arXiv:2304.11746v1 [math.RA] 23 Apr 2023

幺半群的终端空间

A. GOSWAMI

摘要。本文旨在将环、半环和模的各类理想在 Zariski 拓扑下的拓扑结果，广泛推广至幺半群的强不可约理想（赋予 Zariski 拓扑），并称之为终端空间。我们证明，终端空间是 T_0 拟紧的，且每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。我们从终端空间的角度刻画算术幺半群。最后，我们给出极大理想子空间和素理想子空间在相应终端空间中稠密的充要条件。

1. 引言与预备知识

在称为本原理想的名义下， [F49], 强不可约理想这一概念最初是为交换环引入的。在 [B72，第 301 页，习题 34], 同一谱中的理想称为拟素理想。“强不可约”一词最早用于非交换环，见 [B53]。此后，围绕环中这类理想开展了多项代数和拓扑研究（参见 [HRR02、A08、S16]）。强不可约理想的概念已推广到半环（参见 [I56、AA08]）和模（参见 [KES06、NS21]）。

本文旨在研究赋予 Zariski拓扑的幺半群的强不可约理想空间的拓扑性质。这是对 Zariski 空间的一个广泛推广。此外，强不可约理想是能够施加 Zariski拓扑的“最大”理想类。因此，我们不仅将上述关于环、半环和半模的强不可约理想的研究成果中的一些拓扑结果推广到了幺半群，还将这些结构中的极大理想、素理想、极小素理想和一次理想的相关结果推广到了幺半群的强不可约理想。我们重点介绍在本文中得到推广的结果。尽管我们的研究框架建立在幺半群上，但许多结果对（交换）半群仍然成立，而这些结果无法进一步推广到拟群。

我们把幺半群 M定义为一个系统 $(M, \cdot, 1)$，其中 $\cdot$ 是 M 上的一个结合的、交换的（乘法）二元运算，且 1 是 M 中的一个元素，满足对于所有 $x \in M$， $x \cdot 1 = x$。我们将 $x \cdot y$ 记作 xy，并假设所有幺半群都是交换的。若元素 m 属于M，且对某个 $m' \in M$， $mm' = 1$，，则称其为可逆元素。若 S 和 T 是幺半群 M的子集，则集合乘积 ST由 S和 T定义为 $ST = \{st \mid s \in S, \ t \in T\}$。若 $S = \{s\}$，则将 ST记作 sT；对于 $T = \{t\}$，也类似。因此

$$ST = \cup\{St \mid t \in T\} = \cup\{sT \mid s \in S\}.$$

2020年数学主题分类。20M12，20M14，54F65。关键词和短语。强不可约理想；算术幺半群；Zariski拓扑；泛点。

幺半群 M 的理想是满足以下条件的子集 I： $i \in I$ 且 $m \in M$ 蕴含 $im \in I$；若 $I \neq M$，则称 I 为真理想。我们用 I (M) 表示 M的所有理想组成的集合。若幺半群 M满足理想的升链条件，则称其为诺特幺半群。若 S 是幺半群 M的非空子集，则用 hSi 表示由 S生成的最小理想。若 $S = \{s\}$，，则将 hsi 记作 h$\{s\}$i。若真理想 I 满足 $ii' \in I$ 蕴含 $i \in I$ 或 $i' \in I$，则称 I 为素理想。若 I 和 J 是 M的理想，则它们的乘积定义为 $IJ = \{ij \mid i \in I,\ j \in J\}$，这也是 M的一个理想。设 S是幺半群 M的非空子集。若 I 是 M的理想，则 I 的根定义为

$$\sqrt{I} = \{m \in M \mid m^k \in I \text{ for some } k \in \mathbb{Z}^+\}.$$

若理想 I 满足 $\sqrt{I} = I$. 则称其为根理想（或称为半素理想）。若 L 是 M 的真理想，且 $L = I \cap J$（对于 M的理想 I, J）蕴含 $L = I$ 或 $L = J$.，则称其为不可约理想。若 K 是 M的真理想，且 $I \cap J \subseteq K$ 蕴含 $I \subseteq K$ 或 $J \subseteq K$，则称其为强不可约理想。

2. 幺半群的终端空间

设 M为一个幺半群，并令 $\mathcal{S}(M)$为 M的所有强不可约理想所构成的集合。我们在 [G60, §1.1。1]的意义下，在 $\mathcal{S}(M)$上赋予 Zariski拓扑，其闭集定义如下：

$$\mathcal{HK}(X) = \begin{cases} \{J \in \mathcal{S}(M) \mid J \supseteq \mathcal{K}(X)\}, & X \neq \emptyset; \\ \emptyset, & X = \emptyset, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $X \subseteq$S（M），且 K（X） =Ñ $_{I \in X} I$。下一个定理表明，H K 是 S（M）上的 Kuratowski 闭包算子，因此确实在 S（M）上诱导出一个闭集拓扑。

定理 2.1。 设 M 是一个模，并令 $\mathcal{HK}$ 按 (2.1)定义。

(1) HK $(\emptyset) = \emptyset$。(2) 对所有 $X \subseteq$S (M)， $X \subseteq$H K (X)。(3) 对所有 $X \subseteq$S (M)，H K (H K (X)) =H K (X)。(4) 对所有 X， $X' \subseteq$S (M)，H K $(X \cup X')$ =H K (X) ∪H K (X')。

证明。 (1)–(2) 由（2.1）可得。

(3) 由（2）， $X \subseteq \mathcal{HK}(X)$，从而 $\mathcal{HK}(\mathcal{HK}(X)) \supseteq \mathcal{HK}(X)$，根据 $\mathcal{HK}$ 的递增性。这一包含关系的另一方向由（2.1）得到。

(4) 根据（2）以及 H K 的递增性，有 H K $(X \cup X')$ ⊇H K (X) ∪H K (X')。假设 $J \in$H K $(X \cup X')$。则 K (X) ∩K (X') $\subseteq J$。 由于 J是强不可约的，K (X) $\subseteq J$或 K (X') $\subseteq J$，因此， $J \in$ H K (X) ∪H K (X')。 □

由定理 2.1（4）可清楚看出，强不可约理想类是幺半群中能够赋予包核拓扑（= Zariski拓扑）的理想类中“最大”的一类。赋予上述包核拓扑的集合 S（M）将被称为一个终端空间。下面的命题刻画了作为终端空间的强不可约理想，并推广了环论结果 [M53, 第 2.2 节，第 11]页。

命题 2.2。 由 (2.1) 定义的运算是理想类 $\mathcal{F}$ 上的 Kuratowski 闭包算子，当且仅当 M

$$J \cap K \subseteq I \quad \textit{implies} \quad J \subseteq I \ \textit{ or } \ K \subseteq I,$$

对于所有 J， $K \in \mathrm{I}(M)$，以及所有 $I \in \mathrm{F}$。

在讨论终端空间的拓扑性质之前，我们先记下关于闭包算子 HK 的一些基本结果，这些结果将在后文中使用。

引理 2.3. 设 M 是一个么半群，且 X、 X'、$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 S（M）的非空子集。则有以下结论。

(1) H K（M） $= \emptyset$.（2）H K（X） $= X$.（3）
H K（X） $\cup$H K（X'） =H K（$X \cap X'$）.
（4）Ñ $_{\lambda\in\Lambda}$H K（X_λ） =H K（Ñ $_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$）.
（5）H K（X） $\subseteq$H K（hXi） $\subseteq$H K（ph$X$
i）.

证明。（1）由 M 的强不可约理想定义可知。

(2) 根据定理 2.1(2)，我们有 $X \subseteq \overline{\mathcal{HK}(X)} = \mathcal{HK}(X)$。设 $\mathcal{HK}(Y)$ 是 $\mathcal{S}(M)$ 的任意闭子集，且包含 X。则

$$\mathcal{HK}(Y) = \mathcal{HK}(\mathcal{HK}(Y)) \supseteq \mathcal{HK}(X).$$

由于根据定理 2.1(2), $\mathcal{HK}(X)$ 是包含 X 的最小闭集，因此结论成立。(3)–(5) 显然。

□

下一个结果推广了 [HPH21], 中的定理 9 [I56],中的定理 4.1：(v)–(vi) [A08],以及 [Z00]中的命题 2.4。

定理 2.4. 每个终端空间都是拟紧的，并且是 a T_0-空间。

证明。 设 $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{S}(M)$ 的一个闭集族，并且 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \emptyset$。 那么 $C_\lambda = \mathcal{HK}(X_\lambda)$，其中某些子集 X_λ 属于 $\mathcal{S}(M)$，由引理 2.3(4)，可得

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{HK}(X_\lambda) = \mathcal{HK}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) = \emptyset.$$

令 K =hÐ $_{\lambda\in\Lambda}$K (X_λ)i。 我们断言 $K = M$。否则，存在 M 的一个极大理想 J，使得

$$\bigcap_{I\in X_\lambda} I \subseteq K \subseteq J,$$

对所有 $\lambda \in \Lambda$。因此，对所有 $\lambda \in \Lambda$，都有 $J \in \mathrm{H}(C_\lambda) = C_\lambda$，这就产生矛盾。由于 $1 \in K$，我们有 $1 \in$Ð$_{i=1}^{n}$K (X_{λ_i})，其中取自 Λ 的有限子集为 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$。因此，Ñ$_{i=1}^{n} C_{\lambda_i} = \emptyset$，由有限交性质可知，S ($M$) 是拟紧的。

为证明 T_0 分离性质，设 I， $I' \in$S (M)，且满足 H K ({I}) =H K ({I'})。 只需证明 $I = I'$。由于 $I' \in$H K ({I})，我们有 $I \subseteq I'$。类似地，可得 $I' \subseteq I$。因此$I = I'$。□

下面的结果刻画了 T_1 终端空间，并推广了 [HPH21],中的定理 3.7、 [HHP22],中的定理 3 以及 [Y11]中的定理 3。

定理 2.5. 设 M 是一个幺半群。当且仅当 M 的每个强不可约理想都不包含 M 的其他强不可约理想时，终端空间 $\mathrm{S}(M)$ 才是一个 T_1-空间。

证明：若 $\mathrm{S}(M)$ 是一个 T_1-空间，则对于每个 $I \in \mathrm{S}(M)$，我们有 $I = \{I\}$。根据引理 2.3(2)，$\bar{I} = \mathrm{HK}(\{I\}) = \mathrm{H}(I)$，因此 $\{I\} = \mathrm{H}(I)$，这意味着包含 I 的 M 的唯一强不可约理想就是 I 本身。反之，设 M 中包含 I 的唯一强不可约理想为 I。那么根据引理 2.3(2)，

$$\overline{\{I\}} = \mathcal{HK}(\{I\}) = \mathcal{H}(I) = \{I\}.$$

因此，$\{I\}$ 是一个闭集，从而证明 $\mathrm{S}(M)$ 是一个 T_1-空间。 □

我们的下一个目标是研究终端空间的不可约闭集的泛点。回顾一下，拓扑空间 X 的子集 Y 称为不可约的，是指对于 X 中的任意闭子集 Y_1 和 Y_2，$Y \subseteq Y_1 \cup Y_2$ 蕴含 $Y \subseteq Y_1$ 或 $Y \subseteq Y_2$。X 的极大不可约子集 Y 称为不可约分支。闭子集 Y 的元素 y 称为 ~~Y~~ 的泛点，当且仅当 $Y = \{y\}$。下面的结果刻画了终端空间中的不可约子集。此外，该结果推广了 [HPH21]，中的定理 3.3、[Y11]，中的命题 3 以及 [Z00] 中的定理 2.6(1)。

定理 2.6. 设 M 为一个幺半群。终端空间 $\mathrm{S}(M)$ 的非空闭子集 X 不可约，当且仅当 $\mathrm{K}(X)$ 是 M 的强不可约理想。

证明. 显然，$\mathrm{K}(X)$ 是 M 的真理想。设 $I \cap J \subseteq \mathrm{K}(X)$，其中 I，$J \in \mathrm{I}(M)$。那么对于任意 $L \in X$，我们有 $I \subseteq L$ 或 $J \subseteq L$，因为 $L \in \mathrm{S}(M)$。因此 $X \subseteq \mathrm{H}(I) \cup \mathrm{H}(J)$。由于 X 是不可约的，$X \subseteq \mathrm{H}(I)$ 或 $X \subseteq \mathrm{H}(J)$，这意味着 $I \subseteq \mathrm{K}(X)$ 或 $J \subseteq \mathrm{K}(X)$。因此，$\mathrm{K}(X)$ 是强不可约的。

反之，设 $\mathrm{K}(X)$ 是 M 的强不可约理想。由于 $\mathrm{K}(X) \neq M$，$\mathrm{K}(X)$ 非空。设 $X = X_1 \cup X_2$ 为终端空间 $\mathrm{S}(M)$ 的某些非空闭子集。则 $\mathrm{K}(X) \supseteq \mathrm{K}(X_1) \cap \mathrm{K}(X_2)$。由于 $\mathrm{K}(X)$ 是强不可约的，$\mathrm{K}(X) \in \mathrm{H}(\mathrm{K}(X_1) \cap \mathrm{K}(X_2))$。根据引理 2.3(3)，这意味着 $\mathrm{K}(X) \in \mathrm{H}\,\mathrm{K}(X_1) \cup \mathrm{H}\,\mathrm{K}(X_2)$。如果 $\mathrm{K}(X) \in \mathrm{H}\,\mathrm{K}(X_1)$，那么

$$X \subseteq \overline{X} = \mathcal{HK}(X) \subseteq \mathcal{HK}(X_1) = \overline{X_1} = X_1,$$

其中第一个和第二个等式由引理 2.3(2) 得出。类似地，如果 $\mathcal{K}(X) \in \mathcal{HK}(X_2)$，则得到 $X \subseteq X_2$。这证明了 X 是不可约的。 □

下面的推论推广了 [HPH21]中的推论 3.1。

推论 2.7。终端空间 $\mathrm{S}(M)$ 的每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。

证明。设 $\mathrm{H}(I)$ 是 $\mathrm{S}(M)$ 的非空不可约子集。根据定理 2.6，I 它是强不可约的。因此 $\{I\} = \mathrm{HK}(I) = \mathrm{H}(I)$，其中第一个等式由引理 2.3(2) 得出。因此，$\{I\}$ 是 $\mathrm{H}(I)$ 的一个泛点。该点的唯一性源于 $\mathrm{S}(M)$ 是一个 T_0-空间这一事实（见定理 2.4）。 □

下面的一一对应推广了 [AH11]中的定理 3.4。

定理 2.8. 设 M 是一个幺半群。则终端空间 S (M) 的不可约分支集合与 M 的极小强不可约理想集合之间存在一个双射。

证明。若 X是终端空间 S (M) 的一个不可约分支，则由定理 2.6，存在某个 $I \in$S (M)，使得 $X =$H (I)。若 $J \in$S (M) 满足 $I \supseteq J$，则 H $(I) \subseteq$H (J)，从而 $I = J$。反过来，设 I 是 M 的一个极小强不可约理想，并且对某个 $J \in$S (M)，有 H $(I) \subseteq$H (J)。那么

$$\overline{\{I\}} = \mathcal{H}(I) \subseteq \mathcal{H}(J) = \overline{\{J\}},$$

这意味着 $I = J$。因此，H (I) 是 S (M) 的一个不可约分支。 □

下述命题给出了 $\mathcal{S}(M)$的可逆元的刻画，该结果推广了[A08]中的定理 4.1(iii)。

命题 2.9。设 M是一个幺半群，且 S (M) 是一个终端空间。那么，S $(M) \setminus$ H K (hmi) =S (M) 当且仅当 m是 M的一个可逆元。

证明。注意，S $(M) \setminus$H K (hmi) =S (M) 意味着 m不属于 M的任何极大理想，因此m 可逆。反向结论直接由每个强不可约理想都是真理想这一事实得出。□

众所周知，赋予 Zariski拓扑的诺特（交换）环的素谱是一个诺特空间。以下命题将此结论推广到幺半群的强不可约理想，同时也推广了 [A08] 中的命题 4.2(i)。证明很简单，故略去。

Pro命题 2.10. 若 M是诺特幺半群，则 S (M) 是诺特终端空间。 *e.*

回顾一下，若幺半群满足 算术 条件$\mathcal{I}(M)$是一个分配格，则称其为算术幺半群。以下定理用强不可约理想刻画算术幺半群。该结果是对 [I56] 中定理 10 的推广。部分蕴含关系的证明使用了 $\mathcal{S}(M)$ 上的 Zariski 拓扑。

定理 2.11。幺半群 M 是算术的，当且仅当每个理想都是所有包含它的强不可约理想的交。

证明。设 $I \in$I (M)，且 $I =\tilde{\mathrm{N}}_{I \subseteq J}\{J \mid J \in$S $(M)\}$。要证明 I (M) 是分配的，只需证明格 I (M) 与终端空间 S (M) 的某个闭集格同构。注意映射 $I \mapsto \{J \in$S $(M) \mid J \supseteq I\} =$H (I) 是双射，并且由于 H (I) 是闭集，该映射也是格同构。

反过来，我们首先注意到，根据 [BF48], , 在分配格中，不可约理想与强不可约理想相同。证明的其余部分现可由 [I56] 中的定理 6 和定理 7 推出。 □

最后，我们希望考察终端空间与其极大理想子空间 Max(M) 和素理想子空间 Spec(M) 之间的关系。为此，我们首先讨论由幺半群 M 的极大理想、素理想和强不可约理想所诱导的根。M 的 m-根 $\sqrt[m]{M}$（分别为 p-根 $\sqrt[p]{M}$ 和 s-根 $\sqrt[s]{M}$）是所有极大理想（分别为素理想和强不可约理想）的交。

命题 2.12. 设 M 是一个幺半群。

(1) 子空间 Max(M) 在终端空间 S (M) 中稠密，当且仅当 $\sqrt[r]{M} = \sqrt[s]{M}$.(2) 子空间 Spec(M) 在终端空间 S (M) 中稠密，当且仅当 $\sqrt[r]{M} = \sqrt[s]{M}$.

证明。(1) 设 ~~Spec(M)~~ =S (M). 那么 $\{J \in \mathrm{S}(M) \mid \tilde{\mathrm{N}}_{P \in \mathrm{Spec}(M)} P \subseteq J\}$ =S (M). 这意味着

$$\sqrt[r]{M} = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(M)} P \subseteq \bigcap_{J \in \mathcal{S}(M)} J = \sqrt[s]{M}.$$

此外，Max(M) $\subseteq$S (M) 意味着 $\sqrt[s]{M} \subseteq \sqrt[r]{M}$。因此，我们得到了所需的等式。为证明逆向结论，设 S (M)\Spec(M) $\neq \emptyset$. 这意味着 $J \notin$Spec(M)，但 $J \in$S (M). 因此，存在 J 的一个邻域 N_J，使得 $N_J \cap \mathrm{Spec}(M) = \emptyset$, 并且 $\sqrt[s]{M} \subsetneq \sqrt[r]{M}$. 换言之，我们有 $\sqrt[s]{M} \neq \sqrt[r]{M}$.

(2) 由 (1) 得出。 □

参考文献

[A08] A. Azizi，强不可约理想，《澳大利亚数学会杂志》，84 (2008)，145–154。[AA08] R. E. Atani 和 S. E. Atani，交换半环中的理想理论，《摩尔多瓦共和国科学院学报》，(2008)，14–23。[AH11] H. Ansari-Toroghy 和 D. Hassanzadeh-Lelekaami，关于拓扑模的素谱，《代数与离散数学》，11(1) (2011)，1–16。[B53] R. L. Blair，理想格与环的结构，《美国数学会汇刊》，75 (1953)，136–153。[B72] N. Bourbaki，《数学原理：交换代数》，Addison-Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1972。[BF48] G. Birkhoff 和 O. Frink，集合对格的表示，《美国数学会汇刊》，14 (1948)，299–316。[F49] L. Fuchs，《算术环的理想》，《赫尔维蒂数学评论》，23 (1949)，334–341。[G60] A. Grothendieck，《代数几何原理 I：概形语言》，法国高等科学研究所数学出版物，第 4 号，1960。[HPH21] C-H Han、W-S Pae 和 J-N Ho，半模素谱的拓扑性质，《代数杂志》，566 (2021)，205–221。[HHP22] C-H Han、J-N Ho 和 W-S Pae，半模可减素谱的性质，《哈切特佩数学与统计杂志》，XX(x) (2022)，1–14。[HRR02] W. J. Heinzer、L. J. Ratliff Jr. 和 D. E. Rush，交换环的强不可约理想，《纯粹与应用代数》，166(3) (2002)，267–275。[I56] K. Iséki，半环的理想理论，《日本学士院纪要》，32 (1956)，554–559。[KES06] A. Khaksari、M. Ershad 和 H. Sharif，模的强不可约子模，《数学学报》，22(4) (2006)，1189–1196。[M53] J. D. McKnight, Jr.，关于函数环的刻画，普渡大学博士论文，1953。[NS21] R. Naghipour 和 M. Sedghi，算术模与诺特模中强不可约子模的若干刻画，arXiv:2101.01695v1。[S16] N. Schwartz，强不可约理想与截断赋值，《通讯代数》，44(3) (2016)，1055–1087。[Y11] G. Ye˛silot，关于非交换环上模的素谱，《国际代数杂志》，5(11) (2011)，523–528。[Z00] G. Zhang 和 W. Tong，拓扑右 R-模的谱空间，《南京大学学报（数学双语版）》，17(1) (2000)，15–20。

[1] 约翰内斯堡大学数学与应用数学系，邮政信箱524号，奥克兰公园2006，南非。 [2] 南非国家理论与计算科学研究所（NITHECS），南非国家理论与计算科学研究所 (NITHECS)。

电子邮箱地址：agoswami@uj.ac.za