arXiv:2304.11882v1 [cs.LO] 24 Apr 2023

如何证明一种证明搜索方法不是另一种方法的实例?

Guillaume Burel[1] 和 Gilles Dowek[2]

[1] 南锡大学 ́和 LORIA，guillaume.burel@ens-lyon.org，
http://www.loria.fr/~burel [2] ́巴黎综合理工学院和法国国家研究院 LIX， ́巴黎综合理工学院，91128 Palaiseau Cedex，法国。
gilles.dowek@polytechnique.edu，http://www.lix.polytechnique.fr/~dowek

摘要。我们提出一种方法，用于证明一种证明搜索方法不是另一种方法的实例。作为应用示例，我们展示了极化模分辨率——一种结合子句选择限制和文字选择限制的方法——不是带选择的有序归结的实例。

1 引言

归结方法 [4] 的一个重要性质是其反驳完备性，也就是说，对于任意不可满足子句集，都可以从中推出空子句。然而，推出该子句的搜索空间可能不必要地庞大。例如，要从由子句P、子句 $\neg P$、 Q 和子句 $\neg Q$构成的集合中推出空子句，我们可以先从P 和 $\neg P$推出子句 Q，然后再从该子句和 $\neg Q$推出空子句。另一种做法是从 $\neg P$、 Q 和 $\neg Q$ 推出子句 $\neg P$，然后再从该子句和 P推出空子句。这两种推导都是冗余的，消除这类冗余是设计高效证明搜索方法的一项关键工作。可以采用多种类型的限制来消除这些冗余，同时保持反驳完备性。

首先，我们可以对选择子句施加一些限制，允许对某些子句对应用归结规则，而禁止对其他子句对应用该规则。例如，超归结方法 [5], 、支撑集方法 [7], 和语义归结方法 [6]都采用了这类限制。例如，在支撑集方法中，我们从待反驳的子句集合中确定一个相容子集，称为理论，例如由子句 P 和 $\neg P$、 Q 组成的子集。随后，若一对子句中至多有一个属于该集合，就可以对其应用归结规则；若两个都属于该集合，则禁止应用。

然后，我们可以对文字的选择施加某些限制，允许将归结规则应用于所归结子句中的某些文字，同时禁止将其应用于其他文字。例如，带选择的有序归结就采用了这种限制。在该方法中，选择函数和一个

序关系定义了每个子句中的一组选定文字。如果待归结文字在相应子句中均为选定文字，则可以将归结规则应用于这对子句；否则禁止应用该规则。

不难发现，在理论子句中结合子句选择限制和文字选择限制可能会破坏完备性，即使理论是一致的，并且选定文字是依据某个序定义的，正如在带选择的有序归结中那样。

例1。考虑子句

$$\begin{array}{r} \text{Theory} \left\{ \begin{array}{l} \underline{P} \vee Q \\ \underline{\neg P} \vee Q \end{array} \right. \\ \text{Other clauses} \ \{ \ \neg Q \end{array}$$

其中选定文字带有下划线。如果将归结规则的应用限制为这样的子句：其中至多一个是理论子句，并且理论子句中的归结文字是选定文字，那么我们无法推出空子句。然而，该理论是一致的，因此单独使用支撑集限制是完备的；并且文字按照序 $Q \prec P$ 进行选择，因此单独使用带选择的有序归结同样是完备的。

2 模上的极化归结

因此，要证明支撑集方法与带选择的有序归结方法的组合具有完备性，我们需要比理论的一致性以及使用某个序来定义选定文字更强的条件。正如我们将要看到的，这一条件恰好是极化序列演算关于某些对应于理论子句的重写规则所具有的切消去性质。

事实上，最近提出的极化模分辨率方法 [3], 结合了这两种限制。在该方法中，我们首先从待反驳的子句集合中确定一个子集。这个集合称为理论，其元素称为单向子句。然后，在这些子句中的每一个子句里，我们确定一个选定文字，并施加以下限制：

– 若一对子句中至多有一个是单向子句，则可以对它们应用归结规则；若两者都是单向子句，则禁止应用归结规则；– 对于包含单向子句的一对子句，只有当单向子句中参与归结的文字是选定文字时，才能应用归结规则，否则不能。

极化模分辨率的另一个特点是以等式合一取代合一，但我们在此不使用这一特点。

示例 2。考虑一个包含以下子句的任意子句集

$$\underline{P}, Q$$

$$\underline{P}, \neg Q$$

然后将该子集中的所有子句视为单向子句，并选择带下划线文字，即可得到一种完备的归结限制。

例3。考虑一个任意的子句集，其中包含子句

$$\underline{\neg\varepsilon(x\ \dot{\vee}\ y)}, \varepsilon(x), \varepsilon(y)$$

$$\underline{\varepsilon(x\ \dot{\vee}\ y)}, \neg\varepsilon(x)$$

$$\underline{\varepsilon(x\ \dot{\vee}\ y)}, \neg\varepsilon(y)$$

$$\underline{\neg\varepsilon(\dot{\neg}\ x)}, \neg\varepsilon(x)$$

$$\underline{\varepsilon(\dot{\neg}\ x)}, \varepsilon(x)$$

$$\underline{\neg\varepsilon(\dot{\forall}_T\ x)}, \varepsilon(x\ y)$$

$$\underline{\varepsilon(\dot{\forall}_T\ x)}, \neg\varepsilon(x\ H_T(x))$$

$$\underline{\neg\varepsilon(Null\ (S\ x))}$$

$$\underline{\varepsilon(Null\ 0)}$$

以及不含符号 H_T 的子句。然后，将该子集中的所有这些子句都视为单向子句，并选定带下划线文字，这便构成了归结的一个完备限制。

将合一替换为等式合一，可使该方法适用于简单类型理论 [3]。

正如我们在例1中看到的，即使理论是一致的，且选定文字相对于原子上的某个序是极大的，该方法也不总是完备的。不过，我们已在 [3] 中证明，该方法的完备性等价于模上的极化序列演算相对于与单向子句集关联的重写系统的割消去；模上的极化序列演算规则见图1，而带有选定文字的子句与极化重写规则之间的关系定义如下。

定义1。设 T 是一个子句集，其中每个子句都选定了一个文字。与 T 关联的重写系统定义如下：

子句 $L, C_1, ..., C_p$ 中的每个选定文字 L 都对应一条重写规则

– 如果 L 是负文字 $\neg P$，则规则为 $P \longrightarrow_- \forall x_1 ... \forall x_n (C_1 \vee ... \vee C_p)$ – 如果 L 是正文字 P，则规则为 $P \longrightarrow_+ \neg\forall x_1 ... \forall x_n (C_1 \vee ... \vee C_p)$

其中，x_1，...，x_n 是 C 中自由但在 P中不自由的变量。

定理1. 设 T 是一个单向子句集合，$\mathcal{R}$ 是与 T相关联的重写系统。当且仅当极化模序列式演算 $\mathcal{R}$ 允许使用切断规则时，基于单向子句集合T 的极化模分辨率才是完备的。

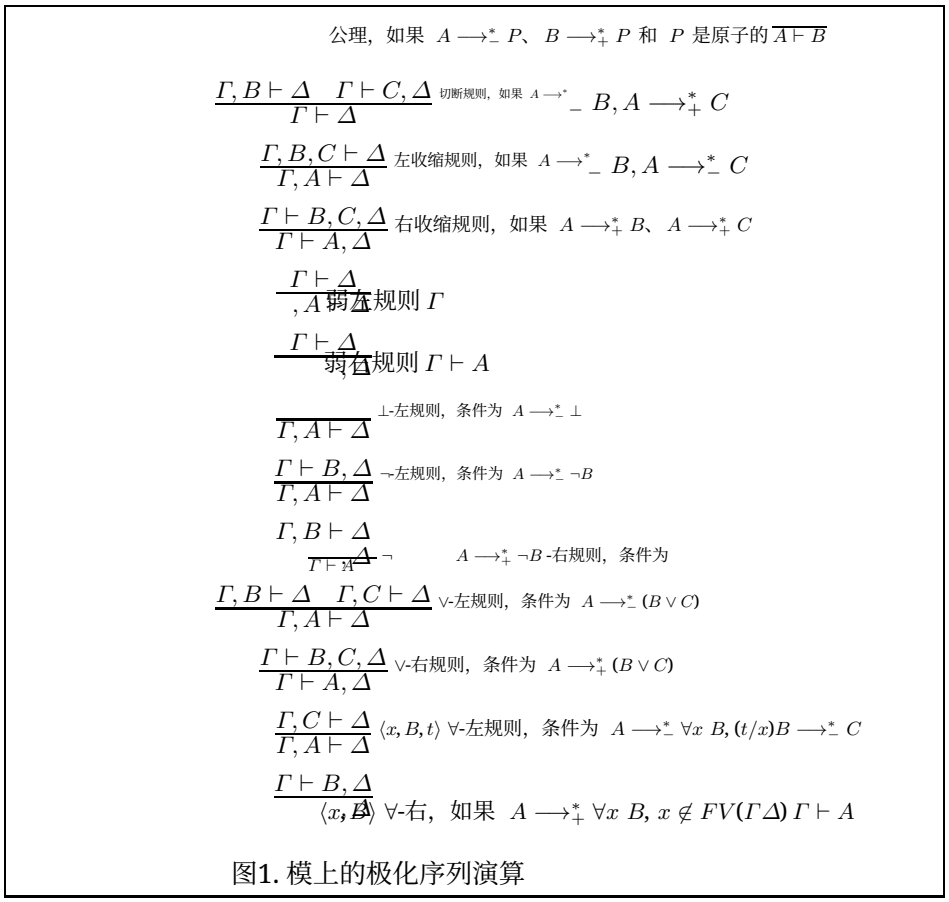

图1. 模上的极化序列演算

证明。 [3]中的定理1的推论。

例如，模上的极化序列演算相对于重写系统

$$P \longrightarrow_+ \neg Q$$

$$P \longrightarrow_+ \neg\neg Q$$

具有切消去性质（ [2] 中的命题7证明了，只要正规则和负规则的左部是互不相交的集合，该性质就成立），因此得出例2中的完备性。

同样，模上的极化序列演算相对于重写系统

$$\begin{array}{rlrl} \varepsilon(x \mathbin{\dot\vee} y) & \longrightarrow_- (\varepsilon(x) \vee \varepsilon(y)) & \varepsilon(x \mathbin{\dot\vee} y) & \longrightarrow_+ \neg\neg\varepsilon(x) \\ & & \varepsilon(x \mathbin{\dot\vee} y) & \longrightarrow_+ \neg\neg\varepsilon(y) \\ \varepsilon(\dot\neg\, x) & \longrightarrow_- \neg\varepsilon(x) & \varepsilon(\dot\neg\, x) & \longrightarrow_+ \neg\varepsilon(x) \\ \varepsilon(\dot\forall_T\, x) & \longrightarrow_- \forall y\ \varepsilon(x\ y) & \varepsilon(\dot\forall_T\, x) & \longrightarrow_+ \neg\neg\varepsilon(x\ H_T(x)) \\ & & \varepsilon(Null\ 0) & \longrightarrow_+ \neg\bot \\ \varepsilon(Null\ (S\ x)) & \longrightarrow_- \bot & & \end{array}$$

对于不含符号 H_T的任何序列式，都具有切消去性质，因此得出例3中的完备性。

3 比较模上的极化分辨率与支持集归结

相比之下，模上的极化序列演算中的重写系统

$$P \longrightarrow_- Q$$

$$P \longrightarrow_+ \neg Q$$

不具有切消去性质。事实上，命题 Q 可通过对 P 使用切断规则来证明，但不存在无切证明。这解释了例1中的不完备性。

下一个例子表明，当支撑集分辨率陷入循环时，对于某些输入，极化模分辨率可能会在有限时间内失败。

示例 4。考虑单向子句

$$\underline{P(f(x))}, \neg P(x)$$

和另一个子句

$$P(a)$$

对于某个常量 a。极化模分辨率和支撑集归结都是完备的。然而，极化模分辨率无法在有限时间内导出空子句（由于对选定文字的条件，这两个子句无法归结），而支撑集归结则会陷入循环，不断导出子句 $P(f(\ldots(f(\overbrace{a}^{i\text{ 次}})\ldots)))$ 对所有 $i > 0$。

在这个例子中，我们看到了选择函数的重要性。然而，正如我们将在第4节中看到的，仅有这样的选择函数还不够。

4 将极化模分辨率与带选择的有序归结进行比较

带选择的有序归结 [1] 是一种证明搜索方法，由可计算选择函数 S 和定义在原子上的可判定序关系 $\prec$ 参数化。该选择函数为每个子句指定该子句的一组负文字，而该序关系在替换下保持稳定，并且在基原子上是全序。每一对 $\langle S, \prec \rangle$ 都定义了一种不同的证明搜索方法。因此，带选择的有序归结是一个证明搜索方法族，而非单一方法。

许多已知的分辨率限制都是针对适当选择函数和序的带选择的有序归结实例。因此，我们可能会想知道，极化模分辨率是否同样是带选择的有序归结的一个实例。现在我们证明事实并非如此。

更一般地，我们证明：如果 m 和 m' 是两种证明搜索方法， T 是一个理论，并且可以在 T 中证明 m 的完备性，而 m'在试图于有限时间内证明 T中的矛盾时失败，那么 m 和 m' 就是不同的方法：它们被理论 T分离。

4.1 证明搜索方法的分离

考虑一个可判定公理集 T，即算术的一个 ω-一致扩展。我们可以在 T的语言中表达一个带有两个自由变量的命题 Bew，使得：如果 U 是一个可判定公理集（即刻画这些公理的全可计算函数的索引），且 A 是一个命题（即命题的索引），那么序列式 $T \vdash Bew(U, A)$ 在谓词逻辑中可证明，当且仅当序列式 $U \vdash A$ 可证明。

考虑一种证明搜索方法 m。我们可以在 T 的语言中构造一个带有两个自由变量的命题 M，使得如果 U 是一个可判定公理集，并且 A 是一个命题，那么

– 如果将方法 m 应用于理论 U 和命题 A 后成功，则序列式 $T \vdash M(U, A)$ 是可证明的；– 如果将方法 m 应用于理论 U 和命题 A 后未成功（即在有限时间内失败或陷入循环），则序列式 $T \vdash M(U, A)$ 是不可证明的；– 如果将方法 m 应用于理论 U 和命题 A 后在有限时间内失败，则序列式 $T \vdash \neg M(U, A)$ 是可证明的。

此外，假设可以在 T 中证明方法 m 的完备性，即序列式

$$T \vdash \forall U \forall A \ (Bew(U, A) \Rightarrow M(U, A))$$

在谓词逻辑中是可证明的。那么，根据哥德尔第二不完备性定理，序列式

$$T \vdash \neg Bew(T, \bot)$$

在谓词逻辑中不可证明，因此序列式

$$T \vdash \neg M(T, \bot)$$

也不可证明。因此，如果可以在理论 T 中证明 m 的完备性，那么试图在理论 T 中证明 $\bot$ 的方法 m 就不可能在有限时间内失败：它必然会循环。

如果 m' 是一种证明搜索方法，试图在理论 T 中证明 $\bot$，却在有限时间内失败，那么 m 和 m' 就是不同的。

4.2 翻译

这可以通过以下方式进行推广。假设 ϕ 是一个从理论到理论的翻译，其完备性可以在 T 中得到证明，即序列式

$$T \vdash \forall U\ (Bew(U, \bot) \Rightarrow Bew(\phi(U), \bot))$$

是可证明的。此外，假设方法 m 的完备性可以在 T 中得到证明，即序列式

$$T \vdash \forall U \forall A\ (Bew(U, A) \Rightarrow M(U, A))$$

可以在谓词逻辑中证明。于是，根据 G¨odel 第二不完备性定理，序列式

$$T \vdash \neg Bew(T, \bot)$$

在谓词逻辑中不可证，因此该序列式

$$T \vdash \neg M(\phi(T), \bot)$$

也不可证。因此，如果能在 T 中证明翻译 ϕ 的完备性以及方法 m 的完备性，那么方法 m 在理论 ϕ（T）中尝试证明 $\bot$ 时，不可能在有限时间内失败：它必定会陷入循环。

如果 m' 是一种证明搜索方法，尝试从 T证明$\bot$ 时会在有限时间内失败，那么将 m' 应用于理论 U，并非将 m应用于 ϕ（U）。

4.3 带选择的有序归结的应用

设 $\mathcal{H}$ 是例3中简单类型理论的一阶表示。只要能在 $\mathcal{H}$ 中证明序的稳定性和全性，就能在 $\mathcal{H}$ 中证明带选择的有序归结的完备性。

尝试在理论 $\mathcal{H}$ 中证明 $\bot$ 在有限时间内无法在极化模分辨率中完成。因此，对于任何其稳定性和全性可在 $\mathcal{H}$ 中证明的选择函数和序关系，极化模分辨率都不是带选择的有序归结的一个实例。它也不是将带选择的有序归结应用于其输入的翻译所得的方法，因为该翻译在 $\mathcal{H}$ 中的完备性无法得到证明。

5 结论

极化模分辨率结合了对子句选择的限制和对分辨率中文字选择的限制。这两种限制结合起来，使该方法具有如此强的限制性：即使单向子句构成一个相容子集，且文字的选择基于原子上的一个序，该方法也不总是具有完备性。但完备性条件更强，因为完备性等价于极化模演绎中相关序列演算的割消去性质。因此，与带选择的有序归结不同，该方法所有实例的完备性无法在同一个理论中得到证明。

这类方法的所有实例的完备性无法在同一理论中得到证明，其优势在于：它们的逻辑强度不受能够证明该方法完备性的理论的逻辑强度限制。

参考文献

1. L. Bachmair 和 H. Ganzinger。《分辨率定理证明》，J.A. Robinson 和 A. Voronkov， *Handbook of Automated Reasoning*，爱思唯尔，2001年。2. G. Dowek。什么是理论？ H. Alt 和 A. Ferreira， *Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*，《计算机科学讲义》2285，施普林格，2002年，第 50–64 页。3. G. Dowek。极化模分辨率。手稿，2009年。4. J.A. Robinson。基于分辨率原理的面向机器的逻辑。《ACM学报》，12，1965年，第 23–41 页。5. J.A. Robinson。使用超分辨率的自动演绎。 *International Journal of Computer Mathematics* 1 1965 227 234 ，，，

第 – 页。6. J.R. Slagle。使用可重命名分辨率和语义分辨率的自动定理证明。《ACM学报》，14，1967年，第 687–697 页。7. L. Wos、G.A. Robinson、D.F. Carson。定理证明中支持集策略的效率与完备性。《ACM学报》，12，1965年，第 536–541 页。