arXiv:2304.11878v1 [math.LO] 24 Apr 2023

在数的代数中发现类的代数——从乔治·布尔到当今

斯坦利·伯里斯

许多人错误地认为，布尔于1854年发表的经典著作 [1], 《思维定律》，必定是关于他所创立的布尔代数这一学科。实际上，他运用普通数系中的符号和方程推理，并增添变量必须是幂等的要求，发展出了他的逻辑代数（逻辑代数）。试图将他的逻辑代数理解为布尔代数或布尔环，都是一种错误——尽管如此，布尔的逻辑代数中的某些表达式很容易被理解为属于这两个学科。

布尔采用数的代数方法的一个缺点是：在选择乘法作为完全定义的交运算之后，他对类进行的加法和减法运算被迫成为部分定义的运算——然而，他进行代数运算时却仿佛这些运算都是完全定义的。他认为可以通过使用不可解释的项的方法推导出关于类的有意义结果，这一原则并未得到认可——不久之后，其他人便用后来最终发展为布尔代数的理论取代了布尔的逻辑代数。[1] 尽管他的逻辑代数与布尔代数相比，与布尔环有更多共同之处，[2] 但布尔环直到很久以后才出现——将对称差作为基本运算，并不是一个显而易见的选择。

第1节概述 Boole 的 AoL。第2节介绍 Whitney 于1933年利用特征函数，将现代类的布尔代数编码到数的代数中的工作。Whitney 没有意识到他的工作与 Boole 的工作有着多么深的联系——这一点要等到 Hailperin 于1976/1986年出版的著作才得以揭示，该著作重点讨论了带符号多重集（见第3节）。第4节解释 Boole 的 0 和 1 法则，以及 Horn 句子在证明其结果方面近期发挥的作用。第5节考察 Brown 使用原布尔多项式的 Boole 的 AoL 版本。

为使叙述流畅，经常会暂时搁置所提及作者使用的各种原始记号。

日期：2023年4月25日。[1]1864年，Jevons [8] 摒弃了 Boole 的数值上层结构，转而用性质替代类。将他的性质转换回类后可以发现，他从并、交和补集这些自然运算出发，开启了现代布尔代数的发展，随后 Peirce、Venn、Schr¨oder、Huntington、Royce 和 Stone 等杰出学者继续推进了这一发展。不过，本文关注的是沿着 Boole 的数的代数路径延续下来的研究成果。[2]数的代数中成立的所有准方程，在 Boole 的 AoL 中也都成立。这些方程在布尔环中同样成立，但并非所有准方程都成立——例如，布尔环不是无挠的。

1. George Boole's Algebra of Logic

在 [1], 第 27 页，布尔断言，只需少数几个符号即可建立逻辑代数:

> 语言运算作为一种推理工具，都可以借助由以下元素组成的符号系统来进行:
>
> 第一，文字符号，如 x, y 等，代表作为我们观念对象的事物。
>
> 第二，运算符号，如 $+$, $-$, $\times$，代表心智的运算；借助这些运算，事物的观念得以组合或分解，从而形成包含相同元素的新观念。
>
> 第三，恒等号 $=$。
>
> 这些逻辑符号在使用时受明确法则的约束；这些法则一部分与代数科学中相应符号的法则一致，一部分则有所不同。

他很快就在上述内容中加入了符号 1 和 0。布尔并没有为他的逻辑代数采用以下这种现代递归定义，将项定义为符号串:

- 变量是项，符号 0 和 1 也是项。
- 假设 s 和 t 都是项。那么 $(s \cdot t)$、$(s + t)$ 和 $(s - t)$ 也都是项。

他的记法沿用了数的代数中的惯例，是项和多项式的非正式混合。

给定一个论域，他的模型是令 1 表示论域，0 表示空类，并将论域中 x 和 y 这两个类的三种二元运算定义如下: [3]

- $x \times y := x \cap y$
- $x + y := \begin{cases} x \cup y & \text{若 } x \cap y = 0 \text{ 未定义，则为} \\ \end{cases}$

其他情况

- $x - y := \begin{cases} x \setminus y & \text{若 } y \subseteq x \text{ 未定义，} \end{cases}$

则为其他情况。

布尔不用“未定义”，而是说“不可解释的”。下文中， x 和y 的乘积将写作 $x \cdot y$，或者如布尔常写的那样，简写为 xy （就像在数的代数中一样）。显然， $1 - x$ 是类 x的补集。类的幂等律$x^2 = x$ 由他对乘法的定义推导而来。若项 t（x_1，.....， x_n）在

[3]等号右侧使用现代记号，其中“:=”表示按定义相等。2

对 x_i 的所有类取值都可解释，则称其为完全可解释的。[4] 若方程 $s = t$中的 s 和 t 都完全可解释，则该方程完全可解释。

布尔通过全可解释项（由于“–”是二元减法）以及其逻辑代数中的多项式来表示类上的标准运算：[5]

$$\begin{aligned} x \cap y &= xy \\ x \cup y &= x + (1-x)y &&= x + y - xy \\ x \triangle y &= x(1-y) + (1-x)y &&= x + y - 2xy \\ x' &= 1 - x \\ U &= 1 \\ \emptyset &= 0. \end{aligned}$$

他利用这一点将关于类的命题表示为方程。可以使用 Boole 的 AoL 推导布尔代数的定律（但布尔没有这样做），例如，要证明吸收律 $x \cap (x \cup y) = x$，有

$$\begin{aligned} x \cap (x \cup y) &= x(x + y - xy) \\ &= x^2 + xy - x^2 y \\ &= x + xy - xy = x. \end{aligned}$$

类的布尔代数和布尔环就存在于布尔的逻辑代数表面之下：任何全可解释项都等价于这样一个布尔代数项，即将加法替换为并、乘法替换为交，并将每个子项 $s - t$ 替换为 $s \cap t'$。但布尔代数并非以这种方式产生——参见前文关于 Jevons 的脚注。任何全可解释项也可以视为布尔环项。类的布尔代数和布尔环嵌入于布尔的逻辑代数之中，但反之则不成立。

1.1. 0与1规则。布尔在 [1], 第37页的逻辑代数中提出了一种强有力的方法，用于确定有效方程和等式论证：只需在变量仅取0和1的情况下，在数的代数中检验它们：

> 那么，让我们设想一种代数，其中符号 x、 y、 z 等可以不加区别地取值为 0 和 1，而且只能取这两个值。这种代数的定律、公理和运算，在其全部范围内，都将与逻辑代数的定律、公理和运算完全相同。区别仅在于

[4]可以很容易地对全可解释项的集合给出递归定义，并且可以证明，项 $t(x_1, \ldots, x_n)$的可解释域由某个方程$d(x_1, \ldots, x_n) = 0$的解构成，其中 d是全可解释的。[5]等号左侧使用现代记号。

诠释不同。以下著作的方法正是建立在这一原则之上的。

这一原则的重要性在一个半世纪内都未被理解——将在第4节中讨论。

1.2. 构成元。布尔基于构成元的使用来构建他的代数。对于 x，构成元就是 x 和 $1-x$；对于 x, y，它们是 xy, $x(1-y)$、$(1-x)y$ 和 $(1-x)(1-y)$。一般而言，对于变量 $\vec{x} := x_1, \ldots, x_m$，构成元是由以下公式给出的 $C_\sigma(\vec{x})$。

$$C_\sigma(\vec{x}) \;:=\; \prod_{i=1}^{m} C_{\sigma_i}(x_i)$$

其中，σ 是一个长度为 m的由0和1组成的字符串，且

$$C_{\sigma_i}(x_i) := \begin{cases} x_i & \text{if } \sigma_i = 1 \\ 1 - x_i & \text{if } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

布尔 n 注意到 $C_\sigma(\vec{x})$ 是幂等的、两两不交的，并且它们的和为 1。

1.3. 展开定理。或许，逻辑代数中对他而言最重要的单一结果是：对于任意项 $t(\vec{x}, \vec{y})$，其中 $\vec{y} := y_1, \ldots, y_n$，

$$t(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\sigma} t(\sigma, \vec{y}) \cdot C_\sigma(\vec{x}).$$

当不存在 y_i 时，就有完全展开

$$t(\vec{x}) = \sum_{\sigma} t(\sigma) \cdot C_\sigma(\vec{x})$$

其系数 $t(\sigma)$ 为整数。该方程右侧完全可解释，当且仅当每个 $t(\sigma)$ 都是幂等的，也就是说，它要么是 0，要么是 1。这正是 $t(\vec{x})$ 为幂等的条件，也就是说，$t(\vec{x})^2 = t(\vec{x})$。一个项的幂等性是布尔的可解释性条件——一个项等价于一个完全可解释的项，当且仅当它是幂等的。注意，$x + y$ 不满足这一条件，因为 $1 + 1$ 既不是 0，也不是 1；$x + y$ 只有在 $xy = 0$ 的条件下才具有可解释性。

布尔指出，在他的代数中，两个项 $s(\vec{x})$ $t(\vec{x})$ 相等，当且仅当它们具有相同的完全展开，即对于所有 σ，$s(\sigma) = t(\sigma)$。在布尔代数中，每个方程$t_1(\vec{x}) = t_2(\vec{x})$都等价于一个方程 $t(\vec{x}) = 0$，即令 $t(\vec{x}) := t_1(\vec{x}) - t_2(\vec{x})$。展开定理、构成元的性质和无挠性质表明，方程 $t(\vec{x}) = 0$ 等价于构成元方程的集合 $C_\sigma(\vec{x}) = 0$，其中 $t(\sigma) \neq 0$。因此，任意方程 $t(\vec{x}) = 0$ 都等价于一个完全可解释的方程 $t^\star(\vec{x}) = 0$，即令

$$t^\star(\vec{x}) := \sum \{C_\sigma(\vec{x}) : t(\sigma) \neq 0\}.$$

1.4. 约化定理。该定理指出，任意方程集合

$$t_1(\vec{x}) = 0, \ldots, t_k(\vec{x}) = 0$$

可化简为单个方程

$$t_1(\vec{x})^2 + \cdots + t_k(\vec{x})^2 \;=\; 0.$$

这可由无挠性质以及构成元的性质推出——它们表明，方程组等价于构成元方程组 $C_\sigma(\vec{x}) = 0$，其中某个 $t_i(\sigma) \neq 0$。显然，对于某个 i， $t_i(\sigma) \neq 0$ 当且仅当 $t_1(\sigma)^2 + \cdots + t_k(\sigma)^2 \neq 0$.

1.5. 消元定理。这表示，从方程 $t(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ 中消去变量 $\vec{x}$ 后得到的完整结果就是方程

$$\prod_\sigma t(\sigma, \vec{y}) \;=\; 0.$$

因此，从 $t(\vec{x}, y) = 0$ 中消去 y，得到 $t(\vec{x}, 0) \cdot t(\vec{x}, 1) = 0$。布尔没有定义他所说的完整结果是什么意思。

1.6. 求解定理。布尔声称，方程 $t(\vec{x}, y) = 0$ 中关于 y 的解由一对方程构成

$$(1) \qquad t(\vec{x}, 0) \cdot t(\vec{x}, 1) \;=\; 0$$

$$(2) \qquad y \;=\; t^\star(\vec{x}, 0) + v \cdot \big(1 - t^\star(\vec{x}, 0)\big) \cdot \big(1 - t^\star(\vec{x}, 1)\big), \quad \text{for some } v.$$

（这是对布尔解答的整理版本。）布尔经常在 [1], 中的示例里使用这一结果，并将其应用于概率论。

2. Hassler Whitney encodes Modern Boolean Algebra in the Algebra of Numbers using Characteristic Functions

1933年 Whitney [11] 证明，无需熟悉布尔代数[6]，也能验证这一代数中的方程和等式论证——只需将它们转换为数的代数中的方程和等式论证即可。他的主要工具是特征函数 χ_A，将一个全集 U 映射到 $\{0, 1\}$，在 A上取值 1，在 A之外取值 0。[7]

[6]和许多人一样，Whitney 仍然使用传统名称“逻辑代数”，而不是“布尔代数”；后一个名称是由哈佛大学哲学家 Josiah Royce 及其学生推广的。[7]显然，使用特征函数被认为是一种新颖做法，因为 Whitney 为其定义引用了 de la Vall´ée Poussin 1916 年的著作。

基本思想是，A_i 的布尔组合的特征函数可以表示为 A_i的特征函数的多项式，即一个具有整数系数的多项式，因为

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap B} &= \chi_A \cdot \chi_B \\
\chi_{A\cup B} &= \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B \\
\chi_{A\triangle B} &= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B \\
\chi_{A'} &= 1 - \chi_A \\
\chi_U &= 1, \quad \chi_\varnothing = 0.
\end{aligned}$$

特征函数的多项式定义了环 $\mathbf{Z}^U$ 中的一个函数，但 Whitney 并未提及这个环。他没有看到它与 Boole 的 AoL 之间的联系；也就是说，如果将环运算限制在特征函数上，就会得到一个与 Boole 的偏代数同构的偏代数。[8] 尽管他掌握了 Boole 的展开定理（他称之为自己的第一范式），也知道如何将方程组化为构成元方程，但他并未提出消元定理或求解定理。

Whitney 简要考察了从全集 U 到整数的任意函数，从而将特征函数的多项式推广开来，但没有明确指出，这些函数恰好就是环 $\mathbf{Z}^U$ 的元素。

3. Theodore Hailperin's Axioms and Signed Multisets

Hailperin [6] 指出，将全集 U 的子集与其特征函数对应起来后，环 $\mathbf{Z}^U$ 便构成了布尔偏代数的一个扩展，使布尔 AoL 中的所有项都可以得到解释。$\mathbf{Z}^U$ 是一个非平凡的无挠交换含幺环——Hailperin 将这个环的元素称为有符号多重集。他用非平凡无挠交换含幺环的一阶公理[10] 为布尔 AoL 建立了公理体系，并进而证明了布尔的每个主要定理——这些定理都表述为一阶句子 φ——具体做法是从这些公理推出 φ_E，其中 φ_E 是将 φ 的量词限制在幂等元素上所得的结果。至此，布尔的逻辑研究终于有了坚实的基础。值得注意的是，Hailperin 在公理中删去了布尔那个相当笨拙、且仅适用于变量的幂等律

[8]这一限制需要用二元减法运算，而非一元负运算。[9]无挠意味着：对于 $n = 1$、2、.....，若 $nx = 0$，则 $x = 0$。[10]Hailperin 或许是第一个认识到无挠性质在构造 Boole 的 AoL 中所起关键作用的人。实际上，Boole 只用它来证明：若 $nC_\sigma(\vec{x})$，则 $C_\sigma(\vec{x})$。$= 0$ $= 0$根据展开定理，这意味着对于任意项 $t(\vec{x})$，若 $nt(\vec{x})$，则 $t(\vec{x})$。$= 0$ $= 0$ 在一篇未发表的笔记中，Boole 运用无挠性质证明，若 $(x+y)^2 = x+y$，则 $xy = 0$，因此他被迫规定只有互不相交的类才能相加。Hailperin 还加入了一个不必要的公理：若 $x^2 = 0$，则 $x = 0$，也就是说，不存在幂零元素。

——它被隐含地替换为将量词限制在幂等元素上。

4. R01 and Horn sentences

布尔的 0 和 1 法则，简称 R01，终于在 2013 年的 [5] 中得到了恰当的表述。遵循 Hailperin 的思路，若一阶句子 φ可由上述 Hailperin 公理推出，φ_E 则称其在 Boole 的 AoL 中成立。[11] 根据一阶逻辑的完备性定理，这等价于说，φ_E 在所有满足 Hailperin 公理的环中都成立。设 R 为这样的环，并令 R_E 为由 R 的幂等元生成的子环。[12] 显然，$\mathrm{R} \models \varphi_E$ 当且仅当 $\mathrm{R}_E \models \varphi_E$。已知 R_E 同构于 Z[B]* 的有界布尔幂（见 [9], [10]）。由 [4] 可知，在 Z 中为真的 Horn 句子在 Z[B]*中也成立，从而得到以下结果。

定理 4.1。Horn 句子 φ 在布尔的逻辑代数中成立，当且仅当 $\mathrm{Z} \models \varphi_{\mathrm{E}}$。

注意，$\mathrm{Z} \models \varphi_{\mathrm{E}}$ 仅仅说明，当变量限于取值 0 和 1 时，φ 在整数环中成立。[13] 由于 Boole 的每个主要定理都可以表示为 Horn 句子 φ，定理 4.1 很容易证明它们在 Boole 的逻辑代数中成立。

5. Frank Brown's Proto-Boolean Algebras

在他 2009 年的论文 [2] 中，Brown 说布尔并非以带符号多重集和环为基础建立逻辑代数，而是以多项式代数为基础，并着手对后者作出更新的阐述。Brown 研究的是变量只能以一次幂出现的多项式。他将其称为原布尔多项式，并将名称缩写为 p-多项式。两个 p-多项式的和与差仍是 p-多项式，但它们的乘积通常并非如此。针对 p-多项式，引入了一种新乘法 $q \odot r$：先取普通乘积 $q \cdot r$，再将所有大于 1 的指数化为 1。例如，$xy \odot (x+y) = 2xy$。p-多项式的新乘积仍是 p-多项式。

令 $P(X)$ 为变量来自 X 的 p 多项式集合。[14] 采用通常的加法和减法运算以及新乘法，可得到一个满足下列条件的环 $\mathrm{P}(X)$:

[11]Boole 无疑认为他的模型具有原子性，也就是说，每个非空类都包含一个原子（单元素集合）。因此，要将 Boole 的定理扩展到他未考虑的 φ 一阶性质，就需要在海尔珀林公理中加入一个表达原子性质的公理。[12]对于环 Z，^{U} 由幂等元生成的子环由 Z^U 中取值范围有限的所有成员组成。[13]因此，Boole 的 AoL 满足对整数成立的所有方程和准方程。对整数成立的一些更为有趣的准方程，在 Boole 的 AoL 中变得相当平凡，例如，$x^n + y^n = z^n \to xyz = 0$ 对于 $n \geq 3$ 在 Boole 的 AoL 中变为 $x + y = z \to xyz = 0$，这是一个 R01 立即验证的准方程。[14]Brown 只考虑了有限的 X。

海尔珀林公理——事实上，它同构于商环 $\mathbf{Z}[X]/\mathscr{I}$，其中 $\mathscr{I}$ 是由 $\{x^2 - x$ 生成的 $\mathbf{Z}[X]$ 的理想：$x \in X\}$。该同构将每个 p 多项式 q 映射到陪集 $q + \mathscr{I}$。若 $|X| = n$，则这个环又同构于 $\mathbf{Z}^{2^n}$。

Brown 证明，在这些由 p多项式构成的环中，布尔的结果仍然成立，方法是证明适当的 φ_E，其中变量取遍 $P(X)$ 中的幂等多项式。与类相关定理之间的联系不像使用海尔珀林模型 $\mathbf{Z}^U$并让变量取遍幂等元素，即特征函数时那样明显。Brown 所揭示的联系只是指出，对于 $|X| = n$，环 $\mathbf{P}(X)$ 中幂等元的布尔代数同构于一个由 n个集合自由生成的 2^{2^n} 集合的布尔代数。

References

(1) 乔治·布尔，《思维定律研究：逻辑与概率数学理论所依据的思维定律》。最初由 Macmillan 于1854年在伦敦出版。Dover 于1958年重印。 (2) 弗兰克·马卡姆·布朗，乔治·布尔的演绎系统。《Notre Dame 形式逻辑杂志》，50（2009），303–330。 (3) 斯坦利·伯里斯，乔治·布尔与布尔代数。《欧洲数学学会通讯》，2015年12月，27–31。 (4) 海因里希·维尔纳，层构造及其初等性质。《美国数学学会汇刊》，248，第2期（1979），269–309。 (5) H.P. Sankappanavar，《布尔偏代数的霍恩理论》。《符号逻辑通报》，19（2013），97–105。 (6) Theodore Hailperin，《布尔逻辑与概率》，《逻辑与数学基础研究》丛书，第85卷，阿姆斯特丹、纽约、牛津：爱思唯尔北荷兰出版社，1976年。第2版，修订并扩充，1986年。 (7)《布尔代数并非布尔代数》。《数学杂志》，54，第4期（1981），172–184。 (8) 威廉·斯坦利·杰文斯，《纯粹逻辑，或脱离量的质的逻辑：兼论布尔体系以及逻辑与数学的关系》。Edward Stanford，伦敦，1864年。1971年重印于《纯粹逻辑及其他短篇著作》，R. Adamson 与 H.A. Jevons 编，Lennox Hill Pub. & Dist. Co.，纽约。 (9) 克劳斯·凯梅尔，由其幂等元素生成的交换代数。Can. J. Math.，XXII，第5期（1970），1071–1078。 (10) H. Subramanian，整数值连续函数。《法国数学学会通报》，97（1969），275–283。 (11) Hassler Whitney，特征函数与逻辑代数。《数学年刊》，34（1933年），405–414。

电子邮箱地址：snburris@uwaterloo.ca