 根据该引理的1 项陈述，我们有：$1a$ 为假，当且仅当$1b$ 为假（不 $1a \Leftrightarrow$ 不 $1b$，简写为）。在这一最后的等价关系中，将 φ 替换为 $\neg\varphi$，我们得到 $1a' \Leftrightarrow 1b'$，其中 $1a'$ 和 $1b'$ 分别是以下内容的缩写：

– 对所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，存在一个赋值 $\chi \in X$，使得$\mathfrak{A}, \chi \not\models_{\mathrm{FOL}} \exists x.\neg\varphi$；– 对所有团队 $X \in \mathrm{ext}_V(\mathfrak{X}, x)$，存在一个赋值 $\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}$，$\chi \not\models_{\mathrm{FOL}} \neg\varphi$。

通过应用否定的标准 FOL 语义以及 $\exists$ 与$\forall$ 在标准 FOL中的对偶性，可以直接看出 $1a'$ 与 $1b'$ 分别对应于 $2a$ 和 $2b$，因此命题得证。 □

引理 6（FOL 布尔联结词）。对于所有FOL 公式 φ_1 和 φ_2 以及超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(V)$，其中 $V \triangleq \mathrm{sup}(\varphi_1) \cup \mathrm{sup}(\varphi_2)$，以下等价关系成立。

1）陈述$1a$ 和$1b$ 是等价的：

a）存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$，对于所有 $\chi \in X$；b）对于每个二分划分（$\mathfrak{X}_1$、$\mathfrak{X}_2$）$\in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，存在一个索引 $i \in \{1, 2\}$ 和一个团队 $X \in \mathfrak{X}_i$ 使得 $\mathfrak{A}$、$\chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_i$，对于所有 $\chi \in X$。

2) 陈述$2a$ 和 $2b$ 等价：

a) 对所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，存在 $\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_1 \vee \varphi_2$；b) 存在一个二分划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得对于所有索引$i \in \{1, 2\}$和团队 $X \in \mathfrak{X}_i$，有 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_i$，对于某个 $\chi \in X$。

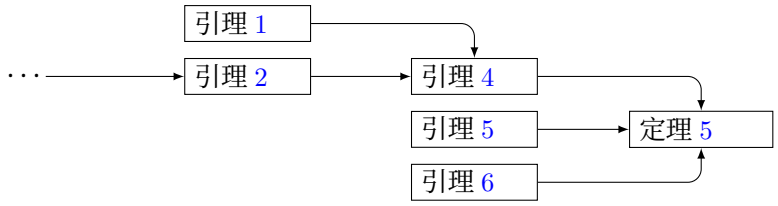
证明。（$1a \Rightarrow 1b$）令 $X \in \mathfrak{X}$ 满足对于每个$\chi \in X$ 都有 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$，并考虑任意一对 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$。由于 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ 是 $\mathfrak{X}$ 的一个划分，因此 $X \in \mathfrak{X}_1$ 或 $X \in \mathfrak{X}_2$：在前一种情况下，令 $i = 1$；在后一种情况下，令 $i = 2$。由于 $X \in \mathfrak{X}_i$ 且对于每个 $\chi \in X$ 都有 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_i$，命题得证。

($1b \Rightarrow 1a$) 考虑超团队 $\mathfrak{X}_1' = \{X \in \mathfrak{X} : \forall \chi \in X \ . \mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_1\}$ 以及有序对 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_1', \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_1') \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$。注意，根据$\mathfrak{X}_1$的定义，不存在这样的 $X \in \mathfrak{X}_1$，使得对于每个 $\chi \in X$，$\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_1$ 都成立。因此，根据 $1b$，必定存在这样的 $X \in \mathfrak{X}_2$，使得对于每个 $\chi \in X$，$\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_2$ 都成立。根据 $\mathfrak{X}_2$的定义，对于每个$\chi \in X$，$\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_1$ 也成立，因此命题得证。

（$2a \Leftrightarrow 2a$）根据该引理的陈述1，我们有 $1a$ 为假，当且仅当 $1b$ 为假（简记为 $1a$ ⇔非 $1b$）。在此最后一个等价关系中，将 φ_1 替换为 $\neg\varphi_1$，并将 φ_2 替换为 $\neg\varphi_2$，得到 $1a' \Leftrightarrow 1b'$，其中 $1a'$和 $1b'$ 分别是以下表达式的缩写：

– 对所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，存在赋值 $\chi \in X$，使得$\mathfrak{A}, \chi \not\models_{\mathrm{FOL}} \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$；– 存在一个超团队对 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得对于所有索引 $i \in \{1, 2\}$ 和团队 $X \in \mathfrak{X}_i$，都存在赋值$\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}, \chi \not\models_{\mathrm{FOL}} \neg\varphi_i$。

应用否定语义和德摩根定律，可以很容易地看出 $1a'$ 和 $1b'$ 分别对应于 $2a$ 和 $2a$，因此命题得证。 □



图B.6：定理5的依赖图。

定理5（FOL充分性）。对于所有 FOL 公式 φ 和超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\mathrm{sup}(\varphi))$，均有：

1) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 当且仅当存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$，使得对于所有赋值 $\chi \in X$，均有 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$；
2) $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$ 当且仅当对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$，都存在一个赋值 $\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。

证明。条目1和条目2通过对公式结构进行归纳法一并证明。

- 若 φ 是原子公式，即，则它是 $\bot$ 或 $\top$，或者具有 $R(\vec{t}\boldsymbol{x})$ 的形式，那么这些断言可直接由语义（定义 2，条目 1–3）得出。

- 若 $\varphi = \neg\phi$，那么根据语义，我们有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \not\models^{\overline{\alpha}} \phi$。若 $\alpha = \exists\forall$，那么根据归纳假设，并非对每个 X 都有 $\in \mathfrak{X}$ 存在 $\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \phi$；这相当于说，存在 $X \in \mathfrak{X}$，使得对每个 $\chi \in X$，都有 $\mathfrak{A}, \chi \not\models_{\mathrm{FOL}} \phi$，由此即可得出该命题。相反，若 $\alpha = \forall\exists$，那么根据归纳假设，不存在 $X \in \mathfrak{X}$，使得对每个 $\chi \in X$，都有 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \phi$；这相当于说，对每个 $X \in \mathfrak{X}$，都存在 $\chi \in X$，使得 $\mathfrak{A}, \chi \not\models_{\mathrm{FOL}} \phi$，由此即可得出该命题。

- 如果 $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ 且 $\alpha = \exists\forall$，那么根据语义，我们有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当对于每个 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\alpha} \varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\alpha} \varphi_2$。根据归纳假设，这相当于说，对于每个 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，存在 $i \in \{1, 2\}$ 和 $X \in \mathfrak{X}_i$，使得对于每个 $\chi \in X$，都有 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_i$。由引理 6、条目 1，命题得证。如果 $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ 且 $\alpha = \forall\exists$，那么根据语义，我们有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \varphi$。按照之前的方法，即应用语义，

归纳假设和引理 6、条目 1，我们得到存在 $\mathbf{X}' \in \overline{\mathfrak{X}}$使得对于每个 $\chi' \in \mathbf{X}'$ 都有 $\mathfrak{A}$，$\chi' \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。由引理 4、条目2，命题得证。

- 如果 $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ 且 $\alpha = \forall\exists$，那么根据语义，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当存在 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\alpha} \varphi_1$ 且 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\alpha} \varphi_2$。根据归纳假设，这等价于说，存在 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X})$，使得对于每个 $i \in \{1, 2\}$ 和 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_i$，存在 $\chi \in \mathbf{X}$，使得 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \varphi_i$成立。根据引理 6、条目 2，命题得证。

  若 $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ 且 $\alpha = \exists\forall$，那么根据语义，有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \varphi$。按照之前的方法，即应用语义、归纳假设和引理 6、条目 2，我们可以得到，对于每个 $\mathbf{X}' \in \overline{\mathfrak{X}}$，都存在 $\chi' \in \mathbf{X}'$ 使得 $\mathfrak{A}$，$\chi' \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。由引理 4、条目 1，即可得证。

- 如果 $\varphi = \exists x.\phi$ 且 $\alpha = \exists\forall$，那么根据语义，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\mathsf{extsup}(\phi)_{\setminus\{x\}}(\mathfrak{X}, x) \models^{\alpha} \phi$。根据归纳假设，这相当于说，存在 $\mathbf{X} \in \mathsf{extsup}(\phi)_{\setminus\{x\}}(\mathfrak{X}, x)$，使得对于每个 $\chi \in \mathbf{X}$，都有 $\mathfrak{A}, \chi \models_{\mathrm{FOL}} \phi$。由引理 5、条目 1，命题得证。

  如果 $\varphi = \exists x.\phi$ 且 $\alpha = \forall\exists$，那么根据语义，有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \varphi$。按照之前的方法，即应用语义、归纳假设以及引理 5、条目 1，我们得到存在 $\mathbf{X}' \in \overline{\mathfrak{X}}$，使得对于每个 $\chi' \in \mathbf{X}'$ 都有 $\mathfrak{A}$，$\chi' \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。由引理 4、条目2，命题得证。

- 若 $\varphi = \forall x.\phi$ 且 $\alpha = \forall\exists$，那么根据语义，我们有 $\mathfrak{A}\,\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\mathsf{extsup}(\phi)_{\setminus\{x\}}(\mathfrak{X}, x) \models^{\alpha} \phi$。根据归纳假设，这意味着对于每个 $\mathbf{X}$，$\in \mathsf{extsup}(\phi)_{\setminus\{x\}}(\mathfrak{X}, x)$，都存在 $\chi \in \mathbf{X}$，使得 $\mathfrak{A}\,\chi \models_{\mathrm{FOL}} \phi$。结论由引理 5、条目 2 得出。

  若 $\varphi = \forall x.\phi$ 且 $\alpha = \exists\forall$，那么根据语义，我们有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \varphi$。沿用前述方法，即应用语义、归纳假设和引理 5、条目 2，我们得到，对于每个 $\mathbf{X}' \in \overline{\mathfrak{X}}$，都存在 $\chi' \in \mathbf{X}'$，使得 $\mathfrak{A}$，$\chi' \models_{\mathrm{FOL}} \varphi$。结论由引理 4、条目 1得出。

□

引理 7（柱状扩展）。设 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}$ 是一个超团队。那么，对于所有变量 $x \in$变量集合和变量集 $\mathbf{W}$，且 $\mathsf{vr}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathbf{W} \subseteq$ 变量集合，$\mathsf{cyl}(\mathfrak{X}, x) = \mathsf{ext}_{\mathbf{W}}\big(\overline{\mathfrak{X}}, x\big)$。

证明。通过证明等价关系的两个方向即可完成证明。

首先，我们证明以下内容：

$$\mathsf{cyl}(\mathfrak{X}, x) \sqsubseteq \overline{\mathsf{ext}_{\mathbf{W}}\big(\overline{\mathfrak{X}}, x\big)}.$$

令 $\mathbf{X}_u \in \mathsf{cyl}(\mathfrak{X}, x)$成立。存在 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathbf{X}_u = \mathsf{cyl}(\mathbf{X}\ x)$成立。注意，对于每个 $\mathbf{X}' \in \overline{\mathfrak{X}}$，都存在 $\chi_{\mathbf{X}'} \in \mathbf{X}' \cap \mathbf{X}$。于是，对于每个 $\mathrm{F} \in \mathsf{Fnc}_{\mathbf{W}}$，有

that $\chi_{X'}[x \mapsto F(\chi_{X'})] \in X_u$。现在注意，对于每个 $\hat{}X \in \mathrm{ext}_W(\overline{\mathfrak{X}}, x)$，$\hat{}$ 都存在 $X' \in \overline{\mathfrak{X}}$ 和 $F \in \mathrm{Fnc}_W$，使得 $X = \mathrm{ext}(X', F, x)$。考虑 $\mathfrak{d} \in \mathrm{Chc}\big(\mathrm{ext}_W(\overline{\mathfrak{X}}, x)\big)$，其定义如下。对于每个 $\hat{}X \in \mathrm{ext}_W(\overline{\mathfrak{X}}, x)$，定义 $\hat{}\mathfrak{d}(X) = \chi_{X'}[x \mapsto F(\chi_{X'})]$。我们立即可以推出 $\mathrm{img}(\mathfrak{d}) \subseteq X_u$。

现在我们来证明

$$\overline{\mathrm{ext}_W(\overline{\mathfrak{X}}, x)} \sqsubseteq \mathrm{cyl}(\mathfrak{X}, x)\,.$$

设 $\mathring{}X \in \sout{\mathrm{ext}_W(\overline{\mathfrak{X}}, x).}$ 我们有 $\mathring{}X = \mathrm{img}(\mathring{\mathfrak{d}})$，其中选择函数为 $\mathring{\mathfrak{d}} \in \mathrm{Chc}\big(\mathrm{ext}_W(\overline{\mathfrak{X}}, x)\big)$。于是，

$$\forall F \in \mathrm{Fnc}_W, \forall X' \in \overline{\mathfrak{X}}, \exists \chi' \in X' \text{ s.t. } \chi'[x \mapsto F(\chi')] \in \mathring{X}. \tag{B.1}$$

$\mathring{}$为导出矛盾，假设对于所有 X，都有 $\mathrm{cyl}(X, x) \not\subseteq X$。于是，对于所有$\mathring{}X \in \mathfrak{X}$，存在 $\chi_X \in X$ 和 $a_X \in A$，使得 $\chi_X[x \mapsto a_X] \notin X$。我们假设 $a_{X_1} = a_{X_2}$ if $\chi_{X_1} = \chi_{X_2}$，从而每个 χ 只与一个 $a \in A$ 相关联。考虑满足 $\mathfrak{d}(X) = \chi_X$（对所有 $X \in \mathfrak{X}$）的 $\mathfrak{d} \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X})$，以及满足 $F(\chi_X) = a_X$（对所有 $X \in \mathfrak{X}$）的 $F \in \mathrm{Fnc}_W$。根据构造，对于所有 $\chi' \in \mathrm{img}(\mathfrak{d})$，都有 $\chi'[x \mapsto F(\chi')] \notin \mathring{}X$；又由于 $\mathrm{img}(\mathfrak{d}) \in \overline{\mathfrak{X}}$，这与（B.1）矛盾。 □

引理 8（团队划分）。设 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}$ 是一个超团队。那么：
1）对于所有超团队二分划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$ 以及团队 $Y_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$ 和 $Y_2 \in \overline{\mathfrak{X}_2}$，存在一个团队 $X \in \mathfrak{X}$，使得 $X \subseteq Y_1 \cup Y_2$；2）对于所有团队 $X \in \mathfrak{X}$ 以及团队二分划分 $(X_1, X_2) \in \mathrm{par}(X)$，存在一个超团队二分划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$ 以及两个团队 $Y_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$ 和 $Y_2 \in \overline{\mathfrak{X}_2}$，使得 $Y_1 \subseteq X_1$ 且 $Y_2 \subseteq X_2$。

证明。在下文中，我们假设索引 i 的取值范围为 $\{1, 2\}$。
1）设 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$ 且 $Y_i \in \overline{\mathfrak{X}_i}$。那么，存在 $\mathfrak{d}_i \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X}_i)$，使得 $Y_i = \mathrm{img}(\mathfrak{d}_i)$。定义 $\mathfrak{d} \in \mathrm{Chc}(\overline{\mathfrak{X}})$ 如下：$\mathfrak{d}(X) = \mathfrak{d}_i(X)$ 若 $X \in \mathfrak{X}_i$，对所有 $X \in \overline{\mathfrak{X}}$ 均成立。显然，$\mathrm{img}(\mathfrak{d}) = \mathrm{img}(\mathfrak{d}_1) \cup \mathrm{img}(\mathfrak{d}_2)$ 且 $\mathrm{img}(\mathfrak{d}) \in \overline{\mathfrak{X}}$。最后，根据引理 1，存在 $X^\star \in \mathfrak{X}$，使得 $X^\star \subseteq \mathrm{img}(\mathfrak{d}) = Y_1 \cup Y_2$。

2) 设 $X \in \mathfrak{X}$ 且 $(X_1, X_2) \in \mathrm{par}(X)$。考虑如下定义的 $\mathfrak{X}_1$ 和 $\mathfrak{X}_2$：$\mathfrak{X}_1 = \{\mathrm{img}(\mathfrak{d}) \mid \mathfrak{d} \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X}) \text{ 以及 } \mathfrak{d}(X) \in X_1\}$ 和 $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_1$。显然，$(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$成立。此外，对于每个 $X'_i \in \mathfrak{X}_i$，均有 $X'_i \cap X_i \neq \emptyset$。令 $\mathfrak{d}_i \in \mathrm{Chc}(\mathfrak{X}_i)$ 满足：对于每个 $X'_i \in \mathfrak{X}_i$，$\mathfrak{d}_i(X'_i) \in Y_i \cap X_i$。则 $\mathrm{img}(\mathfrak{d}_i) \in \overline{\mathfrak{X}_i}$ 满足 $\mathrm{img}(\mathfrak{d}_i) \subseteq X_i$。 □

定理 6（DIF 充分性）。对于所有 $\exists/\forall$-DIF 公式 $\varphi^{\exists}/\varphi^{\forall}$和超团队$\mathfrak{X} \in \mathrm{H}$赋值$\subseteq (\sup(\varphi^{\exists}/\varphi^{\forall}))$，均有：

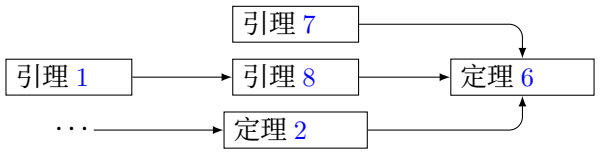


图 B.7：定理的依赖图 6。

1) $\mathfrak{A},\mathfrak{X}\models^{\exists\forall}\varphi^{\exists}$ 当且仅当存在一个团队 $X\in\mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{A}$，$X\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi^{\exists}$；

2) $\mathfrak{A},\mathfrak{X}\models^{\forall\exists}\varphi^{\forall}$ iff, *for all teams* $X\in\mathfrak{X}$, *it holds that* $\mathfrak{A},X\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}}\varphi^{\forall}$.

证明。下文中，我们假设索引 i 的取值范围为 $\{1,2\}$。

首先，我们证明条目 1。证明采用对公式 $\varphi^{\exists}$ 进行结构归纳。

（基例）如果 $\varphi^{\exists}=\mathrm{R}(\vec{}x)$ 或 $\varphi^{\exists}=\neg\mathrm{R}(\vec{}x)$，则根据语义规则，该性质成立。

（归纳情形）假设该性质对子公式 $\varphi^{\exists}$ 成立。

($\varphi^{\exists}=\varphi_1\wedge\varphi_2$) $\mathfrak{A},\mathfrak{X}\models^{\exists\forall}\varphi_1\wedge\varphi_2$ 语义$\Leftrightarrow$ 对于所有 $(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)\in\mathrm{par}(\mathfrak{X})$，均有$\mathfrak{A},\mathfrak{X}_1\models^{\exists\forall}\varphi_1$ 或 $\mathfrak{A},\mathfrak{X}_2\models^{\exists\forall}\varphi_2$ 归纳假设$\Leftrightarrow$ 对于所有 $(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)\in\mathrm{par}(\mathfrak{X})$，存在 $X_1\in\mathfrak{X}_1$ 使得 $\mathfrak{A},X_1\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_1$，或存在 $X_2\in\mathfrak{X}_2$ 使得 $\mathfrak{A},X_2\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_2$ $\Leftrightarrow$ 存在 $X\in\mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{A},X\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_1$ 且 $\mathfrak{A},X\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_2$ ^{DIF}-语义$\Leftrightarrow$ 存在 $X\in\mathfrak{X}$ 使得$\mathfrak{A},X\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_1\wedge\varphi_2$。

($\varphi^{\exists}=\varphi_1\vee\varphi_2$) 若 $\mathfrak{A},\mathfrak{X}\models^{\exists\forall}\varphi_1\vee\varphi_2$，则 $\mathfrak{A},\overline{\mathfrak{X}}\models^{\forall\exists}\varphi_1\vee\varphi_2$。根据语义，存在 $(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)\in\mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$，使得 $\mathfrak{A},\mathfrak{X}_1\models^{\forall\exists}\varphi_1$ 且 $\mathfrak{A},\mathfrak{X}_2\models^{\forall\exists}\varphi_2$，这意味着存在 $(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)\in\mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$，使得$\mathfrak{A},\overline{\mathfrak{X}_1}\models^{\exists\forall}\varphi_1$ 且 $\mathfrak{A},\overline{\mathfrak{X}_2}\models^{\exists\forall}\varphi_2$。根据归纳假设，存在 $X_1\in\overline{\mathfrak{X}_1}$ 和 $X_2\in\overline{\mathfrak{X}_2}$，使得 $\mathfrak{A},X_1\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_1$ 且 $\mathfrak{A},X_2\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_2$。根据引理 8 的条目 1，存在 $X\in\mathfrak{X}$，使得 $X\subseteq X_1\cup X_2$。于是，$\mathfrak{A},X\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_1\vee\varphi_2$。

反之，若存在 $X\in\mathfrak{X}$ 使得 $\mathfrak{A}$，$X\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_1\vee\varphi_2$，则存在 $(X_1,X_2)\in\mathrm{par}(X)$，使得 $\mathfrak{A}$，$X_i\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_i$。根据引理 8 的条目 2，存在 $(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)\in\mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$ 和 $Y_i\in\overline{\mathfrak{X}_i}$，使得 $Y_i\subseteq X_i$。于是，有 $\mathfrak{A}$，$Y_i\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi_i$。根据归纳假设，我们有 $\mathfrak{A},\overline{\mathfrak{X}_i}\models^{\exists\forall}\varphi_i$，或者等价地，有 $\mathfrak{A},\mathfrak{X}_i\models^{\forall\exists}\varphi_i$。因此，存在 $(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)\in\mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$，使得 $\mathfrak{A},\mathfrak{X}_i\models^{\forall\exists}\varphi_i$，这意味着 $\mathfrak{A},\overline{\mathfrak{X}}\models^{\forall\exists}$

$\varphi_1\vee\varphi_2$，由此我们可以得出 $\mathfrak{A},\mathfrak{X}\models^{\exists\forall}\varphi_1\vee\varphi_2$。

($\varphi^{\exists}=\exists^{\pm W}x.\varphi$) $\mathfrak{A},\mathfrak{X}\models^{\exists\forall}\exists^{\pm W}x.\varphi$ 语义。$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A},\mathrm{ext}[\![\pm W]\!](\mathfrak{X},x)\models^{\exists\forall}\varphi$ 归纳假设。$\Leftrightarrow$ 存在 $X\in\mathrm{ext}[\![\pm W]\!](\mathfrak{X},x)$ 使得 $\mathfrak{A},X\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}\varphi$ 定义。$\Leftrightarrow$ 存在 $X\in\mathfrak{X}$ 并且

F ∈Fnc[±W] 使得 𝔄, ext(X, F x) $\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi$ DIF-语义。⇔ 存在 X ∈ 𝔛使得 𝔄, X $\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \exists^{\pm W} x.\ \varphi$. ($\varphi^{\exists} = \forall^{-\emptyset} x.\varphi$) 𝔄, 𝔛$\models^{\exists\forall} \forall^{-\emptyset} x.\varphi$ 语义。⇔ 𝔄, $\overline{\mathfrak{X}}\models^{\forall\exists} \forall^{-\emptyset} x.\varphi$ 语义。⇔ 𝔄, $\mathrm{ext}_{\mathrm{Vr}}(\overline{\mathfrak{X}}, x) \models^{\forall\exists} \varphi$定理。⇔ [2] 𝔄, $\mathrm{ext}_{\mathrm{Vr}}(\overline{\mathfrak{X}}, x) \models^{\exists\forall} \varphi$ 引理 ⇔ [7] 𝔄, cyl(𝔛, x) $\models^{\exists\forall} \varphi$ 归纳假设。⇔ 存在 X ∈cyl(_____

𝔛 x 𝔄 $\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}} \varphi$ ⇔ ∈ 𝔛 𝔄 x $\models^{\forall}_{\mathrm{DIF}}$,) 使得 , X 定义。存在 X 使得 , cyl(X) -语义。存在 X 使得 , X .

现在我们转而证明条目 2。我们对公式 $\varphi^{\forall}$ 进行结构归纳。

（基例）如果 $\varphi^{\forall} = \mathrm{R}(\vec{}\mathrm{x})$ 或 $\varphi^{\forall} = \neg\mathrm{R}(\vec{}\mathrm{x})$，则根据语义规则，该性质成立。

（归纳情形）假设该性质对 $\varphi^{\forall}$ 的各个子公式都成立。

（$\varphi^{\forall} = \varphi_1 \wedge \varphi_2$）我们假设 𝔄, 𝔛 $\models^{\forall\exists} \varphi_1 \wedge \varphi_2$，并证明对于所有团队 X ∈ 𝔛，都有 𝔄, X $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$；这相当于证明对于所有团队 X ∈ 𝔛且 ($X_1$,$X_2$) ∈ par(X)，都有 𝔄, X_1 $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或 𝔄, X_2 $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$。为此，我们令 X ∈ 𝔛 且 ($X_1$,$X_2$) ∈ par(X)。根据引理 8 的条目 2，存在 ($\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$) ∈ par($\overline{\mathfrak{X}}$)、$Y_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$和 $Y_2 \in \overline{\mathfrak{X}_2}$，使得 $Y_1 \subseteq X_1$ 且 $Y_2 \subseteq X_2$。由 𝔄, 𝔛 $\models^{\forall\exists} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ 可得 𝔄, $\overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \varphi_1 \wedge \varphi_2$。根据语义，对于所有 ($\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$) ∈ par($\overline{\mathfrak{X}}$) ，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \varphi_2$；根据定理 2，这相当于说，对于所有 ($\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$) ∈par($\overline{\mathfrak{X}}$)，都有 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}_1} \models^{\forall\exists} \varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}_2} \models^{\forall\exists} \varphi_2$。根据归纳假设，对于所有 ($\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$) ∈par($\overline{\mathfrak{X}}$)，对于所有 $X_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$，都有 𝔄, $X_1 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$，或者都有 𝔄, $X_2 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$，其中 $X_2 \in \overline{\mathfrak{X}_2}$。等价地，对于所有 ($\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$) ∈ par($\overline{\mathfrak{X}}$)、$X_1 \in \mathfrak{X}_1$和 $X_2 \in \overline{\mathfrak{X}_2}$，都有 $\mathfrak{A}, X_1 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}, X_2 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$。因此，我们有 $\mathfrak{A}, Y_1 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}, Y_2 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$；又由于 $Y_1 \subseteq X_1$ 且 $Y_2 \subseteq X_2$,, 可得 $\mathfrak{A}, X_1 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}, X_2 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$。

反过来，假设对于所有团队 X ∈ 𝔛，都有 𝔄，X $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$，这相当于说，对于所有 X ∈ 𝔛和 ($X_1$,$X_2$) ∈par(X)，都有 𝔄，$X_1$ $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或 𝔄，X_2 $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$。首先，我们证明，对于所有 ($\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$) ∈ par($\overline{\mathfrak{X}}$)、$X_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$和 $X_2 \in \overline{\mathfrak{X}_2}$，都有𝔄，$X_1$ $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或 𝔄，X_2 $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$。为此，令 ($\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$) ∈ par($\overline{\mathfrak{X}}$)、$X_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$和 $X_2 \in \overline{\mathfrak{X}_2}$。根据引理 8 的条目 1，存在一个团队 X ∈ 𝔛，使得 X ⊆ $X_1 \cup X_2$。令 $X_1' = X_1 \cap X$ 且 $X_2' = X \setminus X_1'$。显然，(X_1', X_2') ∈ par(X)、$X_1' \subseteq X_1$, 且 $X_2' \subseteq X_2$。根据假设，有 𝔄，X_1' $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或 𝔄，X_2' $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$。由 $X_1' \subseteq X_1$, 和 $X_2' \subseteq X_2$, 可得 𝔄，X_1 $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或 𝔄，X_2 $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$。因此，我们已经证明，对于所有 ($\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$) ∈ par($\overline{\mathfrak{X}}$)、$X_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$和 $X_2 \in$

$\overline{\mathfrak{X}}_2$，都有 $\mathfrak{A}$，$\mathrm{X}_1 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}$，$\mathrm{X}_2 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$。这相当于说，对于所有 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$，都有 $\mathfrak{A}$，对所有 $\mathrm{X}_1 \in \overline{\mathfrak{X}_1}$ 成立；或者有 $\mathfrak{A}$，对所有 $\mathrm{X}_2 \in \overline{\mathfrak{X}}_2$成立。根据归纳假设，对于所有 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\overline{\mathfrak{X}})$，都有 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}_1} \models^{\exists\forall} \varphi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{X}_2} \models^{\exists\forall} \varphi_2$，最终相当于说$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi_1 \wedge \varphi_2$。

$(\varphi^{\vee} = \varphi_1 \vee \varphi_2)$ $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi_1 \vee \varphi_2$ 语义上⇔ 存在 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$ 使得$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}_1 \models^{\forall\exists} \varphi_1$ 且 $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}_2 \models^{\forall\exists} \varphi_2$ 归纳假设⇔ 存在 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$ 使得对所有 X $_1 \in \mathfrak{X}_1$ 均有 $\mathfrak{A}, \mathrm{X}_1 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$，且对所有 $\mathrm{X}_2 \in \mathfrak{X}_2$ 均有 $\mathfrak{A}, \mathrm{X}_2 \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$ ⇔ 对所有 X $\in \mathfrak{X}$ 均有 $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1$ 或$\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_2$ ^{DIF}语义上⇔ 对所有 X $\in \mathfrak{X}$ 均有 $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi_1 \vee \varphi_2$。

$(\varphi^{\vee} = \exists^{-\emptyset} x.\varphi)$ $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \exists^{-\emptyset} x.\varphi$ 语义上⇔ $\mathfrak{A}$， $\overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \exists^{-\emptyset} x.\varphi$ 语义上⇔ $\mathfrak{A}$， 扩展$_{\mathrm{Vr}}(\overline{\mathfrak{X}}$, $x) \models^{\exists\forall} \varphi$定理⇔ [2] ~~$\mathfrak{A}$， 扩展$_{\mathrm{Vr}}(\overline{\mathfrak{X}}$， $x)$~~$\models^{\forall\exists} \varphi$ 引理⇔ [7] $\mathfrak{A}$， cyl$(\mathfrak{X}, x) \models^{\forall\exists} \varphi$ 归纳假设⇔ 对所有 X $\in$ cyl$(\mathfrak{X}, x)$ 均有 $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi$ 定义上⇔ 对所有 X $\in \mathfrak{X}$ 均有 $\mathfrak{A}$ $x \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi$ ^{DIF}⇔ $\in \mathfrak{X}$ $\mathfrak{A}$ $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}}$,cyl(X) 语义上对所有 $\exists^{-\emptyset} x.\ \varphi$ X 均有 ,X 。

$(\varphi^{\vee} = \forall^{\pm\mathrm{W}} x.\varphi)$ $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \forall^{\pm\mathrm{W}} x.\varphi$ 语义。⇔ $\mathfrak{A}$, 扩展$[\![^{\pm\mathrm{W}}]\!](\mathfrak{X}, x) \models^{\forall\exists} \varphi$ 归纳超团队。⇔ 对于所有 X $\in$ 扩展$[\![^{\pm\mathrm{W}}]\!](\mathfrak{X}, x)$， 均有 $\mathfrak{A}, \mathrm{X} \models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi$ 定义。⇔ 对于所有 X $\in \mathfrak{X}$ 和 F $\in \mathrm{Fnc}[\![^{\pm\mathrm{W}}]\!]$， 均有 $\mathfrak{A}$, 扩展(X, F x) $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \varphi$ ^{DIF}-语义。⇔ 对于所有 X $\in \mathfrak{X}$， 均有 $\mathfrak{A}$, X $\models^{\exists}_{\mathrm{DIF}} \forall^{\pm\mathrm{W}} x.\ \varphi$. □

附录 C. 第 4 节的证明

引理 11（广义空超团队与零超团队）。对于每个 META-ADIF 公式 φ、函数赋值 $\mathfrak{F} \in$FAsg 和超团队 $\mathfrak{X} \in$ HAsg$\subseteq$(sup(φ) \dom($\mathfrak{F}$))，以下结论均成立。

1) *a)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \emptyset \not\models^{\exists\forall} \varphi$; *b)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$, *where* $\emptyset \in \mathfrak{X}$;

2) *a)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \emptyset \models^{\forall\exists} \varphi$; *b)* $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \not\models^{\forall\exists} \varphi$, *where* $\emptyset \in \mathfrak{X}$.

证明。 我们对 φ 的大小进行结构归纳。对于涉及两个二元布尔联结词和两个标准量词的四种归纳情形，回顾一下以下事实是有益的：由于命题1，$\overline{\emptyset} = \{\emptyset\}$ 并且$\overline{\mathfrak{X}} = \emptyset$ 当且仅当 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。

- [基例 $\varphi = \bot$] 条目 1 的两个子条目直接由元变体 – $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \bot$ 当且仅当 $\emptyset \in \mathfrak{X}$ – 条目 1a 的定义 2即可推出。类似地，条目 2由变体 – $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \bot$ 当且仅当 $\mathfrak{X} = \emptyset$ – 同一定义中条目 1b 即可推出。

- [基例 $\varphi = \top$] 条目 2 的两个子条目直接由元变体 – $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \top$ 当且仅当 $\emptyset \notin \mathfrak{X}$ – 条目 2a 的定义 2即可推出。类似地，条目 1由变体 – $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \top$ 当且仅当 $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ – 同一定义中条目 2b 即可推出。

- [基例 $\varphi = R(\vec{\ }\boldsymbol{x})$] 通过观察 $\mathsf{ext}(\emptyset, \mathfrak{F}) = \emptyset$ 以及 $\emptyset \in \mathfrak{X}$ 当且仅当 $\mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$，不难看出，定义 6 的 3a 和 3b 条目分别直接推出了条目 1 和 2。

- [归纳情形 $\varphi = \neg\phi$] 条目 1a（分别对应条目 1b、条目 2a 和条目 2b）由定义 2 的条目 4 的元变体—— $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \neg\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \not\models^{\overline{\alpha}} \phi$ ——以及将归纳假设中的条目 2a（分别对应条目 2b、条目 1a 和条目 1b）应用于 ϕ 得出。

- [归纳情形 $\varphi = \phi_1 \wedge \phi_2$] 条目 2a 和 2b 分别通过定义 2 的条目 5b 的元变体—— $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi_1 \wedge \phi_2$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \phi_1 \wedge \phi_2$ ——直接推出条目 1b 和 1a。因此，我们可以专注于后两项。

  – [条目 1a] 根据定义 2 的条目 5a 的元变体，有$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \emptyset \not\models^{\exists\forall} \varphi$ 当且仅当存在一个划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\emptyset)$，使得$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}_1 \not\models^{\exists\forall} \phi_1$ 且 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}_2 \not\models^{\exists\forall} \phi_2$。现在，将归纳假设应用于 ϕ_1 和 ϕ_2，可得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \emptyset \not\models^{\exists\forall} \phi_1$ 且 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \emptyset \not\models^{\exists\forall} \phi_2$。此外，$(\emptyset, \emptyset) \in \mathsf{par}(\emptyset)$。因此，命题显然成立。

  – [条目 1b] 根据定义 2 的条目 5a 的元变体，有$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 当且仅当对于所有划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X})$，均有$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \phi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall} \phi_2$，其中 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。现在，将归纳假设应用于 ϕ_1和 ϕ_2，可得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \phi_1$ 和$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \phi_2$，对于每个满足 $\emptyset \in \mathfrak{X}'$的超团队 $\mathfrak{X}'$ 均如此。此外，对于每个划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X})$，可以观察到 $\emptyset \in \mathfrak{X}_1$ 或$\emptyset \in \mathfrak{X}_2$。因此，命题显然成立。

- [归纳情形 $\varphi = \phi_1 \vee \phi_2$] 条目 1a 和 1b 可直接由条目 2b和 2a分别通过元变体 – $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi_1 \vee \phi_2$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \phi_1 \vee \phi_2$ – 得出，该元变体来自定义 2 的条目 6a。因此，我们可以聚焦于后两个条目。

  – [条目 2a] 根据定义 2 的条目 6b 的元变体，有$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\emptyset \models^{\forall\exists} \varphi$ 当且仅当存在一个划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\emptyset)$，使得$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X}_1 \models^{\forall\exists} \phi_1$ 以及 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X}_2 \models^{\forall\exists} \phi_2$。现在，将归纳假设应用于 ϕ_1 和 ϕ_2，可得 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\emptyset \models^{\forall\exists} \phi_1$ 以及 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\emptyset \models^{\forall\exists} \phi_2$。此外，$(\emptyset, \emptyset) \in \mathsf{par}(\emptyset)$。因此，命题显然成立。

  – [条目 2b] 根据定义 2 的条目 6b 的元变体，有$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \not\models^{\forall\exists} \varphi$ 当且仅当对于所有划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X})$，都有$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}_1 \not\models^{\forall\exists} \phi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}_2 \not\models^{\forall\exists} \phi_2$，其中 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。现在，将归纳假设应用于 ϕ_1 和 ϕ_2，可得对于每个满足 $\emptyset \in \mathfrak{X}'$的超团队 $\mathfrak{X}'$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \not\models^{\forall\exists} \phi_1$ 且$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \not\models^{\forall\exists} \phi_2$。此外，

对于所有划分 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X})$，可以观察到 $\emptyset \in \mathfrak{X}_1$ 或$\emptyset \in \mathfrak{X}_2$。因此，命题显然成立。

- [归纳情形 $\varphi = \exists^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$] 条目 2a 和 2b 直接分别通过元变体 – $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{F}$， $\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \exists^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{F}$， $\overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \exists^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$ – 由定义 2 的条目 7b得出。因此，我们可以专注于后两项。

  – [条目 1a] 根据定义 2 的条目 7a 的元变体，有$\mathfrak{A}$、 $\mathfrak{F}$、 $\emptyset \not\models^{\exists\forall} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$、 $\mathfrak{F}$、$\mathsf{ext}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}(\emptyset, x) \not\models^{\exists\forall} \phi$。现在，根据关于 ϕ 的归纳假设，可得 $\mathfrak{A}$、 $\mathfrak{F}$、 $\emptyset \not\models^{\exists\forall} \phi$。此外，$\mathsf{ext}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}(\emptyset, x) = \emptyset$。因此，命题显然成立。– [条目 1b] 根据定义 2 的条目 7a 的元变体，有$\mathfrak{A}$、 $\mathfrak{F}$、 $\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$、 $\mathfrak{F}$、$\mathsf{ext}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}(\mathfrak{X}, x) \models^{\exists\forall} \phi$，其中 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。现在，根据关于 ϕ 的归纳假设，可得 $\mathfrak{A}$、 $\mathfrak{F}$、 $\mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \phi$，对于每个满足 $\emptyset \in \mathfrak{X}'$ 的超团队 $\mathfrak{X}'$。此外，$\emptyset \in \mathsf{ext}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}(\mathfrak{X}, x)$。因此，命题显然成立。

- [归纳情形 $\varphi = \forall^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$] 条目 1a 和 1b 分别可由条目 2b和 2a通过元变体 – $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{F}$， $\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \forall^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{F}$， $\overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \forall^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$ – 条目 8a 定义 2直接推出。因此，我们可以专注于后两项。

  – [条目 2a] 根据定义 2 的条目 8b 的元变体，有$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \emptyset \models^{\forall\exists} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathsf{ext}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}(\emptyset, x) \models^{\forall\exists} \phi$。现在，根据关于 ϕ 的归纳假设，可得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \emptyset \models^{\forall\exists} \phi$。此外，$\mathsf{ext}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}(\emptyset, x) = \emptyset$。因此，命题显然成立。– [条目 2b] 根据定义 2 的条目 8b 的元变体，有$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \not\models^{\forall\exists} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathsf{ext}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}(\mathfrak{X}, x) \not\models^{\forall\exists} \phi$，其中 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。现在，根据关于 ϕ 的归纳假设，对于每个满足 $\emptyset \in \mathfrak{X}'$ 的超团队 $\mathfrak{X}'$，可得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \not\models^{\forall\exists} \phi$。此外，$\emptyset \in \mathsf{ext}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}(\mathfrak{X}, x)$。因此，命题显然成立。

- [归纳情形 $\varphi = \Sigma^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$] 由于存在元量词的语义不依赖于交替标志 α，我们将满足（分别地，不满足）的两种情形一并考虑。

  – [条目 1a 和 2b] 根据定义 6 的条目 9，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \not\models^{\alpha} \Sigma^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$ 当且仅当对所有函数 $\mathsf{F} \in \mathsf{Fnc}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}], \mathfrak{X} \not\models^{\alpha} \phi$。现在，根据关于 ϕ 的归纳假设可得$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}', \mathfrak{X} \not\models^{\alpha} \phi$，对每个函数赋值 $\mathfrak{F}'$ 都成立，其中或者 $\alpha = \exists\forall$ 且$\mathfrak{X} = \emptyset$，或者 $\alpha = \forall\exists$ 且 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。因此，命题显然成立。

  – [条目 1b 和 2a] 根据条目 9 的定义 6，可知 $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{F}$， $\mathfrak{X} \models^{\alpha} \Sigma^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$ 当且仅当 存在一个函数 $\mathsf{F} \in \mathsf{Fnc}_{\mathbb{I}^{\pm \mathrm{W}}\mathbb{I}}$ 使得 $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}]$， $\mathfrak{X} \models^{\alpha} \phi$。现在，根据关于 ϕ的归纳假设，可推出

$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}'$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \phi$，对于每个函数赋值 $\mathfrak{F}'$，其中或者 $\alpha = \forall\exists$ 和 $\mathfrak{X} = \emptyset$，或者 $\alpha = \exists\forall$ 和 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。因此，命题显然成立。

- [归纳情形 $\varphi = \Pi^{\pm \mathrm{W}} x.\, \phi$] 由于全称元量词的语义不依赖于交替标志 α，我们将满足（分别地，不满足）这两种情形一并考虑。

  – [条目 1a 和 2b] 根据定义 6 的第10项，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \not\models^{\alpha} \Pi^{\pm \mathrm{W}} x.\, \phi$ 当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}^{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$，使得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathfrak{X} \not\models^{\alpha} \phi$。现在，根据关于 ϕ 的归纳假设，可知 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}', \mathfrak{X} \not\models^{\alpha} \phi$，对于每个函数赋值 $\mathfrak{F}'$，其中或者 $\alpha = \exists\forall$ 且 $\mathfrak{X} = \emptyset$，或者 $\alpha = \forall\exists$ 且 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。因此，命题显然成立。– [条目 1b 和 2a] 根据定义 6 的第10项，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \Pi^{\pm \mathrm{W}} x.\, \phi$ 当且仅当对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}^{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathfrak{X} \models^{\alpha} \phi$。现在，根据关于 ϕ 的归纳假设，可知 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}', \mathfrak{X} \models^{\alpha} \phi$，对于每个函数赋值 $\mathfrak{F}'$，其中或者 $\alpha = \forall\exists$ 且 $\mathfrak{X} = \emptyset$，或者 $\alpha = \exists\forall$ 且 $\emptyset \in \mathfrak{X}$。因此，命题显然成立。 □

引理 12（扩展单调性）。对于所有变量集 W ⊆变量集合、函数赋值 $\mathfrak{F} \in \mathrm{FAsg}$ 以及超团队 $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \in \mathrm{HAsg}$，其中 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{W}} \mathfrak{X}_2$ 且 $\mathfrak{F}(x) \in \mathrm{Fnc}_{\mathrm{W}}$，对于所有 $x \in \mathrm{dom}(\mathfrak{F}) \cap \mathrm{W}$，都有 $\mathrm{ext}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{F}) \sqsubseteq_{\mathrm{W}} \mathrm{ext}(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{F})$。

证明。令 $\mathrm{X}_1 \in \mathrm{ext}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{F})\restriction_{\mathrm{W}}$。我们证明存在 $\mathrm{X}_2 \in \mathrm{ext}(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{F})\restriction_{\mathrm{W}}$，使得 $\mathrm{X}_2 \subseteq \mathrm{X}_1$。由 $\mathrm{X}_1 \in \mathrm{ext}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{F})\restriction_{\mathrm{W}}$，可知 $\mathrm{X}_1 = \mathrm{ext}\left(\mathrm{X}_1', \mathfrak{F}\right)\restriction_{\mathrm{W}}$ 对某个 $\mathrm{X}_1' \in \mathfrak{X}_1$ 成立。根据 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{W}} \mathfrak{X}_2$，存在 $\mathrm{X}_2' \in \mathfrak{X}_2$，使得 $\mathrm{X}_2'\restriction_{\mathrm{W}} \subseteq \mathrm{X}_1'\restriction_{\mathrm{W}}$。因此，$\mathrm{ext}\left(\mathrm{X}_2', \mathfrak{F}\right)\restriction_{\mathrm{W}} \in \mathrm{ext}(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{F})\restriction_{\mathrm{W}}$。由 $\mathrm{X}_2'\restriction_{\mathrm{W}} \subseteq \mathrm{X}_1'\restriction_{\mathrm{W}}$ 以及以下事实：$\mathfrak{F}(x) \in \mathrm{Fnc}_{\mathrm{W}}$ 对于所有 $x \in \mathrm{dom}(\mathfrak{F}) \cap \mathrm{W}$ 都成立，可推出 $\mathrm{ext}\left(\mathrm{X}_2', \mathfrak{F}\right)\restriction_{\mathrm{W}} \sqsubseteq \mathrm{ext}\left(\mathrm{X}_1', \mathfrak{F}\right)\restriction_{\mathrm{W}} = \mathrm{X}_1$。因此命题得证。 □

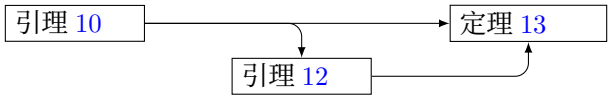


图 C.8：定理 13的依赖图。

定理 13（广义超团队细化）。对于每个 META-ADIF 公式 φ、函数赋值 $\mathfrak{F} \in \mathrm{FAsg}$、函数 $\iota\colon \mathrm{dom}(\iota) \to 2^{\mathrm{Vr}}$，其中 $\mathrm{dom}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathrm{dom}(\iota)$，以及超团队 $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}' \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\sup(\varphi) \setminus \mathrm{dom}(\mathfrak{F}))$，其中 $\mathfrak{F}(x) \in \mathrm{Fnc}^{\iota(x)}$，对所有 $x \in \mathrm{dom}(\mathfrak{F})$，以及 $\mathfrak{X} \sqsubseteq_{\mathsf{free}(\varphi), \iota)} \mathfrak{X}'$，以下结论均成立：

1) if $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ *then* $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$*;*

2) 如果 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$，那么 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。

证明。由于 $\mathfrak{X} \sqsubseteq_{\mathsf{free}(\varphi,\iota)} \mathfrak{X}'$，存在一个函数 $f\colon \mathfrak{X}\restriction_{\mathsf{free}(\varphi,\iota)} \to \mathfrak{X}'\restriction_{\mathsf{free}(\varphi,\iota)}$，使得对于每个 $\in \mathfrak{X}\restriction_{\mathsf{free}(\varphi,\iota)}$，$f(X) \subseteq X$。该断言通过对公式结构和交替标志 α 进行归纳法得证。

- 若 $\varphi = \bot$，则 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 蕴含 $\emptyset \in \mathfrak{X}$，这意味着 $\emptyset \in \mathfrak{X}\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota)$。根据 $\mathfrak{X} \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathfrak{X}'$，我们有 $\emptyset \in \mathfrak{X}'\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota)$。因此，$\emptyset \in \mathfrak{X}'$，这相当于$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$。另一方面，我们还有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ 蕴含 $\mathfrak{X}' = \emptyset$，这意味着 $\mathfrak{X}'\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota) = \emptyset$。根据 $\mathfrak{X} \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathfrak{X}'$，我们有 $\mathfrak{X}\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota) = \emptyset$。因此，$\mathfrak{X} = \emptyset$，这相当于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。

- 若 $\varphi = \top$，则 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 蕴含 $\mathfrak{X} \neq \emptyset$，这意味着 $\mathfrak{X}\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota) \neq \emptyset$。根据 $\mathfrak{X} \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathfrak{X}'$，我们有 $\mathfrak{X}'\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota) \neq \emptyset$。因此，$\mathfrak{X}' \neq \emptyset$，这相当于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$。另一方面，我们还有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ 蕴含 $\emptyset \notin \mathfrak{X}'$，这意味着 $\emptyset \notin \mathfrak{X}'\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota)$。根据 $\mathfrak{X} \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathfrak{X}'$，我们有 $\emptyset \notin \mathfrak{X}\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota)$。因此，$\emptyset \notin \mathfrak{X}$，这相当于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。

- 若 $\varphi = \mathrm{R}(\vec{\mathrm{x}})$，则 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 蕴含存在一个团队 $X \in \mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$，使得对于所有赋值 $\chi \in X$，都有 $\vec{\mathrm{x}}^{\chi} \in \mathrm{R}^{\mathfrak{A}}$成立。根据 $\mathfrak{X} \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathfrak{X}'$ 和引理 12（注意，对于所有$x \in \mathsf{dom}(\mathfrak{F}) \cap \mathsf{free}(\varphi, \iota)$，$\iota(x) \subseteq \mathsf{free}(\varphi, \iota)$），我们有 $\mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}) \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathsf{ext}(\mathfrak{X}', \mathfrak{F})$，因此存在一个团队 $X' \in \mathsf{ext}(\mathfrak{X}', \mathfrak{F})$，使得 $X'\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota) \subseteq X\restriction\vec{\mathrm{x}}$，这蕴含 $X'\restriction\vec{\mathrm{x}} \subseteq X\restriction\vec{\mathrm{x}}$，因为 $\vec{\mathrm{x}} \subseteq \mathsf{free}(\varphi, \iota)$。命题由以下事实得出：对于每个赋值 $\chi \in \mathsf{Asg}$，$\vec{\mathrm{x}}^{\chi} \in \mathrm{R}^{\mathfrak{A}}$ 当且仅当 $\vec{\mathrm{x}}^{\chi\restriction\vec{\mathrm{x}}} \in \mathrm{R}^{\mathfrak{A}}$ 成立。另一方面，我们还有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ 蕴含对于所有团队 $X' \in \mathsf{ext}(\mathfrak{X}', \mathfrak{F})$，存在一个赋值 $\chi' \in X'$ 使得$\vec{\mathrm{x}}^{\chi'} \in \mathrm{R}^{\mathfrak{A}}$。根据 $\mathfrak{X} \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathfrak{X}'$和引理 12，我们有 $\mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}) \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathsf{ext}(\mathfrak{X}', \mathfrak{F})$，因此对于每个团队 $X \in \mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$，存在一个团队 $X' \in\mathsf{ext}(\mathfrak{X}', \mathfrak{F})$，使得 $X'\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota) \subseteq X\restriction\mathsf{free}(\varphi,\iota)$。命题由上述相同的论证得出。

- 如果 $\varphi = \neg\phi$，那么 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 蕴含 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \not\models^{\forall\exists} \phi$。根据归纳假设，这意味着 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X}' \not\models^{\forall\exists} \phi$，也即 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$。另一方面，我们还有 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ 蕴含 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X}' \not\models^{\exists\forall} \phi$。根据归纳假设，这意味着 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \not\models^{\exists\forall} \phi$，也即$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。

- 令 $\varphi = \phi_1 \wedge \phi_2$。我们假设 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$，并证明对于所有 $(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X}')$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}'_1 \models^{\exists\forall} \phi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}'_2 \models^{\exists\forall} \phi_2$ 成立。为此，令 $(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X}')$。根据引理10的第3项，存在 $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathfrak{X}'_1$ 且$\mathfrak{X}_2 \sqsubseteq\mathsf{free}(\varphi,\iota) \mathfrak{X}'_2$；并且根据 $\wedge$ 的语义，我们有：$(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \in \mathsf{par}(\mathfrak{X})$ 蕴含 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}_1 \models^{\exists\forall} \phi_1$ 或 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}_2 \models^{\exists\forall}$

ϕ_2。此外，由于 $\mathrm{free}(\phi_1,\iota) \subseteq \mathrm{free}(\varphi,\iota)$ 且 $\mathrm{free}(\phi_2,\iota) \subseteq \mathrm{free}(\varphi,\iota)$，我们有 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\phi_1,\iota)} \mathfrak{X}'_1$ 以及 $\mathfrak{X}_2 \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\phi_2,\iota)} \mathfrak{X}'_2$。最后，根据归纳假设，$\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}'_1 \models^{\exists\forall} \phi_1$ 或 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}'_2 \models^{\exists\forall} \phi_2$成立。

另一方面，我们还有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ 当且仅当$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}'} \models^{\exists\forall} \varphi$。根据归纳假设和引理 10、条目 1，这意味着 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \varphi$，也就是说 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。

- 令 $\varphi = \phi_1 \vee \phi_2$。在这种情况下，我们首先证明该断言的第二个条目。假设 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$，我们证明存在 $(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}_1 \models^{\forall\exists} \phi_1$ 以及 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}_2 \models^{\forall\exists} \phi_2$。根据 $\vee$ 的语义，存在 $(\mathfrak{X}'_1,\mathfrak{X}'_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X}')$，使得 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}'_1 \models^{\forall\exists} \phi_1$ 以及$\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}'_2 \models^{\forall\exists} \phi_2$。根据引理10，条目3，存在 $(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2) \in \mathrm{par}(\mathfrak{X})$，使得$\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\varphi,\iota)} \mathfrak{X}'_1$ 并且 $\mathfrak{X}_2 \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\varphi,\iota)} \mathfrak{X}'_2$。此外，由于 $\mathrm{free}(\phi_1,\iota) \subseteq \mathrm{free}(\varphi,\iota)$ 且 $\mathrm{free}(\phi_2,\iota) \subseteq \mathrm{free}(\varphi,\iota)$，我们有 $\mathfrak{X}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\phi_1,\iota)} \mathfrak{X}'_1$ 以及 $\mathfrak{X}_2 \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\phi_2,\iota)} \mathfrak{X}'_2$。最后，根据归纳假设，有 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}_1 \models^{\forall\exists} \phi_1$ 以及$\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}_2 \models^{\forall\exists} \phi_2$ 成立。

另一方面，我们还有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 当且仅当$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \varphi$。根据归纳假设和引理10、条目1，这意味着 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}'} \models^{\forall\exists} \varphi$，这相当于 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$。

- 若 $\varphi = \exists^{\pm}\mathrm{W}x.\,\phi$，则 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 蕴含 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X},x) \models^{\exists\forall} \phi$。若 $x \in \mathrm{free}(\phi,\iota[x \mapsto \emptyset])$，则 $[\![\pm\mathrm{W}]\!] \subseteq \mathrm{free}(\varphi,\iota)$，因此，根据引理 10、条目 2b，我们有 $\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X},x) \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\varphi,\iota)\cup\{x\}} \mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}',x)$。由于 $\mathrm{free}(\phi,\iota[x \mapsto \emptyset]) \subseteq \mathrm{free}(\varphi,\iota) \cup \{x\}$，我们有 $\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X},x) \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\phi,\iota[x\mapsto\emptyset])} \mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}',x)$。根据归纳假设，可得 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}',x) \models^{\exists\forall} \phi$，这相当于 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$。反之，若 $x \notin \mathrm{free}(\phi,\iota[x \mapsto \emptyset])$，则 $\mathrm{free}(\varphi,\iota) = \mathrm{free}(\phi,\iota[x \mapsto \emptyset])$，这意味着 $x \notin \mathrm{free}(\varphi,\iota)$。根据引理 10、条目 2a，我们有 $\mathfrak{X} = \mathrm{free}(\varphi,\iota) \mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X},x)$，且 $\mathfrak{X}' = \mathrm{free}(\varphi,\iota) \mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}',x)$，这意味着 $\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X},x) \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\phi,\iota[x\mapsto\emptyset])} \mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}',x)$，因为 $\mathrm{free}(\varphi,\iota) = \mathrm{free}(\phi,\iota[x \mapsto \emptyset])$。根据归纳假设，有 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}',x) \models^{\exists\forall} \phi$，这相当于 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$。

另一方面，根据语义，我们也有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}'} \models^{\exists\forall} \varphi$。根据归纳假设和引理10，条目1，这意味着 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \varphi$，这相当于 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。

- 若 $\varphi = \forall^{\pm}\mathrm{W}x.\,\phi$，则 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ 蕴含 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}',x) \models^{\forall\exists} \phi$。若 $x \in \mathrm{free}(\phi,\iota[x \mapsto \emptyset])$，则 $[\![\pm\mathrm{W}]\!] \subseteq \mathrm{free}(\varphi,\iota)$，因此根据引理10、条目 2b，我们有 $\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X},x) \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\varphi,\iota)\cup\{x\}} \mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}',x)$。由于 $\mathrm{free}(\phi,\iota[x \mapsto \emptyset]) \subseteq \mathrm{free}(\varphi,\iota) \cup \{x\}$，我们有 $\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X},x) \sqsubseteq_{\mathrm{free}(\phi,\iota[x\mapsto\emptyset])} \mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}',x)$。由归纳假设可得 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathrm{ext}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X},x) \models^{\forall\exists} \phi$，这相当于 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。反之，若 $x \notin \mathrm{free}(\phi,\iota[x \mapsto \emptyset])$，则 $\mathrm{free}(\varphi,\iota) = \mathrm{free}(\phi,\iota[x \mapsto \emptyset])$，这意味着 $x \notin \mathrm{free}(\varphi,\iota)$。根据引理 10 、条目 2a，

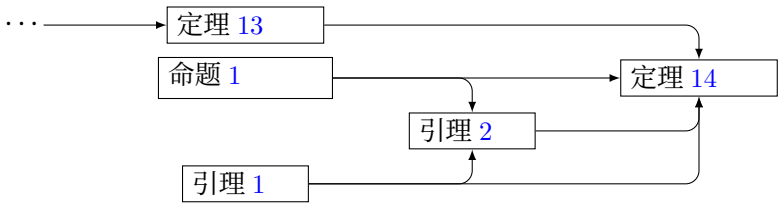
我们有 $\mathfrak{X} =_{\mathsf{free}(\varphi,\iota)} \mathrm{ext}^{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}, x)$ 以及 $\mathfrak{X}' =_{\mathsf{free}(\varphi,\iota)} \mathrm{ext}^{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}', x)$，这意味着 $\mathrm{ext}^{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}, x) \sqsubseteq_{\mathsf{free}(\phi,\iota[x\mapsto\emptyset])} \mathrm{ext}^{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}', x)$，因为 $\mathsf{free}(\varphi, \iota) = \mathsf{free}(\phi, \iota[x \mapsto \emptyset])$。根据归纳假设，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}^{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}, x) \models^{\forall\exists} \phi$，这相当于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。

另一方面，根据语义，我们还可以得到 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \varphi$。根据归纳假设和引理 10、条目 1，这意味着 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}'} \models^{\forall\exists} \varphi$，这相当于 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$。

- 如果 $\varphi = \Sigma^{\pm\mathrm{W}} x.\, \phi$，那么 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 意味着 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}]$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi$，其中某个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}$。根据归纳假设，我们有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}]$，$\mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \phi$，由此可得 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$。
  另一方面，我们还可以得到 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ 意味着 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}]$，$\mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \phi$，其中某个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}^{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}$。根据归纳假设，我们有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}]$，$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi$，由此可得 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。
- 最后，令 $\varphi = \Pi^{\pm\mathrm{W}} x.\, \phi$。那么，对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$ 蕴含 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi$。根据归纳假设，对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \phi$ 成立，这相当于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\exists\forall} \varphi$。

  另一方面，我们还有，对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}^{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \varphi$ 蕴含 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathfrak{X}' \models^{\forall\exists} \phi$。根据归纳假设，对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}^{[\![\pm\mathrm{W}]\!]}$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi$ 成立，这相当于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$。

□



图C.9：定理 14的依赖图。

定理 14（广义双重对偶化）。对于任意 ADIF 公式 φ、函数赋值 $\mathfrak{F} \in \mathrm{FAsg}$ 以及超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}(\mathrm{sup}(\varphi) \setminus \mathrm{dom}(\mathfrak{F}))$，都有 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\alpha} \varphi$。此外，如果 $\mathfrak{F}$ 是无环的，那么还满足 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \varphi$。

证明。事实是，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\overline{\mathfrak{A}}$，$\mathfrak{F}$，$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\alpha} \varphi$ 立即可由 $\mathfrak{X} \equiv_{\mathsf{free}(\varphi,\iota)} \overline{\mathfrak{X}}$ 得出：对于每个函数 $\iota \in \mathrm{Vr} \rightharpoonup 2^{\mathrm{Vr}}$（引理 1）以及定理 13。

现在我们转而证明 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \varphi$。作为初步结果，请注意，如果 $\mathfrak{F}$ 是无环的，那么对于每个 $\mathbf{X} \in \mathsf{Asg}(\mathbf{U})$，其中某个 $\mathbf{U} \subseteq \mathsf{Vr}$，存在一个从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathsf{ext}(\mathbf{X}, \mathfrak{F})$ 的双射 τ，满足 $\tau(\chi)\restriction_{\mathbf{U}} = \chi$。因此，$\mathsf{ext}(\overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{F}) = \mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$成立。证明通过对公式的语法进行分类讨论完成。

- If $\varphi = \bot$, then we have:
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \emptyset \in \mathfrak{X} \overset{\text{Prop. 1}}{\Leftrightarrow} \overline{\mathfrak{X}} = \emptyset \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \varphi$, and
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{X} = \emptyset \overset{\text{Prop. 1}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{X} \equiv \emptyset \overset{\text{Lemma 1}}{\Leftrightarrow} \overline{\overline{\mathfrak{X}}} \equiv \emptyset \overset{\text{Prop. 1}}{\Leftrightarrow} \overline{\overline{\mathfrak{X}}} = \emptyset \overset{\text{Prop. 1}}{\Leftrightarrow} \emptyset \in \overline{\mathfrak{X}} \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \varphi$.
- 若 $\varphi = \top$，则有：
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{X} \neq \emptyset \overset{\text{Prop. 1}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{X} \not\equiv \emptyset \overset{\text{Lemma 1}}{\Leftrightarrow} \overline{\overline{\mathfrak{X}}} \not\equiv \emptyset \overset{\text{Prop. 1}}{\Leftrightarrow} \overline{\overline{\mathfrak{X}}} \neq \emptyset \overset{\text{Prop. 1}}{\Leftrightarrow} \emptyset \notin \overline{\mathfrak{X}} \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \varphi$, and
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \emptyset \notin \mathfrak{X} \overset{\text{Prop. 1}}{\Leftrightarrow} \overline{\mathfrak{X}} \neq \emptyset \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \varphi$.
- 若 $\varphi = R(\vec{x})$，则该结论由语义、引理 2、条目 1以及 $\mathsf{ext}(\overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{F}) = \mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$。
- 若 $\varphi = \neg\psi$ $\psi \Leftrightarrow \mathfrak{A}\ \mathfrak{F}\ \overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \varphi$ $\mathfrak{A}\ \mathfrak{F}\ \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}\ \mathfrak{F}\ \mathfrak{X} \not\models^{\overline{\alpha}} \psi \Leftrightarrow \mathfrak{A}\ \mathfrak{F}\ \overline{\mathfrak{X}} \not\models^{\alpha}$，则有：，，语义。，，独立假设。，，语义。，，.
- 若 $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$，则有：
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\overline{\mathfrak{X}}} \models^{\exists\forall} \varphi \overset{\text{Thm. 14 (part 1)}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$, and
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \varphi$.
- 若 $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$，则有：
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \varphi$, and
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\overline{\mathfrak{X}}} \models^{\forall\exists} \varphi \overset{\text{Thm. 14 (part 1)}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$.
- 若 $\varphi = \exists^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$，则有：
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\overline{\mathfrak{X}}} \models^{\exists\forall} \varphi \overset{\text{Thm. 14 (part 1)}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi$, and
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \varphi$.
- 如果 $\varphi = \forall^{\pm \mathrm{w}} x.\, \phi$，那么我们有：
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\forall\exists} \varphi$;
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\exists\forall} \varphi \overset{\text{sem.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\overline{\mathfrak{X}}} \models^{\forall\exists} \varphi \overset{\text{Thm. 14 (part 1)}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \varphi$. □

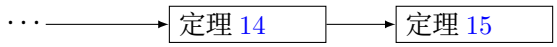


图 C.10：定理 15。

定理 15（广义前缀扩展）。设 $\wp\phi$ 是一个 ADIF 公式，其中 $\wp \in \mathsf{Qn}$ 是一个量词前缀，而 ϕ 是任意的 ADIF 公式。那么，对于所有无环函数赋值 $\mathfrak{F} \in \mathsf{FAsg}$ 和超团队 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}^{\subseteq}(\mathrm{sup}(\wp\phi) \setminus \mathrm{dom}(\mathfrak{F}))$，$\mathfrak{A}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}\,\mathfrak{F}$，$\mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \wp) \models^{\alpha} \phi$。

证明。我们对量化前缀 $\wp \in \mathsf{Qn}$ 的结构进行归纳。

- [基例 $\wp = \varepsilon$] 由于 $\mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \wp) = \mathfrak{X}$，因此实际上没有什么需要证明的，因为该陈述显然为真。
- [归纳情形 $\wp = \mathsf{Q}^{\pm}\mathsf{W}x.\,\wp'$] 我们根据量词 Q 与交替标志的一致性进行分类讨论 α。
  – [Q 是 α一致的] 根据定义 2 的条目 7a 和 8b 的元变体，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\mathbb{T}^{\pm}\mathsf{W}\mathbb{T}}(\mathfrak{X}, x) \models^{\alpha} \wp'\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm}\mathsf{W}x) \models^{\alpha} \wp'\phi$。现在，根据归纳假设，可得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm}\mathsf{W}x) \models^{\alpha} \wp'\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm}\mathsf{W}x)\ \wp') \models^{\alpha} \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \wp) \models^{\alpha} \phi$，从而完成了此情形的证明。– [Q 是 $\overline{\alpha}$一致的] 根据定义 2 的条目 7b 和 8a 的元变体，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \wp\phi$。现在，根据同一定义中条目 7a 和 8b 的元变体，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{X}} \models^{\overline{\alpha}} \wp\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\mathbb{T}^{\pm}\mathsf{W}\mathbb{T}}(\overline{\mathfrak{X}}, x) \models^{\overline{\alpha}} \wp'\phi$。由定理 14 可得，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\mathbb{T}^{\pm}\mathsf{W}\mathbb{T}}(\overline{\mathfrak{X}}, x) \models^{\overline{\alpha}} \wp'\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\mathbb{T}^{\pm}\mathsf{W}\mathbb{T}}(\overline{\mathfrak{X}}, x) \models^{\alpha} \wp'\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm}\mathsf{W}x) \models^{\alpha} \wp'\phi$。总而言之，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm}\mathsf{W}x) \models^{\alpha} \wp'\phi$。此时，根据归纳假设，可得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \overline{\mathsf{Q}^{\pm}\mathsf{W}x}) \models^{\overline{\alpha}} \wp'\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm}\mathsf{W}x)\ \wp') \models^{\alpha} \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \wp) \models^{\alpha} \phi$，从而也完成了此情形的证明。

□

引理 9（扩展解释）。对于 $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{Vr}$ 上的所有超团队 $\mathfrak{X} \in \mathsf{HAsg}(\mathsf{V})$、$\mathsf{V} \cup \{x\}$ 且满足 $x \in \mathsf{Vr} \setminus \mathsf{V}$ 的性质 $\Psi \subseteq \mathsf{Asg}(\mathsf{V} \cup \{x\})$、变量集 $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{Vr}$ 以及量词符号 $\mathsf{Q} \in \{\exists, \forall\}$，以下四个等价关系成立。

1) 陈述 *1a* 和 *1b* 等价，只要 Q 是 α-相干的：

   a) 存在 $\mathsf{X}' \in \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm\mathsf{W}}x)$，使得 $\mathsf{X}' \subseteq \Psi$；b) 存在 $\mathsf{F} \in \mathsf{Fnc}^{\mathbb{T}^{\pm}\mathsf{W}\mathbb{T}}$ 和 $\mathsf{X} \in \mathfrak{X}$，使得 $\mathrm{ext}(\mathsf{X}, \mathsf{F}\ x) \subseteq \Psi$。

2) 陈述 *2a* 和 *2b* 等价，只要 Q 是 α-相干的：

   a) 对于所有 $\mathsf{X}' \in \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathsf{Q}^{\pm\mathsf{W}}x)$，均有 $\mathsf{X}' \cap \Psi \neq \emptyset$；

b) 对于所有 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$ 和 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，均有 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \cap \Psi \neq \emptyset$。

3) 陈述*3a* 和 *3b* 等价，只要 $\mathtt{Q}$ 是 $\overline{\alpha}$-相干的：

a) 存在 $\mathrm{X}' \in \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x)$，使得 $\mathrm{X}' \subseteq \Psi$；b) 对所有 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$，都有 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \subseteq \Psi$，其中某个 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$。

4) 陈述*4a* 和 *4b* 等价，只要 $\mathtt{Q}$ 是 $\overline{\alpha}$-相干的：

a) 对所有 $\mathrm{X}' \in \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x)$，都有 $\mathrm{X}' \cap \Psi \neq \emptyset$；b) 存在 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$，使得对所有 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，都有 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \cap \Psi \neq \emptyset$。

证明。我们首先一并证明条目 1 和 2，其中 Q 是 α-相干的，然后分别证明其余条目。具体而言，对于最后两项，给定任意函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{\pm \mathrm{W}}$，我们使用辅助记号 $\mathrm{prj}(\Psi, \mathrm{F}\ x) \ \{\chi \in \mathrm{Asg}(\mathrm{V}) \mid \mathrm{ext}(\chi, \mathrm{F}\ x) \in \Psi\}$，它满足以下两个性质；对每个团队 $\mathrm{X} \in \mathrm{TAsg}(\mathrm{V})$：(i) $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \subseteq \Psi$ 当且仅当 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{prj}(\Psi, \mathrm{F}\ x)$；(ii) $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \cap \Psi \neq \emptyset$ 当且仅当 $\mathrm{X} \cap \mathrm{prj}(\Psi, \mathrm{F}\ x) \neq \emptyset$。

- [条目 **1** 和 **2**] 根据扩展函数的定义，当 $\mathtt{Q}$ 是 α-相干的时，我们有

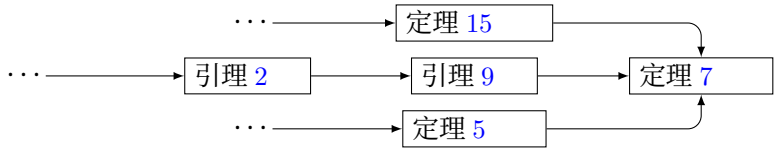
$$\mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathtt{Q}^{\pm \mathrm{W}}x) = \mathrm{ext}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}(\mathfrak{X}, x) = \left\{\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}, x) \,\middle|\, \mathrm{X} \in \mathfrak{X}, \mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}\right\}.$$

因此，对于每个可能的团队 $\mathrm{X}' \in \mathrm{TAsg}(\mathrm{V} \cup \{x\})$，都有 $\mathrm{X}' \in \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x)$ 当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$ 和一个团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，使得 $\mathrm{X}' = \mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x)$。因此，这两个等价关系可立即得到。

- [条目 **3**] 由于 Q 是 $\overline{\alpha}$-相干的，$\mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x) = \overline{\mathrm{ext}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}(\overline{\mathfrak{X}}, x)}$，因此条件 3a 成立当且仅当存在一个团队 $\mathrm{X}' \in \mathrm{ext}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}(\overline{\mathfrak{X}}, x)$，使得 $\mathrm{X}' \subseteq \Psi$。根据引理 2 的条目 1，这当且仅当对于所有团队 $\mathrm{X}' \in \mathrm{ext}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}(\overline{\mathfrak{X}}, x) = \mathrm{ext}_{\alpha}(\overline{\mathfrak{X}}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x)$，都有 $\mathrm{X}' \cap \overline{\Psi} \neq \emptyset$。根据条目 2，后者为真当且仅当对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$ 和团队 $\mathrm{X} \in \overline{\mathfrak{X}}$，都有 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \cap \Psi \neq \emptyset$，因此 $\mathrm{X} \cap \mathrm{prj}(\Psi, \mathrm{F}\ x) \neq \emptyset$。此时，再根据引理 2 的条目 1，对于所有 $\mathrm{X} \in \overline{\mathfrak{X}}$，都有 $\mathrm{X} \cap \mathrm{prj}(\Psi, \mathrm{F}\ x) \neq \emptyset$ 当且仅当存在一个团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，使得 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{prj}(\Psi, \mathrm{F}\ x)$，因此 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \subseteq \Psi$。因此，以下等价关系即可完成证明：对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$ 和团队 $\mathrm{X} \in \overline{\mathfrak{X}}$，都有 $\mathrm{X} \cap \mathrm{prj}(\Psi, \mathrm{F}\ x) \neq \emptyset$ 当且仅当对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$，存在一个团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，使得 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \subseteq \Psi$，这与条件 3b 一致。

- [条目 **4**] 由于 Q 是 $\overline{\alpha}$-相干的，$\mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x) = \mathrm{ext}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}\overline{(\overline{\mathfrak{X}}, x)}$，因此条件 4a 成立，当且仅当对于所有团队 $\mathrm{X}' \in \mathrm{ext}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}(\overline{\mathfrak{X}}, x)$，都有 $\overline{\mathrm{X}' \cap \Psi} \neq \emptyset$。根据引理 2 的条目 1，这当且仅当存在一个团队 $\mathrm{X} \in \mathrm{ext}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}(\overline{\mathfrak{X}}, x) = \mathrm{ext}_{\alpha}(\overline{\mathfrak{X}}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}}x)$ 使得 $\mathrm{X} \subseteq \Psi$。根据条目 1，后者成立，当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{[\![\pm \mathrm{W}]\!]}$ 和一个团队 $\mathrm{X} \in \overline{\mathfrak{X}}$，使得 $\mathrm{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \subseteq \Psi$，因此 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{prj}(\Psi, \mathrm{F}\ x)$。此时，再根据引理 2 的条目 1

，存在一个团队 X $\in \overline{\mathfrak{X}}$ 使得 X $\subseteq$ prj(Ψ, F x)，当且仅当对于所有团队 X $' \in \mathfrak{X}$，都有 X′ ∩ prj(Ψ, F x) $\neq \emptyset$，因此 ext(X′, F x) ∩ Ψ $\neq\emptyset$。因此，以下等价关系完成了证明：存在一个函数 F $\in$ Fnc$\mathbb{[}^{\pm W}\mathbb{]}$ 和一个团队 X $\in \overline{\mathfrak{X}}$，使得 X $\subseteq$ prj(Ψ, F x)，当且仅当存在一个函数 F $\in$ Fnc$\mathbb{[}^{\pm W}\mathbb{]}$，使得对于所有团队 X′ $\in \mathfrak{X}$，都有 ext(X′, F x) ∩ Ψ $\neq \emptyset$，这与条件 4b 相符。 □



图C.11：定理 7的依赖图。

定理 7（量词解释）。对于所有 FOL 公式 ϕ、变量 $x \in$ 变量集合 Vr、变量集 W $\subseteq$ Vr（满足 $x \notin \mathbb{[}\pm W\mathbb{]}$）、定义域为 $\mathfrak{F} \cap \mathbb{[}\pm W\mathbb{]} = \emptyset$ 的无环函数赋值 $\mathfrak{F} \in$ FAsg，以及超团队 $\mathfrak{X} \in$ HAsg$\subseteq$((sup(ϕ) $\setminus \{x\}$) $\setminus$ dom($\mathfrak{F}$))（满足 $x \notin$ vr($\mathfrak{X}$)），以下等价关系成立：

1) $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \exists^{\pm W} x.\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \Sigma^{\pm W} x.\phi$；

2) $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \forall^{\pm W} x.\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \Pi^{\pm W} x.\phi$。

证明。首先，注意到，根据定理 5 到 META-ADIF的推广，以下两个等价关系成立，其中我们定义 $\mathbb{[}\phi\mathbb{]}$，$\{\chi \in$ 赋值$\subseteq$(上确界(ϕ)) $\mid \mathfrak{A}$，$\chi \models_{\text{FOL}} \phi\}$对于每个 FOL 公式 ϕ 和无环函数赋值 $\mathfrak{F} \in$ FAsg：

a) $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi$ 当且仅当存在某个团队 X $\subseteq \mathbb{[}\phi\mathbb{]}$， $\in$ ext($\mathfrak{X}, \mathfrak{F}$)；

b) $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi$ 当且仅当对于所有团队 X $\cap \mathbb{[}\phi\mathbb{]} \neq \emptyset$， $\in$ ext($\mathfrak{X}, \mathfrak{F}$)。

它们分别等价于以下内容：

- $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi$ 当且仅当存在某个团队 X $\mathfrak{F}$， $\subseteq \mathbb{[}\phi\mathbb{]}$ext(X $\in \mathfrak{X}$)；
- $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi$ 当且仅当对于所有团队 X $\mathfrak{F}$， $\cap \mathbb{[}\phi\mathbb{]} \neq \emptyset$ext(X $\in \mathfrak{X}$)。

出于技术便利，给定 $\Psi \subseteq$ 赋值 和 U $\subseteq$ 变量集合，我们引入记号 prj(Ψ, U $\mathfrak{F}$) $\{\chi \in \Psi \mid \forall x \in$ dom($\mathfrak{F}$) $\setminus$ U. $\chi(x) = \mathfrak{F}(x)(\chi)\}\restriction_{\text{U}}$，它对每个团队 X $\in$ TAsg(U) 满足以下两个性质：(i) ext(X $\mathfrak{F}$) $\subseteq \Psi$ 当且仅当 X $\subseteq$ prj(Ψ, U $\mathfrak{F}$)；(ii) ext(X $\mathfrak{F}$) ∩ Ψ $\neq \emptyset$ 当且仅当 X ∩ prj(Ψ, U $\mathfrak{F}$) $\neq \emptyset$。借助这一记号，我们可以将上面的最后两个等价关系改写如下：

- $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi$ 当且仅当 X $\subseteq$ prj($\mathbb{[}\phi\mathbb{]}$, vr(X) $\mathfrak{F}$)，其中某个团队 X $\in \mathfrak{X}$；
- $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi$ 当且仅当 X ∩ prj($\mathbb{[}\phi\mathbb{]}$, vr(X) $\mathfrak{F}$) $\neq \emptyset$，对所有团队 X $\in \mathfrak{X}$。

将定理 $\mathtt{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\,\phi$应用于公式，其中 $\mathtt{Q} \in \{\exists, \forall\}$，再结合我们刚刚推导出的结论，可得到以下两个等价关系：

i) $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\,\phi$ 当且仅当存在一个团队 $\mathrm{X} \in \mathsf{ext}_{\exists\forall}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}} x)$，使得 $\mathrm{X} \subseteq \mathsf{prj}(\llbracket \phi \rrbracket, \mathsf{vr}(\mathrm{X}) \ \mathfrak{F})$；

ii) $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}} x.\,\phi$ 当且仅当，对于所有团队 $\mathrm{X} \in \mathsf{ext}_{\forall\exists}(\mathfrak{X}, \mathrm{Q}^{\pm \mathrm{W}} x)$，都有 $\mathrm{X} \cap \mathsf{prj}(\llbracket \phi \rrbracket, \mathsf{vr}(\mathrm{X}) \ \mathfrak{F}) \neq \emptyset$。

此时，我们根据量词 Q 的类型以及交替标志 α 进行分类讨论。在此过程中，我们利用以下事实：给定 $\mathrm{X} \in \mathrm{TAsg}$，若 $x \notin \mathsf{vr}(\mathrm{X})$，则对于每个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，存在一个函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$；反之，对于每个函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，存在一个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，使得

$$\mathsf{ext}(\mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}, x), \mathfrak{F}) = \mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star]).$$

注意，由于 $\mathfrak{F}$ 是无环的、$x \notin \llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket$，且 $\mathsf{dom}(\mathfrak{F}) \cap \llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket = \emptyset$，因此 $\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star]$ 也是无环的。

- [$\mathrm{Q} = \exists$ & $\alpha = \exists\forall$] 根据等价关系 i) 和引理 9 的条目 1，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall}_{\exists^{\pm}\mathrm{W}} x.\,\phi$ 当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$ 和一个团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，使得 $\mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \subseteq \mathsf{prj}(\llbracket \phi \rrbracket, \mathsf{vr}(\mathrm{X}) \cup \{x\}, \mathfrak{F})$，因此 $\mathsf{ext}(\mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x)\ \mathfrak{F}) \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$。这意味着，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \exists^{\pm}\mathrm{W} x.\,\phi$ 当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$ 和一个团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，使得 $\mathsf{ext}(\mathrm{X}\ \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star]) \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$ 当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，使得对于某个团队 $\mathrm{X} \in$，$\mathrm{X} \subseteq \llbracket \phi \rrbracket\ \mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star])$。根据等价关系 a)，后一个陈述可以改写为：存在一个函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，使得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star], \mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi$；由定义 6 的条目 9，这又等价于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\exists\forall}_{\Sigma^{\pm}\mathrm{W}} x.\,\phi$。至此，$\alpha = \exists\forall$ 的条目 1 得证。

- [$\mathrm{Q} = \exists$ & $\alpha = \forall\exists$] 根据等价关系 ii) 和引理 9 的条目 4，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists}_{\exists^{\pm}\mathrm{W}} x.\,\phi$ 当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，使得对于所有团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，均有 $\mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \cap \mathsf{prj}(\llbracket \phi \rrbracket, \mathsf{vr}(\mathrm{X}) \cup \{x\}, \mathfrak{F}) \neq \emptyset$，从而 $\mathsf{ext}(\mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x)\ \mathfrak{F}) \cap \llbracket \phi \rrbracket \neq \emptyset$。这意味着，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \exists^{\pm}\mathrm{W} x.\,\phi$ 当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，使得对于所有团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$，有 $\mathsf{ext}(\mathrm{X}\ \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star]) \cap \llbracket \phi \rrbracket \neq \emptyset$ 当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，使得 $\mathrm{X} \cap \llbracket \phi \rrbracket \neq \emptyset$，对于所有团队 $\mathrm{X} \in \mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star])$。根据等价关系 b)，后一个陈述可以改写为：存在一个函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$ 使得$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star], \mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi$；根据定义 6 的条目 9，这又等价于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\forall\exists}_{\Sigma^{\pm}\mathrm{W}} x.\,\phi$。这就完成了对 $\alpha = \forall\exists$的条目 1 的证明。

- [$\mathrm{Q} = \forall$ & $\alpha = \exists\forall$] 根据等价关系 i) 和引理 9 的条目 3，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall}_{\forall^{\pm}\mathrm{W}} x.\,\phi$ 当且仅当，对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，存在一个团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x) \subseteq \mathsf{prj}(\llbracket \phi \rrbracket, \mathsf{vr}(\mathrm{X}) \cup \{x\}, \mathfrak{F})$，从而 $\mathsf{ext}(\mathsf{ext}(\mathrm{X}, \mathrm{F}\ x)\ \mathfrak{F}) \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$。这意味着，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall}_{\forall^{\pm}\mathrm{W}} x.\,\phi$ 当且仅当，对于所有函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，存在一个团队 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$ 使得 $\mathsf{ext}(\mathrm{X}\ \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star]) \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$ 当且仅当，对于所有函数 $\mathrm{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，存在某个团队 X，使得 $\mathrm{X} \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$，$\in \mathsf{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}^\star])$。

根据等价关系 a)，后一个陈述可以改写为：对于所有函数$\mathsf{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，都有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}^\star]$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \phi$；根据定义 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\exists\forall} \Pi^{\pm \mathrm{W}} x.\phi$，由于定义 10 的条目 6。这就完成了 2 关于 $\alpha = \exists\forall$ 的证明。

- [$\mathsf{Q} = \forall$ & $\alpha = \forall\exists$] 根据引理 9 的等价关系 ii) 和条目 2，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists}_{\forall^\pm} \mathrm{W} x.\phi$ 当且仅当，对于所有函数 $\mathsf{F} \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$ 和团队 $\mathsf{X} \in \mathfrak{X}$，都有 $\mathrm{ext}(\mathsf{X}, \mathsf{F}\ x) \cap \mathrm{prj}(\llbracket\phi\rrbracket, \mathrm{vr}(\mathfrak{X}) \cup \{x\}, \mathfrak{F}) \neq \emptyset$，因此 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(\mathsf{X}, \mathsf{F}\ x)\ \mathfrak{F}) \cap \llbracket\phi\rrbracket \neq \emptyset$。这意味着，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists}_{\forall^\pm} \mathrm{W} x.\phi$ 当且仅当，对于所有函数 $\mathsf{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$ 和团队 $\mathsf{X} \in \mathfrak{X}$，都有 $\mathrm{ext}(\mathsf{X}\ \mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}^\star]) \cap \llbracket\phi\rrbracket \neq \emptyset$ 当且仅当，对于所有函数 $\mathsf{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，都有 $\mathsf{X} \cap \llbracket\phi\rrbracket \neq \emptyset$，对于所有团队 $\mathsf{X} \in \mathrm{ext}(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}^\star])$。根据等价关系 b)，后一个陈述可以改写为：对于所有函数 $\mathsf{F}^\star \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，都有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}^\star]$，$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \phi$；根据定义 6 的第10项，这又等价于 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\forall\exists} \Pi^{\pm} \mathrm{W} x.\phi$。至此，$\alpha = \forall\exists$的条目 2 证明完毕。 □

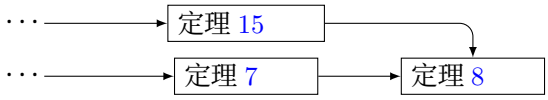


图 C.12：定理 8的依赖图。

定理8（赫布兰德–斯科伦定理）。设 $\wp\phi$ 是一个带有量词前缀 $\wp \in \mathrm{Qn}$ 和 FOL 矩阵 ϕ 的 pnf 公式。那么，对于所有满足 $\mathrm{dom}(\mathfrak{F}) \cap \mathrm{dep}(\wp) = \emptyset$ 的无环函数赋值 $\mathfrak{F} \in \mathrm{FAsg}$，以及满足 $\mathrm{sup}(\wp\phi) \setminus \mathrm{dom}(\mathfrak{F})$ 且 $\mathrm{vr}(\mathfrak{X}) \cap \mathrm{vr}(\wp) = \emptyset$ 的超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}^{\subseteq}$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \mathrm{hsp}(\wp)\,\phi$。

证明。该证明对量词前缀 $\wp \in \mathrm{Qn}$ 进行结构归纳。

- [基例 $\wp = \varepsilon$] 由于 $\mathrm{hsp}(\wp) = \varepsilon$，无需证明，因为该命题显然成立。

- [归纳情形 $\wp = \wp'.\mathsf{Q}^{\pm \mathrm{w}} x$] 根据定理 15，有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \wp') \models^{\alpha} \mathsf{Q}^{\pm \mathrm{w}} x.\phi$。现在需要根据量词类型进行分类讨论。

  - [$\mathsf{Q} = \exists$] 根据定理 7 的条目 1，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathrm{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \wp') \models^{\alpha} \exists^{\pm} \mathrm{W} x.\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathrm{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \wp') \models^{\alpha} \Sigma^{\pm} \mathrm{W} x.\phi$，因为 ϕ 是一个 FOL 公式，且处于 $\wp\phi$ 前束范式中。因此，根据定义 6 的条目 9，我们有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当存在一个函数 $\mathsf{F} \in \mathrm{Fnc}_{\llbracket \pm \mathrm{W} \rrbracket}$，使得 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}], \mathrm{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \wp') \models^{\alpha} \phi$。需注意，由于第 19 页对 Qn 所作的假设以及 $\mathrm{dom}(\mathfrak{F}) \cap \mathrm{dep}(\wp) = \emptyset$这一事实，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}]$ 仍然是无环的。再次根据定理 15，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}], \mathrm{ext}_\alpha(\mathfrak{X}, \wp') \models^{\alpha} \phi$ 等价于 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathsf{F}]$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp'\phi$，

而根据将归纳假设应用于 $\wp'\phi$，这又等价于 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}]$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \mathrm{hsp}(\wp')\,\phi$。综上，我们有 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当存在一个函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}^{\mathbb{I}\pm\mathrm{W}\mathbb{I}}$，使得 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}]$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \mathrm{hsp}(\wp')\ \phi$。此时，再次根据定义 6 的条目 9，我们得到 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \Sigma^{\pm\mathrm{W}} x.\,\mathrm{hsp}(\wp')\ \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{X} \models^{\alpha} \mathrm{hsp}(\wp)\ \phi$，其中后一个等价关系源于 hsp 函数的定义，该定义满足等式 $\mathrm{hsp}(\wp) = \mathrm{hsp}(\wp'.\,\exists^{\pm\mathrm{W}} x) = \Sigma^{\pm\mathrm{W}} x.\,\mathrm{hsp}(\wp')$。这就完成了存在量词情形的证明。

- [$\mathrm{Q} = \forall$] 根据定理 7 的条目 2，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \wp') \models^{\alpha} \forall^{\pm}\mathrm{W}_{x.\,\phi}$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \wp') \models^{\alpha} \Pi^{\pm}\mathrm{W}_{x.\,\phi}$，因为 ϕ 是一个 FOL 公式，且处于前束范式中。因此，根据定义 6 的第10项，我们有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}^{\mathbb{I}\pm\mathrm{W}\mathbb{I}}$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \wp') \models^{\alpha} \phi$。再次注意，$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}]$ 是无环的。根据定理 15，$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathrm{ext}_{\alpha}(\mathfrak{X}, \wp') \models^{\alpha} \phi$ 等价于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp'\phi$；而后者根据应用于 $\wp'\phi$ 的归纳假设，等价于 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathfrak{X} \models^{\alpha} \mathrm{hsp}(\wp')\ \phi$。综上，我们有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当对于所有函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{Fnc}^{\mathbb{I}\pm\mathrm{W}\mathbb{I}}$，都有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{F}], \mathfrak{X} \models^{\alpha} \mathrm{hsp}(\wp')\,\phi$。此时，再根据定义 6 的第10项，我们得到 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \wp\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \Pi^{\pm}\mathrm{W}x.\,\mathrm{hsp}(\wp')\ \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \mathrm{hsp}(\wp)\,\phi$；后一个等价关系源于 hsp 函数的定义，该函数满足等式 $\mathrm{hsp}(\wp) = \mathrm{hsp}(\wp'.\,\forall^{\pm}\mathrm{W}x) = \Pi^{\pm}\mathrm{W}x.\,\mathrm{hsp}(\wp')$。至此，全称量词情形的证明也告完成。 □

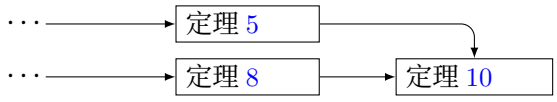


图 C.13：定理 10。

定理 10（ADF-SOL解释）。对于签名 $\mathcal{L}$ 上每个处于前束范式、量词前缀为 $\wp \in \mathrm{Qn}$ 的 ADF 公式 φ，其自由变量集 $\mathsf{free}(\varphi) \subseteq \mathrm{V} \subseteq$ 变量集合满足 $\mathrm{V} \cap \mathsf{vr}(\wp) = \emptyset$，且关系符号 $\mathrm{R} \notin \mathcal{L}$ 满足 $\mathsf{ar}(\mathrm{R}) = |\mathrm{V}| + 1$，存在签名 $\mathcal{L} \uplus \{\mathrm{R}\}$ 上的两个 SOL 句子 $\Phi_{\exists\forall}$ 和 $\Phi_{\forall\exists}$，使得对于所有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 以及满足 $|\mathfrak{X}| \leq |\mathfrak{A}|$的非零超团队 $\mathfrak{X} \in \mathrm{HAsg}(\mathrm{V})$，以下等价关系成立：$\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{A} \uplus \{\mathsf{Rel}(\mathfrak{X})\} \models_{\mathrm{SOL}} \Phi_{\alpha}$。

证明。为简便起见，我们只考虑 ADF 公式的情形；给定变量集 V，从 AIF 公式到 ADF 公式的转换是显然的。首先，考虑一个处于前束形式的公式 $\varphi = \wp\phi$，其中 $\wp$ 是量词前缀，ϕ 是不含量词的矩阵。然后，根据定理8，我们进一步将后者转换为等价的 Meta-ADF 公式 $\mathrm{hsp}(\wp)\,\phi$。显然，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，$\mathrm{hsp}(\wp) = (\mathrm{Q}_i^{+\mathrm{W}_i} x_i)_{i=1}^{k}$，其中 $\mathrm{W}_i \subseteq \mathrm{Vr}$ 且 $\mathrm{Q}_i \in \{\Sigma, \Pi\}$。现在，令 $\widehat{\wp}$，$(\widehat{\mathrm{Q}}_i f_i)_{i=1}^{k}$ 为二阶函数量词前缀，其中 (i) 每个函数符号 f_i 的元数等于其所依赖的变量 x_i 的数量，即 $\mathsf{ar}(f_i) = |\mathrm{W}_i|$；(ii) 每个二阶量词符号 $\widehat{\mathrm{Q}}_i \in \{\exists, \forall\}$

当且仅当一阶量词符号 Q_i 也是存在量词时，它是存在量词。在此$\widehat{\ }$处， SOL 句子 $\Phi_{\exists\forall}$ 和 $\Phi_{\forall\exists}$ 可以定义如下，其中 ϕ 由矩阵 ϕ 得到：将变量 x_i 的每次出现替换为相应的项 $f_i(\vec{\mathsf{w}}_i)$，其中 $\vec{\mathsf{w}}_i$ 是 W_i 中所有变量组成的向量：

1) $\Phi_{\exists\forall} \triangleq \widehat{\wp}.\exists y.\forall \vec{\boldsymbol{x}}.\neg R(\vec{\boldsymbol{x}}y) \vee \widehat{\phi}$;

2) $\Phi_{\forall\exists} \triangleq \widehat{\wp}.\forall y.\exists \vec{\boldsymbol{x}}.R(\vec{\boldsymbol{x}}y) \wedge \widehat{\phi}$.

总之，可以通过对量词前缀 $\wp$ 的长度进行简单归纳来证明该翻译的正确性，其中在基例中，我们利用了定理 5 向 Meta-ADIF的扩展。 □

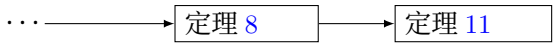


图 C.14：定理 11的依赖图。

定理 11（SOL-ADF解释）。对于任意一个签名 $\mathcal{L}$ 上的 SOL 句子 Φ 、关系符号 $\mathsf{R} \in \mathcal{L}$，以及变量序列 $\vec{\mathsf{x}}$ ∈变量集合$^{\mathsf{ar}(R)}$，都存在一个签名 $\mathcal{L}\setminus\mathsf{R}$ 上的前束范式公式 ADF 公式 φ，使得 $\mathsf{sup}(\varphi) = \mathsf{free}(\varphi) = \vec{\mathsf{x}}$；对于所有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$，以下等价关系成立： $\mathfrak{A} \models_{\text{SOL}} \Phi$当且仅当 $\mathfrak{A}\setminus\mathsf{R}$ $\{\text{团队}(\mathsf{R}^{\mathfrak{A}}, \vec{\mathsf{x}})\} \models^{\exists\forall} \varphi$。

证明。 首先，假设 不失一般性地， （参见 Kontinen和Nurmi （2009）中的证明），SOL句子 Φ 具有如下形式

$$(\mathsf{Q}_i f_i)_{i=1}^{k}.\forall \vec{\boldsymbol{x}}.(R(\vec{\boldsymbol{y}}) \leftrightarrow t_1 = t_2) \wedge \psi,$$

此外，它还满足以下约束：

a) $\mathsf{vr}(\Phi) \cap \mathsf{V} = \emptyset$，即 V 中没有变量出现在 Φ 中；

b) $\vec{\mathsf{y}} \subseteq \vec{\mathsf{x}}$，即，原子公式 $\mathsf{R}(\vec{\mathsf{y}})$ 中使用的变量向量 $\vec{\mathsf{y}}$ 包含于全称量化变量向量 $\vec{\mathsf{x}}$ 中；

c) 每个函数 f_i 仅出现在单个项 $t_{f_i} = f_i(\vec{\mathsf{w}}_i)$ 中；

d) 每个项 t（包括 t_1 和 t_2）均具有 $f_i(\vec{\mathsf{w}})$ 的形式，其中 $i \in [1,k]$ 为某个索引，且 $\vec{\mathsf{w}} \subseteq \vec{\mathsf{x}}$ 为变量向量；

e) 关系 R 未出现在 FOL 公式 ψ 中。

现在，令 $\wp$，$(\widehat{\ }\mathsf{Q}_i^{+\mathsf{W}_i} z_i)_{i=k}^{1}$ 为一阶量词前缀，其中 (i) 依赖变量集合 W_i 与项 t_{f_i} 中使用的变量向量 $\vec{\mathsf{w}}_i$ 相同，该项对应于函数 f_i；(ii) 每个一阶量词符号 $\widehat{\ }\mathsf{Q}_i \in \{\exists,\forall\}$ 是存在量词的，当且仅当二阶量词符号 Q_i 也是存在量词的。注意，量词顺序相对于

$(_i f_i \mathrm{Q})_{i=1}^{k}$ 中的顺序是反向的。此时，公式 ADF φ 可定义如下，其中 (1) ($\vec{}$y = V) 表示一个快捷方式，用于表示 $\vec{}$y 中每个变量与 V 中对应变量之间的等式合取（对应关系与团队编码 $\mathrm{Team}(\mathfrak{R}^{\mathfrak{A}}, \mathrm{V})$ 中使用的对应关系相同）；(2) z_1' 和 z_2' 是分别对应于项 t_1 和 t_2 中所用函数的变量；(3) ψ' 是将 ψ 中每次出现的项 t_{f_i} 替换为对应变量 z_i 后得到的公式 FOL：

$$\varphi \triangleq \forall \vec{x}.\, \wp.\, ((\vec{y} = \mathrm{V}) \leftrightarrow z_1' = z_2') \wedge \psi'.$$

总之，翻译的正确性可以通过首先应用定理8 于 φ，从而得到元ADF 公式

$$\mathsf{hsp}(\wp)\,.\,\forall \vec{x}.\, ((\vec{y} = \mathrm{V}) \leftrightarrow z_1' = z_2') \wedge \psi',$$

然后对量词前缀（$\mathrm{Q}_i f_i$）$_{i=1}^{k}$的长度进行标准归纳即可。

□

附录D。第 5 节的证明

为了证明定理 12，我们首先证明两个附加引理。第一个引理陈述了关于 META-ADIF 的斯科伦化性质。一个处于前束形式、仅包含元量词 Σ 或 Π 的 META-ADIF 句子可以视为一个 SOL 公式。因此，我们可以使用经典的斯科伦结果，为第一个经过存在量词量化的变量 x 定义一个函数 Sk_x：如果 $\mathfrak{F}$ 是在 x 之前被（全称）量化的变量的函数赋值，那么$\mathfrak{F}[x \mapsto \mathrm{Sk}_x(\mathfrak{F})]$ 满足跟随在对 x 进行量化之后的子公式。我们首先需要介绍一些记号。对于量词前缀 $\wp = \mathrm{Q}_0^{\mathrm{W}_0} x_0 \ldots \mathrm{Q}_n^{\mathrm{W}_n} x_n$ 以及量词符号 $\mathrm{Q} \in \{\Sigma, \Pi\}$，变量集合 $\mathrm{vr}_{\mathrm{Q}}(\wp) = \{x_i | \mathrm{Q}_i = \mathrm{Q}\}$ 收集了在 $\wp$ 中使用特定符号 Q 量化的所有变量。对于 $\wp$ 的斯科伦化是一个函数序列 $(\mathrm{Sk}_{x_i} : (\prod_{j<i} \mathrm{Fnc}^{\mathrm{W}_j}) \to \mathrm{Fnc}^{\mathrm{W}_i})_{x_i \in \mathrm{vr}_\Sigma(\wp)}$，其中每个经过存在量词量化的变量 x_i 对应一个函数；这些函数直观上分别将 x_i 之前变量在 $\wp$ 中的解释映射为 x_i 的某个解释。相对于斯科伦化 $(\mathrm{Sk}_{x_i})_{x_i \in \mathrm{vr}_\Sigma(\wp)}$，$\wp$ 的斯科伦扩展是一个函数赋值 $\mathfrak{F}'$，满足：(i) $\mathrm{dom}(\mathfrak{F}') = \mathrm{dom}(\mathfrak{F}) \cup \mathrm{vr}(\wp)$；(ii) $\mathfrak{F}'(x) = \mathfrak{F}(x)$，对于$x \in \mathrm{dom}(\mathfrak{F}) \setminus \mathrm{vr}(\wp)$；以及 (iii) $\mathfrak{F}'(x_i) = \mathrm{Sk}_{x_i}((\mathfrak{F}'(x_j))_{j<i})$，如果 $x_i \in \mathrm{vr}_\Sigma(\wp)$。注意，$\mathfrak{F}$ 为 $\wp$ 中的每个变量赋予一个函数：对经过存在量词量化的变量使用斯科伦化，对经过全称量词量化的变量使用任意函数。现在可以陈述以下引理。

引理 13（META-ADIF斯科伦化）。设 $\mathfrak{X}$ 为一个超团队，$\mathfrak{F}$ 为一个函数赋值，$\varphi = \wp\psi$ 为一个处于前束形式的公式，其中 $\wp = \mathrm{Q}_0^{\mathrm{W}_0} x_0 \ldots \mathrm{Q}_n^{\mathrm{W}_n} x_n$，且 $\mathrm{Q}_i \in \{\Sigma, \Pi\}$ 适用于 $i \le n$。以下结论成立：$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{X} \models^{\alpha} \varphi$当且仅当存在一种斯科伦化 $(\mathrm{Sk}_{x_i})_{x_i \in \text{变量集合}_\Sigma(\wp)}$，适用于 $\wp$，使得 $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}', \mathfrak{X} \models^{\alpha} \psi$；对于相对于 $(\mathrm{Sk}_{x_i})_{x_i \in \text{变量集合}_\Sigma(\wp)}$ 的 $\mathfrak{F}$ 的所有斯科伦扩展 $\mathfrak{F}'$，均成立。

证明。我们对 $\mathrm{vr}_\Sigma(\wp)$ 的大小进行归纳法，以证明该结果。

基例 $\mathrm{vr}_\Sigma(\wp)=\emptyset$。对于 $\wp$，唯一的斯科伦化是函数的空序列。将全称量词的语义规则应用于 Πx_i（对每个 $i\le n$），即可得到该结果。

归纳情形。假设对于所有满足 $|\mathrm{vr}_\Sigma(\wp)|<n$ 的公式，该性质均成立。我们为每个 $x\in\mathrm{vr}_\Sigma(\wp)$ 构造具有所需性质的 Sk_x。令 i_0 为满足 $x_{i_0}\in\mathrm{vr}_\Sigma(\wp)$ 的最小整数，因此我们可以令 $\varphi=\Pi^{\mathrm{W}_0}x_0\dots\Pi^{\mathrm{W}_{i_0-1}}x_{i_0-1}\,\Sigma^{\mathrm{W}_{i_0}}x_{i_0}\varphi'$ 且 $\varphi'=\mathrm{Q}_{i_0+1}^{\mathrm{W}_{i_0+1}}x_{i_0+1}\dots\mathrm{Q}_n^{\mathrm{W}_n}x_n\psi=\wp'\psi$。应用关于 i_0-1 全称量词以及最后一个存在量词的语义规则，可得 $\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}\models^\alpha\varphi$ 当且仅当对于每个函数序列 $(\mathrm{F}^{x_j})_{j<i_0}$，其中 $\mathrm{F}_{x_j}\in\mathrm{Fnc}^{\mathrm{W}_j}$，都存在函数 $\mathrm{F}^{x_{i_0}}\in\mathrm{Fnc}^{\mathrm{W}_{i_0}}$，使得 $\mathfrak{A},\mathfrak{F}',\mathfrak{X}\models^\alpha\varphi'$，其中 $\mathfrak{F}'=\mathfrak{F}[x_0\mapsto\mathrm{F}_{x_0},\dots,x_{i_0}\mapsto\mathrm{F}_{x_{i_0}}]$。现在，由于 $\mathrm{vr}_\Sigma(\wp')<n$，根据归纳假设，$\mathfrak{A},\mathfrak{F}',\mathfrak{X}\models^\alpha\varphi'$ 当且仅当存在针对 $\wp'$ 的斯科伦化 $(\mathrm{Sk}'_{x_i})_{x_i\in\mathrm{vr}_\Sigma(\wp')}$，使得对于 $\mathfrak{F}'$ 的每个斯科伦扩展 $\mathfrak{F}''$，均有 $\mathfrak{A},\mathfrak{F}'',\mathfrak{X}\models^\alpha\psi$。于是我们得到，$\mathfrak{A},\mathfrak{F},\mathfrak{X}\models^\alpha\varphi$ 当且仅当对于所有函数序列 $(\mathrm{F}^{x_j})_{j<i_0}$，都存在函数 $\mathrm{F}^{x_{i_0}}$ 以及针对 $\wp'$ 的斯科伦化 $(\mathrm{Sk}'_{x_i})_{x_i\in\mathrm{vr}_\Sigma(\wp')}$，使得对于关于 $(\mathrm{Sk}'_{x_i})_{x_i\in\mathrm{vr}_\Sigma(\wp')}$ 的 $\mathfrak{F}[x_0\mapsto\mathrm{F}^{x_0},\dots,x_{i_0}\mapsto\mathrm{F}_{x_{i_0}}]$ 的每个斯科伦扩展 $\mathfrak{F}''$，均有 $\mathfrak{A},\mathfrak{F}'',\mathfrak{X}\models^\alpha\psi$。由于 $\mathrm{F}^{x_{i_0}}$ 和斯科伦化 $(\mathrm{Sk}'_{x_i})_{x_i\in\mathrm{vr}_\Sigma(\wp')}$ 的选取取决于序列 $(\mathrm{F}^{x_j})_{j<i_0}$，显然存在针对 $\wp$ 的斯科伦化 $(\mathrm{Sk}^{x_i})_{x_i\in\mathrm{vr}_\Sigma(\wp)}$，使得对于关于 $(\mathrm{Sk}^{x_i})_{x_i\in\mathrm{vr}_\Sigma(\wp)}$ 的 $\mathfrak{F}$ 的所有斯科伦扩展 $\mathfrak{F}''$，均有 $\mathfrak{A},\mathfrak{F}'',\mathfrak{X}\models^\alpha\psi$。事实上，对于所有序列 $(\mathrm{F}_{x_j})_{j<i_0}$，按如下方式定义的函数 $\mathrm{F}^{x_{i_0}}$ 和斯科伦化 $(\mathrm{Sk}'_{x_{i_k}})_{x_i\in\mathrm{vr}_\Sigma(\wp')}$ 满足上述性质：

- $\mathrm{F}^{x_{i_0}}=\mathrm{Sk}^{x_{i_0}}((\mathrm{F}^{x_j})_{j<i_0})$；
- $\mathrm{Sk}'_{x_{i_k}}((\mathrm{F}^{x_j})_{i_0<j<i_k})=\mathrm{Sk}^{x_{i_k}}((\mathrm{F}^{x_j})_{j<i_k})$，对于所有 $x_{i_k}\in$变量集合$_\Sigma(\wp')$ 以及函数序列 $(\mathrm{F}^{x_j})_{i_0<j<i_k}$。

□

第二个引理证明了构造 2 中为句子 ADIF 和结构 $\mathfrak{A}$ 定义的独立性博弈 $\mathcal{D}_\varphi^{\mathfrak{A}}$ 的一个性质。它指出，在经历历史 ρ 后，无论如何选择每个桶中的函数，与桶中这些函数相一致的唯一赋值，就是与 ρ 的最后一个位置相关联的赋值。下文中，我们考虑一个处于前束形式的句子 ADIF，其中 $\wp=\mathrm{Q}_0^{\mathrm{W}_0}x_0\dots\mathrm{Q}_n^{\mathrm{W}_n}x_n$，$\mathrm{Q}_i\in\{\forall\exists\}$，且 ψ 不含量词。对于每个子公式 $\phi=\mathrm{Q}_i^{\mathrm{W}_i}x_i\phi'$，我们将桶 $\mathcal{B}_\phi(\pi)$ 重命名为 $\mathcal{B}_{x_i}(\pi)$，并通过设定 $\mathrm{pr}(x_i)=\mathrm{pr}(\phi)$ 为变量指定优先级。令 $\mathcal{B}$、2^{Fnc} 表示所有桶的集合。为方便起见，我们设定 $X=\{x_0,\dots,x_n\}$ 和 $X_i=\{x_0,\dots,x_i\}$、$X_\exists=\{x_i\in X\mid\mathrm{Q}_i=\exists\}$ 以及 $X_\forall=X\setminus X_\exists$。我们还引入定义在桶上的选择函数。基本上，定义在桶上的选择函数会为每个变量 x 选择一个函数 F，该函数属于 x 的桶。输入中同时包含 $\mathcal{B}_x(\pi)$ 和 x，因为多个变量可能属于同一个桶（例如，当它们都恰好依赖于相同变量，且在对局过程中为它们都赋了相同的值时）。

$$\mathrm{ChcB}=\{\mu\colon(\mathcal{B}\times X)\to\mathrm{Fnc}\mid\forall\mathrm{B}\in\mathcal{B},\forall x\in X,\mu(\mathrm{B},x)\in\mathrm{B}\}$$

给定每个满足 $i \leq n$ 的变量 $x_j \in X_i$ 对应的函数 $\mathsf{F}_j \in \mathsf{Fnc}^{+\mathrm{W}_j}$，我们将 $\chi((\mathsf{F}j)_{j\leq i}) \in \mathsf{Asg}(X_i)$ 定义为唯一的赋值 χ，使得对于每个 $j \leq i$，都有 $\chi(x_j) = \mathsf{F}j(\chi \restriction \mathsf{free}\left(\mathsf{Q}_j^{\mathrm{W}_j} x_j.\, \phi'\right))$。我们称 χ 与 $(\mathsf{F}j)_{j\leq i}$ 相一致。

引理 14（桶的可靠性）。对于桶上的每个选择函数 $\mu \in \mathsf{ChcB}$，以及每个对局 $\pi = \rho v$ with $v = (\phi, \chi, \clubsuit)$，其中 $\clubsuit \in \{\downarrow, \circlearrowleft\}$，以下结论成立：

- *if* $\phi = \mathtt{Q}_i^{\mathrm{W}_i} x_i.\, \phi'$ *and* $\clubsuit = \downarrow$, *it holds* $\chi = \chi((\mu(\mathcal{B}_{x_j}(\pi), x_j))_{j\leq i})$.
- *if* $\phi = \psi$ *or* $\clubsuit = \circlearrowleft$ *it holds* $\chi = \chi((\mu(\mathcal{B}_{x_j}(\pi), x_j))_{j\leq n})$.

证明。我们通过对历史 ρ 进行归纳法来证明该引理。

对于基例历史，性质显然成立。

对于归纳法情形，假设引理对于历史 $\rho = \rho' v'$ with $v' = (\phi', \chi', \clubsuit)$ 成立。考虑形式为 ρv 的历史。需要考虑两种情况：要么 $\clubsuit = \downarrow$，要么 $\clubsuit = \circlearrowleft$。

($\clubsuit = \downarrow$) 这里同样有两种情况需要考察：

1. 如果 $\phi' = \psi$，那么在博弈中唯一可能的后继位置 v 是（φ，χ'，$\circlearrowleft$）。因此，根据桶的定义并直接应用归纳假设，ρv 的性质成立。2. 如果 $\phi' = \mathsf{Q}_i^{\mathrm{W}_i} x_i.\, \phi$，那么 v 的形式为（ϕ，χ，$\downarrow$）。唯一可能发生变化的桶是 $\mathcal{B}_{x_i}$。根据定义，任何函数 $\mathsf{F} \in \mathcal{B}_{x_i}$（$\rho v$）都满足 F（χ'）$= \chi'$（x_i），并且 ρv 的性质成立。事实上，根据归纳假设，对于每个满足 $j < i$ 的 x_j，都有 χ（x_j）$= \chi'$（x_j）。

($\clubsuit = \circlearrowleft$) 如果 $\phi' = \psi$，则不存在可达位置。因此，唯一的可能性是$\phi' = \mathsf{Q}_i^{\mathrm{W}_i} x_i.\, \phi$。这里同样有两种可能：

1. v的形式为 $(\phi, \chi', \circlearrowleft)$。在这种情况下，根据桶的定义并直接应用归纳假设，性质立即适用于 ρv。2. v的形式为 $(\phi, \mathring{\chi}[x_i \mapsto a], \downarrow)$，其中某个 $a \in \mathsf{A}$ 满足 $a \neq \chi'(x_i)$，且 $\mathring{\chi}, \chi' \restriction$ 在$(\mathsf{Q}_i^{\mathrm{W}_i} x_i.\, \phi')$中自由。根据归纳假设，对于每个 $\mathsf{F} \in \mathcal{B}_{x_i}(\rho)$，都有 $\mathsf{F}(\mathring{\chi}) = \chi'(x_i)$。于是，$\mathcal{F}_\phi(\mathring{\chi}) \cap \mathcal{B}_{x_i}(\rho) = \emptyset$。因此，$\mathcal{B}_{x_i}(\rho v) = \mathcal{F}_\phi(\mathring{\chi})$，并且根据定义，对于每个 $\mathsf{F} \in \mathcal{B}_{x_i}(\rho v)$，都有 $\mathsf{F}(\mathring{\chi} \restriction \mathrm{W}_i) = \mathring{\chi}(x_i)$。由于其他桶没有变化，性质对 ρv 成立。

□

定理 12（博弈论语义）。对于有限结构 $\mathfrak{A}$ 和一个处于前束形式的ADIF 句子 φ，存在一个独立性博弈 $\partial_\varphi^{\mathfrak{A}}$，使得 $\mathfrak{A} \models \varphi$（分别地，$\mathfrak{A} \not\models \varphi$）当且仅当 $\partial_\varphi^{\mathfrak{A}}$ 由 Eloise（分别地，Abelard）获胜。

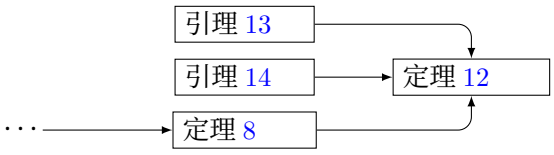


图 D.15：定理 12 的依赖图。

证明。我们证明：如果该句子在 $\mathfrak{A}$ 中为真，则 Eloise 赢得该博弈；如果该句子为假，则 Abelard 赢得该博弈。

首先，假设句子 φ 在 $\mathfrak{A}$中为真。根据定理8，φ 等价于 META-ADIF 句子 $\mathsf{hsp}(\wp)\,\psi$。因此，根据引理 13，并回顾 $\mathsf{hsp}(\wp)$ 中的量词顺序是相反的，我们可以得出结论：存在一个斯科伦化（Sk_{x_i}：$\prod_{j>i}\mathsf{Fnc}^{W_j} \to \mathsf{Fnc}^{W_i}$）$_{x_i\in X_\exists}$，使得对于空赋值相对于（$\mathsf{Sk}_{x_i}$）$_{x_i\in X_\exists}$的每个斯科伦扩展 $\mathfrak{F}$，都有 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{F}$、$\{\{\varnothing\}\} \models \varphi$。现在我们定义 Eloise 的策略，然后证明该策略是制胜的。直观地说，该策略包括借助桶查看由 Abelard 控制的变量的一种可能的函数赋值，然后根据斯科伦化（Sk_{x_i}）$_{x_i\in X_\exists}$ 的规定，为 Eloise 控制的变量选择值。形式化地，固定桶上的一个选择函数 $\mu \in \mathsf{ChcB}$。给定一个历史 ρ，我们如下定义对于 $i \in \{0,\dots,n\}$ 的 F_i^ρ。如果 $x_i \in X_\forall$，则 $\mathsf{F}_i^\rho = \mu(\mathcal{B}_{x_i}(\rho)\ x_i)$，否则，$\mathsf{F}_i^\rho = \mathsf{Sk}_{x_i}((\mathsf{F}_j^\rho)_{j>i})$。当 Eloise 必须在历史 $\rho = \rho' v'$下为变量 x_i 进行移动，且 $v' = (\phi, \chi,)$ 时，她移动到位置 $v = (\phi', \chi',)$，其中 $\chi'(x_i) = \mathsf{F}_i^\rho(\chi)$。注意，该策略不依赖于博弈的当前阶段。

现在考虑一个有限对局 $\pi = \rho v$，其中 $v = (\psi, \chi, \circlearrowleft)$，且与该策略相容。我们定义选择函数 $\hat{}\mu$ 如下：对于所有 $x_i \in \mathbf{X}$

$$\hat{\mu}(\mathcal{B}_{x_i}(\pi), x_i) = \mathsf{F}_i^\pi$$

函数 $\hat{}\mu$ 是一个选择函数，因为若 $x_i \in X_\forall$，根据定义，$\mathsf{F}_i^\pi \in \mathcal{B}_{x_i}(\pi)$；若 $x_i \in X_\exists$，则由于 Eloise 按照 F_i^π进行对局，该函数属于 x_i的桶。引理 14保证赋值 χ 与 $(\hat{}\mu(\mathcal{B}_x(\pi)\ x))_{x\in X}$相一致。根据 $(\mathsf{Sk}_{x_i})_{x_i\in X_\exists}$的定义，有 $\chi \models \psi$。因此，Eloise 赢得了这场对局。

现在考虑一个与该策略 $\pi \in \mathsf{Play}^\omega$相容的无限对局。为导出矛盾，假设该对局的优先级 $\mathsf{pr}(\pi)$ 为奇数。那么，必然存在一个变量 $x_i \in X_\exists$，使得：（i）$\mathsf{pr}(x_i)$ 在 $\mathsf{cht}(\pi)$ 中出现无穷多次；并且（ii）对于所有 $j > i$，优先级 $\mathsf{pr}(x_j)$ 只出现有限次。回忆一下，如果变量 x 在 π 的某个有限前缀$\pi' = \rho v$ 之后没有被“抓到作弊”，那么 $\mathcal{B}_x(\pi') \subseteq \mathcal{B}_x(\rho)$。但是，由于我们假设论域是有限的，因此从对局 π 中的某个索引 N 开始，对于每个 x_j（其中 $j > i$），其桶将永远保持不变。将 x_j 的常值桶记为$\mathcal{B}'_{x_j}$。于是，对于 x_i，策略是让 Eloise 通过函数 $\mathsf{F}_i = \mathsf{Sk}_{x_i}((\mu(\mathcal{B}'_{x_j}(\pi)\ x_j))_{j>i})$ 来选择 x_i 的值；由于变量 x_j 的桶不发生变化，该函数是常值。根据定义，对于 π 的每个长度大于

N 的前缀， x_i 的桶都包含 F_i。因此， x_i 的桶永远不会被清空，而 x_i 也永远不会被“抓到作弊”。这就产生了矛盾。我们证明了，如果该句子为真，那么 Eloise 在 $\Im_\varphi^{\mathfrak{A}}$ 中拥有获胜策略。

证明的第二部分以类似方式进行：我们只需交换Eloise和Abelard的角色，应用完全相同的推理，即可为Abelard获得一个获胜策略。

□

参考文献

Blass, A., Gurevich, Y., 1986。《Henkin量词与完全问题》。《纯粹与应用逻辑年鉴》32，1–16。Bradfield, J., 2013。《依赖中的团队构建》，载于：《计算机科学逻辑'13》，莱布尼茨信息学中心。第116–128页。Buss, S., 1998。《证明论导论》，载于：《证明论手册》。爱思唯尔，第1–78页。Church, A., 1956。《数学逻辑导论》。普林斯顿数学丛书17。普林斯顿大学出版社。Clairambault, P., Gutierrez, J., Winskel, G., 2013。《逻辑和不完全信息博弈》，载于：《计算、逻辑、博弈与量子基础》。Samson Abramsky的多重面向：献给Samson Abramsky的论文集，以庆祝其60岁生日。施普林格，第7–20页。Enderton, H., 1970 16, 393 397。《有限偏序量词》。《数学逻辑季刊》–。Galliani, P., 2012。《团队语义中的包含依赖与排除依赖——关于不完全信息逻辑的一些论述》。《纯粹与应用逻辑年鉴》163，68–84。Gr¨adel, E., Kolaitis, P., Libkin, L., Marx, M., Spencer, J., Vardi, M., Venema, Y., Weinstein, S., 2005。《有限模型论及其应用》。《理论计算机科学丛书》。施普林格。Gr¨adel, E., V¨a¨an¨anen, J., 2013。《依赖与独立性》。《逻辑学研究》101，399–410。Harel, D., 1979。《用一阶量词刻画二阶逻辑》。《数学逻辑季刊》25，419–422。van Heijenoort, J., 1967。《从Frege到G¨odel：数学逻辑资料集，1879–1931》。哈佛大学出版社。Henkin, L., 1961。《关于无限长公式的一些评论》，载于：《无穷方法'61》，培格曼出版社。第167–183页。Hilbert, D., Ackermann, W., 1928。《理论逻辑基础》。数学科学基础原理丛书。施普林格。Hilbert, D., Ackermann, W., 1938。《理论逻辑基础》（第二版）。数学科学基础原理丛书。施普林格。Hintikka, J., 1973。《逻辑、语言博弈与信息：逻辑哲学中的康德主题》。牛津大学出版社。Hintikka, J., 1996。《数学原理再探》。剑桥大学出版社。Hintikka, J., Sandu, G., 1989。《信息独立性作为一种语义现象》，载于：《国际逻辑、方法论与科学哲学大会'89》，爱思唯尔。第571–589页。Hintikka, J., Sandu, G., 1997。《博弈论语义学》，载于：《逻辑与语言手册》。北荷兰出版社与爱思唯尔，第361–410页。Hodges, W., 1997a。《不完全信息语言的组合语义》。《IGPL逻辑期刊》5，539–563。

Hodges, W., 1997b. 一些奇异量词，载于：逻辑与计算机科学中的结构：为纪念 A. Ehrenfeucht 而作的论文选集。施普林格，第 51–65 页。Immerman, N., 1999. 描述复杂性。计算机科学研究生教材。施普林格。Kontinen, J., Nurmi, V., 2009. 团队逻辑与二阶逻辑，载于：2009年逻辑、语言、信息与计算研讨会，施普林格，第 230–241 页。Kontinen, J., Nurmi, V., 2009. 依赖逻辑中的可定义性。《逻辑、语言与信息》期刊 18，317–332。Kreisel, G., 1951. 非有限主义证明的解释——第一部分。《符号逻辑杂志》16，241–267。Kreisel, G., 1952. 非有限主义证明的解释：第二部分。数论的解释及其应用。《符号逻辑杂志》17，43–58。Krynicki, M., Mostowski, M., 1995. Henkin量词，载于：《量词：逻辑、模型与计算》，第一卷。施普林格，第 193–262 页。Kuusisto, A., 2013. 不含同一性的不完全信息逻辑的表达力。《逻辑学研究》101，237–265。Kuusisto, A., 2015. 广义量词的双重团队语义。《逻辑、语言与信息》期刊 24，149–191。Lorenz, K., 1968. 对话博弈作为逻辑演算的语义基础。《数学逻辑与基础研究档案》11，32–55。Lorenzen, P., 1961. 对话式构造性判据，载于：1959年数学基础研讨会，波兰科学出版社，第 193–200 页。Mann, A., Sandu, G., Sevenster, M., 2011. 独立友好逻辑——博弈论方法。剑桥大学出版社。Martin, A., 1975. 博雷尔确定性。《数学年刊》102，363–371。Martin, A., 1985. 博雷尔确定性的纯归纳证明，载于：1982年递归理论研讨会，美国数学会与符号逻辑协会，第 303–308 页。von Neumann, J., Morgenstern, O., 1944. 博弈论与经济行为。普林斯顿大学出版社。Shapiro, S., 1991. 无基础主义的基础：二阶逻辑的立论。牛津大学出版社。Stockmeyer, L., 1976. 多项式时间层次。《理论计算机科学》3，1–22。Tarski, A., 1936. 形式化语言中的真值概念，载于：逻辑、语义学与元数学。牛津大学出版社，第 152–278 页。Tarski, A., 1944. 真理的语义观与语义学基础。《哲学与现象学研究》4，341–376。V., 2007. 依赖逻辑：独立友好逻辑的新方法。第 70 卷，剑桥大学出版社。Walkoe, W., 1970 35, 535 555 . 有限偏序量化。《符号逻辑杂志》–。