arXiv:2304.11759v1 [math.GR] 23 Apr 2023

# 右弱群

HIBA F. FAYOUMI 和 HEE SIK KIM

Abstract. 右弱群定义为满足以下条件的群胚（$X, *$）：（i） $x$, $y \in X$蕴含存在 $a, b \in X$，使得 $a*x = y$且 $b*y = x$。此外，（ii）若 $x, y, z \in X$，则存在元素 $w \in X$，使得 $x*$（$y*z$） $= w*z$。这些群胚具有一种“残余”的群结构，且涵盖许多其他群胚。本文研究这些群胚的一些性质，并提供了足够多的例子，以支持如下论点：它们构成了一个适合系统研究的类。

## 1. Introduction

在文献中已有的众多群概念推广中， [2, 4, 7] 我们认为，直到现在，右弱群这一类还未曾以其未加掩饰的形式得到讨论。“弱”这一术语源于第3节所定义的条件（i）和（ii）取代了逆元存在性和结合律。事实上，假设右弱群（$X, *$）含有单位元 $e$，其中 $x*e = e*x = x$对所有 $x \in X$均成立。因此， $a*x = e$且 $b*e = x$蕴含 $b = x$和 $a = x^{-1}$，即逆元的存在得到了保证。此外，规则（ii）指出，对于群胚（$X, *$）中的任意 $x, y, z$，都存在元素 $w \in X$，使得 $x*$（$y*z$） $= w*z$。对于群，我们发现 $w = x*y$，因此规则（ii）是结合律的一种更一般的形式。

## 2. Preliminaries

在各种群胚中，左拟群胚具有特殊地位。例如，设 $f$： $X \to X$是任意函数，我们按以下公式定义 $(X, *, f)$： $x*y := f(x)$。因此，若考虑群胚乘积 $(X, *, f)\square(X, \bullet, g) := (X, \square)$，其中 $x\square y = (x*y)\bullet(y*x) = f(x)\bullet g(y) =$

2010年数学主题分类。20N02。关键词和短语：右弱群、群胚、左拟群胚、右拟群胚、Smarandachedisjoint、可除、右整、右非对称。

$g(f(x))$，则可知 $(X, \square) = (X, \square, g \circ f)$ 也是函数复合 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 的一个左型模型。若 $f(x) = x$，则$x * y = f(x) = x$ 生成左零半群，由此可得 $(x * y) \bullet (y * x) = x \bullet y = x \square y$，其中 $(X, *)$ 是左零半群。若 $(X, \bullet)$ 是左零半群，则 $(x * y) \bullet (y * x) = x * y = x \square y$ 也成立。也就是说，左零半群在 $(Bin(X) \square)$ ([5]) 中起着乘法单位元的作用。H. Fayoumi ([3]) 在集合 $X$ 上所有二元系统构成的半群 $Bin(X)$ 中引入了中心 $ZBin(X)$ 的概念，并证明若 $(X, \bullet) \in ZBin(X)$，则 $x \neq y$ 蕴含 $\{x, y\} = \{x \bullet y, y \bullet x\}$。此外，她还证明，群胚 $(X, \bullet) \in ZBin(X)$ 当且仅当它是局部零群胚。

假设 $f\colon X \to X$ 是一个满射。若 $x, y \in X$，则对于某种 $a$ 和 $b$ 的取法，$f(a) = y$ 且 $f(b) = y$，即 $a * b = f(a) = y$ 且 $b * y = f(b) = x$，因此条件 (i) 成立。此外，$x * (y * z) = f(x)$ 且 $w * z = f(w)$。由于 $x = w$ 保证 $f(x) = f(w)$，因此条件 (ii) 也成立，并且左拟群 $(X, *, f)$ 是一个右弱群。

给定一个集合 $X$ 和一个函数 $f\colon X \to X$，我们考虑一个群胚 $(X, *, f)$，其中对于任意 $x, y \in X$，$x * y := f(x)$。这样的群胚称为 $f$ ([5]) 上的左拟群。类似地，我们定义右型，即对于所有 $x, y \in X$，$x * y := g(y)$，其中 $g\colon X \to X$ 是一个函数。另一个值得关注且对下文有用的概念是 Smarandache 不交性。给定代数类型 $(X, *)$（类型-$P_1$）和 $(X, \circ)$（类型-$P_2$），若满足以下两个条件，则称它们为 Smarandache 不相交 ([1])：

> (A) 如果 $(X, *)$ 是满足 $|X| > 1$ 的 type-$P_1$-代数，那么它就不能是 Smarandache -type-$P_2$-代数 $(X, \circ)$；(B) 如果 $(X, \circ)$ 是满足 $|X| > 1$ 的 type-$P_2$-代数，那么它就不能是 Smarandache -type-$P_1$-代数 $(X, *)$。

因此，如果 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 是两个数学对象类，那么 $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ 可能恰好只由一个对象构成。这个唯一的对象往往在某种意义上是“平凡的”。例如，设 $\mathbf{K}_1$ 是 $d$-代数 ([6]) 类，$\mathbf{K}_2$ 是群类。如果 $(X, *, 0)$ 既是 $d$-代数，又是单位元为 $e$ 的群，那么 $0 * x = 0$ 蕴含 $x = e$，即该群的单位元，因此 $X = \{0\}$。于是，$e = 0$ 也成立，并且$e * e = e = 0 = 0 * 0$。

注意到，我们可以将 $\mathbf{K}_1$ 扩展为所有满足以下条件的群胚 $(X, *, 0)$ 的类：对于所有 $x \in X$，$0 * x = 0$，从而得到相同的结论。类似地，$\mathbf{K}_2$ 可以扩展为群胚 $(X, *, e)$ 的类，其中$a * x = a$ 蕴含 $x = e$。因此，$\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ 仅由单个群胚 $(X = \{u\}, u * u = u)$ 构成，而 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 则是 Smarandache 不相交的。

如果 $(X,*)$ 既是左拟群又是右型，那么 $x*y=C$ 是来自 $X$ 的常数。在这种情况下，如果 $(X,*)$ 具有 $x*y=C$，且 $(X,\bullet)$ 具有 $x\bullet y=D$，那么这两个群胚是同构的。事实上，令 $\varphi: X\to X$ 为满足 $\varphi(C)=D$ 的任意双射，于是 $\varphi(x*y)=\varphi(C)=D=\varphi(x)\bullet\varphi(y)$。因此，集合 $X$ 上的左拟群胚和右拟群胚在群胚同构意义下是 Smarandache 不相交的。

## 3. Right feeble groups

若群胚 $(X,*)$ 满足以下条件，则称其为右弱群：

(i) 对任意 $x,y\in X$，存在 $a,b\in X$，使得 $a*x=y$，且 $b*y=x$；(ii) 对任意 $x,y,z\in X$，存在 $w\in X$，使得 $x*(y*z)=w*z$.

例 3.1. 令 $\mathbb{R}$ 为全体实数构成的集合。若在 $\mathbb{R}$ 上定义二元运算“$*$”，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，有 $x*y:=\frac{1}{2}(x+y)$，则 $(\mathbb{R},*)$ 是一个右弱群。事实上，给定 $x,y\in\mathbb{R}$，若取$a:=2y-x$，且 $b:=2x-y$，则 $a*x=y$ 且 $b*y=x$。由于 $x*(y*z)=\frac{1}{2}(x+\frac{y+z}{2})$，令 $w:=x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z$，则 $x*(y*z)=w*z$。

注意，例 3.1 中的 $(\mathbb{R},*)$ 既不是群，也不是半群。假设 $(\mathbb{R},*)$ 是一个单位元为 $e$ 的群。那么，对所有 $x\in\mathbb{R}$，都有 $x*e=x$。由此可得，对所有 $x\in\mathbb{R}$，都有 $\frac{x+e}{2}=x$，这表明对所有 $x\in\mathbb{R}$，都有 $x=e$，即 $|\mathbb{R}|=1$，这就产生了矛盾。此外，$1*(3*5)=\frac{5}{2}\neq\frac{7}{2}=(1*3)*5$。

例 3.2。设 $(X,+,\cdot)$ 是一个域，且 $\alpha,\beta,\gamma\in X$。若在 $X$ 上定义二元运算“$*$”，使得对任意 $x,y\in X$，有 $x*y:=\alpha+\beta x+\gamma y$，则 $(X,*)$ 是一个右弱群。

事实上，对于任意 $x$、$y\in X$，若令 $a:=\frac{1}{\beta}(y-\alpha-\gamma x)$，以及 $b:=\frac{1}{\beta}(x-\alpha-\gamma y)$，则很容易看出 $a*x=y$ 和 $b*y=x$。给定 $x$、$y$、$z$、$w\in X$，由于 $x*(y*z)=\alpha(1+\gamma)+\beta(x+y)+\gamma^2z$ 和 $w*z=\alpha+\beta w+\gamma x$，若取 $w:=\frac{1}{\beta}[\alpha\gamma+\beta(x+y)+\gamma(\gamma-1)x]$，则 $x*(y*z)=w*z$。这表明 $(X,*)$ 是一个右弱群。

命题 3.3。 *Every group is a right feeble group.*

证明。设 $(X,*)$ 是一个单位元为 $e$ 的群。给定 $x,y\in X$，若取 $a:=y*x^{-1}$，且 $b:=x*y^{-1}$，则 $a*x=(y*x^{-1})*x=y*(x^{-1}*x)=y$ 且 $b*y=(x*y^{-1})*y=x*e=x$。给定 $x,y,z\in X$，若令 $w:=x*y$，则 $x*(y*z)=(x*y)*z=w*z$。再次证明了 $(X,*)$ 是一个右弱群。□

命题 3.4。设 $(X,*)$ 是 $\varphi$ 上的左拟群。若 $\varphi(X) = X$，则 $(X,*)$ 是一个右弱群。

证明。给定 $x$、$y \in X$，由于 $\varphi$ 是满射，存在 $a \in X$ 使得 $\varphi(a) = y$。由于 $(X,*)$ 是 $\varphi$ 的左拟群，我们有 $a * x = \varphi(a) = y$。同样地，若取 $b \in X$ 使得 $\varphi(b) = x$，则 $b * y = \varphi(b) = x$。

给定 $x$、$y$、$z \in X$，由于 $(X,*)$ 是 $\varphi$ 的左拟群，我们有 $x*(y*z) = \varphi(x) = x * z$。□

Smarandache 的概念由 Smarandache 和 Kandasamy 在 ([8]) 中引入，他们研究了 Smarandache广群和 Smarandache Bol 群胚的概念。Padilla 在 ([9]) 中考察了 Smarandache 代数结构。Allen、Kim 和 Neggers 在 ([1]) 中将 Smaran-dache 不交性引入 $BCK/d$- 代数中。关于 Smarandache 概念的更多信息，请参阅 ([8])。
在下一个定理中，我们考虑群类和左拟群类。

定理 3.5. *The class of groups and the class of leftoids are Smarandache disjoint.*

证明. 设 $(X,*)$ 既是 $\varphi$ 的左拟群，又是一个群。那么对于任意 $x \in X$，都有 $e = x * x^{-1} = \varphi(x)$，其中 $e$ 是群 $(X,*)$ 的单位元。由此可得，对于任意 $x, y \in X$，都有 $x * y = \varphi(x) = e = x * x$。由于 $(X,*)$ 是一个群，我们得到对所有 $x, y \in X$，都有 $x = y$，从而证明$|X| = 1$。□

命题 3.6. *Let* $(X,*)$ *be a right feeble group. If* $f\colon (X,*) \to (Y,\bullet)$ *is an epimorphism of groupoids, then* $(Y,\bullet)$ *is a right feeble group.*

证明。给定 $x$、$y \in Y$，由于 $f$是满射，存在 $a$、$b \in X$，使得 $x = f(a)$，且 $y = f(b)$。由于 $(X$、$*)$ 是右弱群，存在 $p$、$q$、$r$、$s \in X$，使得 $p * a = b$、$q * b = a$、$r * b = a$，以及$s * a = b$。由此可得 $y = f(b) = f(p * a) = f(p) \bullet f(a) = f(p) \bullet x$，且 $x = f(a) = f(q * b) = f(q) \bullet f(b) = f(q) \bullet y$。

给定 $x$、$y$、$z \in Y$，由于 $f$是满射，存在 $a$、$b$、$c \in X$，使得$x = f(a)$ $y = f(b)$，且 $z = f(z)$。由于 $(X$、$*)$ 是右弱群，存在 $w \in X$，使得 $a*(b*c) = w*c$。由此可得 $x\bullet(y\bullet z) = f(a) \bullet (f(b) \bullet f(c)) = f(a*(b*c)) = f(w*c) = f(w) \bullet f(c) = f(w) \bullet z$，从而证明 $(Y$、$\bullet)$ 也是右弱群。□

命题 3.7. *Let* $(X,*)$ *and* $(Y,\bullet)$ *be right feeble groups andlet* $Z := X \times Y$. *Define* $(x,y)\triangledown(u,v) := (x*u, y\bullet v)$ *for all* $(x,y), (u,v) \in Z$. *Then* $(Z,\triangledown)$ *is also a right feeble group.*

证明。显然。 □

例3.8。令 $\mathbb{R}$ 为所有实数组成的集合，并令“+”为 $X$ 上的通常加法。于是（$\mathbb{R}$, +）构成一个群。根据命题3.2，它是一个右弱群。令 $A := [0, \infty)$。那么（$A$, +）是（$\mathbb{R}$, +）的子群拟，但不是右弱群。事实上，若假设（$A$, +）是一个右弱群，那么对于任意 $x$、$y \in A$，存在 $a$、$b \in \mathbb{R}$ 使得 $a + x = y$，且 $b + y = x$。由此可得 $y = a + x = a + (b + y)$。由于$a$、$b \in [0, \infty)$，我们得到 $a = b = 0$，从而证明对于所有 $x$、$y \in A$，$x = b + y = 0 + y = y$，这产生矛盾。□

在例3.8中，子群拟（$A$, +）不是右弱群。因此，提出如下问题：如果（$A$, $*$）是右弱群（$X$, $*$）的子群拟，那么在什么条件下（$A$, $*$）会成为右弱群?

为了解决这个问题，我们引入“可除性”的概念。

设（$X$, $*$）是一个群胚。如果 $a * x = y$ 且 $x, y \in A$，那么 $a \in A$，则称子群拟（$A$, $*$）在（$X$, $*$）中是可除的。

例3.9. (a) 设 $\mathbb{R}$ 为所有实数构成的集合，$\mathbb{Q}$ 为所有非零有理数构成的集合。在 $\mathbb{R}$ 上定义二元运算“$*$”如下：$x * y := xy$（通常乘法）。假设 $a * x = y$且 $x, y \in \mathbb{Q}$。由于 $x \neq 0$，我们有 $a = yx^{-1} \in \mathbb{Q}$，这表明（$\mathbb{Q}$, $*$）是可除的。

(b) 令 $\mathbb{R}$ 为所有实数的集合，令 $\mathbb{Z}$ 为所有整数的集合。那么 $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ 和 $4, 2 \in \mathbb{Z}$，但 $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$，这表明 $(\mathbb{Z}, *)$ 不可除。

如果 $(A, *)$ 和 $(B, *)$ 在群胚 $(X, *)$ 中可除，且如果 $a * x = y$，其中 $x$, $y \in A \cap B$，那么 $a \in A \cap B$，并且 $A \cap B \neq \emptyset$ 蕴含 $(A \cap B, *)$ 在 $(X, *)$ 中可除。

定理 3.10. *Let* $(X, *)$ *be a right feeble group. If* $(A, *)$ *is divisible in* $(X, *)$ *then* $(A, *)$ *is a right feeble group.*

证明。（i）给定 $x, y \in A$，由于 $(X, *)$ 是右弱群，存在 $a, b \in X$，使得 $a * x = y$，且 $b * y = x$。由于 $(A, *)$ 可除，且 $x, y \in A$，我们有 $a$, $b \in A$，使得 $a * x = y$，且 $b * y = x$。（ii）给定 $x, y, z \in A$，令 $u := x * (y * z)$。由于 $(A, *)$ 是 $(X, *)$ 的子群拟，我们有 $u \in A$。由于 $A$ 可除，且 $z \in A$，存在 $w \in A$，使得 $w * z = u = x * (y * z)$。因此，$(A, *)$ 是右弱群。□

## 4. Right entire and right asymmetric

设 $(X,*)$ 是一个群胚。我们定义集合 $\rho(X,*)$ 如下

$$\rho(X,*) := \{x \in X | X * x = X\}.$$

命题 4.1. *If* $(X,*)$ *is a right feeble group, then* $\rho(X,*) = X$.

证明. 对任意 $x, y \in X$，由于 $(X,*)$ 是右弱群，存在 $a, b \in X$ 使得 $y = a * x$, $x = b * y$。由此可得 $y = a * x \in X * x$。因此，对于所有 $x \in X$， $X \subseteq X * x$, 即 $X = X * x$。这意味着，对于所有 $x \in X$， $x \in \rho(X,*)$，从而证明了 $X = \rho(X,*)$。□

命题 4.1 中讨论的群胚 $(X,*)$ 称为右整。由此立即可知，右弱群是右整群。

命题 4.2. *Let* $(X,*)$, $(Y,\bullet)$ *be right entire groups and let* $Z := X \times Y$. *Define* $(x,y)\nabla(u,v) := (x*u, y\bullet v)$ *for all* $(x,y)$, $(u,v) \in Z$. *Then* $(Z,\nabla)$ *is also a right entire groupoid.*

证明。显然。 □

命题 4.3. *Let* $(X,*)$ *be a right entire groupoid. If* $f : (X,*) \to (Y,\bullet)$ *is an epimorphism of groupoids, then* $(Y,\bullet)$ *is a right entire groupoid.*

证明。给定 $x, y \in Y$，由于 $f$ 是满射，存在 $p, q \in X$ 使得 $x = f(q)$ $y = f(p)$。由于 $(X,*)$ 是右整的，存在 $r \in X$ 使得 $r * p = q$，因此 $x = f(q) = f(r * p) = f(r) \bullet f(p) = f(r) \bullet y$。这表明，对于所有 $y \in Y$， $Y = Y \bullet y$ 成立，从而证明了 $\rho(Y,\bullet) = Y$。□

命题 4.4。 *If* $(X,*)$ *is a leftoid for* $\varphi$ *and right entire, then* $\varphi(X) = X$.

证明。设 $(X,*)$ 是 $\varphi$ 的左拟群和右满广群。则对所有 $x \in X$ 都有 $X * x = X$，即存在 $b \in X$，使得对任意 $a \in X$ 都有 $a = b * x$。由于 $(X,*)$ 是 $\varphi$ 的左拟群，我们有对所有 $a \in X$, $a = b * x = \varphi(b) \in \varphi(X)$，从而证明了 $X \subseteq \varphi(X)$。□

如果群胚 $(X,*)$ 满足 $a * x = y$，并且对于某些 $a$、$b \in X$ 有 $b * y = x$，则称其为右非对称。

例4.5. 设 $X := [0,\infty)$，并且对所有 $x$、$y \in X$，有 $x * y := x + y$。则 $(X,*)$ 是右非对称的。事实上，若 $a * x = y$ 且 $b * y = x$，则 $a + x = y$，并且 $b + y = x$，从而 $y = a + x = a + (b + y) = (a + b) + y$。因此 $a + b = 0$，即 $a = b = 0$。这说明 $x = y$。

定理 4.6. *The class of right entire groupoids and the class of right asymmetric groupoids are Smarandache disjoint.*

证明。假设 $(X,*)$ 同时是右满广群和右非对称群胚。于是，对所有 $x,y\in X$，有 $X*x=X, X*y=X$。由此可得 $a*x=y$，并且对某些 $a,b\in X$，有 $b*y=x$。由于 $(X,*)$ 是右非对称的，我们得到对所有 $x,y\in X$，有 $x=y$。因此，$|X|=1$。□

## 5. Some relations

给定一个群胚 $(X,*)$，我们在 $X$ 上定义二元运算“$\leq$”，定义如下：

$$x\leq y \iff \exists a\in X \text{ s.t. } a*x=y.$$

命题 5.1. *If $(X,*)$ is a right entire groupoid, then $\leq$ isreflexive.*

证明。假设 $(X,*)$ 是右满的。于是 $\rho(X,*)=X$，即对所有 $x\in X$，有 $X*x=X$。由此可知，存在 $a\in X$，使得对任意 $x\in X$，有 $x=a*x$，即对任意 $x\in X$，有 $x\leq x$。□

命题 5.2. *A groupoid $(X,*)$ is right asymmetric if and only if $\leq$ is anti-symmetric.*

证明。设 $(X,*)$ 是一个右非对称群胚。假设 $x\leq y$and $y\leq x$。那么存在 $a,b\in X$使得 $a*x=y$，并且 $b*y=x$。由于 $(X,*)$ 是右非对称的，我们得到 $x=y$。反向结论显然成立，证明略。□

命题 5.3. *If $(X,*)$ is a right feeble group, then $\leq$ is transi-tive.*

证明。假设 $x\leq y$，并且 $y\leq z$。那么存在 $a,b\in X$使得 $a*x=y$，并且 $b*y=z$。由于 $(X,*)$ 是一个右弱群，存在 $c\in X$使得 $z=b*y=b*(a*x)=c*x$，这表明 $x\leq z$。□

命题 5.4。 *Let $(X,*)$ be a groupoid with $e\in X$ such that $e*x=x$ for all $x\in X$. Then $x\leq x$ for all $x\in X$.*

注意，“$(X,*)$ 有一个左单位元”并不意味着 $X*x=X$ 对于某个 $x\in X$。例如，令 $\mathbf{N}:=\{0,1,2,\cdots\}$。那么 $(\mathbf{N}\ +)$ 有一个单位元 0，并且对于所有 $x\in\mathbf{N}$ 都有 $0+x=x$，但 $\mathbf{N}+2=\{2,3,\cdots\}\neq\mathbf{N}$。

命题 5.5. *Let $(X,*)$ be a groupoid and let $a\in X$ such that $a*X=X$. Then there exists $x\in X$ such that $x\leq y$ for any $y\in X$.*

证明. 如果 $a * X = X$，那么存在 $x \in X$，使得对于任意 $y \in X$都有 $y = a * x$。由此可得 $x \leq y$。□

令 $\mathbf{N} := \{0, 1, 2, \cdots\}$。则 $0 + \mathbf{N} = \mathbf{N}$，因此 $y \leq y$对所有$y \in \mathbf{N}$。

命题 5.6。 *Let* $(A, *)$ *be a divisible subgroupoid of a groupoid* $(X, *)$ *. If* $x, y \in A$ *such that* $x \leq y$ *in* $(X, *)$ *then* $x \leq y$ *in* $(A, *)$。

证明。令 $x, y \in A$，使得 $x \leq y$属于 $(X, *)$。则存在$a \in X$使得 $a * x = y$。由于 $(A, *)$ 是可除的，且 $x, y \in A$，我们有 $a \in A$，即 $x \leq y$ 属于 $(A, *)$。□

定理 5.7。 *Let* $(X, *)$ *be a right entire groupoid. If* $(A, *)$ *is a divisible subgroupoid of* $(X, *)$ *then* $(A, *)$ *is right entire.*

证明。给定 $a \in A$，由于 $(X, *)$ 是右整的，我们有 $X * a = X$。因此，存在 $y \in X$，使得对于任意 $x \in A$，都有 $x = y * a$。由于 $(A, *)$ 是可除的，我们得到 $y \in A$，从而 $x = y * a \in A * a$。因此，对于所有 $a \in A$，都有 $A \subseteq A * a$。显然，$A * a \subseteq A$，这就证明了对于任意 $a \in A$，都有 $A = A * a$。□

命题 5.8。 *Let* $(X, *)$ *be a right asymmetric groupoid. If* $(A, *)$ *is a divisible groupoid in* $(X, *)$ *then* $(A, *)$ *is also right asym-metric.*

证明。若 $x, y \in A$，则 $x, y \in X$。由于 $(X, *)$ 是右非对称的，若 $a * x = y$，且对于某个 $a, b \in X$，有 $b * y = x$，则 $x = y$。我们证明 $a, b \in A$。考虑 $a * x = y$。由于 $x, y \in A$，且 $A$ 是可除的，我们得到 $a \in A$。类似地， $b \in A$。因此，$(A, *)$ 是右非对称的。□

命题 5.9. *Let* $(X, *)$ *be a group with identity* $e$*. Then every subgroup* $(A, *)$ *of* $(X, *)$ *is divisible.*

证明. 设 $x, y \in A$，使得 $a * x = y$ 对某个 $a \in X$成立。由此可得 $a = y * x^{-1} \in A$，因为 $(A, *)$ 是 $X$ 的子群。这表明 $(A, *)$ 在 $(X, *)$ 中是可除的。□

## References

[1] P. J. Allen、Hee Sik Kim 和 J. Neggers，Smarandache 不相交的 $BCK/d$-代数，《Sci. Math. Japo.》61（2005年），447-449。[2] P. J. Allen、Hee Sik Kim 和 J. Neggers，由二元函数诱导的若干类型的群胚，Springer Plus 5（2016年），1715-1725。[3] H. Fayoumi，局部零群胚与 $Bin(X)$的中心，Comm. Korean Math. Soc. 26（2011年），163-168。[4] M. H. Hooshmand，类群，《Bull. Iranian Math. Soc.》39（2013年），65-86。

[5] Hee Sik Kim 和 J. Neggers，二元系统的半群及若干展望，《韩国数学会会报》45（2008年），651-661。[6] J. Neggers 和 Hee Sik Kim，关于 $d$-代数，《斯洛伐克数学》49（1999年），19-26。[7] G. Wu 和 Y. H. Kim，预群与预-$B$-代数，《应用数学与信息学杂志》36（2018年），51-57。[8] W. B. V. Kandasamy，群胚与Smarandache广群，American Re- searchPress，雷霍博斯，2002年。[9]R. Padilla，Smarandache 代数结构，《纯粹与应用科学通报》17（1988年），119-121。

H. Fayoumi, Department of Mathematics and Statistics, Universityof Toledo, Toledo, OH 43606-3390, U. S. A.电子邮件地址：hiba.fayoumi@UToledo.eduHee Sik Kim, Department of Mathematics, Hanyang University,Seoul, 04763, Korea电子邮件地址：heekim@hanyang.ac.kr