arXiv:2304.11804v1 [math.SG] 24 Apr 2023

A 关于具有无限填充的接触流形的札记 S

ZHENGYI ZHOU

Abstract. 我们利用脊柱开书，在任意奇数维度 > 1构造出具有无穷多个不同 Weinstein 填充的接触流形；此前，在维数为 $4n+1$时，这样的例子尚不为人知。该论证不涉及对辛映射类群中分解的理解。

1. Introduction

接触流形自然地作为辛流形的凸边界出现。Gromov 于[14] 以及 Eliashberg 于 [9] 20 世纪 80 年代末发现，并非所有接触流形都能以这种方式实现。因此，理解接触流形的辛填充是接触拓扑中的一个基本问题。许多研究者对这类问题进行了广泛研究，起初关注的是不存在填充的情形 [6, 7, 8, 10, 11,13, 22, 29], ，接着是填充唯一的情形（在许多情况下，这里仅指拓扑类型唯一） [4, 8, 12, 14, 23, 28, 30],，而这一范围的另一端则是存在无穷多个填充的情形[25, 26]。由于总可以对辛填充进行吹起以改变其拓扑，我们在研究无限填充问题时需要将范围限制在 Liouville 或 Weinstein 填充。与不存在填充和填充唯一的情形不同，后两者通常依赖于利用伪全纯曲线的某些刚性论证，而构造具有无穷多个填充的接触流形通常采用辛拓扑中拓扑或柔性的一面。Ozbagci 和 Stipsicz 构造了第一个（除平凡情形 S^1之外的）具有多个不同 Weinstein 填充的接触流形[26] ，其维数为 3。如今，已有许多针对三维填充拓扑施加各种限制的构造，见 [1, 2, 3, 5]。Oba [25] 将 Ozbagci 和 Stipsicz 的结果推广到了维数 $4n-1$。他们的构造基于接触流形的开书构造，并在辛映射类群中寻找单值化的无穷多个不同正 Dehn-Seidel 扭转分解。这种方法在三维最为有效，因为对于曲面，辛映射类群与经典映射类群一致。在更高维度中，辛映射类群通常不同于经典映射类群，而人们对它的了解也少得多。值得指出的是，Lazarev [17]从手术的角度构造了具有多个不同 Weinstein 填充的接触流形，其维数为 ≥ 5，并且填充的数量可以任意大。

在本文中，我们在任意维数下给出了一种构造具有无穷多个不同 Weinstein 填充的接触流形的新方法。该构造基于脊柱开书——这是由 Lisi、Van Horn-Morris 和 Wendl [18]引入的接触开书的推广。Baykur 和 Van Horn-Morris [5] 利用脊柱开书构造了接触三维流形，这些流形具有无穷多个 Weinstein 填充，其欧拉示性数可以任意大，而签名可以任意小。启发式地说，脊柱开书作为一个带边界的一般曲面上的 Lefschetz 纤维化的接触边界出现。此类接触流形，尤其是在维数 4 中，已在 [18, 19, 21] 中得到系统研究。此外，还存在纤维化到维数高于 2 的 Liouville 域上的脊柱开书概念，参见例如 [20, 24]。本文将范围限制在底空间为曲面的情形。

定理 1.1. 设 V是沿三个点对两个 T^*S^n进行管接所得的结果。那么接触边界 $\partial(\Sigma_{1.1}\times V)$ 具有无穷多个不同的 Weinstein 填充，其中 $\Sigma_{1,\ 1}$ 是一个带有一个边界分支的亏格为一的黎曼曲面，并将其视为 S^1的 Weinstein 填充。

我们指出，我们的构造本质上是局部的，也就是说，如果 V 包含定理1.1 中的域作为辛子域，且证明中的同调计算成立，那么就可以对 $\partial(\Sigma_{1.1}\times V)$得出结论。例如，对定理1.1 中的 V 与任意 Weinstein 域作边界连通和后，结论仍然成立。此外，对于更一般的球面管接，也存在类似现象。此外，当 n 为奇数时，也就是说，当接触流形的维数为 $4k-1$时，我们可以取 V为两个在一点处 T^*S^n 管接的

我们的策略与[25, 26]类似：接触边界 $\partial(\Sigma_{1.1}\times V)$ 是覆盖$\Sigma_{1,1}$的平凡脊柱开书，而任意表示 ρ： $\pi_1(\Sigma_{1,1})\to Symp_c(V)$，只要满足 $\rho(\partial\Sigma_{1,1})=\mathrm{id}$，就会导出一个以 V 为纤维、底空间为 $\Sigma_{1,1}$ 的 Weinstein 填充。将 $\pi_1(\Sigma_{1,1})$ 的一个生成元映到恒等元，总能得到这样一个表示，因此 $Symp_c(V)$ 中的每个元素 ϕ，也就是另一个生成元在 ρ 下的像，都会导出一个填充。接着，通过理解 ϕ 对 V 的同调的影响，我们可以得到无穷多个填充。特别地，我们不需要考虑辛映射类群中的分解。

由定理 1.1可知，下一个自然问题是排除这一问题的经典拓扑方面，即：

问题 1.2。是否存在具有无穷多个不同 Weinstein/Liouville 填充的接触流形，而这些填充具有相同的形式数据，即作为相同的微分/近复/近 Weinstein 流形（相对于边界）？

我们预计这个问题的答案是肯定的，至少在维数足够高时如此。然而，据作者所知，我们甚至还不知道具有多个光滑相同但辛结构不同的填充的接触流形实例。不同于定理 1.1，要解决上述问题，必须引入刚性技术，例如全纯曲线或层。利用脊柱开书，我们至少在维数 $4n+1$ 中找到了问题 1.2 的候选实例。

问题 1.3。设 $\phi\in Symp_c(V)$ 由 V 中沿拉格朗日球面的 Dehn-Seidel 扭转的八次幂生成，其中 $\dim V=4n$。将一个生成元映射到 ϕ、另一个映射到恒等映射，从 $\pi_1(\Sigma_{1,1})\to Symp_c(V)$ 所诱导的辛纤维丛是否与 $\Sigma_{1,1}\times V$ 辛同胚?

显然，此类问题背后的动机在于，Dehn-Seidel 扭转的八次幂在维数 $4n$ [15]中与恒等映射光滑同伦 [4, 27]，但并不与恒等映射辛同伦 [4, 27]。在 4 维和 12 维中，可以用平方替代八次幂。

致谢。作者感谢 Fabio Gironella 就本项目进行富有成效的讨论并对此项目给予关注，也感谢 Samuel Lisi、Takahiro Oba 和 Chris Wendl 提供有益的意见。作者ได้รับ中国国家自然科学基金项目（批准号：12288201 和 12231010）的资助。

2. Proof

设 V为一个 Liouville 域，且 $\phi\in\pi_0(Symp_c(V))$; 我们可以赋予

$$\Sigma_{g,1}\times\partial V\cup_{S^1\times\partial V}V_\phi$$

通过 Thurston-Winkelnkemper 构造得到的接触结构，见 [18, §2.1], 其中 $\Sigma_{g,\ 1}$ 是一个带一个边界分支的亏格为 g 的曲面，而 V_ϕ是映射环面 $V\times[0,1]/(x,0)\sim(\phi(x),1)$。这是 [18], 中所讨论的脊柱开书的一个非常特殊的情形，其中椎骨（此处为 $\Sigma_{g,\ 1}$）可以有更多

个边界分支，且可以是不连通的。在本文中，我们只考虑 $g=1$ 和 $\phi=\mathrm{id}$ 的情形。此时，接触流形是接触边界 $\partial(\Sigma_{1,1}\times V)$。

引理 2.1（[5, 18]）。设 Σ 是一个带边界的连通黎曼曲面，V 是一个 Weinstein 域，任意表示 $\pi_1(\Sigma)\to\pi_0(Symp_c(V))$ 将边界映射到恒等元，都可导出一个 Weinstein 填充 $\partial(\Sigma\times V)$，该填充与从 $\pi_1(\Sigma)\to\pi_0(Symp_c(V))$ 得到的 V- 丛在 Σ 上的总空间微分同胚。

更一般地，如果脊柱开书的单值化为 ϕ，并且存在 ϕ_1、ψ_1、……、ϕ_g、ψ_g $\in Symp_c(V)$ 和 τ_1、……、τ_k，它们是沿 V中的某些恰当拉格朗日球面作的 Dehn–Seidel 扭转，使得

$$\phi=\prod\tau_i\prod[\phi_i,\psi_i]$$

那么，由（$\Sigma_{g,1}$、V、ϕ）给出的脊柱开书是一个以 $\Sigma_{g,1}$ 为底、具有 k 个奇异纤维的辛 Lefschetz 纤维化的接触边界。当 V是 Weinstein 域时，该 Lefschetz 纤维化的总空间是该脊柱开书的 Weinstein 填充。

引理 2.2. 设 V_ϕ 为映射环面，则有短正合列

$$0\to\ker(\phi_*-\mathrm{id})\to H_*(V_\phi)\to\mathrm{coker}(\phi_*-\mathrm{id})[-1]\to 0$$

证明. V_ϕ 的同调可以由 $C_*(V)\xrightarrow{\phi_*-\mathrm{id}}C_*(V)$的锥计算得到。所诱导的长正合列推出上述短正合列。□

更一般地，设 $V_{\phi\vee\mathrm{id}}$ 为 V纤维丛，其底空间为 $S^1\vee S^1$（或同伦等价地为$\Sigma_{1,1}$），使得在一个 S^1 上的单值化为 ϕ，而在另一个 S^1上为 id。则有短正合列

$$0\to\ker(\phi_*-\mathrm{id})|_{H_k(V;\mathbb{Z})}\to H_k(V_{\phi\vee\mathrm{id}};\mathbb{Z})\to H_{k-1}(V;\mathbb{Z})\oplus\mathrm{coker}(\phi_*-\mathrm{id})|_{H_{k-1}(V;\mathbb{Z})}\to 0$$

对于 $k\geq 1$。特别地，当 V是一个维数为 $2n$的 Weinstein 域时，$H_{n+1}(V_{\phi\vee\mathrm{id}})$的挠元的基数至少与余核$(\phi_*-\mathrm{id})|_{H_n(V;\mathbb{Z})}$相同

引理 2.3（Picard–Lefschetz 公式，[16, (6.3.3)]）。设 L 为恰当域中的一个拉格朗日 n球面，且 τ_L为沿 L的 Dehn-Seidel 扭转，则（τ_L）$_*$：$H_*(W;\mathbb{Z})\to H_*(W;\mathbb{Z})$由下式给出

$$(\tau_L)_*(c)=\begin{cases}c+(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}\langle c,[L]\rangle[L], & c\in H_n(W;\mathbb{Z});\\ c, & c\in H_j(W;\mathbb{Z}),j\neq n.\end{cases}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：$H_n(W;\mathbb{Z})\otimes H_n(W;\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$是交积。

令 V^{2n}为沿三个点管接的两个 T^*S^n。我们使用 L_1、L_2来表示这两个拉格朗日球面，并规定其定向使得 $\langle[L_1],[L_2]\rangle=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}3$[1]。当 $n>1$时，在 $[L_1]$、$[L_2]$的自由基 $H_n(V^{2n};\mathbb{Z})$ 下，根据 Picard–Lefschetz 公式，Dehn–Seidel 扭转 τ_{L_1}、τ_{L_2}在 $H_n(V^{2n};\mathbb{Z})$ 上的作用为

$$\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$$

分别对于 n 奇数，以及

$$\begin{bmatrix}-1&-3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-3&-1\end{bmatrix}$$

[1]也就是说，我们按照 $T^*_qL_1$ 的诱导定向来为 L_2 定向，其中 q 是一个交点。于是，使用由 L_1 的定向诱导出的 T^*L_1 上的定向，交数为 3。额外的符号来自这样的事实：辛定向（使用 $-\mathrm{d}\sum p_i\mathrm{d}q_i$，即 $\mathbb{R}^{2n}=T^*\mathbb{R}^n$ 上的标准辛定向）不同于由 L_1 的定向通过 $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 在 T^*L_1 上诱导出的定向。

分别对于 n 偶数。当 $n=1$, $H_1(V;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^4$ 以及 $(\tau_{L_1})_*$ 使用基 $[L_1],[L_2]$ 和另外两个（取适当定向的）从 L_1,L_2 的两条弧粘合而成的循环，其由以下给出

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理的证明 *1.1*。设 γ_1、γ_2 是 $\Sigma_{1,1}$ 中的两条环路，分别表示环面基本群的生成元。我们考虑表示 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_{1,1}) \to Symp_c(V)$ $\gamma_1 \mapsto \phi, \gamma_2 \mapsto \mathrm{id}$。根据引理 2.1，它产生了 $\partial(\Sigma_{1,1}\times V)$ 的一个填充，该填充与 $V_{\phi\vee\mathrm{id}}$ 同伦等价。

当 $n>1$ 为奇数时，我们取 ϕ 为 τ_{L_1}。由于 ϕ_*^k 在 $H_n(V;\mathbb{Z})$ 上由以下公式给出

$$\begin{bmatrix} 1 & -3k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

然后根据引理 2.2 之后的讨论，我们知道 $H_{n+1}(V_{\phi^k\vee\mathrm{id}};\mathbb{Z})$ 具有 $\mathbb{Z}/3k$ 挠元。因此，每个 k 都产生一个不同的 Weinstein 填充。

当 $n=1$ 时，我们取 ϕ 为 τ_{L_1}。则 ϕ_*^k 在 $H_n(V;\mathbb{Z})$ 上由以下给出

$$\begin{bmatrix} 1 & -3k & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们知道，$H_2(V_{\phi^k\vee\mathrm{id}};\mathbb{Z})$ 的挠元为 $\mathbb{Z}/k$。因此，每个 k 都给出一个不同的 Weinstein 填充。

当 n 为偶数时，我们取 ϕ 为 $\tau_{L_1}\circ\tau_{L_2}$。于是，$\phi_*$ 在 $H_n(V;\mathbb{Z})$ 上由下式给出

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

这个矩阵有正　　特征值 $\lambda_1=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}>1$、$\lambda_2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}<1$。因此，我们有　　e

$$|\det((\phi_*)^k-\mathrm{id})| = |2-\lambda_1^k-\lambda_2^k|,$$

它呈指数增长。与之前一样，$H_{n+1}(V_{\phi^k\vee\mathrm{id}})$ 的挠元阶数为 $|2-\lambda_1^k-\lambda_2^k|$，由此得到无穷多个不同的填充。□

当 n 为奇数时，我们只需取 V 为在一点处对 T^*S^n 进行管接。于是，$\tau_{L_1}^k$ 在 $H_n(V;\mathbb{Z})$ 上的作用为

$$\begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而得到无穷多个填充。

References

[1] Selman Akbulut 和 Kouichi Yasui。无穷多个小型奇异 Stein 填充。 *J. Symplectic Geom.*，12(4)：673–684，2014。[2] Anar Akhmedov、John B. Etnyre、Thomas E. Mark 和 Ivan Smith。关于接触流形 Stein 填充的注记。 *Math. Res. Lett.* 15 5 6 1127 1132, 2008 , （-）：–。[3] Anar Akhmedov 和 Burak Ozbagci。具有任意基本群的奇异 Stein 填充。 *Geom. Dedicata* 195 265 281, , ：–。 2018

[4] Kilian Barth、Hansj¨org Geiges 和 Kai Zehmisch。辛填充的微分同胚类型。 *J. Symplectic Geom.*，17 4 929 971，2019（）：–。[5] R. Inanc Baykur、Jeremy van Horn-Morris、Samuel Lisi 和 Chris Wendl。具有任意大 Stein 填充的接触三维流形族。 *J. Differ. Geom.*，101(3):423–465，2015。[6] Jonathan Bowden。没有 Stein 填充的恰可填充接触结构。 *Algebr. Geom. Topol.*，12(3):1803–1810，2012。[7] Jonathan Bowden、Diarmuid Crowley 和 Andr´as I. Stipsicz。高维 Stein 可填充流形的拓扑。I。 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*，109(6):1363–1401，2014。[8] Jonathan Bowden、Fabio Gironella 和 Agustin Moreno。Bourgeois 接触结构：紧性、可填充性及其应用。 *Invent. Math.*，230(2):713–765，2022。[9] Yakov Eliashberg。通过全纯圆盘进行填充及其应用。《低维流形几何》。2：辛流形与 Jones-Witten 理论，论文集，英国达勒姆，1989，《伦敦数学学会讲义丛书》151，45-72（1990），1990。[10] Yasha Eliashberg。3 82，1996 1996 2 77 -环面上的唯一全纯可填充接触结构。 *Int. Math. Res. Not.*，（）：–。[11] John B. Etnyre 和 Ko Honda。没有辛填充的紧接触结构。 *Invent. Math.*，148(3):609–626，2002。[12] Hansj¨org Geiges、Myeonggi Kwon 和 Kai Zehmisch。单位余切丛的辛填充的微分同胚类型。*arXiv preprint arXiv:1909.13586*，2019。[13] Paolo Ghiggini。没有 Stein 填充的强可填充接触三维流形。 *Geom. Topol.*，9:1677–1687，2005。[14] M. Gromov。辛流形中的伪全纯曲线。 *Invent. Math.*，82:307–347，1985。[15] Andreas Klein。辛单值化、Leray 留数与拟齐次多项式。 *arXiv preprint arXiv:1101.3554*，2011。[16] Klaus Lamotke。S. Lefschetz 之后的复射影簇拓扑。 *Topology*，20:15–51，1981。[17] Oleg Lazarev。极大接触与辛结构。 *J. Topol.*，13(3):1058–1083，2020。[18] Samuel Lisi、Van Horn-Morris 和 Chris Wendl。关于脊式开书分解的辛填充 I：几何构造。 *arXiv preprint arXiv:1810.12017*，2018。[19] Samuel Lisi、Van Horn-Morris 和 Chris Wendl。关于脊式开书分解的辛填充 II：全纯曲线与分类。 *arXiv preprint arXiv:2010.16330*，2020。[20] Samuel Lisi、Aleksandra Marinkovi ´ ¨ *Algebr. Geom.* c 和 *Topol.* 19 7 3409 3451, 2019 Klaus Niederkruger。关于 Bourgeois 接触结构的性质。 ，（）：–。[21] Samuel Lisi 和 Chris Wendl。脊移除手术与辛填充的地理学。 *Michigan Math. J.*，70(2):403–422，2021。[22] Patrick Massot、Klaus Niederkr¨uger 和 Chris Wendl。高维接触流形的弱可填充性与强可填充性。*Invent. Math.*，192(2):287–373，2013。[23] Dusa McDuff。具有接触型边界的辛流形。 *Invent. Math.*，103(3):651–671，1991。[24] Agustin Moreno。高维接触流形中的代数挠率。 *arXiv preprint arXiv:1711.01562*，2017。[25] Takahiro Oba。具有无穷多个 Stein 填充的高维接触流形。 *Trans. Am. Math. Soc.*，370(7):5033–5050，2018。[26] Burak Ozbagci 和 Andr´as I. Stipsicz。具有无穷多个 Stein 填充的接触三维流形。 *Proc. Am. Math. Soc.*，132 5 1549 1558，2004（）：–。[27] Paul Seidel。拉格朗日二球面可以被辛打结。 *J. Differ. Geom.*，52(1):145–171，1999。[28] Chris Wendl。强可填充接触流形与 J-全纯叶状结构。 *Duke Math. J.*，151(3):337–384，2010。[29] Zhengyi Zhou。（$\mathbb{RP}^{2n-1}$，ξ_{std}）对 $n \neq 2^k$而言并非恰可填充。 *Geom. Topol.*，25(6):3013–3052，2021。[30] Zhengyi Zhou。关于 $\partial(V \times \mathbb{D})$ 的填充。 *Math. Ann.*，385(3-4):1493–1520，2023。

Zhengyi Zhou，Morningside Center of Mathematics and Institute of Mathematics AMSS CAS China，„:
E-mail address
zhyzhou@amss.ac.cn