arXiv:2304.11795v1 [math.CO] 24 Apr 2023

分数永恒支配：在网络中安全地分配资源

Fnu Devvrit[1], AaronKrim-Yee[2], Nithish Kumar[3], Gary MacGillivray[4], Ben Seamone[5,6], 维尔格´维尔吉洛[4], 和 AnQi Xu[7]

[1]德克萨斯大学奥斯汀分校计算机科学系，奥斯汀，德克萨斯州，美国[2]麦吉尔大学生物工程系，蒙特利尔，魁北克省，加拿大[3]普渡大学计算机科学系，西拉斐特，印第安纳州，美国[4]维多利亚大学数学与统计系，维多利亚，不列颠哥伦比亚省，加拿大[5]道森学院数学系，蒙特利尔，魁北克省，加拿大[6]DIRO，蒙特利尔大学´，蒙特利尔，魁北克省，加拿大´蒙特利尔大学医学院[7]，´蒙特利尔，魁北克省，加拿大，

2023年4月25日

摘要

本文开启了对图上的分数永恒支配的研究，这是对广受研究的永恒支配问题的一种自然松弛。我们研究其与流和线性规划的联系，以获得关于确定图 G 的分数永恒支配数的复杂性结果，该数记作 $\gamma_f^\infty(G)$。我们研究 $\gamma_f^\infty(G)$ 的性质及其与其他支配参数的关系。我们还确定了 $\gamma_f^\infty(G)$ 的界，并在某些情况下求得其精确值；其中 G 属于若干重要图类，包括树、分裂图、强弦图、Kneser 图、阿贝尔凯莱图和图乘积。

1 引言

设 $G = (V, E)$ 为一个图。我们用 $N_G(u)$ 表示$u \in V(G)$ 的（开）邻域，即与 u 在 G 中相邻的顶点集合（若上下文已明确 G，也可写作 $N(u)$）。u 的闭邻域为 $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$。集合 $X \subseteq V(G)$ 的闭邻域为 $N_G[X] = \cup_{u \in X} N_G[u]$

电子邮箱：devvrit@cs.utexas.edu, aaron.krim-yee@mail.mcgill.ca, kumar410@purdue.edu, gmacgill@uvic.ca,bseamone@dawsoncollege.qc.ca, virgilev@uvic.ca, an.qi.xu@umontreal.ca

（开邻域也可类似定义）。若集合 $X \subseteq V(G)$ 满足 $N_G[X] = V(G)$，则称其为支配集。 G 中最小支配集的基数记为 $\gamma(G)$；此参数称为G 的支配数。图的支配数有一种广为研究的变体，称为分数支配数（例如参见 $[8, 9]$）。 G 的分数支配函数是一个函数 $w\colon V(G) \to \mathbb{R}$，满足对所有 $v \in V$， $\sum_{x \in N[v]} w(x) \geq 1$。 w 的总权重为 $\sum_{x \in V} w(x)$。若存在一个 G 的分数支配函数，其总权重小于或等于 S，则称图 G 为 S-分数支配的。 G 的分数支配数是 G 的分数支配函数的最小总权重；该参数记为 $\gamma_f(G)$。

近年来，许多论文研究了图“保护”的动态模型，其中代理以某种能够响应“攻击”的方式在图中移动。关于与图支配相关的模型综述，读者可参阅 [12] ，其中既包括已知结果，也包括许多有趣的猜想。本文的工作沿袭了一条研究路线，其起点是 [3], ，该文引入了“永恒支配”模型。我们将该模型描述为一个由防守者和攻击者进行的双人博弈。防守者控制一组守卫，这些守卫占据 $V(G)$ 的某个子集（通常不允许一个顶点被多个守卫占据）。攻击者将攻击图中的某个顶点，这迫使防守者对该攻击作出回应。更确切地说，防守者选择某个集合 $D_1 \subseteq V(G)$作为守卫的起始位置，并在攻击者第 i回合的游戏行为作出响应时，选择后续的集合 D_{i+1}、 $i \geq 1$（这有时被称为该博弈的自适应在线模型）。对于每个 $i \geq 1$，攻击者在第i回合的行动是选择某个顶点 $v_i \notin D_i$。随后，防守者必须选择某个顶点 $u_i \in D_i$，使得 $v_i \in N(u_i)$，并设置 $D_{i+1} = D_i \cup \{v_i\} \setminus \{u_i\}$。防守者的目标是能够应对任意无限攻击序列。如果防守者能够从某个集合 D_1开始获胜，则称 D_1 为永恒支配集；注意，这样的集合 D_1 （以及后续的每个 D_i）必然是支配集。 G的永恒支配数记为 $\gamma^\infty(G)$，它是 G中永恒支配集的最小基数。回顾一下，G 中的团是 $V(G)$的一个子集，其元素两两相邻；独立集（或稳定集）是 $V(G)$的一个子集，其元素两两不相邻。 G的团覆盖数记为 $\theta(G)$，是 G 中若干个团的集合的最小基数，且这些团的并为 $V(G)$。G的独立数记为 $\alpha(G)$，是 G 的独立集的最大基数。不难论证（见 [6]），

$$\alpha(G) \leq \gamma^\infty(G) \leq \theta(G).$$

可以考虑一种相关模型：响应攻击时，不再只移动一名守卫，而是可以通过在相邻顶点之间移动任意数量的守卫来重新配置 D_i 为 D_{i+1} ，

只要受到攻击的顶点能得到一名守卫即可。这称为 m-永恒支配模型（在 [6], 中引入），而能够防御任意攻击序列的初始顶点集合称为 m-永恒支配集。m-永恒支配集的最小基数记为 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G)$，称为$G$的 m-永恒支配数。显然， $\gamma(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G)$。通过巧妙应用 Hall定理， [6], 中给出的结果表明， $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \alpha(G)$; 因此我们得到如下基本不等式链:

$$\gamma(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \alpha(G) \leq \gamma^{\infty}(G) \leq \theta(G).$$

我们考虑一种永恒支配模型，它可以视为 m-永恒支配的分数松弛形式，称为分数永恒支配*。我们为 $V(G)$ 分配非负实权重，使得在固定值 S 下维持 S-分数支配，并应对顶点攻击。在时间步 i ，将顶点 v 上的权重记为 $w_i(v)$，并将顶点 v 的初始权重 $w_1(v)$ 记作 $w(v)$。在 v_i 发生第 i 次攻击后，防守者可以将权重从任意顶点 x 移动到 $N(x)$ 中的顶点。若$m_{xy,i}$ 表示在第 i 回合中从 x 移动到 y 的权重，则我们只要求 $\sum_{y \in N(x)} m_{xy,i} \leq w_i(x)$。防守者可以同时对任意数量的顶点执行此操作，但所得权重函数 w_{i+1} 必须以 S-分数支配该图，并且 $w_{i+1}(v_i) \geq 1$。我们将 $\gamma_f^{\infty}(G)$ 定义为所有使 G 能够永恒地实现 S-分数支配的 S 的下确界，并称其为 G 的分数永恒支配数。注意，如果将上述描述中的所有量限制为整数，就会得到 m-永恒支配模型。

在第 2 节中，我们从线性规划的角度研究分数永恒支配。第3节考察 $\gamma_f^{\infty}(G)$ 的一些基本性质，特别是其与其他支配参数的关系。在第 4、5 和 6 节中，我们确立了 $\gamma_f^{\infty}(G)$ 在 G 属于若干重要图类时的性质。

2 线性规划和重新配置

我们首先从线性规划的角度考察分数永恒支配问题，并给出能够高效计算图的分数永恒支配数及防守策略的条件。

*该模型也可以称为 $fractional\ \mathrm{m}\text{-}eternal\ domination$，从而允许对单守卫移动模型进行分数松弛。为简洁起见，全文省略“m-”这一前缀。

设 G为一个具有 $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$的图，并为顶点 i赋予一个变量 x_i。记为 $N_i = N[i]$，对于 $S \subseteq V(G)$，令 $N_S = \cup_{i \in S} N_i$。不失一般性，我们可以假设顶点 1 首先受到攻击。此时，量 $\gamma_f^{\infty}(G)$ 必须至少等于以下线性规划的解；该线性规划对应于一个分数支配集中权重总和的最小值，并要求顶点 1 的权重至少为 1：

$_n$最小化 $\sum x_i$ 满足约束$_{i=1}$

- $x_1 \geq 1$
- $x_i \geq 0$ 对所有 $i = 2,$ ....., n
- $\sum_{j \in N_i} x_j \geq 1$ 对所有 $i = 2,$ .....,

n。

设 w_1 和 w_2 是 G 的分数支配函数，且具有相同的总权重。如果对于 $1 \leq i \leq n$，权重$w(i)$可以重新分配给 $N[i]$ 中的顶点，使所得的分数支配函数为 w_2，则称 w_1 可以重新配置为 w_2。

设$N_{w_1,\ w_2}$为顶点集 $V(N_{w_1,\ w_2}) = \{s, t\} \cup \{1, 2, \ldots, n\} \cup \{1', 2', \ldots, n'\}$ 和弧集 $A(N_{w_1,\ w_2}) = \{si : \ 1 \leq i \leq n\} \cup \{ij' : \ j \in N_G[i]\} \cup \{i't : 1 \leq i' \leq n\}$构成的网络。弧 si 的容量为 $w_1(i)$ $1 \leq i \leq n$。弧 $i't$ 的容量为 $w_2(i')$ $1 \leq i' \leq n$。集合 $\{ij'$ 中的每条弧 $j \in N_G[i]\}$ 都具有无限容量。

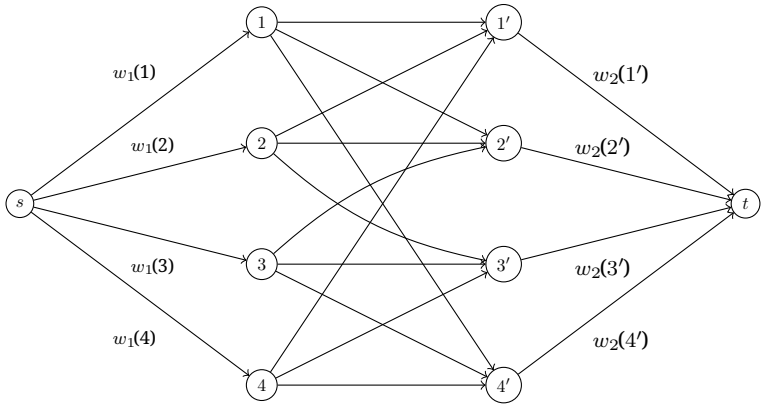

图1：重配置网络 $N_{w_1,\ w_2}$ 对于 C_4，其中 $V = \{1, 2, 3, 4\}$、 $E =$$\{12, 23, 34, 14\}$

下面的引理可由流的定义轻易推出。

引理2.1. 设 G 是一个满足 $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$的图。设 w_1 和 w_2 是 G 的分数支配函数，且总权重相同。当且仅当在$N_{w_1,\ w_2}$ 中存在一条从 s 到 t 的流时， w_1 才能重新配置为 w_2 ，其中

$_n$值 $\sum w_1(i)$。
$_{i=1}$

在分数永恒支配问题中，要防御来自 G 的无限攻击序列，需要一组总权重相同的分数支配函数，使得：

1. 对于每个 i，$1 \le i \le n$ 至少存在一个函数，使分配给顶点 i 的权重至少为1；2. 对于集合中的每个分数支配函数 w 以及每个j、$1 \le j \le n$，集合中存在一个分数支配函数 w_j，使分配给顶点 j 的权重至少为1，并且 w 可以重新配置为 w_j。

由此可知，存在 n 个总权重相同的分数支配函数 w_1、w_2、.....、w_n（不一定彼此不同），并且满足 w（i）$=1$、$1 \le i \le n$。如果我们进一步规定其中每个函数都可以重新配置为集合中的任意其他函数，那么，存在这样一组分数支配函数时的最小总权重，就是分数永恒支配数的一个上界。我们证明了，该量可以通过求解一个带有有理数约束条件的线性规划来确定，因此是有理数。

设 G 是一个具有 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$的图，并设 w 是 G的分数支配函数。则 w 对应于一个 n元组 $X = (x_1, x_2, .., x_n)$，其中$x_i = w(i)$。在本文中，我们将交替使用函数记号和 n元组记号，并称 X 为分数支配函数。

对于 $1 \le i \le n$，$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, .., x_{in})$，并令 FDS_i 表示对应于 X_i 为分数支配函数的那组不等式：

$$\mathrm{FDS}_i: \quad x_{ii} = 1, \text{ and } \sum_{j \in N_G[k]} x_{ij} \ge 1, \quad 1 \le k \le n.$$

对于 $1 \le i$，$j \le n$ 和 $i \ne j$，令 $\mathrm{RECONFIG}^{ij}$ 表示线性规划中的约束条件集合，该线性规划用于确定在 $N_{X_i,\ X_j}$中从 s 到 t 的最大流值，并附加流值为 $_n\sum x_{i\ell}.$ 这一约束条件。
$_{\ell=1}$

根据上述讨论，以下线性规划 A 的最优解为分数永恒支配数提供了一个上界，而由 X_1、X_2、.....、X_n 组成的、具有给定总权重的分数支配函数集合可用于防守 G。

$$A: \quad \textbf{Minimize} \sum_{j=1}^{n} x_{1j} \text{ subject to}$$

- $\mathrm{FDS}_i, \quad i = 1, \ldots, n$
- $\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}, \quad i = 2, \ldots, n$
- $\mathrm{RECONFIG}_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \text{ and } i \neq j$
- $x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n$

如果线性规划 A 的最优解等于 γ_f^∞，那么我们称 G 可以由 n个分数支配函数实现永恒分数支配。

由于线性规划中的约束条件数量 A 关于 n是多项式的，且线性规划问题可在多项式时间内求解，因此我们有如下结论：

命题 2.2. 如果 G 可以由 n个分数支配函数实现永恒分数支配，则 $\gamma_f^\infty(G)$ 以及实现永恒分数支配G 的策略可以在多项式时间内计算得到。此外， $\gamma_f^\infty(G)$ 是一个有理数。

我们将在后文证明，命题 2.2 适用于分裂图。

3 $\gamma_f^\infty(G)$的性质

本节将 $\gamma_f^\infty(G)$与引言中给出的某些支配参数进行比较，并探究 $\gamma_f^\infty(G)$可能具有哪些数值。我们先从一些显然的命题开始。

命题 3.1. 对于任意图 G， $\gamma_f(G) \leq \gamma_f^\infty(G) \leq \gamma_m^\infty(G)$。

要看出 $\gamma_f^\infty(G)$ 的另一个上界，注意到将 $V(G)$ 上一个最小分数支配函数中每个顶点的权重加倍，可以得到一种直接的防守策略——设 w_1 是一个权重为 $\gamma_f(G)$ 的分数支配函数，并初始令 $w_2 = w_1$。在奇数时间步发生攻击后，将 w_1 中的权重移来进行响应，同时将 w_2 中的权重恢复到其初始分配。类似地，在偶数时间步发生攻击后，将 w_2 中的权重移来进行响应，同时将 w_1 中的权重恢复到其初始分配。

命题 3.2. 对任意图 G， $\gamma_f^\infty(G) \leq 2\gamma_f(G)$。

注意到命题 3.2 中的界是紧的，也就是说，对每个 $k \geq 1$，都存在一个图 G，使得 $\gamma_f^\infty(G) = 2k$ 且 $\gamma_f(G) = k$。设 G 是由路径 $P = v_1 v_2 \cdots v_{3k}$ 得到的图：对每个 $i \equiv 2$ (模 3)，在 v_i 上添加两个叶子顶点 $\{x_i, y_i\}$。容易验证 $\gamma_f(G) = k$。攻击 x_{3r+2} 后，y_{3r+2} 需要 $N_G[v_{3r+2}]$ 中至少存在总权重 2，因此可推出 $\gamma_f^\infty(G) \geq 2k$。

根据 $\gamma_f^\infty(G)$ 的定义，$\gamma_f^\infty(G)$ 可能不是整数，甚至可能不同于

命题 3.1。我们将展示如何构造出一些图的无限族，使其 $\gamma_f^\infty(G)$ 的值不是整数，并且也不同于命题 3.1 中的界。

在继续之前，我们先指出以下显而易见的观察。

命题 3.3. 如果 G 不是完全图，则 $\gamma_f^\infty(G) \geq 2$。

证明。设 $x, y \in V(G)$ 不相邻。如果 x 受到攻击，则 $w(x) \geq 1$。为了使 y受到守卫， $w(N[y]) \geq 1$。由于 $x \notin N[y]$，结论成立。 □

我们的构造表明， $\gamma_f^\infty(G)$ 的任何可取有理值（即，在完全图的情况下等于 1，在非完全图的情况下至少为 2 ）都是可能的。

定理 3.4. 对于任意有理数 $q > 2$，存在一个图 G ，使得 $\gamma_f(G) < \gamma_f^\infty(G) < \gamma_{\mathrm{m}}^\infty(G)$，并且 $\gamma_f^\infty(G) = q$。

证明。对于两个正整数 $t \geq d$，令 $X = [t]$ 和 $Y = \binom{[t]}{d}$。令 Y' 为一个基数为 $\binom{t}{d}$ 的集合，其中包含每个元素 $y \in Y$的一个副本 y' 。记 $\mathcal{G}_{t,d}$ 为如下的图：取一个在 X 上的完全图，并在 $x \in X$ 与 $y \in Y$之间添加一条边，且当且仅当 $x \in y$时在 $x \in X$ 与 $y' \in Y'$之间添加一条边，从而得到具有 $V = X \cup Y \cup Y'$ 的图。我们首先证明 $\gamma_{\mathrm{m}}^\infty(\mathcal{G}_{t,d}) = t - d + 2$。文献[2] 表明，一个分裂图 G 满足 $\gamma_{\mathrm{m}}^\infty(G) \in \{\gamma(G), \gamma(G)+1\}$，并且 $\gamma_{\mathrm{m}}^\infty(G) = \gamma(G)$，当且仅当独立集中的每个顶点都是支配临界的。由于需要从 t-集合中取出 $t - d + 1$ 个元素，才能充分且必要地命中每个 d-子集，因此我们有 $\gamma(\mathcal{G}_{t,d}) = t - d + 1$。由于 $Y \cup Y'$ 是独立集，且该集合中没有顶点是支配临界的（每个顶点都有一个“孪生顶点”，即具有相同邻域的顶点），因此 $\gamma_{\mathrm{m}}^\infty(G) = \gamma(G) + 1 = t - d + 2$。

我们现在断言， $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}_{t,\ d}) = 1 + \frac{t}{d}$。我们允许分数永恒支配函数有两种可能的类型。在这两种类型中， X中的每个顶点都被赋予 $\frac{1}{d}$ 的权重。随后，我们可以选择将额外的权重1加到 X 中的某个顶点上（状态1），或者在 $Y \cup Y'$ 中的某个顶点上放置权重1（状态2）。在下文的论证中，我们用 z 表示权重至少为1的顶点。

假设我们处于状态1，并且 $x \in X$处发生攻击。由于 z 和 x 相邻，因此可以很容易地将权重1从 z 传递到 x 。如果 $y \in Y \cup Y'$ 受到攻击，则其每个邻点发送权重$\frac{1}{d}$ ，而 z 向每个邻点 y发送 $\frac{1}{d}$ 。如果我们处于状态2，那么 X 中的攻击可以采用与前一种情况类似的方式处理。如果 $y \in Y \cup Y'$处发生攻击，则 z 向其每个邻点发送 $\frac{1}{d}$， N中的顶点（z）$\setminus N$（y）向 N中的顶点（y）$\setminus N$（z）发送权重 $\frac{1}{d}$（由于所有顶点都在 X中，这一点很容易实现），而 N中的所有顶点（y）向 y发送 $\frac{1}{d}$ 。在所有情况下，我们最终都处于状态1或状态2。

为了证明不存在总权重更低的权重分配，我们只需指出，任何降低 X 中某个顶点权重的尝试，都需要将 X 中其他顶点的权重至少增加同等的量，以

维持对 Y 的支配；而且无需给 Y 中的顶点分配权重，因为它们的闭邻域包含在 X 中顶点的闭邻域内。因此

- $\gamma_f(\mathcal{G}_{t,d}) = \frac{t}{d}$,
- $\gamma_f^{\infty}(\mathcal{G}_{t,\ d}) = 1 + \frac{t}{d}$，并且
- $\gamma^{\infty}{}_{\mathrm{m}}(\mathcal{G}_{t,\ d}) = \gamma(\mathcal{G}_{t,\ d}) + 1 = t - d + 2$。 □

在证明了 $\gamma_f^{\infty}(G)$ 可以取任意可取有理值之后，我们现在注意到，可以轻易地修改 $\mathcal{G}_{t,\ d}$ 的构造，从而得到一个无限图族，使得对于 q 的任意可取有理值，均有 $\gamma_f^{\infty}(G) = q$。

定理 3.5。对于任意有理数 $q \geq 2$，存在一个无限图族 $\mathcal{G}_q$，使得对每个 $G \in \mathcal{G}_q$，均有 $\gamma_f^{\infty}(G) = q$。

证明。设 $q = t/d + 1$，并假设 $V(\mathcal{G}_{t,\ d})$ 可划分为一个团 X 和一个独立集 Y。令 $\mathcal{G}_q$ 表示由 $\mathcal{G}_{t,\ d}$ 得到的图族：将每个 $y \in Y$ 替换为任意图 H_y，并将 H_y 的每个顶点与 $N_{\mathcal{G}_{t,\ d}}(y)$ 相连。应用定理 3.4 证明中的相同论证可知，对于任意 $G \in \mathcal{G}_q$，均有 $\gamma_f^{\infty}(G) = \gamma_f^{\infty}(\mathcal{G}_{t,\ d}) = 1 + \frac{m}{n} = q$。 □

鉴于我们在第 2 节中对线性规划的讨论，我们也为 $\gamma_f^{\infty}(G)$ 给出一个线性规划下界。对于给定的图 G，记$f(v)$为分数支配函数 D_v 的最小总权重，其中分配给顶点 v 的权重至少为 1（注意，$f(v)$可以通过线性规划在多项式时间内计算）。令 $F(G) = \max\{f(v) : v \in V\}$。

命题 3.6. 对于任意图 G，$\gamma_f^{\infty}(G) \geq F(G)$。

现在我们来比较 $\gamma_f^{\infty}(G)$ 和 $\gamma(G)$，它们都以下界 $\gamma_f(G)$为下界，并以上界 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G)$为上界。稍后我们将看到，对于某些图类，$\gamma_f^{\infty}(G) \geq \gamma(G)$（见推论 4.10 和 4.11）；不过，我们在此证明，这两个参数通常不可比较。

回顾命题 3.2，对于任意图 G，我们都有 $\gamma_f^{\infty}(G) \leq 2\gamma_f(G)$，因此 $\gamma_f^{\infty}(G) \leq 2\gamma(G)$。换言之，就 $\gamma(G)$ 而言，$\gamma_f^{\infty}(G)$ 不可能无限增大。另一方面，定理 3.4 中的构造 $\mathcal{G}_{t,\ d}$ 以及定理 3.5 中对其所作的修改给出了如下结果：

推论 3.7。对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及任意有理数 $q \geq 2$，存在一个无限图族 $\mathcal{G}_q$，使得对于每个 $G \in \mathcal{G}_q$，都有 $q = \gamma_f^{\infty}(G) < \varepsilon\gamma(G)$。

证明。设 $\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$ 为某个足够大的整数，$q = \frac{t}{d} + 1$ 其中 $\frac{t}{d}$ 采用既约形式，$t' = \alpha t$，且 $d' = \alpha d$。考虑定理 3.5 中构造的图族 $\mathcal{G}_q$，用参数 t' 和 d' 代替 t 和 d，

分别。令 $G \in \mathcal{G}_q$。我们有 $\gamma_f^\infty(G) = \frac{t'}{d'} + 1 = \frac{t}{d} + 1$，且 $\gamma(G) = t' - d' + 1 = \alpha(t - d) + 1$。如果 α 足够大，那么 $\frac{t}{d} + 1 < \varepsilon(\alpha(t - d) + 1)$，如所需。

□

推论 3.7 还立即意味着 $\gamma_f^\infty(G)$ 可以是 $\gamma_{\mathrm{m}}^\infty(G)$ 的任意小的分数。此外，定理 3.5 中的构造表明，对于任意图 H，都存在一个包含 H 作为诱导子图的图 G，使得 $\gamma_f^\infty(G) < \varepsilon\gamma(G)$。

最后，尽管比值 γ_f^∞ / γ 不可能变得无界大，但差值 $\gamma_f^\infty(G) - \gamma(G)$ 可以任意大——在下一节中，我们将证明 $\gamma_f^\infty(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$，而对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$。

4 基本图类

对于某些特定的图类，$\gamma_f^\infty(G)$ 的精确值很容易计算（证明留给读者）。要防守一个完全图，在任意顶点上放置权重 1 是必要且充分的。要防守一条路径，考虑对一个最大独立集“从左到右”进行攻击的序列，可以看出交替顶点上的权重为 1 是必要且充分的。对于圈，已知（例如参见 [6]）$\gamma_{\mathrm{m}}^\infty(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$，因此 $\gamma_f^\infty(C_n) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$。要证明 $\gamma_f^\infty(C_n) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$，注意到总权重小于 $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ 不足以依次应对沿圈每隔三个顶点发起的攻击。

命题 4.1。对于任意 $n \in \mathbb{N}$:

1. $\gamma_f^\infty(K_n) = 1.$
2. $\gamma_f^\infty(P_n) = \alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$
3. $\gamma_f^\infty(C_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ *if* $n \geq 3.$

命题 4.2。如果 G 有一个万能顶点，或者 G 的每条边都是支配边，那么 $\gamma_m^\infty(G) \leq 2$，因此 $\gamma_f^\infty(G) \leq 2$。

由于完全多部图中的每条边都是支配边，因此很容易得到以下结果。

推论 4.3。对于所有正整数 n_1、n_2、.....、n_k，其中 $n_k \geq 2$、$\gamma_f^\infty(K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = 2$。

最后，我们给出 G 为树时 $\gamma_f^\infty(G)$ 的精确值，并指出文献 [11] 给出了一个线性时间算法，可计算任意树 T 的 $\gamma_{\mathrm{m}}^\infty(T)$。

命题 4.4. 对任意树 T, $\gamma_f^\infty(T) = \gamma_m^\infty(T)$.

证明. 我们对树的阶 n 使用归纳法来证明这一点。情形 $n = 1, 2$ 显然成立。设 T 是一棵阶为 $n > 2$ 的树，并假设该命题对所有阶严格小于 n的树都成立。若 T 是一棵星树，则结论成立。设 T 不是星树。由命题 3.1 可知，只需证明 $\gamma_f^\infty(T) \geq \gamma_{\mathrm{m}}^\infty(T)$。回顾一下，顶点的离心率是该顶点到其他所有顶点的最大距离。由于 T不是星树， T中有一个离心率至少为 2、且与至少一个叶子顶点相邻的顶点。设 x 是离心率最大的此类顶点。若 x 恰好与一个叶子顶点 y相邻，则必须始终在 x 和 y 上维持总和至少为 1 的权重；删除 x和 y后得到的树 T'满足 $\gamma_f^\infty(T') = \gamma_{\mathrm{m}}^\infty(T') = \gamma_{\mathrm{m}}^\infty(T) - 1$。若 x 与至少两个叶子顶点相邻，则必须始终在 x 的闭邻域中维持总和至少为 2 的权重；删除这些叶子顶点后得到的树T'满足 $\gamma_f^\infty(T') = \gamma_{\mathrm{m}}^\infty(T') = \gamma_{\mathrm{m}}^\infty(T) - 1$。两种情况下，结论均成立。

□

4.1 分裂图

回顾一下，如果一个图的顶点集可以划分为一个团和一个独立集，则称其为分裂图。

定理 4.5. 如果 G是分裂图，那么 $\gamma_f(G) \leq \gamma_f^\infty(G) \leq 1 + \gamma_f(G)$。

证明。下界是显然的（命题 3.1），因此我们只需证明上界。设 $X \cup Y$是 $V(G)$ 的一个划分，其中 X 是一个团， Y 是一个独立集。先在 G上取一个分数支配函数，记为 w；注意，这恰好是 $\left\{\sum_{u\in N}(y)w(u) \geq 1 \mid y \in Y\right\}$的一个解。给某个任意顶点额外分配权重 1。我们证明，在任意攻击之后，都可以维持分数支配函数 w ，同时让某个任意顶点额外获得权重 1； z 始终表示这个特殊顶点。首先，假设攻击发生在 $x \in X$处。如果 $z \in X$，则 z 向 x发送 1。如果 $z \in Y$，则 $N(z)$ 向 x发送总权重 1，而 z 将其权重 1 重新分配给 $N(z)$，从而恢复 w 。于是，假设攻击发生在 Y中。如果 $z \in X$，则 $N(y)$ 将其总权重 1 发送给 y，而 z 将其权重 1 发送给 $N(y)$，以恢复 w。如果 $z \in Y$，则 $N(y)$ 向 y发送总权重 1， $N(z)$ 向 $N(y)$ 发送总权重 1，以恢复这些顶点上的 w（注意，如果 $N(y) \cap N(z) \neq \emptyset$，则某个顶点可能会向自身发送权重），并且 z 将其权重 1 发送给 $N(z)$，以恢复这些顶点上的 w 。

□

回顾第3节中 $F(G)$ 的定义： $F(G) = \max\{f(v) : v \in V\}$其中，对于每个顶点 $v \in V(G)$，量 $f(v)$ 是分数支配函数的最小总权重，其中分配给顶点 v 的权重至少为 1。

命题4.6. 设 G 是一个分裂图。那么 $\gamma_f^\infty(G) = F(G)$。

证明. 设 G 是一个分裂图。设 $X \cup Y$ 是 V 的一个划分，其中 X 是一个团， Y 是一个独立集。

我们将证明， G 可以由 n个分数支配函数实现永恒分数支配。对于每个 $v \in V$，令 D_v 为 G的总权重最小的分数支配集，其中分配给顶点 v 的权重至少为 1。由于分配给 v 的任何多余权重都可以任意重新分配给其在 X中的邻点，因此不失一般性地， Y中的每个顶点（如果 $v \in Y$则 v 除外）在 D_v中的权重均为 0。

考虑分数支配函数 D_u 和 D_w。要将D_u 重新配置为 D_w，同时进行以下操作：(i) 顶点 u 将其权重发送给其邻点；(ii) 顶点 w 从其邻点处接收权重 1；(iii) 分配给 X 中的顶点、既未用于(ii)也未在(i)中分配的权重，按照D_w 进行重新分配（这是可行的）。

因此，对于所有 u、 $w \in V$，集合 D_u 都可以重新配置为 D_w。由此， G 可以由 n 个分数支配函数实现分数永恒支配，每个函数的总权重为 F（G）。因此 $\gamma_f^\infty = F$（G），证明完毕。 □

推论 4.7. 如果 G 是一个分裂图，那么 γ_f^∞ 以及一个永恒分数支配 G 的策略可以在多项式时间内计算出来。此外， γ_f^∞ 是一个有理数。

相比之下，判断给定的哈密顿分裂图的永恒支配数是否至多为给定整数 k 的问题是 NP 完全 [2]。

如果顶点 v 在图 G 中满足 $\gamma_f(G - v) < \gamma_f(G)$，则称其为分数支配临界顶点（简称分数支配临界顶点）。如果顶点 v 满足 $\gamma_f(G) - \gamma_f(G - v) = 1$，则称其为完全分数支配临界顶点。注意，“完全”并非无意义的附加词；如果 $G = \mathcal{G}_{t,\ d}$ 对于 t, d，那么 G 就是一个包含至少一个分数支配临界顶点 v 的图，对于该顶点有 $\gamma_f(G) - \gamma_f(G - v) < 1$。

命题 4.8. 设 G 是一个非完全分裂图。设 V 的一个划分为 X 和 Y，其中 X 是一个团， Y 是一个独立集。那么 $\gamma_f^\infty = \gamma_f$ 当且仅当 X 中的每个顶点都与 Y 中的一个顶点相邻，并且 Y 中的每个顶点都是完全分数支配临界的。

证明. 注意，由于 G 不是完全图，集合 $Y \neq \emptyset$。

假设 $\gamma_f^\infty = \gamma_f \geq 2$。我们将证明 X 中的每个顶点都与 Y 中的一个顶点相邻，并且 Y 中的每个顶点都是完全分数支配临界的。

首先，假设存在一个顶点 $x \in X$，使得 $N(x) \cap Y = \emptyset$。令 D_x为 G 的一个分数永恒支配集，其中分配给 x 的权重至少为 1。不失一般性， Y中的所有顶点在D_x中的权重均为 0。但此时，将 D_x 限制在 $G - x$ 上，所得集合是 $G - x$的一个分数支配集，因此也是 G的一个分数支配集（因为 $x \in X$），这与假设 $\gamma_f^\infty = \gamma_f$矛盾。因此， X 中的每个顶点都与 Y中的一个顶点相邻。

令 $y \in Y$。那么，对于任意顶点 $y \in Y$，都存在一个分数（永恒）支配集 D_y，其中分配给 y 的权重为 1（分配给 y 的任何多余权重都可以任意重新分配给其邻点）。由于 $N(y) \subseteq X$，集合 $D_y - \{y\}$ 是 $G - y$的一个分数支配集，因此 y 是完全分数支配临界的。

现在证明逆命题。假设 X 中的每个顶点都与 Y 中的某个顶点相邻，并且 Y 中的每个顶点都是完全分数支配临界的。那么，对于任意 $y \in Y$，都存在一个分数支配集，使得分配给 y 的权重等于 1。为此，取 $G - y$ 的一个分数支配集，并通过给 y分配权重 1，将其扩展为 G 的一个分数支配集。由于 y 是完全分数支配临界的，这是一个总权重为 γ_f 的 G 的分数支配集。对于任意 $x \in X$，都存在一个分数支配集，使得分配给 x 的权重至少为 1——令 y 属于 $N(x) \cap Y$，并取上述分数支配集且给 y分配权重 1，将分配给 y 的权重加到 x的权重上，并给 y分配权重 0。因此 $\gamma_f(G) = F(G)$，结论由命题4.6得出。

□

4.2 打包与强弦图

图G 的距离-2顶点打包（以下简称2-打包）是一个集合 $P \subseteq V$（G），满足对于任意不同的 x、$y \in P$，x 到 y 的距离至少为3。显然，γ_f^∞（G）$\geq \max\{|P|: P$是 $G\}$中的一个2-打包。

命题 4.9。如果 P是图 G中的一个2-打包，且 $N[P] \subsetneq V$（G），那么 γ_f^∞（G）$\geq 1 + |P|$。

证明。令 $v \in V$（G）$\setminus N[P]$。假设 v受到攻击。那么得到的分数支配函数在 v 上的权重至少为1，并且2-打包中每个顶点的邻域内的权重至少为1。

□

如果对于每个 $v \in V$（G）都有 $|N[v] \cap D| = 1$，则称支配集 D 为高效支配集。如果存在一个顶点 $v \in V$（G）$\setminus D$，使得 D 是 $G - v$中的一个高效支配集，则称支配集 D 为近高效支配集。

推论 4.10. 如果 G 有一个高效支配集，那么 $\gamma_f^\infty(G) \geq \gamma(G)$】【。

推论4.11。如果 $|P|$ 的最大可能值为 $\gamma(G)$，那么 $\gamma_f^\infty(G) \geq \gamma(G)$。

由于所有强弦图都满足推论4.11的条件（见[5]），我们得到：

推论4.12. 如果 G 是一个强弦图，那么 $\gamma_f^\infty(G) \geq \gamma(G)$.

我们将在第 5.2 节和第 5.3 节重新讨论 2-装箱的概念。

4.3 Kneser 图

最后，我们考虑 Kneser 图。Kneser图 $KG_{n,\ k}$ 是这样一种图：其顶点集由一个 n 集合的所有 k-子集组成，并且当且仅当两个顶点对应的集合不相交时，这两个顶点才相邻。对于 $k=2$ 的情形，我们确定了 $\gamma_f^\infty(KG_{n,\ k})$ 的精确值；对于彼得森图， $\gamma_f^\infty(G)$ 的值为$KG_{5,\ 2}$，这是一个特例。我们从以下定理开始。

定理 4.13。对于 $\gamma_f^\infty(KG_{5,\ 2})=3$。

证明。假设 n-集合为 $\{1,2,3,4,5\}$ ，不失一般性地设 $w(\{1,2\}) \geq 1$。令 N_1 和 N_2 分别表示 $\{1,2\}$ 的所有邻点和非邻点组成的集合。由于 N_2 中每个顶点的闭邻域内权重之和都大于或等于 1，因此我们得到 $\sum_{v\in N_2}\sum_{u\in N[v]} w(u) \geq 6$。在前面的求和中，$N_2$ 的每个顶点上的权重被重复计算 3 次，而 N_1 的每个顶点上的权重被重复计算 2 次。因此有：$3\times\sum_{v\in N_1\cup N_2} w(v) + 3\times w(\{1,2\}) \geq 6+3 \implies 3\times\sum_{v\in V} w(v) \geq 9 \implies \sum_{v\in V} w(v) \geq 3$。现在，只需证明 $\gamma_f^\infty(KG_5,2) \leq 3$。为此，我们先在顶点 $\{1,2\}$ 上放置权重 1，并在 N_2 的每个顶点上放置权重 1 3。- 为响应对 N_1 中某个顶点的攻击（不失一般性地设为 $\{3,4\}$ ），我们沿以下不相交路径，将权重 1 从 $\{1,2\}$ 移至 $\{3,4\}$ ，并将权重从 $N(\{3,4\})\backslash N(\{1,2\})$ 移至 $N(\{1,2\})\backslash N(\{3,4\})$：$\{1,5\}-\{2,4\}-\{3,5\}$ 和 $\{2,5\}-\{1,3\}-\{4,5\}$。若 N_2 中某个顶点受到攻击（不失一般性地设为 $\{1,3\}$ ），我们就将 $\{2,4\}$ 和 $\{2,5\}$ 上的权重移至该顶点，并将顶点 $\{1,2\}$ 上的权重 1 平均分给顶点 $\{1,2\}$、$\{3,4\}$ 和 $\{3,5\}$。 □

定理 **4 14** $n\geq 6$ γ_f^∞ $KG_{n\ 2}$ $=1+\frac{n-2}{n-4}=2+\frac{2}{n-4}=$。对于每个整数 $2n-6$，(,)$\overline{n-4}$。

证明。设 n-集合为 $\{1,2,...,n\}$，不失一般性地，$w(\{1,2\}) \geq 1$。令 N_1 和 N_2 分别为 $\{1,2\}$的所有邻点和非邻点的集合。由于 N_2 中每个顶点的闭邻域内权重之和大于或等于 1，我们得到$\sum_{v\in N_2}\sum_{u\in N[v]} w(u) \geq 2(n-2)$。考虑 N_2中的一个顶点 $\{a,b\}$。注意， $\{1,2\}$ 和 $\{a,b\}$ 恰好有一个元素相同；不失一般性，设 $a=1$。有 $n-3$ 个集合与 $\{1,b\}$ 不相交且与 $\{1,2\}$相交。因此， $\{1,b\}$ 的权重（对于N_2中的每个顶点也同理）在前面的求和中被计算了 $n-2$ 次。现在考虑一个顶点$\{a,b\}\in N_1$。与 $\{1,2\}$ 相交但不与$\{a,b\}$ 相交的集合数为 $2(n-4)$，因此 N_1 中每个顶点的权重被重复计算了 $2(n-4)$次。所以我们有：$2(n-4)(\sum_{v\in N_1} w(v) + \sum_{v\in N_2} w(v)) \geq 2(n-2) \Longrightarrow \sum_{v\in N_1} w(v) + \sum_{v\in N_2} w(v) \geq \frac{n-2}{n-4} \implies \gamma_f^\infty(KG_n,2) \geq 1+\frac{n-2}{n-4}$。

现在，剩下要证明的是 $\gamma_f^\infty(KG_{n,\,2}) \le 1 + \frac{n-2}{n-4}$。为此，我们首先在顶点 $\{1,2\}$ 上放置权重 1，并在 N_1的每个顶点上放置权重 $\frac{1}{\binom{n-3}{2}}$。这构成了该图的一个分数支配集，因为对于每个与$\{1,2\}$ 相交的集合 S （除 $\{1,2\}$ 本身外），都有 $\binom{n-3}{2}$ 种方法构造一个同时与该集合和 $\{1,2\}$不相交的集合。我们将证明，在遭受任何攻击后，都可以重新配置该分数支配集，使受到攻击的顶点权重为 1，受到攻击顶点的每个邻点权重为 $\frac{1}{\binom{n-3}{2}}$，而所有其他顶点的权重为 0。

为了应对对 N_1 中某个顶点的攻击（不失一般性，设为 $\{3,4\}$ ），我们首先将权重 $\binom{n-3}{2}-1$ $\binom{n-3}{2}$ 从 $\{1,2\}$ 移至 $\{3,4\}$。由一端位于 $N(\{1,2\})\backslash N(\{3,4\})$、另一端位于$N(\{3,4\})\backslash N(\{1,2\})$ 的边所诱导的子图是一个正则二分图。根据 Hall定理，在 $N(\{1,2\})\backslash N(\{3,4\})$ 与 $N(\{3,4\})\backslash N(\{1,2\})$ 之间存在完美匹配，因此可以将 $N(\{1,2\})\backslash N(\{3,4\})$ 中的权重移至 $N(\{3,4\})\backslash N(\{1,2\})$。现在，假设 N_2 中的一个顶点受到攻击（不失一般性，设为 $\{1,3\}$ ）。将该顶点的邻域中的总权重 1 移至该顶点，并将顶点 $\{1,2\}$ 上的权重 1 平均分配给其 $\binom{n-3}{2}$ 个公共邻点以及 $\{1,3\}$。此时， $N(\{1,2\})\backslash N(\{1,3\})$ 的顶点是形如 $\{3,x\}$ 的集合，其中 $x \in \{4,\ldots,n\}$。类似地，$N(\{1,3\})\backslash N(\{1,2\})$ 的顶点是形如 $\{2,x\}$ 的集合，其中 $x \in \{4,\ldots,n\}$。每个集合之间的边诱导出一个正则二分图，因此，与上述情况一样， $N(\{1,2\})\backslash N(\{1,3\})$ 中的顶点可以沿着一条完美匹配，将其权重传递给$N(\{1,3\})\backslash N(\{1,2\})$ 中的顶点。在这两种情况下，最终得到一个分数支配集：受到攻击的顶点权重为 1，受到攻击顶点的每个邻点权重为 $\frac{1}{\binom{n-3}{2}}$，所有其他顶点权重为 0。

□

5 连通度与凯莱图

本节的主要结果聚焦于凯莱图的 $\gamma_f^\infty(G)$。首先，我们考察图G 的顶点连通度（记作 $\kappa(G)$）、其顶点的度数与 $\gamma_f^\infty(G)$ 之间的关系。回顾一下， $\delta(G)$ 和$\Delta(G)$ 分别表示 G 的最小度和最大度。

下面的引理可由 [4] 和 [7] 中的结果推出。

引理 5.1. 若 G 是一个具有 $\delta(G) = \delta$ 且 $\Delta(G) = \Delta$ 的 n-顶点图，则 $\frac{n}{\Delta+1} \le \gamma_f(G) \le \frac{n}{\delta+1}$。

这个引理也启发了关于 $\gamma_f^\infty(G)$ 的以下结果，它根据 G 的阶及其连通度，给出了 $\gamma_f^\infty(G)$ 的一般界。

定理 5.2. 如果 G 的连通度为 κ，那么 $\gamma_f^\infty(G) \le \frac{n+\kappa}{\kappa+1}$。

证明。令 $w(x)$ 表示顶点 x的权重。首先给任意顶点 y赋予权重 1，给所有其他顶点赋予 $\frac{1}{\kappa+1}$。显然，对于每个顶点 $v \in V(G)$，$\sum_{u\in N[v]} w(u) \geq (\delta+1)\frac{1}{\kappa+1} \geq 1$。我们给出一个简单策略，说明如何维持这样一种权重分配：受到攻击的顶点获得权重 1，而所有其他顶点的权重均为 $\frac{1}{\kappa+1}$。如果受到攻击的是 y 以外的顶点，比如 z，则选取 κ 条内部不相交的 yz-路径 P_1、……、P_κ。对于每个 $P_i = yv_1v_2\cdots v_tz$，每个 v_i 都会向 v_{i+1} 发送权重 $\frac{1}{\kappa+1}$（将 y 视为 v_0，并将 z 视为 v_{t+1}）。这样一来，z 获得权重 1，而每个其他顶点的权重均为 $\frac{1}{\kappa+1}$。□

由命题 3.1、引理 5.1 和定理 5.2 可立即得到以下推论，这也促使我们研究凯莱图。

推论 **5 3** G d d $\frac{n}{d+1} \leq \gamma_f^\infty\ G\ \leq$ 。

如果是$\frac{n+d}{}$一个 -正则、-连通图，那么 ( ) $_{d+1}$。

推论 5.4。如果 G 是 d-正则且 d-连通的，则存在一个关于 γ_f^∞ 的多项式时间近似算法，其误差至多为 1。

证明。定理 5.2 的证明表明，G 可以由 n 个分数支配函数进行分数永恒支配，其中每个函数的总权重小于 $\gamma_f + 1$。该结果随后由命题 2.2 得出。□

每个阿贝尔凯莱图都是正则图，且其连通度等于其度数，因此我们得到以下结论：

推论 5.5。如果 G 是一个阿贝尔凯莱图，则 $\gamma_f^\infty(G) - \gamma_f(G) < 1$。

鉴于此，合理的问题是：对于阿贝尔凯莱图，能否精确确定 $\gamma_f^\infty(G)$。本节其余部分将致力于说明，即使在图为三次图这一强假设下，这仍然是一项艰巨的任务。

5.1 三次阿贝尔 Cayley 图

在第 4 节末尾，我们给出了一些条件，在这些条件下，$\gamma(G)$ 是 $\gamma_f^\infty(G)$ 的下界。然而，对于三次阿贝尔 Cayley 图，事实证明 $\gamma(G) = \gamma_{\mathrm{m}}^\infty(G)$，因此 $\gamma(G)$ 是 $\gamma_f^\infty(G)$ 的上界。我们将精确刻画上界严格成立的三次阿贝尔 Cayley 图。

定理 5.6. 如果 G 是一个三次阿贝尔 Cayley 图，那么 $\gamma_f^\infty(G) \leq \gamma(G) = \gamma_m^\infty(G)$。此外，$\gamma_f^\infty(G) < \gamma(G)$ 当且仅当 G 同构于 $C_{4k+2}\square K_2$ 或 Cay($\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\}$)，其中 $k \geq 1$ 为某个整数。

为证明该定理，我们依赖于 [13] 中关于三价阿贝尔 Cayley 图的如下刻画。回顾一下，Q_d 表示维数为 d 的超立方体。

定理 5.7。图 G 是三价阿贝尔 Cayley 图，当且仅当它属于以下情形之一：

1. K_4，2. Q_3，3. $C_n \square K_2$ ($n \geq 3$)，4. Cay($\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\}$) （$n \geq 3$）。

我们很快就能解决前两种情况。

引理 5.8. 若 $G \in \{K_4, Q_3\}$，则 $\gamma_f^\infty(G) = \gamma(G)$

证明。若 $G = K_4$，则显然每个参数都等于 1。设 $G = Q_3$，其具有 $\gamma(G) = 2$。一方面， G 有一个大小为 2 的高效支配集，因此根据推论 4.10，我们有 $\gamma_f^\infty(G) \geq \gamma(G) = 2$。另一方面，$\gamma_f^\infty(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^\infty(G) = 2 = \gamma(G)$，因此等式成立。 □

为了完成定理 5.6 的证明，最后两种情况需要进行更深入的分析。

5.2 循环棱柱

现在转向 $C_n \square K_2$，其中 $n \geq 3$。我们首先证明，永恒支配的全体守卫移动模型所需的守卫数量等于支配数，然后根据 n(模 4) 的值，分情况考虑 $\gamma_f^\infty(G)$。

引理 5.9. 对于每个整数 $n \geq 3$， $\gamma_m^\infty(C_n \square K_2) = \gamma(C_n \square K_2)$。

证明。假设守卫位于包含顶点 (0, 0) 的最小支配集的各个顶点上，且不失一般性地设位于 (0, 0) 的守卫负责应对第一次攻击。如果他移动到 (0, 1)，则位于 (i, j) 上的所有守卫都可以移动到 $(i, j+1)$，以维持类似的配置（在重新标记图的顶点之后，第一坐标和第二坐标中的运算分别取模 n 和模 2）。如果他移动到 (1, 0)，则位于 (i, j) 上的所有守卫都可以移动到 $(i+1, j)$，以维持类似的配置。如果他移动到 $(n-1, 0)$，则位于 (i, j) 上的所有守卫都可以移动到 $(i-1, j)$。

□

引理 5.10. 若 $n \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$，则 $\gamma_f^\infty(C_n \square K_2) = \gamma(C_n \square K_2) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$。

证明. 根据引理 5.9，只需证明 $\gamma(C_n \square K_2) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 是 $\gamma_f^\infty(C_n \square K_2)$ 的下界。我们分情况讨论：

1. $n \equiv 0$（模 4）：集合 $S_0 = \{(4i, 0) : i \in [\frac{n}{4}]\} \cup \{(4i+2, 1) : i \in [\frac{n}{4}]\}$（其中 $[\frac{n}{4}] = \{1, \ldots, \frac{n}{4}\}$）是一个基数为 $\frac{n}{2}$ 的高效支配集。因此，根据推论 4.10，我们有 $\gamma_f^\infty(C_n \square K_2) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$。

2. $n \equiv 1$（模 4）：集合 $S_1 = \{(4i, 0) : i \in [\frac{n-1}{4}]\} \cup \{(4i+2, 1) : i \in [\frac{n-1}{4}]\}$ 是一个基数为 $\frac{n-1}{2}$ 的 2-打包，它不支配顶点 $(n-1, 1)$。因此，根据命题 4.9，我们有 $\gamma_f^\infty(C_n \square K_2) \geq 1 + \frac{n-1}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$。3. $n \equiv 3$（模 4）：集合 $S_3 = \{(4i, 0) : i \in [\frac{n+1}{4}]\} \cup \{(4i+2, 1) : i \in [\frac{n-3}{4}]\}$ 是一个基数为 $\frac{n-1}{2}$ 的 2-打包，它不支配顶点 $(n-1, 1)$。因此，根据命题 4.9，我们有 $\gamma_f^\infty(C_n \square K_2) \geq 1 + \frac{n-1}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$。

□

引理 5.11。如果 $n \equiv 2$（模 4），则 $\gamma_f^\infty(C_n \square K_2) < \gamma(C_n \square K_2)$。

证明。注意到，根据定理 5.2，$\gamma_f^\infty(C_n \square K_2) \leq \frac{2n+3}{4}$ 成立。因此，只需证明 $\gamma(C_n \square K_2) > \frac{2n+3}{4}$。为此，我们证明 $C_n \square K_2$不包含任何高效支配集。假设结论不成立，并令S_2 为 $C_n \square K_2$的一个高效支配集。不失一般性，令 $(0, 0)$ 为 S_2 的一个顶点。由于 S_2 是一个 2-打包，S_2 必须包含顶点 $(2, 1)$、$(4, 0)$ 以及所有形如 $\{(4i, 0) : i \in [\frac{n+2}{4}]\} \cup \{(4i+2, 1) : i \in [\frac{n-2}{4}]\}$的顶点。在这种情况下，顶点 $(0, 0)$ 和 $(n-2, 0)$ 将是 S_2 中的两个具有非不交邻域的顶点（矛盾）。

□

5.3 M¨obius 棱柱图

最后，我们考虑所谓的 M¨obius 棱柱图 $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$，其中 $n \geq 3$。

引理 5.12。对于每个整数 $n \geq 3$，$\gamma_m^\infty(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) = \gamma(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\}))$。

证明。假设守卫位于一个包含顶点 0 且大小最小的支配集的顶点上，并且不妨设位于 0 的守卫负责应对第一次攻击。如果他移动到顶点 1，那么位于顶点 i can 的任一守卫都可以移动到顶点 $i+1$ in，以维持类似的配置（重新标记图的顶点后）。如果他移动到顶点$2n-1$，那么位于顶点 i can 的任一守卫都可以移动到顶点 $i-1$ to，以维持类似的配置。如果他移动到顶点 n，那么位于顶点 $i$can 的任一守卫都可以移动到顶点 $i+n$。

□

引理 5.13. 如果 $n \not\equiv 0$（模 4），则 $\gamma_f^\infty(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) = \gamma(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$。

证明。根据引理 5.12，只需证明 $\gamma(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 是 $\gamma_f^\infty(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\}))$ 的下界。我们分情况讨论：

1. $n \equiv 1$（模 4）：集合 $S_1 = \{4i : i \in [\frac{n-1}{4}]\} \cup \{4i + n + 2 : i \in [\frac{n-1}{4}]\}$ 是一个基数为 $\frac{n-1}{2}$ 的 2- 打包，但不支配顶点 $n-1$。因此，根据命题 4.9，我们有 $\gamma_f^\infty(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) \geq 1 + \frac{n-1}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$。

2. $n \equiv 2$（模 4）：现在，集合 $S_2 = \{4i : i \in [\frac{n+2}{4}]\} \cup \{4i+n+2 : i \in [\frac{n-2}{4}]\}$ 是一个基数为 $\frac{n}{2}$ 的高效支配集。因此，根据推论 4.10，我们有 $\gamma_f^\infty(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) \geq \frac{n}{2}$。3. $n \equiv 3$（模 4）：最后，集合 $S_3 = \{4i : i \in [\frac{n+1}{4}]\} \cup \{4i+n+2 : i \in [\frac{n-3}{4}]\}$ 是一个基数为 $\frac{n-1}{2}$ 的 2-打包，但不支配顶点 $n-1$。因此，根据命题 4.9，我们有 $\gamma_f^\infty(C_n \square K_2) \geq 1 + \frac{n-1}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$。□

引理 5.14。如果 $n \equiv 0$（模 4），则 $\gamma_f^\infty(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) < \gamma(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\}))$。

证明。注意到 $\gamma_f^\infty(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) \leq \frac{2n+3}{4}$ 由定理 5.2 得出。因此，只需证明 $\gamma(C_n \square K_2) > \frac{2n+3}{4}$。为此，我们证明 $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$ 不包含任何高效支配集。假设并非如此，并令 S_0 为 $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$ 的一个高效支配集。不失一般性，设 0 是 S_0 的一个顶点。由于 S_0 是一个 2-打包，S_0 必须包含顶点 $n+2$ 以及所有满足 $\{4i : i \in [\frac{n}{4}]\} \cup \{4i+n+2 : i \in [\frac{n}{4}]\}$ 的顶点；在这种情况下，顶点 0 和 $n-2$ 将是 S_0 中邻域不相交的两个顶点。

□

现在我们可以完成定理 5.6 的证明。

定理 5.6 的证明。该结果立即由定理 5.7 以及引理 5.8、5.10、5.11、5.13 和 5.14 推出。□

5.4 关于循环棱柱图和 M¨obius 棱柱图的进一步结果

确定定理 5.6 中例外情形的精确值似乎出人意料地困难，因此我们将其留作未来研究中的一个开放问题。最后，我们考察循环棱柱图和 M¨obius 棱柱图的三个特例—— $C_6 \square K_2$、$C_{10} \square K_2$ 和 $Cay(\mathbb{Z}_8, \{\pm 1, 4\})$——它们的 γ_f^∞ 精确值无法由定理 5.6 给出，并利用其中一些例外情形为一般图获得下界。

可以使用线性规划求解器（或通过繁琐的手算）验证，初始配置线性规划的一个解要求总权重至少为 $7/2$。现在我们证明这还不够。

定理 5.15。 $\frac{7}{2} < \gamma_f^\infty(C_6 \square K_2) \leq 4$

证明。令 $G = C_6 \square K_2$，其中顶点的标记如图 2 所示。根据定理 5.2 可得上界，因为 G 是 3-正则且 3-连通的。$\gamma_{\mathrm{m}}^\infty(G) = 4$ 这一事实。假设 $\gamma_f^\infty(C_6 \square K_2) = \frac{7}{2}$，并令 w 为一个可行的初始权重函数。对于集合 $S \subseteq V(G)$，令 $w(S) = \sum_{v \in S} w(v)$。不失一般性地，假设 a 是初始接收权重 1 的顶点。接下来

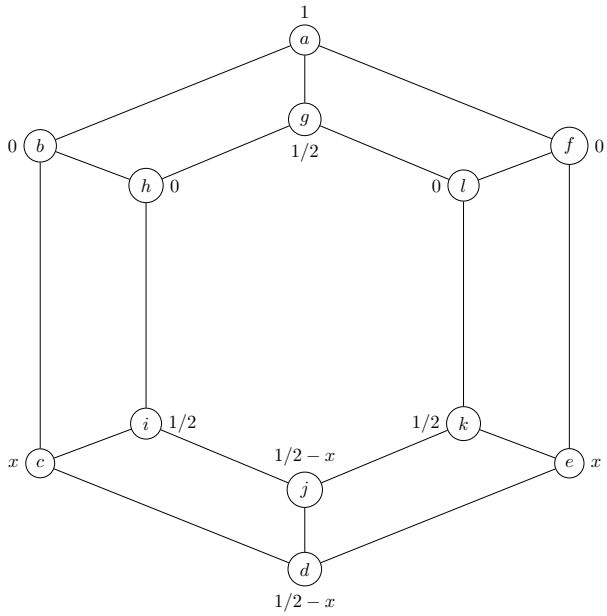

图 2： $C_6 \square K_2$的初始赋权

五个断言表明，唯一可能的初始权重分配就是图 2 中给出的那些分配。

断言 1： $w(g) \geq \frac{1}{2}$。
证明。赋予 $V(G) \setminus \{a\}$ 的总权重为 $5 \frac{1}{2}$。此外， $w(N[d]) + w(N[h]) + w(N[l]) \geq 3$，因此 $w(g) \geq \frac{1}{2}$。$\diamond$

断言 2： $w(b) = w(f) = w(h) = w(l) = 0$。
证明。首先注意， $w(N[c]) + w(N[e]) + w(N[i]) + w(N[k]) \geq 4$，且左侧的求和将 $\{c, d, e, i, j, k\}$ 中每个顶点的权重计算了两次。因此

$$\begin{aligned} & w(N[c]) + w(N[e]) + w(N[i]) + w(N[k]) + 2w(g) \geq 5 \\ \Longrightarrow\ & 2w(V(G) \setminus \{a\}) - [w(b) + w(f) + w(h) + w(l)] \geq 5 \\ \Longrightarrow\ & 5 - [w(b) + w(f) + w(h) + w(l)] \geq 5 \\ \Longrightarrow\ & w(b) = w(f) = w(h) = w(l) = 0 \end{aligned}$$

如所需。 $\diamond$

断言 3： $w(g) = \frac{1}{2}$。

证明。现在，我们有

$$w(c)+w(d)+w(e)+w(g)+w(i)+w(j)+w(k)=\frac{5}{2}$$

或者，等价地，

$$w(N[i])+w(N[e])+w(g)=\frac{5}{2}.$$

然而，由于 $w(N[i])$ 和 $w(N[e])$ 都必须至少为 1，且 $N[i]$ 和 $N[e]$ 不相交，因此我们有 $w(g)\leq\frac{1}{2}$，从而 $w(g)=\frac{1}{2}$。$\diamond$

断言 4： $w(i)=w(k)=\frac{1}{2}$。

证明。考察 $N(h)$ 和 $N(l)$，可知 $w(i)\geq\frac{1}{2}$，且 $w(k)\geq\frac{1}{2}$。然而，由于 $w(N[d])\geq 1$，且 $w(N[d])+w(i)+w(k)=2$，因此我们有 $w(i)=w(k)=\frac{1}{2}$。$\diamond$

断言 5：对于某个 $x\in[0,\frac{1}{2}]$，$w(c)=w(e)=x$，且 $w(d)=w(j)=\frac{1}{2}-x$。

证明。考察 $N(c)$ $N(e)$ $N(i)$ 和 $N(k)$，可得每一个 th e $w(c)+w(d)$、$w(d)+w(e)$、$w(c)+w(j)$、$w(e)+w(j)$至少为 $1/2$。$\diamond$

现在，我们证明，对于 $x\in[0,\frac{1}{2}]$的任意取值，G中都存在一个顶点，对它的响应方式只能导致 $V(G)$上不再存在分数支配函数。

设 $x\in(0,\frac{1}{2}]$，并考虑对顶点 c的攻击。为了响应这次攻击，我们需要将顶点 i 上的$_{1\ 2}$权重和顶点 d 上的 $\frac{1}{2}-x$ 权重移至顶点c。由于 j上的权重仅为 $\frac{1}{2}-x$，响应攻击后不可能在顶点 i 上维持$_{1\ 2}$ 的权重（这与断言1矛盾）。

现在设 $x=0$，并考虑对顶点 j的攻击。根据断言 $1-5$，响应攻击后，j 上的权重必须为1，d 上的权重必须为$_{1\ 2}$，而顶点c、e、h、i、k、l上的权重都必须为0。然而，由于顶点 j 的闭邻域内总权重为2，因此，与顶点 j 距离至多为2的顶点集合上的总权重至少为2。因此，无论如何响应攻击，都不可能在 j上维持权重1，在 d 上维持权重$_{1\ 2}$，并使顶点c、e、h、i、k、l上的权重都为0。 □

定理 5.16. 如果 $n\equiv 10$ （模 12），则 $\gamma_f^{\infty}(C_n\square K_2)\geq\ _{(n+2)}\ \frac{(n+4)\ 2(n+5)}{}$。

证明。由推论 5.3 可知，$\frac{2n+3}{4}$ 是 $C_n\square K_2$的分数永恒支配数的上界。设 $\epsilon\geq 0$ 为一个实数，使得总权重为 $\frac{2n+3}{4}-\epsilon$ 时可以支配 $C_n\square K_2$。考虑一个初始可行权重函数 w。不失一般性地，我们可以假设顶点 v_0 获得的权重为 1。令 $S=\{v_{4i-1}:\ i\in[\frac{n}{4}]\}\cup\{u_{4i-3}:\ i\in[\frac{n}{4}]\}$，则 $\sum_{v\in S}w(N[v])=(\sum_{v\in V}w(v))-w(v_0)-w(u_0)$。由于 $\sum_{v\in S}w(N[v])\geq\frac{n}{2}$，我们有 $(\sum_{v\in V}w(v))-w(v_0)-w(u_0)\geq\frac{n}{2}\implies w(u_0)\geq\frac{1}{4}+\epsilon$。这意味着

对于任意整数 $i \in [\frac{n-1}{3}]$，集合$\{v_{3i-1}, u_{3i-1}\}$的邻域中的权重之和至少为 $\frac{5}{4}+\epsilon$。因此，$(\frac{n-1}{3})(1+\frac{1}{4}+\epsilon) \leq \frac{2n+3}{4}-\epsilon-1-\frac{1}{4}-\epsilon \Longrightarrow \epsilon \leq \frac{n-1}{4n+5()}$。于是，$\gamma_f^\infty($ $C_n \square K_2) \geq (\frac{n+2}{3})(1+\frac{1}{4}+\frac{}{(n-1)4(n+5)}) = \frac{}{(n+2)(n+4)2(n+5)}$。 □

对于特定的 $n = 10$ 情形，可以计算出精确值。

定理 5.17. $\gamma_f^\infty(C_{10} \square K_2) = \frac{28}{5}$。

证明. 设 $\epsilon \geq 0$，使得总权重为 $\frac{28}{5} - \epsilon$ 时可以支配该图。不失一般性，我们可以假设顶点 v_0 的权重为 1。现在，$w(N[u_1]) + w(N[v_3]) + w(N[u_5]) + w(N[v_7]) + w(N[u_9]) \geq 5 \Longrightarrow w(V \backslash \{v_0\}) + w(u_0) \geq 5 \Longrightarrow w(u_0) \geq 5 - \frac{23}{5} + \epsilon = \frac{2}{5} + \epsilon$。如果顶点 v_2受到攻击，我们必须将权重 1 移至该顶点，并将权重 $\frac{2}{5}+\epsilon$ 移至顶点 u_2。因此，顶点 v_2 和 u_2的邻域中权重总和至少为 $\frac{7}{5}+\epsilon$。由于同样的论证适用于顶点 v_5 和v_9v_8，我们有 $3(\frac{7}{5}+\epsilon) \leq \sum_{i=1} w(v_i)+w(u_i) \leq \frac{28}{5}-\epsilon-1-\frac{2}{5}-\epsilon = \frac{21}{5}-2\epsilon \Longrightarrow 5\epsilon \leq 0$。另一方面，图 6、图 7 和图 8 以及表 1（见附录）展示了一个总权重为 $\frac{28}{5}$ 的初始可行权重函数，以及针对图中所有可能攻击的响应。 □

接下来，我们将讨论 Möbius 棱柱图中特殊类别的精确值和界。

定理 5.18. $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_8, \{\pm 1, 4\})) = \frac{8}{3}$.

证明。我们首先证明 $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_8, \{\pm 1, 4\}) \geq \frac{8}{3}$。设 $\epsilon \geq 0$ 使得 $\frac{8}{3} - \epsilon$ 的总权重足以支配该图。不失一般性，假设顶点 v_0 获得权重 1。由于顶点 v_3 和 v_5 的邻域内权重之和必须至少为 1，因此有：$w(v_2) + w(v_3) + w(v_4) + w(v_7) \geq 1$ 且 $w(v_4) + w(v_5) + w(v_6) + w(v_1) \geq 1$。由于顶点 v_0上的权重为 1，因此 $\sum_{i=1} w(v_i) \leq \frac{5}{3} - \epsilon$。所以，$7w(v_4) + \sum w(v_i) \geq 2 \Longrightarrow w(v_4) \geq \frac{1}{3} + \epsilon$。如果攻击顶点 v_2，我们必须将权重 1 移至该顶点，并将至少 $\frac{1}{3} + \epsilon$ 的权重移至顶点v_6。因此，顶点 v_2 和 v_6 的邻域内权重之和必须至少为 $1 + \frac{1}{3} + \epsilon$。所以，$\frac{4}{3} + \epsilon \leq w(v_1) + w(v_2) + w(v_3) + w(v_5) + w(v_6) + w(v_7) \leq \frac{4}{3} - 2\epsilon \Longrightarrow 3\epsilon \leq 0$。现在，为证明 $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_8, \{\pm 1, 4\}) \leq \frac{8}{3}$，我们在顶点 v_0上放置权重 1，在顶点 v_4 上放置权重 1 3，并在顶点 v_2 和 v_6上各放置权重 2 3。读者可从图 4 和图 5（见附录）中验证，对顶点 v_i 的任意攻击都能以如下方式进行防御：顶点 v_i 获得权重 1，顶点 v_{i+4} 获得权重 1 3，而顶点 v_{i+2}、v_{i+6} 各获得权重 2 3。 □

定理 5.19. 若 $n \equiv 4 \pmod{12}$，则 $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) \geq \frac{(n+2)(n+4)2(n+5)}{}$。

证明. 由推论 5.3 可知，$\frac{2n+3}{4}$ 是 $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$的分数永恒支配数的上界。设 $\epsilon \geq 0$ 为实数，使得总权重为 $\frac{2n+3}{4} - \epsilon$ 时，可以对 $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$进行分数永恒支配。考虑一个初始可行权重函数$w$。不失一般性，可假设顶点 v_0 获得权重 1。设 $S = \{v_{4i-1} : i \in [\frac{n}{4}]\} \cup \{v_{n+4i-3} : i \in [\frac{n}{4}]\}$。根据前述定义以及 $n \equiv 0 \pmod 4$这一事实可知，对于任意 $i, j \in S, i \neq j$，都有 $N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset$，除非 $i = n-1$ 且 $j = n+1$。现在，$\sum_{v \in S} w(N[v]) = (\sum_{v \in V} w(v)) - w(v_0) - w(v_n)$。由于$\sum_{v \in S} w(N[v]) \geq \frac{n}{2}$，因此$(\sum_{v \in V} w(v)) - w(v_0) - w(v_n) \geq \frac{n}{2} \implies w(v_n) \geq \frac{1}{4} + \epsilon$。这意味着对于任意整数 $i \in [\frac{n-1}{3}]$，集合 $\{v_{3i-1}, v_{n+3i-1}\}$ 的闭邻域中的权重总和至少为 $\frac{5}{4} + \epsilon$。由于 $n \equiv 1 \pmod 3$，$V - \{v_0, v_n\}$ 可以划分为 $\frac{n-1}{3}$ 个集合，每个集合都包含某个 $i \in [\frac{n-1}{3}]$的闭邻域，其中 $\{v_{3i-1}, v_{n+3i-1}\}$。因此，$(\frac{n-1}{3})(1 + \frac{1}{4} + \epsilon) \leq \frac{2n+3}{4} - \epsilon - 1 - \frac{1}{4} - \epsilon \implies \epsilon \leq \frac{n-1}{4n+5}$。由此，$\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) \geq (\frac{n+2}{3})(1 + \frac{1}{4} + (n-1)/4(n+5)) = (n+2)(n+4)/2(n+5)$。 □

6 图乘积

6.1 超立方体

在最后这一节中，我们考察当 G 由两个图的笛卡尔积或强积构成时的 $\gamma_f^\infty(G)$。由于超立方体Q_d在编码理论中的应用，它或许是图支配领域中最重要的图类。超立方体通常难以精确计算支配参数；对于 $d \leq 9$ 和$d = 2^r - 1$，某些正整数 r 对应的 $\gamma(Q_d)$精确值已知，但一般情形仍未解决。已知$\gamma(Q_d) = \gamma_{\mathrm{m}}^\infty(Q_d)$，因为对 Q_d 的任何攻击都可以通过守卫移动来防御，因此，全体守卫移动模型中所需守卫数量的一般情形也尚未解决。不过，根据推论 5.3，我们可以看到，至少能够对$\gamma_f^\infty(Q_d)$作出相当精确的近似。

定理 6.1. 对任意正整数 d，$\frac{2^d}{d+1} \leq \gamma_f^\infty(Q_d) \leq \frac{2^d+d}{d+1}$。

图 3 比较了定理 6.1 给出的界与小 d 值下 $\gamma(Q_d)$ 的已知值（见 [1]）。参数 $d = 1$、3、7 下的等式并非巧合。若对于某个正整数 r，$\gamma_{\mathrm{m}}^\infty(Q_d) = \frac{2^d}{d+1}$ [10]，$d = 2^r - 1$，则 Q_d 成立，因为其有一个高效支配集。由于这是 $\gamma_f^\infty(Q_d)$ 的下界（定理 6.1），同时也是上界（命题 3.1），因此等式成立。

d	$\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(Q_d) = \gamma(Q_d)$	$\gamma_f^{\infty}(Q_d)$
1	1	1
2	2	$[\frac{4}{3}, 2]$
3	2	2
4	4	$[\frac{16}{5}, 4]$
5	7	$[\frac{16}{3}, \frac{37}{6}]$
6	12	$[\frac{64}{7}, 10]$
7	16	16
8	32	$[\frac{256}{9}, \frac{88}{3}]$
9	62	$[\frac{256}{5}, \frac{521}{10}]$
10	$[107, 120]$	$[\frac{1024}{11}, 94]$

图 3: $\gamma_f^{\infty}(Q_d)$ 和 $\gamma(Q_d)$ 的比较

6.2 网格

定理 6.2. 对于任意整数 $n \geq 1$, $\gamma_f^{\infty}(P_n \square P_2) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$。

证明。由于 C_{2n} 是 $P_n \square P_2$ 的生成子图，且满足 $\gamma_f^{\infty}(C_{2n}) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ γ_f^{∞} $P_n \square P_2$ $\leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ γ_f^{∞} $P_n \square P_2$ $\geq$, $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ v_1 v_2 $\ldots$ v_n v_1' v_2' $\ldots$ v_n'

因此我们有（）。接下来只需证明（）。为此，我们按如下方式标记图，，，，，，，的顶点，使得对于所有 i， $v_i v_i' \in E$；并且对于所有满足 $|i - j| = 1$的 i、j，$v_i v_j, v_i' v_j' \in E$。现在，按此特定顺序考虑对顶点$v_1, v_2', v_4, v_5', v_7, v_8' \ldots$的一系列攻击。更形式化地说，对于任意 $k \geq 0$，在时刻 $t = 2k+1$，受到攻击的顶点为 v_{3k+1}；在时刻 $t = 2k+2$，受到攻击的顶点为 v_{3k+2}'。注意，对于任意 $t_1 \geq 1$ 和 $t_2 > t_1$，时刻 t_2 受到攻击的顶点 u_2 与时刻t_1受到攻击的顶点 u_1 之间的距离至少为 $t_2 - t_1 + 1$。由于在第 t_2 次攻击期间， u_1 上的权重只能分配给与 u_1 距离至多为 $t_2 - t_1$ 的顶点，因此必须向 u_2 移入一组新的权重（并非来自 u_1）。因此，对于任意 $k \geq 0$，若 $t = 2k + 1$，则在回应第 t 次攻击后，集合 $\{v_i : i \leq 3k+1\} \cup \{v_i' : i \leq 3k+1\}$ 中各顶点上的权重之和至少为 $t = 2k + 1$；若 $t = 2k + 2$，则在回应第 t 次攻击后，集合 $\{v_i : i \leq 3k+2\} \cup \{v_i' : i \leq 3k+2\}$ 中各顶点上的权重之和至少为 $t = 2k + 2$。由此得证该不等式。 □

定理 6.3。 $\gamma_f^{\infty}(P_m \square P_n) \leq \frac{mn}{5} + \frac{2(m+n)}{15} + \frac{39}{15}$对于任意 $m, n \geq 2$。

证明。我们先在内层$P_{m-2} \square P_{n-2}$的每个顶点上放置权重$\frac{1}{15}$，在每个角点顶点上放置权重$\frac{7}{15}$，并在每个非角点边界顶点上放置权重$\frac{4}{15}$。我们再在内层$P_{m-2} \square P_{n-2}$的任意一个顶点上额外放置权重$\frac{12}{15}$，在一个角点顶点上额外放置权重$\frac{8}{15}$，并在一个随机的

边界顶点（非角点）上额外放置权重12 15 。如果内层 $P_{m-2}\square P_{n-2}$ 的一个顶点受到攻击，则可沿着4条不相交路径将额外权重12 15 分配给该顶点。如果一个角点顶点受到攻击，则可沿着2条不相交路径将额外权重8 15 分配给该顶点。如果一个边界顶点受到攻击，则可沿着3条不相交路径将额外权重11 15 分配给该顶点。该策略表明，总权重$(m-2)(\ n-2\ +\frac{12}{15}+\ ^{8)}\ (m-2)$
$\frac{+8\ n-2}{15}+\frac{11}{15}+\frac{28}{15}+\frac{8}{15}-\frac{mn}{5}+\frac{2(m+n)}{15}+\frac{39}{15}\ ()$ 足以保护图，使其免受任意攻击序列的影响。 □

定理 6.4。 $\gamma_f^\infty(P_n \boxtimes P_m) \leq \frac{mn}{9}+\ ^{16}(m+n)\ +\frac{114}{9}$ 对于任意 $m,n \geq 0$。

证明。注意，在内部的 $P_{n-8}\boxtimes P_{m-8}$ 子网格中，任意一对顶点之间都存在 8 条不相交路径。因此，我们首先在该子网格的每个顶点上放置权重 1 9 ；然后在图的其余顶点上放置权重 3 9 。现在，我们可以在子网格中的一个随机顶点上额外放置权重 8 9 ，并在子网格外的一个随机顶点上额外放置权重 6 9 。如果子网格中的某个顶点受到攻击，那么额外的权重 8 9 可以沿八条不相交路径分配到该顶点；否则，额外的权重 6 9 可以沿通向该顶点的不相交路径分配。这一策略表明，总权重为 $(m-8)(\ n-8\ +\frac{8}{9}+\frac{24m+24n-192}{9}+\frac{6}{9}=)\ \frac{mn}{9}+\ ^{16(m+n)}$
$_9\ \ +\frac{114}{9}$ 即可使图抵御任意攻击序列。 □

7 结论

我们最后提出一些有待未来研究解决的开放问题。在第3节中，我们指出，对于任意有理数 $r \geq 2$，都存在一个图，其分数永恒支配数恰好为 r。然而，对于每一个有限图 G，$\gamma_f^\infty(G)$ 是否必然为有理数，目前尚不清楚。

问题 7.1. 对于每个图 G，Is $\gamma_f^\infty(G)$ 是否为有理数?

在第 2 节中，我们证明了，如果图 G 可以由 n 分数支配函数永恒分数支配，那么可以高效地计算 $\gamma_f^\infty(G)$ 和最优防守策略，并且 $\gamma_f^\infty(G)$ 必然是有理数。这引出了以下问题：

问题 7.2. 每个有限图都能被分数支配函数永恒分数支配吗?

显然，问题 7.2 的肯定答案意味着问题 7.1 也有肯定答案。

鉴于定理 5.2 给出的关于 G 的连通度和阶的 $\gamma_f^\infty(G)$ 上界，以及引理 5.1 中关于 $\gamma_f(G)$ 的界，我们提出以下问题：

问题 7.3. 是否存在某个函数 f，使得每个连通度为 κ 的图都满足 $\gamma_f^\infty(G) \leq \gamma_f(G) + f(\kappa)$?

在研究了各种图类之后，我们仍有一些未解的问题。

问题 7.4。确定所有 Kneser 图的 $\gamma_f^\infty(G)$ 的精确值。

回顾一下，定理 4.13 确定了 $n = 5$ 和 $k = 2$的精确值，而定理 4.14 给出了 $KG_{n,2}$的界。

在第 5 节中已经证明，如果 G 是一个三次阿贝尔 Cayley 图，那么当且仅当 G 同构于 $C_{4k+2}\square K_2$ 或 Cay($\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\}$)（其中 k为某个正整数）时，$\gamma_f^\infty(G) < \gamma(G)$。对于所有其他三次阿贝尔 Cayley 图以及 $C_{10}\square K_2$，$\gamma_f^\infty(G)$ 的精确值也已算出。

问题 7.5。设 k 为正整数。当 G同构于以下图时，确定 $\gamma_f^\infty(G)$ 的精确值

- $C_{4k+2}\square K_2$ 对于 $k \neq 2$;
- Cay($\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\}$)。

最后，转向图乘积，对于超立方体、笛卡尔网格（“梯子图”除外）和强网格，$\gamma_f^\infty(G)$ 的确切值仍未解决。然而，图乘积中的支配参数 notoriously 难以计算，而第 6 节的结果提供了一些初步的界，可作为进一步研究的起点。

致谢

D. Khatri 和 N. Kumar 在蒙特利尔大学担任研究实习生期间完成了本研究的部分工作，并感谢 MITACS Globalink 计划提供的支持。A. Krim-Yee 和 A. Xu 在道森学院担任研究实习生期间完成了本研究的部分工作，并感谢 FRQNT 提供的经费支持。B. Seamone 获得了编号为 2018-CO-210238 的 FRQNT 资助，V. Virgile 获得了 NSERC 的资助，G. MacGillivray 获得了 NSERC 的资助。

参考文献

[1] J. Azarija, M. Henning, and S. Klavžar,（棱柱图中的全支配），《组合学电子期刊》，24（2017），第 #P1.19 页。[2] S. Bard, C. Duffy, M. Edwards, G. MacGillivray, and F. Yang，分裂图中的永恒支配，《组合数学与组合计算杂志》，101（2017），第 121–130 页。

[3] A. P. Burger, E. J. Cockayne, W. R. Gründlingh, C. M. Mynhardt, J. H. van Vuuren, and W. Winterbach，图中的无限阶支配，《组合数学与组合计算杂志》，50（2004），第 179–194 页。

[4] G. S. Domke, S. T. Hedetniemi, and R. C. Laskar，图中的分数打包、覆盖与不可冗余，Congr. numer，66（1988），第 227–238 页。

[5] M. Farber，强弦图中的支配、独立支配与对偶性，《离散应用数学》，7（1984），第 115–130 页。[6] W. Goddard, S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi，图中的永恒安全，《组合数学与组合计算杂志》，52（2005），第 169–180 页。[7] D. L. Grinstead and P. J. Slater，图中的分数支配与分数打包，Congr. numer，71（1990），第 153–172 页。

[8] T. W. Haynes, S. Hedetniemi, and P. Slater，《图的支配：高级主题》，1998。[9] ——，《图支配基础》，CRC出版社，1998。[10] R. Hill，《编码理论入门》，牛津大学出版社，1986。

[11] W. F. Klostermeyer and G. MacGillivray，图中的永恒支配集，《组合数学与组合计算杂志》，68（2009），第 97–111 页。

[12] W. F. Klostermeyer and C. M. Mynhardt，用移动守卫保护图，《应用分析与离散数学》，10（2016），第 1–29 页。[13] S. Wai-Chee，关于阿贝尔群的 3-正则与 4-正则凯莱图，技术报告，《技术报告》。香港浸会大学数学系，1995。

附录

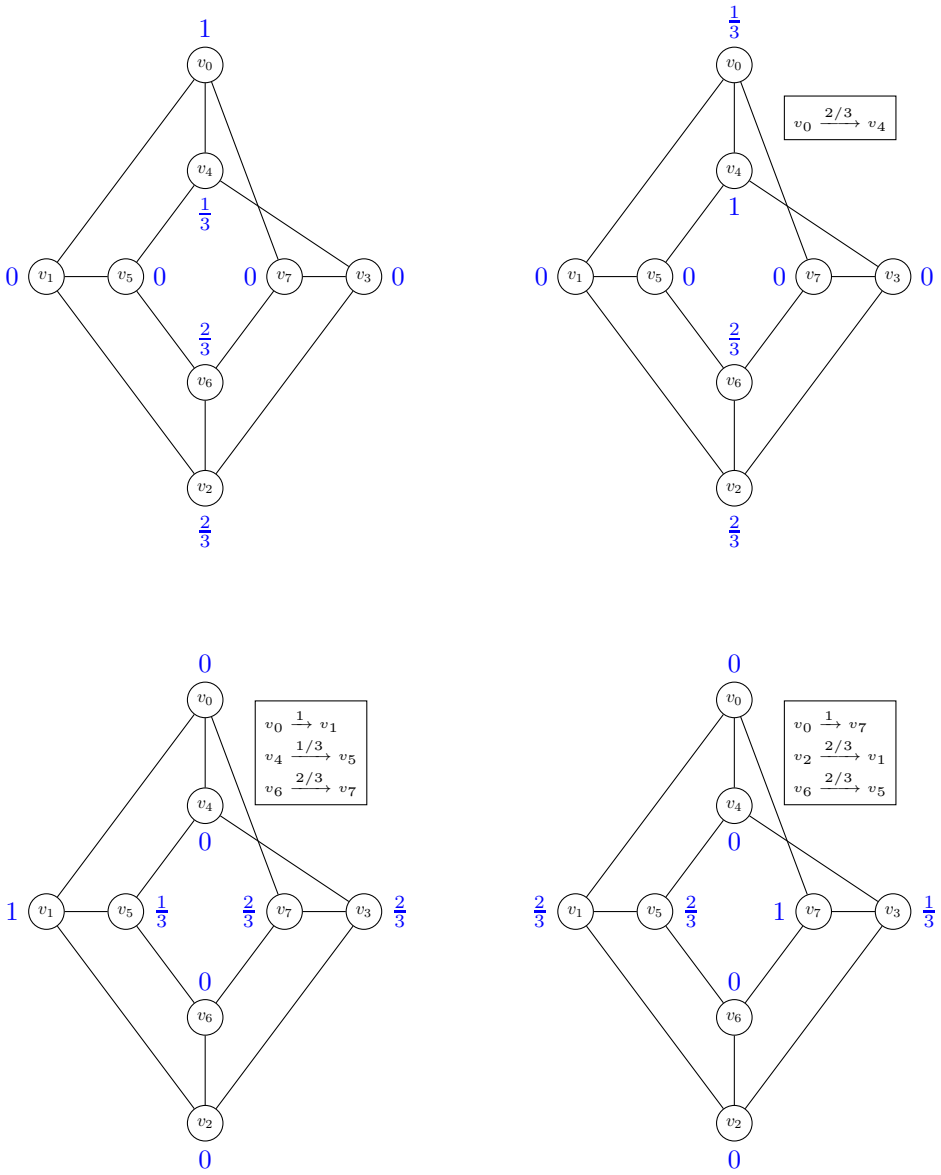

图 4：在顶点 v_0、v_1、v_4、v_7 遭受攻击后，$Cay(\mathbb{Z}_8, \{\pm 1, 4\})$ 中的守卫配置。左上方的图对应于守卫的初始配置。

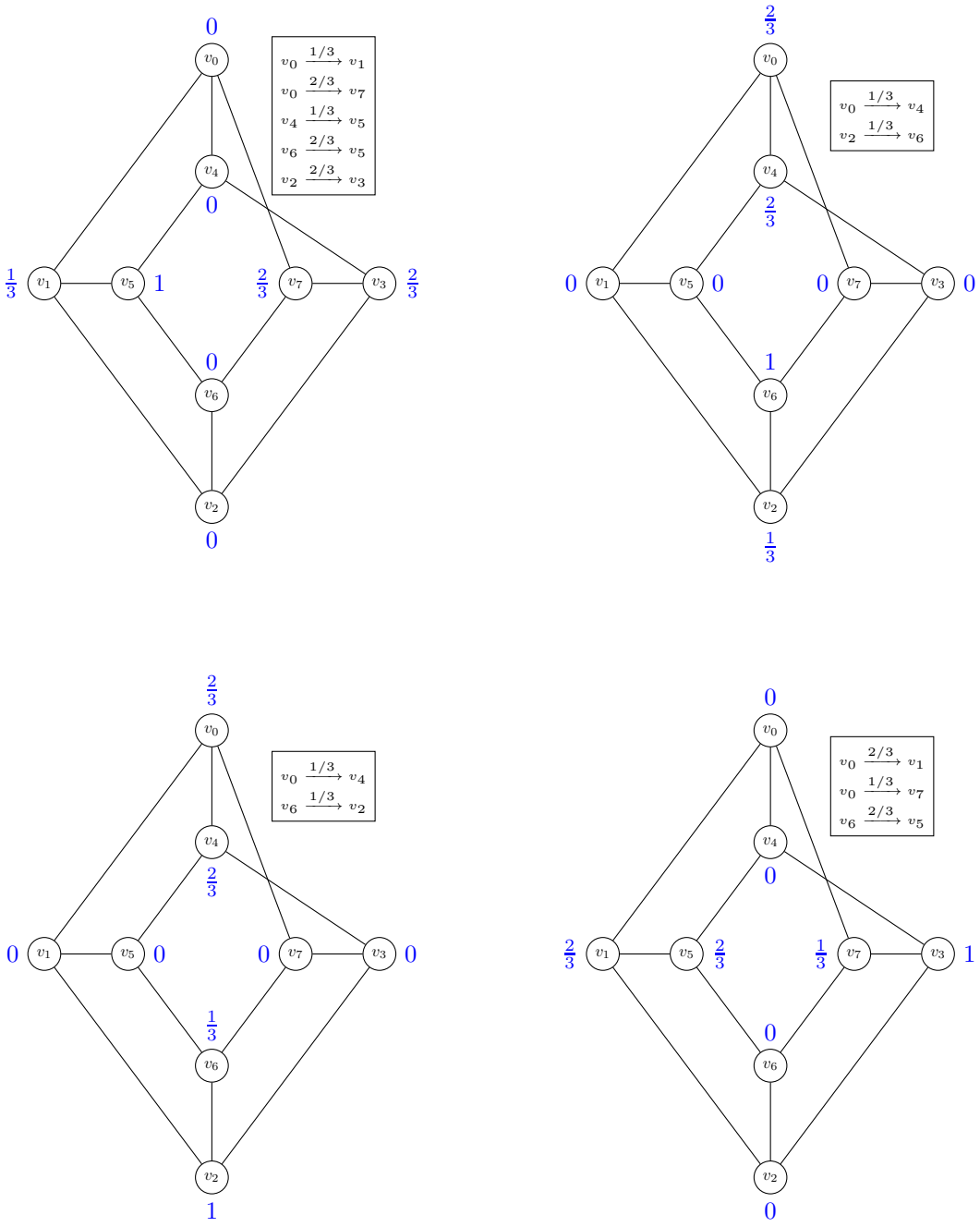

图 5：在攻击顶点 v_2、v_3、v_5、v_6 后，$Cay(\mathbb{Z}_8, \{\pm 1, 4\})$ 中的守卫配置。左上方的图对应于守卫的初始配置。

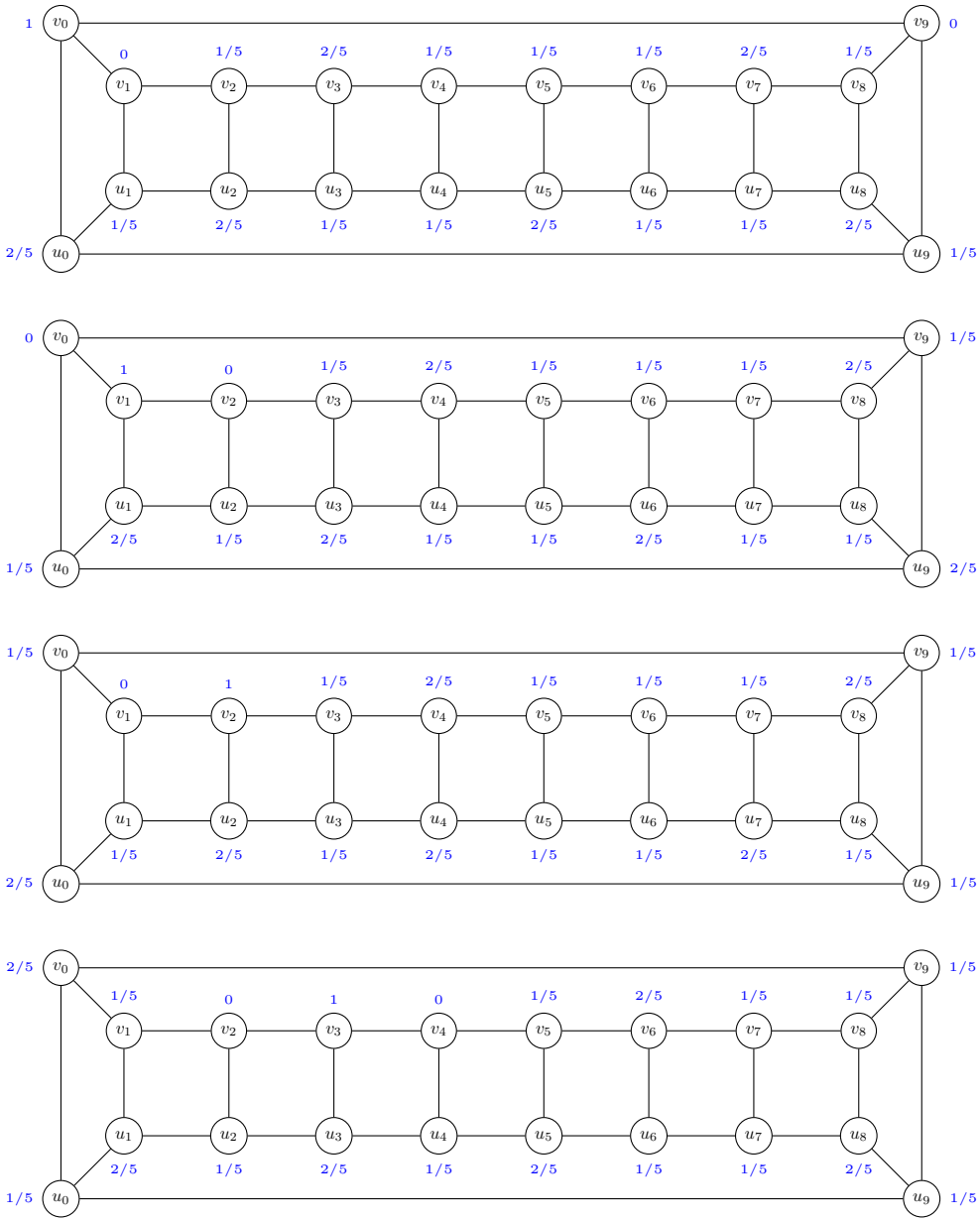

图6：对顶点v_0、 v_1、 v_2、 v_3发起攻击后 $C_{10}\square K_2$ 的守卫配置。上方的图对应于守卫的初始配置。

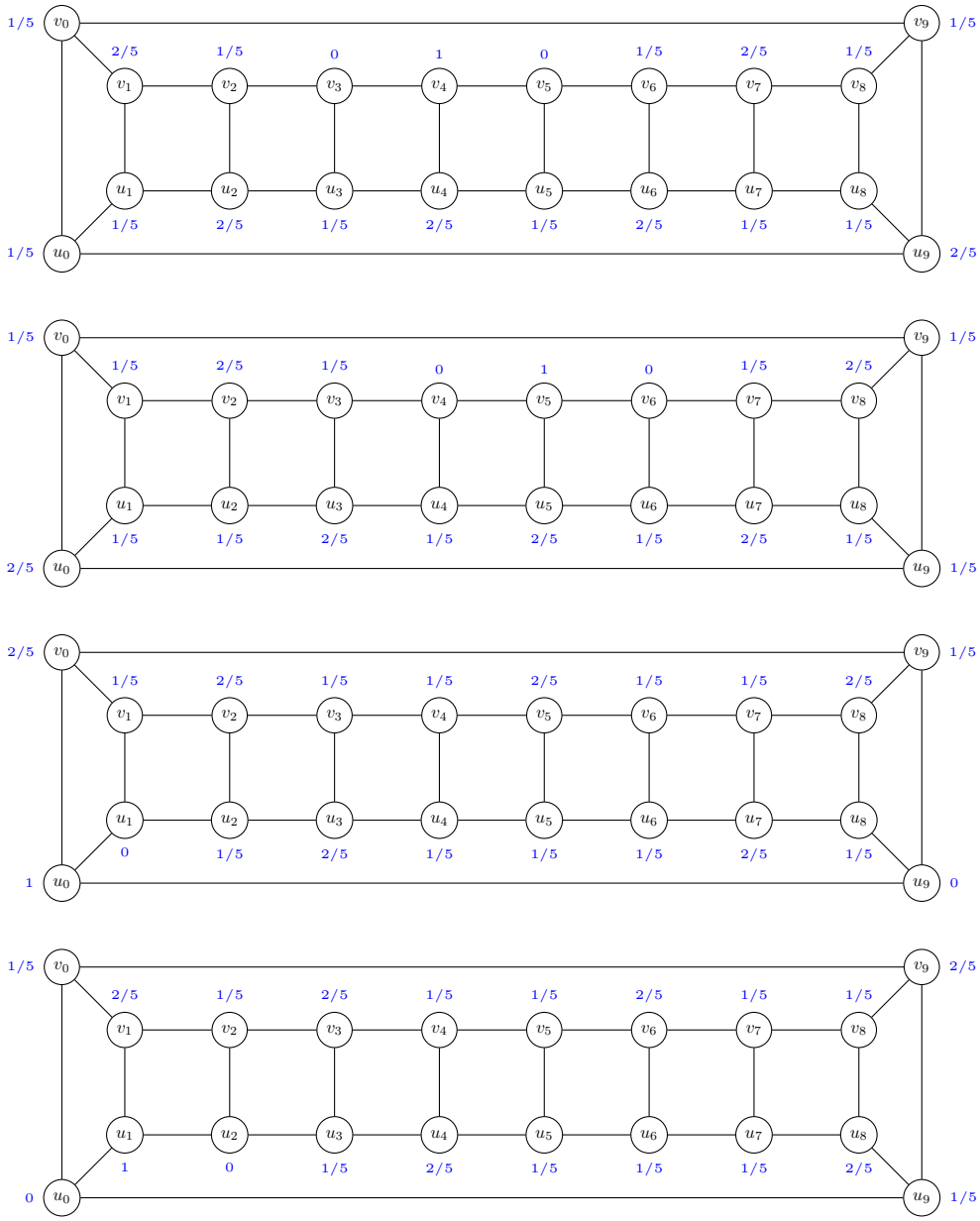

图7：对顶点v_4、 v_5、 u_0、 u_1发起攻击后 $C_{10}\square K_2$ 中的守卫配置。上方的图对应守卫的初始配置。

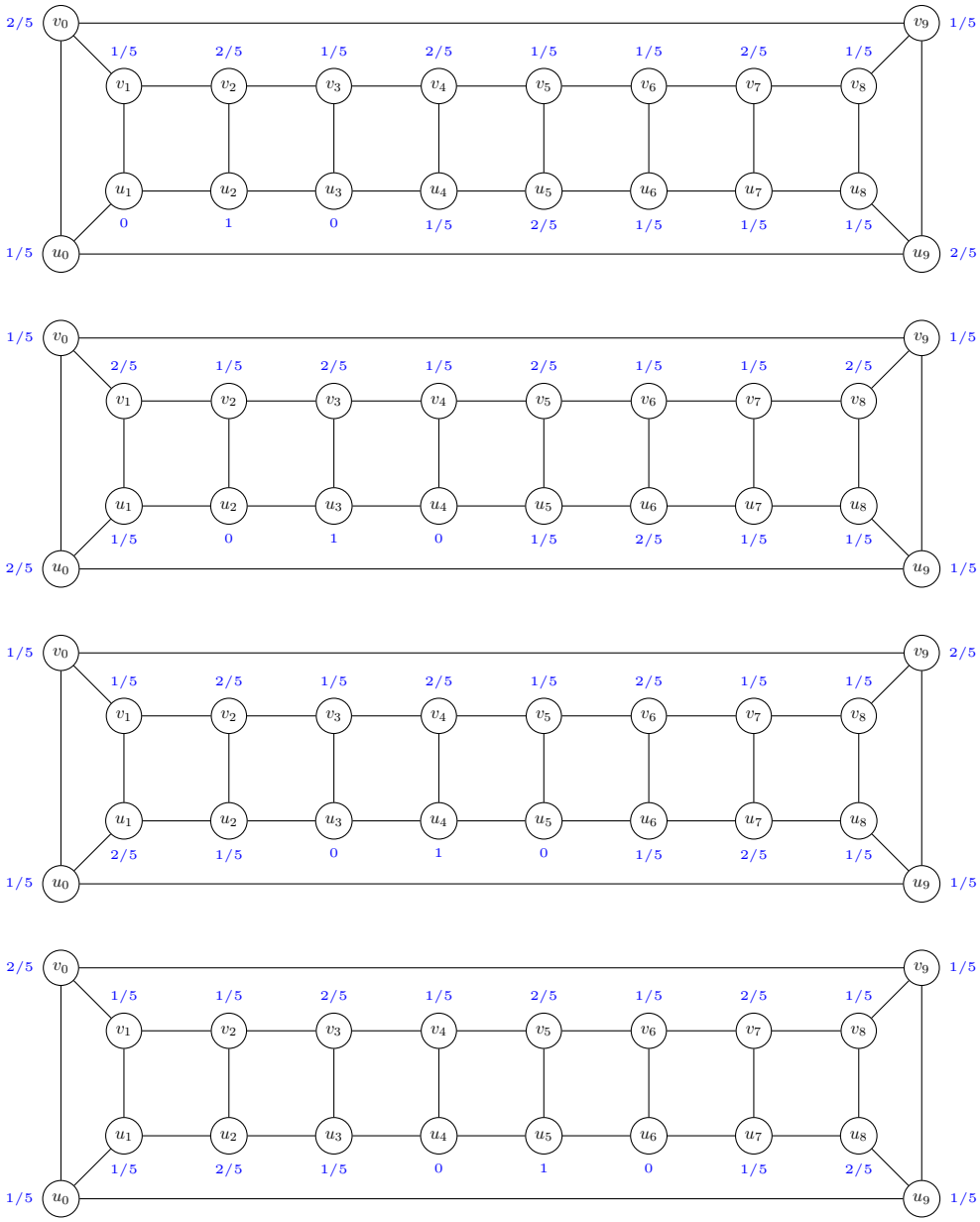

图8：在对顶点u_2、 u_3、 u_4、 u_5发动攻击后 $C_{10}\square K_2$ 的守卫配置。上方的图对应于守卫的初始配置。

表 1：守卫对 $C_{10}\square K_2$ 的各个顶点遭受攻击时的响应。

攻击	响应
v_1	$v_0 \xrightarrow{1} v_1,\quad v_2 \xrightarrow{1/5} v_3,\quad v_3 \xrightarrow{2/5} v_4,\quad v_4 \xrightarrow{1/5} v_5,\quad v_5 \xrightarrow{1/5} v_6,\quad v_6 \xrightarrow{1/5} v_7,\quad v_7 \xrightarrow{2/5} v_8,\quad v_8 \xrightarrow{1/5} v_9,\quad u_0 \xrightarrow{2/5} u_1,$ $u_1 \xrightarrow{1/5} u_2,\quad u_2 \xrightarrow{2/5} u_3,\quad u_3 \xrightarrow{1/5} u_4,\quad u_4 \xrightarrow{1/5} u_5,\quad u_5 \xrightarrow{2/5} u_6,\quad u_6 \xrightarrow{1/5} u_7,\quad u_7 \xrightarrow{1/5} u_8,\quad u_8 \xrightarrow{2/5} u_9,$ $u_9 \xrightarrow{1/5} u_0$
v_2	$v_0 \xrightarrow{2/5} v_9,\quad v_0 \xrightarrow{2/5} u_0,\quad v_3 \xrightarrow{2/5} v_2,\quad v_6 \xrightarrow{1/5} v_5,\quad v_7 \xrightarrow{1/5} v_6,\quad u_0 \xrightarrow{1/5} u_1,\quad u_0 \xrightarrow{1/5} u_9,\quad u_1 \xrightarrow{1/5} u_2,$ $u_2 \xrightarrow{2/5} v_2,\quad u_3 \xrightarrow{1/5} u_2,\quad u_4 \xrightarrow{1/5} u_3,\quad u_5 \xrightarrow{2/5} u_4,\quad u_6 \xrightarrow{1/5} u_5,\quad u_7 \xrightarrow{1/5} u_6,\quad u_8 \xrightarrow{2/5} u_7,\quad u_9 \xrightarrow{1/5} u_8$
v_3	$v_0 \xrightarrow{1/5} v_1,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} v_9,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} u_0,\quad v_2 \xrightarrow{1/5} v_3,\quad v_4 \xrightarrow{1/5} v_3,\quad v_7 \xrightarrow{1/5} v_6,\quad u_0 \xrightarrow{1/5} u_1,\quad u_0 \xrightarrow{1/5} u_9,$ $u_2 \xrightarrow{1/5} u_3,\quad u_4 \xrightarrow{1/5} u_3,\quad u_5 \xrightarrow{1/5} u_4,\quad u_6 \xrightarrow{1/5} u_5,\quad u_7 \xrightarrow{1/5} u_6,\quad u_8 \xrightarrow{1/5} u_7,\quad u_9 \xrightarrow{1/5} u_8$
v_4	$v_0 \xrightarrow{1/5} v_1,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} v_9,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} u_0,\quad v_3 \xrightarrow{2/5} v_4,\quad v_5 \xrightarrow{1/5} v_4,\quad u_0 \xrightarrow{1/5} u_1,\quad u_0 \xrightarrow{1/5} u_9,\quad u_1 \xrightarrow{1/5} u_2,$ $u_2 \xrightarrow{1/5} u_3,\quad u_3 \xrightarrow{1/5} u_4,\quad u_5 \xrightarrow{1/5} u_4,\quad u_7 \xrightarrow{1/5} u_6, u_8 \xrightarrow{1/5} u_7$
v_5	$v_0 \xrightarrow{1/5} v_1, v_0 \xrightarrow{1/5} v_9, v_0 \xrightarrow{2/5} u_0, v_3 \xrightarrow{2/5} v_2, v_4 \xrightarrow{1/5} v_5, v_6 \xrightarrow{1/5} v_5,\quad v_7 \xrightarrow{2/5} v_8,\quad u_0 \xrightarrow{1/5} u_1,$ $u_0 \xrightarrow{1/5} u_9,\quad u_1 \xrightarrow{1/5} u_2,\quad u_2 \xrightarrow{2/5} u_3,\quad u_3 \xrightarrow{1/5} u_4,\quad u_4 \xrightarrow{1/5} u_5\ u_6 \xrightarrow{1/5} u_5,\quad u_7 \xrightarrow{1/5} u_6,\quad u_8 \xrightarrow{2/5} u_7,$ $u_9 \xrightarrow{1/5} u_8$
u_0	$v_0 \xrightarrow{1/5} v_1,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} v_9,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} u_0,\quad v_3 \xrightarrow{1/5} v_2, v_7 \xrightarrow{1/5} v_8, u_1 \xrightarrow{1/5} u_0, u_2 \xrightarrow{1/5} u_3, u_5 \xrightarrow{1/5} v_5,$ $u_8 \xrightarrow{1/5} u_7, u_9 \xrightarrow{1/5} u_0$
u_1	$v_0 \xrightarrow{2/5} v_1,\quad v_0 \xrightarrow{2/5} v_9,\quad v_7 \xrightarrow{1/5} v_6,\quad u_0 \xrightarrow{2/5} u_1,\quad u_2 \xrightarrow{2/5} u_1,\quad u_5 \xrightarrow{1/5} u_4$
u_2	$v_0 \xrightarrow{1/5} v_1,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} v_9,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} u_0,\quad v_2 \xrightarrow{1/5} u_2,\quad v_3 \xrightarrow{2/5} v_2,\quad v_4 \xrightarrow{1/5} v_3,\quad v_5 \xrightarrow{1/5} v_4,\quad v_6 \xrightarrow{1/5} v_5,$ $v_7 \xrightarrow{1/5} v_6, v_8 \xrightarrow{1/5} v_7, u_0 \xrightarrow{2/5} u_9, u_1 \xrightarrow{1/5} u_2, u_3 \xrightarrow{1/5} u_2, u_4 \xrightarrow{1/5} v_4,\quad u_5 \xrightarrow{1/5} u_4,\quad u_6 \xrightarrow{1/5} u_5,$ $u_7 \xrightarrow{1/5} u_6,\quad u_8 \xrightarrow{1/5} u_7,\quad u_8 \xrightarrow{1/5} v_8,\quad u_9 \xrightarrow{1/5} u_8$
u_3	$v_0 \xrightarrow{2/5} v_1,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} v_9,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} u_0,\quad v_3 \xrightarrow{1/5} u_3,\quad v_4 \xrightarrow{1/5} v_3,\quad v_5 \xrightarrow{1/5} v_4,\quad v_6 \xrightarrow{1/5} v_5,\quad v_7 \xrightarrow{1/5} v_6,$ $u_0 \xrightarrow{1/5} u_9,\quad u_2 \xrightarrow{2/5} u_3,\quad u_3 \xrightarrow{1/5} u_3,\quad u_5 \xrightarrow{1/5} v_5,\quad u_7 \xrightarrow{1/5} u_6,\quad u_8 \xrightarrow{1/5} u_7,\quad u_9 \xrightarrow{1/5} u_8,\quad u_8 \xrightarrow{1/5} v_8$
u_4	$v_0 \xrightarrow{1/5} v_1,\quad v_0 \xrightarrow{2/5} v_9,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} u_0,\quad v_3 \xrightarrow{1/5} v_4, v_4 \xrightarrow{1/5} u_4, v_5 \xrightarrow{1/5} v_4, v_6 \xrightarrow{1/5} v_5, v_7 \xrightarrow{2/5} v_6,$ $u_0 \xrightarrow{1/5} u_1, u_0 \xrightarrow{1/5} u_9,\quad u_3 \xrightarrow{1/5} u_4,\quad u_5 \xrightarrow{1/5} u_4,\quad u_8 \xrightarrow{2/5} u_7,\quad u_9 \xrightarrow{1/5} u_8$
u_5	$v_0 \xrightarrow{1/5} v_1,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} v_9,\quad v_0 \xrightarrow{1/5} u_0,\quad v_2 \xrightarrow{1/5} v_3,\quad v_3 \xrightarrow{1/5} v_4,\quad v_4 \xrightarrow{1/5} v_5,\quad v_5 \xrightarrow{1/5} u_5,\quad v_6 \xrightarrow{1/5} v_5,$ $v_7 \xrightarrow{1/5} v_6,\quad v_8 \xrightarrow{1/5} v_7,\quad u_0 \xrightarrow{1/5} u_1,\quad u_0 \xrightarrow{1/5} u_9,\quad u_1 \xrightarrow{1/5} u_2,\quad u_2 \xrightarrow{1/5} v_2,\quad u_4 \xrightarrow{1/5} u_5,\quad u_6 \xrightarrow{1/5} u_5,$ $u_8 \xrightarrow{1/5} v_8,\quad u_9 \xrightarrow{1/5} u_8$