arXiv:2304.11904v1 [math-ph] 24 Apr 2023

在双簇阈值处对 N体薛定谔算子的谱分析

Erik Skibsted,
MatematiskInstitut，奥胡斯大学 Ny Munkegade 8000，奥胡斯 C，丹麦

Xue Ping Wang，让·勒雷数学实验室 CNRS混合研究单位6629，南特大学 44322南特 Cedex，法国

2023年4月25日

目录

1 引言、主要例子与记号 1

1.1 范围与结果.1 1.1.1 阈值散射的应用.5 1.2 多体薛定谔算子.6 1.2.1 主要例子，动力学原子核.8 1.3 N体薛定谔算子与无限质量原子核.10 1.3.1 主要例子，固定原子核.11 1.4 广义 N体薛定谔算子.12 1.4.1 空间与记号.14

2 约化为单体问题 17

2.1 抽象约化方案.18 2.2 非重合双簇阈值情形.21 2.3 多重双簇阈值，$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$ .23 2.3.1 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$；情形 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 和 $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$ . . . . . 27 2.4 情形 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$.32 2.4.1 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$；非重数情形 .32 2.4.2 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$；重根情形.33 2.5 多重双簇情形，$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \{0\}$ .34 2.5.1 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \{0\}$；一般方法.34

3 H' 在 λ_0 37附近的谱分析

3.1 Mourre估计.38 3.1.1 命题3.3 的证明.42 3.2 多重交换子与演算.46 3.2.1 计算交换子.51 3.2.1.1 光滑符号函数.54 3.3 正交换子估计.55 3.3.1 Rellich型定理.55 3.3.2 LAP界.57 3.3.3 微局部估计与极限吸收原理.60

4 R椭圆型定理 6 7

4.1 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 情形.6 7 4.1.1 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 的扩展本征变换.68 4.1.2 负的缓慢衰减有效势.68 4.1.3 正的缓慢衰减有效势.71 4.1.4 齐次次数为 -2 的有效势.74

4.2 情形 $\lambda_0 > \Sigma_2$ .81 4.2.1 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 的扩展本征变换.82 4.2.2 负的缓慢衰减有效势 . . . . . 87 4.2.3 正的缓慢衰减有效势.88 4.2.4 齐次次数为 -2 的有效势.89 4.3 物理模型.90

5 双簇阈值附近的预解式渐近 99

5.1 快速衰减的有效势.100 5.1.1 双簇阈值共振.100 5.1.1.1 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 情形. 100 5.1.1.2 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 情形.105 5.1.2 最低阈值附近的预解式渐近.109 5.1.3 更高的双簇阈值附近的预解式渐近 . . . 124 5.2 正的缓慢衰减有效势.134 5.3 双簇阈值附近物理模型的预解式渐近 145

6 应用 151

6.1 负的缓慢衰减有效势.151 6.1.1 索末菲定理.153 6.1.2 λ_0 处散射矩阵的弹性部分.156 6.1.2.1 零能量处单体问题的散射，[DS1] .157 6.1.2.2 λ_0 处 N体问题的弹性散射 . . . 161 6.1.2.3 λ_0处的弹性散射，一种“几何”方法 . . . 167 6.1.2.4 Σ_2 处的弹性散射.172 6.1.3 物理模型在双簇阈值处的散射，情形 $\sim$ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ .184 6.2 有效 r^{-2} 势，原子-离子情形.185 6.3 阈值处的非透射，物理模型.186 6.3.1 式 (6.98) 的证明，情形 I.188 6.3.2 式 (6.98) 的证明，情形 II.190 6.3.3 式 (6.98) 的证明，情形 III.195 6.3.4 透射的一个例子.196 6.4 原子-离子散射中总截面的阈值行为 . . 197 6.4.1 原子-离子散射中总截面的有限性 . . . . 201 6.4.2 Σ_2处的总截面，非多重双簇情形 . . . . . 202 6.4.3 Σ_2处的总截面，多重双簇情形.205

参考文献 209

第1章

引言、示例与记号

1.1 研究范围与结果

零能量处量子力学一体问题的谱理论和散射理论是一项研究充分的课题。经典理论 [JK, JN1, JN2] 涉及定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的实势 $V(x)$，其衰减速度至少像 $\mathcal{O}(|x|^{-\rho})$ 一样快，其中某个 $\rho > 2$。对于衰减速率 $\rho \in (0, 2)$ 的慢衰减情形，则需要附加条件，大致而言即符号条件 [Ya1, Ya2, Na, FS, DS1, DS2]。临界情形定义为 $V(x) \approx C|x|^{-2}$，其中可能还具有角度依赖性，所得结果取决于耦合常数 [Wa5, SW]。上述模型所得结果高度依赖于具体模型和情形，包括零能量束缚态和/或共振态的可能存在，以及预解式和散射矩阵相关量（如散射相移）的零能渐近。N 体薛定谔算子的阈值是子哈密顿量的特征值。关于 N体问题的阈值谱分析，文献要少得多。我们仅提及 [Wa2] 关于特殊情形下最低阈值（即本质谱底部）的预解式展开的研究。

本工作的目标是系统研究量子力学 N体问题在任意负的双簇阈值 λ_0处的谱理论和散射理论，即，λ_0 是与双簇分解相关的（可能多个）子哈密顿量的特征值，但不是具有三个或更多簇的子哈密顿量的特征值。对所考虑阈值性质的这些限制排除了该处Efimov效应的存在。因此，例如对于（动力学核物理）三体问题，零阈值被排除在我们的分析之外，而该模型的所有其他阈值都是负的双簇型阈值。（我们将在本章稍后给出精确定义。）从哲学上说，双簇阈值问题可通过Feshbach-Grushin维数约化方法，借助有效一体问题加以简化。对于快速衰减的成对势，这一点确实已在 [Wa2] 中针对最低阈值 $\lambda_0 = \Sigma_2$（假定为非重根）的情形实现。然而，在本工作中我们大幅扩展了这一框架，使其涵盖通常的原子物理模型（见小节 1.2.1 和 1.3.1）；对于这些模型，库仑成对势的缓慢衰减性质要求进行更精细的分析。我们还包括双簇阈值 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 的情形，以及多重双簇阈值和退化特征值情形；这些情形同样需要精细分析，尤其是微局部分析。

使我们能够实现任意双簇阈值处谱分析目标的一个主要要素，是去除一个阈值后的哈密顿量所满足的Mourre估计。对于给定的双簇阈值 λ_0，将总哈密顿量限制在相应谱子空间的正交补上，得到一个非局部 N体哈密顿量；对于该哈密顿量， λ_0 不再是阈值。我们主要证明了这个约化哈密顿量在 λ_0 处的Mourre估计，并由此推出极限吸收原理和微局部预解式估计。利用这些极限吸收原理，我们构造一个适当的Grushin问题，从而将任意双簇阈值附近的双簇问题约化为一个有效一体问题。

为了更具体地说明，我们现在考虑第 1.2.1 小节中的动力学原子核物理模型（见（1.13）），并假设粒子维数为 $n = 3$。设给定由 N 个粒子组成的系统的一种双簇分解 $a = (C_1, C_2)$。于是我们将总哈密顿量写为

$$H = H^1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes H^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes p_a^2 + I_a$$

其中 H^k、 $k = 1$、2 是簇哈密顿量（定义方式与 H 相同，但取在其质心参考系中）， p_a^2 是簇间动能哈密顿量， I_a 是簇间势。设 $\lambda_a = \lambda_0$ 是子哈密顿量 $H^a = H^1 \otimes 1 + 1 \otimes H^2$ 的一个特征值（λ_0 为双簇型，见（1.27））。取一组相应的正交归一基 $\varphi_1^a, \dots \varphi_m^a \in \ker(H^a - \lambda_0) \subset L^2(\mathrm{X}^a)$， $m = m_a$，则有效簇间势是关于两个簇相对位置变量的 $m \times m$ 矩阵值函数，即 $R = R_1 - R_2$，

$$V(R)_{kl} := \langle \varphi_k^a, I_a \varphi_l^a \rangle_{L^2(\mathbf{X}^a)} = Q_1 Q_2 \delta_{kl} |R|^{-1} + Q_{kl}(\widehat{R}) |R|^{-2} + \mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big). \qquad (1.1)$$

这里， Q_1 和 Q_2 分别是团簇 C_1 和 C_2中粒子的总电荷， δ_{kl} 是克罗内克符号。此外，我们用 Q_a 表示矩阵值齐次势$\big(Q_{kl}\big)$ 和 $\widehat{R} = R/|R|$。令 P^a 表示 $L^2(\mathrm{X}^a)$中到$\ker(H^a - \lambda_0)$的正交投影（秩为 m）。显然， $\Pi^a = P^a \otimes 1$ 将投影到由 $L^2(\mathrm{X})$中形如 $\varphi^a \otimes f_a$且属于$\ker(H^a - \lambda_0)$的函数所张成的空间上。

根据(1.1)，相关分类如下：

情形 1（慢衰减情形）$Q_1 Q_2 \neq 0$。

情形 2（临界衰减情形）$Q_1 Q_2 = 0$ 和函数 $Q_a \neq 0$。

情形 3（快速衰减情形）$Q_1 Q_2 = 0$ 和函数 $Q_a = 0$。

一般而言， λ_0 可能是一个多重双簇阈值，这可能意味着~我们将阈值集合 a（其中 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H^a)$，记作 A）~分组为 $A = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$，具体如下。

$\mathcal{A}_1$**：** 有效簇间相互作用在主导阶上是吸引型库仑相互作用，即 $Q_1 Q_2 < 0$。

$\mathcal{A}_2$**：** 有效簇间相互作用在主导阶上呈库仑排斥，即 $Q_1 Q_2 > 0$。

$\mathcal{A}_3$：有效簇间相互作用为 $\mathcal{O}(|x_a|^{-2})$，即 $Q_1Q_2=0$。

显然， $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ 中的元素归为情形 1，而 $\mathcal{A}_3$中的元素则归为情形 2 或情形 3。这促使我们作如下分解 $\mathcal{A}_3=\mathcal{A}_3^{\mathrm{cd}}\cup\mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}$:

$$\mathcal{A}_3^{\mathrm{cd}}=\{a\in\mathcal{A}_3|\,Q_a\neq 0\}\text{ and }\mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}=\{a\in\mathcal{A}_3|\,Q_a=0\}$$

分别对应情形 2 和情形 3。

对于任意 $a\in\mathcal{A}_3$，存在可计算的数 $s_a\geq 1$ 和 $d_a\in\mathbb{N}_0$，它们由单位球面$\mathbb{S}^2$上具有矩阵值势 Q_a 的向量值薛定谔算子的谱性质决定（见第4.3节）。采用标准的加权 L^2空间和加权 Sobolev 空间记号（定义见小节 1.4.1），这里引用我们最一般的结果（见第4.3节）：

定理1.1. 对于任意双簇阈值 λ_0:

1）局部 H^1 解的空间满足$(H-\lambda_0)u=0$，其定义于

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_1}\Pi^aL^2_{-3/4}+\sum_{a\in\mathcal{A}_2}\Pi^aL^2_{(-3/2)^+}+\sum_{a\in\mathcal{A}_3}\Pi^aL^2_{(-\min\{3/2,\,s_a\})^+}+L^2_{-1/2},\tag{1.2a}$$

记作 $\mathcal{E}$，其为有限维。

2) 如果 $\mathcal{A}_3=\emptyset$，那么 $\mathcal{E}\subset H^1_\infty$。

3) 共振态空间的维数

$$n_{\mathrm{res}}=\dim\left(\mathcal{E}/\ker(H-\lambda_0)_{|H^1}\right)\leq\sum_{a\in\mathcal{A}_3}d_a.$$

4) 对任意 $a\in\mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}$，数值为 $s_a=3/2$ 和 $d_a=m_a$。特别地，如果 $\mathcal{A}_3^{\mathrm{cd}}=\emptyset$，则 (1.2a) 可简化为

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_1}\Pi^aL^2_{-3/4}+\sum_{a\in\mathcal{A}_2\cup\mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}}\Pi^aL^2_{(-3/2)^+}+L^2_{-1/2},\tag{1.2b}$$

且 *3)* 写成

$$n_{\mathrm{res}}\leq\sum_{a\in\mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}}m_a.$$

可以将定理1.1视为著名的 Rellich定理针对非阈值能量的一种形式 [AIIS, 定理 1.4] （另见定理3.12），尽管上述类比在双簇阈值处要复杂得多。例如，在远离阈值的连续谱中，(1.2a) 和 (1.2b) 的对应形式为 $L^2_{-1/2}$；我们注意到，对于几乎所有此类能量（可能对所有此类能量都成立），$L^2_{-1/2-\epsilon}$ 中的广义特征函数空间（对任意 $\epsilon>0$）具有无限~维数 [Sk6]。相比之下，在带有 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1=\{a\}$的定理1.1的背景下，我们证明 $\Pi^aL^2_{-3/4-\epsilon}+L^2_{-1/2-\epsilon}$中 λ_0 处的广义特征函数空间是无限维的（见定理 6.13 2)）。

定理1.1的证明较为复杂；事实上，我们只在两个技术条件 (4.68a) 和 (4.68b) 下给出完整证明（本引言中不作进一步阐述），而对一般情形的论述则相当简略。

定理1.1所指出的阈值现象之一，是共振态可能存在，同时在双簇阈值 λ_0处也可能存在 L^2 特征函数。这完全类似于快速衰减势 [JK] 的单体问题情形（该问题在零能量处具有某种相似的精妙Rellich定理），由此产生了如下分类：正则情形（其中 λ_0 既不是 H的特征值，也不是其共振）以及例外情形1、2和3（见小节 5.1.1.1）。单体问题在零能量处的预解式渐近行为由这一分类决定。在当前框架下，获得 λ_0 处类似的预解式渐近行为对我们而言是一个独立问题。然而，我们的分析尚不完整，主要原因是库仑势缺乏强衰减，从而妨碍了分析。当然，正则情形是~最简单的情形，我们实际上将对其进行处理，见 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}$（定理 5.43）。对于例外情形1和3（由共振的存在所定义），我们证明如下结果。

定理1.2 （第一类或 第三类例外点）。 设 λ_0 为任意一个双簇阈值，满足 $n_{\mathrm{res}} \geq 1$，即 λ_0 是 H的共振。假设技术条件 （4.68a）和（4.68b） （上文所述）成立，

$$\operatorname{ran} \Pi_H \subset L^2_t \ \textit{for some}\ t > 3/2, \tag{1.3}$$

其中， Π_H 是到核（$H - \lambda_0$） 上的正交投影（即，如果λ_0 是 H 的特征值，则为特征投影，否则为零），并且假设

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}. \tag{1.4}$$

则对于 $R（\lambda_0 + z）$ $=$ $（H - \lambda_0 + z）^{-1}$ 作为从 H_s^{-1}到 H^1_{-s}的算子，当 $s > 1$，且 $z \to 0$ 属于 $\mathcal{Z}_{\pm} = \{$实部 $z \geq 0$，虚部 $z > 0\}$ 时，对于某个$\epsilon = \epsilon（s）$ > 0，以下渐近行为成立。

$$R(\lambda_0 + z) = -z^{-1}\Pi_H + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}} \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{res}}} \langle u_j, \cdot \rangle u_j + \mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{1.5}$$

这里，$\{u_1, \ldots, u_{n_{\mathrm{res}}}\} \subset H^{1\ (-1/2)\ -}$ 是 H 的共振态基，与 $\mathcal{Z}_{\pm}$符号的选择无关。

在出现的条件中，(1.3) 是那个“令人不快的条件”。它是一个隐式条件（可能是冗余的），是我们所用方法带来的副作用。如果 λ_0 是第一类特殊点，那么 (1.3) 显然成立，因为此时 $\Pi_H = 0$。我们的定理 5.43 和上文的定理1.2都明确要求 $\mathcal{A}_3^{\mathrm{cd}} = \emptyset$。

对于$\mathcal{A}_3^{\mathrm{cd}}$中的某些元素（即第1.1.1小节中不满足（1.8）的元素），在某一谱条件下，预期预解式在双团簇阈值附近会呈现振荡行为。根据 [SW]的论证，可以预期这一点。

1.1.1 阈值散射的应用

下面简要概述我们在第6章中的主要应用。我们的一个结果涉及以下对 [DS1, DS2] 中一个结果的推广（另见 [Fr]）。

定理 1.3。 设 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是一个双簇阈值，满足技术条件 (4.68a)和 (4.68b)，

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_1, \tag{1.6}$$

并设处于正则情形（即 λ_0 既不是 H的特征值，也不是共振~）。令 $\mathcal{C}$ 表示散射通道的集合 $\alpha = (a,\ \lambda_0,\ \varphi_\alpha)$，其中 $a \in \mathcal{A}$（注意，λ_0 是 H^a的单特征值）。对于 $\alpha,\ \beta \in \mathcal{C}$，散射矩阵 $S_{\beta\alpha}(\lambda)$ 的元素（仿照 *[DS1、DS2]*构造）在 λ 略高于 λ_0时有定义，并且当 $\lambda \to (\lambda_0)+$时具有强极限。此外，极限元素 $S_{\beta\alpha}(\lambda_0)$ 的奇异支集满足

$$\operatorname{sing\,supp} S_{\beta\alpha}(\lambda_0) \quad \begin{cases} \subset \{(\omega,\omega') \mid \omega\cdot\omega' = -1\} & for \quad \alpha = \beta, \\ = \emptyset \quad for & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

定理 1.3 的证明可以看作是对 [DS1、DS2] 中所采用方法的延拓，用于在带有吸引性库仑势的单体问题中，获得关于散射矩阵$S_{\mathrm{cou}}(E)$的类似“半经典”结果。另见[Va1、Va2] ，其中讨论了短程情形下的 N体散射矩阵。

在（1.6）条件下的另一个结果涉及以下差异

$$S_{\alpha\alpha}(\lambda) - S_{\mathrm{cou}}(\lambda - \lambda_0); \quad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta].$$

~在条件成立时，尤其是在包含非重性质 $\#\mathcal{A} = 1$ （主要用于简化论述）的情况下，同时涵盖两个团簇阈值为 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 的情形，我们证明该差异是一个“部分平滑算子”（见定理 6.10 和注6.11 3））。另一个结果是通过适当的“通道准模”的渐近行为，对极限元素 $S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)$ 进行刻画（见定理 6.13 2））。

这引出了另一个值得关注的主题，更确切地说，是在 λ_0 处的非透射。这是一种“几何概念”，其含义是具有以下特征

$$\|1 - S_{\alpha\alpha}(\lambda)^* S_{\alpha\alpha}(\lambda)\| \to 0 \text{ for } \lambda \to (\lambda_0)_+. \tag{1.7}$$

我们在（1.6）条件下推导出一个公式（见推论 6.15），表明在此情形下确实会发生透射，如果 $\lambda_0 > \Sigma_2$ （另见注 6.16 和注 6.29 4））。

与具有吸引性的慢衰减情形相反，在以下三种情形中，我们确实证明了非透射（在所有情形下均作上述假设，即满足非多重性质~$\#\mathcal{A} = 1$）：

~**I)** 有效排斥库仑情形，即 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$。

II) $I_a(x^a = 0) = 0$，“高于 Hardy 极限”，且 λ_0 为正则。

III) $I_a(x^a = 0) = 0$ 以及“快速衰减情形”，即 $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}$，且 λ_0 为“第一类极大例外”。

II）的一种特殊情形是，$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}$和 λ_0 既非特征值也非共振。II）和 III）中的概念通常定义如下（另见第 6.3 节）。“高于 Hardy 极限”这一说法指的是单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上、具有矩阵值势 $\widetilde{Q_a}$（记作 $\mathcal{A} = \{a\}$）的向量值薛定谔算子的一个谱性质，更准确地说

$$\inf \sigma\big(-\Delta_\theta + Q_a(\theta)\big) > -1/4. \tag{1.8}$$

对于 III)，势 $Q_a = 0$ 和“第一类极大例外”指的是例外情形1以及条件 $n_{\mathrm{res}} = m_a = \dim \ker(H^a - \lambda_0)$。作为比较，我们指出，若 $m_a > 1$ 且 $n_{\mathrm{res}} = \{1, \dots, m_a - 1\}$，那么当 λ_0 属于第一类例外时，确实可能发生透射（见第 6.3.4 小节）。

最后一个关注的主题是原子-离子散射的总截面。在量子力学发展之初，人们就观察到这样一种现象：当原子没有偶极矩时，总截面是有限的。文献 [JKW] 对这一物理学界的普遍认识给出了数学证明。所考虑的算子是第 1.2.1 小节中动力学原子核物理模型的一个特例，其粒子维数为 $n = 3$。假设 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是双簇阈值，满足技术条件 (4.68a) 和 (4.68b)、(1.3) 以及 $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}$。根据 ~[JKW]，已知对于任意通道 $\alpha = (a, \lambda_0, \varphi_\alpha)$、$a \in \mathcal{A}$ 以及任意入射方向$\omega \in \mathbb{S}^2$,

$$\text{the total cross-section } \sigma_\alpha(\lambda, \omega)$$

对于高于 λ_0 的非阈值 λ，该量是有限的。在本文中，我们推导出当 $\lambda \to (\lambda_0)_+$ 时该量的界和渐近行为（见第 6.4 节）。结果取决于 λ_0 是正则的还是第二类例外的（产生有界的渐近行为，见定理 6.33），或者 λ_0 属于第一类或第三类（产生 $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ 型无界渐近行为，见定理 6.34 ）。我们的证明依赖于定理 1.2 的推导。

1.2 多体薛定谔算子

令 H 表示从总哈密顿量中去除质心后得到的多体薛定谔算子

$$\widetilde{H} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j} \Delta_{x_j} + \sum_{1 \le i < j \le N} V_{ij}(x_i - x_j), \quad x_j \in \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

其中，x_j 和 m_j 分别表示第 j 个粒子的位置和质量。假设成对势 V_{ij} 为实值，并且相对于 $-\Delta$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中是相对紧的；此外，它们还满足对某个 $\rho > 0$ 而言的条件

$$|V_{ij}(y)| \le C_{ij} |y|^{-\rho} \text{ for } y \in \mathbb{R}^n \text{ with } |y| > R,$$

对某些 $R > 0$ 成立。不过，我们还需要一些额外的正则性。采用以下条件会比较方便。

条件 1.4。存在 $\rho > 0$，使得对于所有成对势 V_{ij}，都存在分解 $V_{ij} = V_{(1)\,ij} + V_{(2)\,ij}$，其中

(1) $V_{ij}^{(1)}$ 是光滑的，并且

$$\partial_y^\alpha V_{ij}^{(1)}(y) = \mathcal{O}\big(|y|^{-\rho-|\alpha|}\big). \tag{1.10}$$

(2) $V_{ij}^{(2)}$ 紧支撑，且

$$V_{ij}^{(2)}(-\Delta+1)^{-1} \text{ is compact on } L^2(\mathbb{R}_y^n). \tag{1.11}$$

哈密顿量 H 被视为作用于 $L^2(\mathbf{X})$ 上的自伴算子，其中 $\mathbf{X}$ 是 $n(N-1)$ 维实向量空间 $\mathbf{X} := \big\{\sum_{j=1}^N m_j x_j = 0\big\}$。令 $\mathcal{A}$ 表示 N粒子系统的所有簇分解构成的集合。记号 $a_{\max}$ 和$a_{\min}$ 分别表示 $\mathbf{1}$ 簇分解和 N簇分解。对于 $a \in \mathcal{A}$，记 $\#a$ 为 a中的簇数。对于 $i, j \in \{1, \dots, N\}, i < j$，我们用 (ij) 表示如下的 $(N-1)$ 簇分解：令 $C = \{i, j\}$ 构成一个簇，其余所有粒子 $l \notin C$ 各自构成一个单粒子簇。若 i和 j 在 a中属于同一簇，我们记作 $(ij) \subset a$。更一般地，若 b的每个簇都是 a中某个簇的子集，则记作 $b \subset a$。若 a是一个 k簇分解，$a = (C_1, \dots, C_k)$，则令

$$\mathbf{X}^a = \Big\{x \in \mathbf{X} \mid \sum_{l \in C_j} m_l x_l = 0, j = 1, \dots, k\Big\} = \mathbf{X}^{C_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{X}^{C_k},$$

and

$$\mathbf{X}_a = \Big\{x \in \mathbf{X} \mid x_i = x_j \text{ if } i, j \in C_m \text{ for some } m \in \{1, \dots, k\}\Big\}.$$

注意，$a \subset b \Leftrightarrow \mathbf{X}^a \subset \mathbf{X}^b$。此外，$\mathbf{X}^a$ 和$\mathbf{X}_a$ 给出了配备二次型的$\mathbf{X}$的正交分解

$$q(x) = \sum_j 2m_j |x_j|^2, \qquad x \in \mathbf{X}.$$

对于 $x \in \mathbf{X}$，我们有相应的正交分解：$x = x^a + x_a$ 其中$x^a = \pi^a x \in \mathbf{X}^a$ 和 $x_a = \pi_a x \in \mathbf{X}_a$。

采用这一记号，上文引入的多体薛定谔算子 H 可写成如下形式

$$H = H_0 + V$$

其中，$H_0 = p^2$ 是欧几里得空间（$\mathbf{X}$ q）上的（负）拉普拉斯-贝尔特拉米算子，而 $V = V(x) = \sum_{a=(ij)\in\mathcal{A}} V_a(x^a)$，其中 $V_a(x^a) = V_{ij}x_i - x_j$对应于（$N-1$）团簇分解 $a = (ij)$。更具体地说，例如，

$$x^{(12)} = \big(\tfrac{m_2}{m_1+m_2}(x_1 - x_2), -\tfrac{m_1}{m_1+m_2}(x_1 - x_2), 0, \dots, 0\big).$$

我们注意到 $N \geq 3$具有以下几何性质：对于所有满足 $\#a = 2$、$\#b = N-1$ 和 $b \not\subset a$ 的 a、$b \in \mathcal{A}$

$$\operatorname{ran}\big(\pi^b \pi^a\big) = \operatorname{ran}\, \pi^b, \tag{1.12a}$$

$$\pi^b : \mathbf{X}_a \to \mathbf{X}^b \text{ is bijective.} \tag{1.12b}$$

1.2.1 主要例子，动力学原子核

考虑一个由 N 个粒子组成、通过库仑力相互作用的系统。其哈密顿量为

$$H = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j}\Delta_{x_j} + \sum_{1\le i<j\le N} q_i q_j |x_i - x_j|^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{R}^n,\ n \ge 3, \tag{1.13}$$

其中， x_j、 m_j 和 q_j 分别表示第 j个粒子的位置、质量和电荷。 H 被视为 L^2(X)中的自伴算子（去除了质心）。

考虑双簇分解 $a = (C_1, C_2)$。为方便起见，假设 $C_1 = \{1, \dots, J\}$和 $C_2 = \{J+1, \dots, N\}$。我们可以写成

$$H = H^1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes H^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes p_a^2 + I_a$$

其中 H^k、 $k = 1$、2是簇哈密顿量（在各自的质心参考系中以类似方式定义），并且

$$I_a = \sum_{i\in C_1,\, j\in C_2} q_i q_j |x_i - x_j|^{-1}.$$

为展开 I_a，令 $k = 1$、2

$$\begin{aligned}
&Q_k = \sum_{j\in C_k} q_j,\ M_k = \sum_{j\in C_k} m_j,\\
&R_k = R_k(x) = \sum_{j\in C_k} \tfrac{m_j}{M_k} x_j,\ \widetilde{Q}_k = \widetilde{Q}_k(x^{C_k}) = \sum_{j\in C_k} q_j (x_j - R_k),\\
&M = M_1 + M_2,\ R = R_1 - R_2,
\end{aligned}$$

并且我们对所有 $x \in \mathrm{X}$ 进行分解

$$\begin{aligned}
x &= x^{C_1} + x^{C_2} + x_a,\\
x^{C_1} &= (x_1 - R_1, \dots, x_J - R_1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{X}^{C_1},\\
x^{C_2} &= (0, \dots, 0, x_{J+1} - R_2, \dots, x_N - R_2) \in \mathbf{X}^{C_2},\\
x_a &= \big(\tfrac{M_2}{M} R, \dots, \tfrac{M_2}{M} R, -\tfrac{M_1}{M} R, \dots, -\tfrac{M_1}{M} R\big) \in \mathbf{X}_a.
\end{aligned}$$

~注意，事实上，电荷中心 Q_k 是 x^{C_k}的函数。

因此，我们可以对 $i \in C_1$ 和 $j \in C_2$进行展开

$$|x_i - x_j|^{-1} = |R|^{-1} - \tfrac{R}{|R|^3} \cdot \big((x_i - R_1) - (x_j - R_2)\big) + \mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big)|x^a|^2.$$

这处于 $|R| \to \infty$ 和 $|x_i - R_1| + |x_j - R_2| \le \frac{1}{2}|R|$的范围内。

由此我们进而得到 $|R| \to \infty$

$$I_a = Q_1 Q_2 |R|^{-1} + \tfrac{R}{|R|^3} \cdot \big(Q_1 \widetilde{Q}_2(x^{C_2}) - Q_2 \widetilde{Q}_1(x^{C_1})\big) + \mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big)|x^a|^2, \tag{1.14}$$

这会引出各种情形。我们用记号 φ^k, $k = 1, 2$ 表示团簇束缚态（对应团簇哈密顿量 H^k），并用 $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ 表示相应的团簇内积。有效势

$$V(R) := \langle \varphi^1 \otimes \varphi^2, I_a \varphi^1 \otimes \varphi^2 \rangle_{L^2(\mathbf{X}^a)}.$$

Case 1 $V \approx |R|^{-1}$: $Q_1 Q_2 \neq 0$.

情形 2 $V \approx |R|^{-2}$:

Subcase 2a $Q_1 \neq 0$, $Q_2 = 0$ and $\langle \varphi^2, \widetilde{Q}_2 \varphi^2 \rangle_2 \neq 0$.

子情形 2b $Q_2 \neq 0$、$Q_1 = 0$ 和 $\langle \varphi^1, \widetilde{Q}_1 \varphi^1 \rangle_1 \neq 0$。

情形 3 $V = \mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big)$:

子情形 3a $Q_1 = Q_2 = 0$。

子情形 3b $Q_1 \neq 0$、$Q_2 = 0$ 和 $\langle \varphi^2, \widetilde{Q}_2 \varphi^2 \rangle_2 = 0$。

子情形 3c $Q_2 \neq 0$、$Q_1 = 0$ 和 $\langle \varphi^1, \widetilde{Q}_1 \varphi^1 \rangle_1 = 0$。

注意，对于子情形 2a、3a 和 3b，假设簇束缚态充分衰减，有效势

$$V(R) = \langle \varphi^1 \otimes \varphi^2, I_a \varphi^1 \otimes \varphi^2 \rangle_{L^2(\mathbf{X}^a)} = Q_1 \tfrac{R}{|R|^3} \cdot \langle \varphi^2, \widetilde{Q}_2 \varphi^2 \rangle_2 + \mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big). \qquad (1.15)$$

因此，在子情形 2a 中，确实有 $V \approx |R|^{-2}$ 在无穷远处成立；而对于子情形 3a 和 3b，确实有 $V = \mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big)$成立。对于子情形 2b 和 3c，我们可以进行类似的论证。还要注意，$|R|^{-2}$ 是阈值分析中的临界衰减率，参见 [SW]。情形 1 是慢衰减情形。在情形 1 中，势 $V \approx |R|^{-1}$，而 V 被称为慢衰减。对于 $Q_1 Q_2 < 0$ 和 $Q_1 Q_2 > 0$，[FS] 和 [Na, Ya2]的单体结果将分别发挥作用。在情形 3 中，有效势被称为快速衰减，其他单体结果／技术也将发挥作用，例如参见 [JK]。情形 2（临界情形）则不同，而且相当“丰富”。

将在第4.3节中，对物理模型在一个双簇阈值处的一类广义特征函数的结构进行详细分析；该双簇阈值可能是多重的和/或非简单的。（关于“双簇阈值”的定义，见 (1.27)。）

由推导可知，(1.15) 的第二项 $\mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big)$ 实际上可能在无穷远处具有齐次性 -3。例如，对于子情形 ~ ~ ~ ~ 情形 3a，当且仅当由于对该情形的计算，矩 $R_1 := \langle \varphi^1, Q_1 \varphi^1 \rangle_1 \neq 0$ 和 $R_2 := \langle \varphi^2, Q_2 \varphi^2 \rangle_2 \neq 0$ 时，就会出现这种情况

$$\mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big) = |R|^{-5}\big(|R|^2 \widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_2 - 3(R \cdot \widetilde{R}_1)(R \cdot \widetilde{R}_2)\big) + \mathcal{O}\big(|R|^{-4}\big)$$

如果对于子情形 3a 和 3b，某些“矩”消失，则 (1.15) 的第二项具有 $\mathcal{O}\big(|R|^{-4}\big)$ 形式的阶，参见 [JKW，附录A]。在第5章中，我们将得到情形 3 的主导阶预解式展开，而不区分齐次 -3 项是否消失。在第 6.4 节中，我们将研究一种情形，在该情形中，有效势实际上至少具有 $\mathcal{O}\big(|R|^{-4}\big)$ 阶。在同一节中，还将用所谓的簇化原子坐标给出哈密顿量的显式计算。

严格来说，上述对情况 2 和情况 3 的区分，在简单双簇阈值下最为适用；在非单重情形下，我们不会采用这种分类。相反，在一般的、可能是非单重的情形下，需要采用以下（略有不同的）定义；更多细节见第4.3节。设

λ_a 是子哈密顿量 $H^a = H^1 \otimes 1 + 1 \otimes H^2$的一个非阈值本征值（更准确地说，我们需要 $\lambda_a \in \mathcal{T}_2$，见（1.27））。在相应特征投影的值域中选取一组正交归一基 $\varphi^a_1, \dots \varphi^a_m \in L^2(\mathbf{X}^a)$，$m = m_a$（其维数为一或可能更大），则有效势是关于变量 $R = R_1 - R_2$的 $m \times m$ 阶矩阵值函数

$$V(R)_{kl} := \langle \varphi^a_k, I_a \varphi^a_l \rangle_{L^2(\mathbf{X}^a)} = Q_1 Q_2 \delta_{kl} |R|^{-1} + Q_{kl}(\widehat{R})|R|^{-2} + \mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big). \quad (1.16)$$

这里 δ_{kl} 是克罗内克符号，$\widehat{R} = R/|R|$。根据（1.16），更一般（且正确）的分类如下：

情形 1 $Q_1 Q_2 \neq 0$。**情形 2** $Q_1 Q_2 = 0$ 以及矩阵值函数 $Q_a = \big(Q_{kl}\big) \neq 0$。**情形 3** $Q_1 Q_2 = 0$ 以及矩阵值函数 $Q_a = \big(Q_{kl}\big) = 0$。

1.3 N体带无限质量原子核的薛定谔算子

对于位于 $R_m \in \mathbb{R}^n$、$m = 1$、.....、M 的 $M \geq 1$ 个无限质量原子核，哈密顿量为

$$H = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j} \Delta_{x_j} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(x_i - x_j) + \sum_{1 \leq j \leq N,\, 1 \leq m \leq M} V^{\mathrm{ncl}}_{jm}(x_j - R_m), \quad (1.17)$$

其中，我们对 V^{ncl}_{jm}施加与条件 1.4 中对 V_{ij} 类似的条件。单体问题 $N = 1$ 包含在 (1.17) 中（在该情形下中间项缺失）。构型空间记为 $\mathbf{X} = \mathbb{R}^{nN}$，并像之前一样使用度量 q。“电子—电子”相互作用 $V_{ij}(x_i - x_j)$ 仍取 $V_a(x^a)$ 的形式，其中 $x^a = \pi^a x$、$a = (ij)$ 是将 x正交投影到一个 n维子空间上的投影。同样，“电子—原子核”相互作用 $\sum_{1 \leq m \leq M} V\mathrm{ncl}_{jm}(x_j - R_m)$ 取 $V_a(x^a)$ 的形式，其中再次有 $x^a = \pi^a x$、$a = a(j)$ 是将 x 正交投影到一个 n维子空间上的投影（令 $x^a = (0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0)$，即除第 j 个坐标外，所有其他坐标均置为零）。我们不再使用簇分解来标记一族类似于第1.2节中所讨论的“内部运动子空间” $\{\mathbf{X}^a\}$，而是从此采用抽象标记。具体而言，我们考虑 $\mathbf{X}$ 的最小有限子空间族 $\{\mathbf{X}^a \mid a \in \mathcal{A}\}$，该子空间族对加法封闭，并且包含 $\{0\}$ 以及上述 n维子空间。参见第1.4节，以及 [DG，第5节1]，其中讨论了抽象的 N体问题。另一方面，指标集 $\mathcal{A}$ 以及该子空间族$\{\mathbf{X}^a \mid a \in \mathcal{A}\}$ 有一个具体描述，记住这一点可能很有用：考虑 $a = (C_1, \dots, C_p)$，其中集合 C_q是 $\{1, \dots, N\}$的互不相交子集。对于 $p \geq 2$和 $q < p$，我们有 $\#C_q \geq 2$，并且当 $j \notin C_q$ 和 $\sum_{i \in C_q} m_i x_i = 0\}$时，令 $\mathbf{X}^{C_q} = \{x \in \mathbf{X} \mid x_j = 0$。或者，同样地，当 $j \notin C_p$ 和 $\sum_{i \in C_p} m_i x_i = 0\}$ 时，令 $\mathbf{X}^{C_p} = \{x \in \mathbf{X} \mid x_j = 0$ （在这种情况下有 $\#C_p \geq 2$）；或者当 $j \notin C_p\}$时，令 $\mathbf{X}^{C_p} = \{x \in \mathbf{X} \mid x_j = 0$。在这两种情况下，相应地令 $\mathbf{X}^a = \mathbf{X}^{C_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{X}^{C_p}$。此外，我们补充记号 $\mathbf{X}^{a_{\min}} = \{0\}$，其中，对于

例如， $a_{\min} := \emptyset$。这是对内部运动子空间族的一种具体标记。

子空间的排序根据定义 $a \subset b \Leftrightarrow \mathbf{X}^a \subset \mathbf{X}^b$，导出了抽象指标集 $\mathcal{A}$ 的排序。我们将 $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{a_{\max}}$ 和 $\mathbf{X}^a + \mathbf{X}^b = \mathbf{X}^{a\cup b}$ 分别记作.....。$\mathbf{X}^a$ 的正交补记作 $\mathbf{X}_a$。为统一表述，我们将指标 $a \in \mathcal{A}$ 称为“簇分解”。簇分解链 $a_1 \subsetneq \cdots \subsetneq a_k$ 的长度为数目 k。称此链连接 $a = a_1$ 和 $b = a_k$。连接给定的 $a \in \mathcal{A} \setminus \{a_{\max}\}$ 和 $a_{\max}$ 的所有链的最大长度记为 $\#a$。我们定义 $\#a_{\max} = 1$，并注意到 $\#a_{\min} = N + 1$。若 $\#a = k$，则称 $a \in \mathcal{A}$ 为 k-簇。

我们注意到 $N \geq 2$ 具有以下几何性质：对于所有满足 $\#a = 2$ 的 a、$b \in \mathcal{A}$，$\#b = N$ 且 $b \not\subset a$

$$\operatorname{ran}\left(\pi^b\pi^a\right) = \{0\} \text{ or } \operatorname{ran}\left(\pi^b\pi^a\right) = \operatorname{ran}\,\pi^b, \tag{1.18a}$$

$$\pi^b : \mathbf{X}_a \to \mathbf{X}^b \text{ is bijective.} \tag{1.18b}$$

1.3.1 主要例子，固定原子核

考虑一个由 N n 维粒子组成的系统，其中 $n \geq 3$ 通过库仑力相互作用。哈密顿量 (1.17) 此时写为

$$H = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j}\Delta_{x_j} + \sum_{1\leq i<j\leq N} q_i q_j |x_i - x_j|^{-1} + \sum_{1\leq j\leq N,\, 1\leq m\leq M,} q_j q_m^{\mathrm{ncl}} |x_j - R_m|^{-1}, \tag{1.19}$$

其中，x_j、m_j 和 q_j 分别表示第 j 个“电子”的位置、质量和电荷，而 R_m 和 q_m^{ncl} 分别表示第 m 个“原子核”的位置和电荷。

考虑双簇分解 $a = (C)$、{v3)，其含义是 $\mathbf{X}^a = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^{nN} \mid x_N = 0\}$。令 $R = x_N$，我们写成 $H = H^1 \otimes 1 + 1 \otimes p_R^2 + I_a$，其中 H^1 是簇哈密顿量（即前 $N-1$ 个电子的哈密顿量），并且

$$I_a = \sum_{1\leq i\leq N-1} q_i q_N |x_i - R|^{-1} + \sum_{1\leq m\leq M,} q_N q_m^{\mathrm{ncl}} |R - R_m|^{-1}.$$

引入

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{1\leq j\leq N-1} q_j + \sum_{1\leq m\leq M} q_m^{\mathrm{ncl}}, \\ \widetilde{Q} &= \widetilde{Q}(x^a) = \sum_{1\leq j\leq N-1} q_j x_j, \\ \widetilde{Q}^{\mathrm{ncl}} &= \sum_{1\leq m\leq M} q_m^{\mathrm{ncl}} R_m, \end{aligned}$$

I_a 关于 $|R| \to \infty$ 的渐近行为为

$$I_a = q_N Q |R|^{-1} + q_N \tfrac{R}{|R|^3} \cdot \left(\widetilde{Q}(x^a) + \widetilde{Q}^{\mathrm{ncl}}\right) + \mathcal{O}\left(|R|^{-3}\right)\left(1 + |x^a|^2\right). \tag{1.20}$$

因此，对于具有充分衰减的簇束缚态 $\varphi = \varphi^a(x^a)$中的期望值，我们得到 $|R| \to \infty$的渐近行为

$$\langle \varphi, I_a \varphi \rangle_{L^2(\mathbf{X}^a)} = q_N Q |R|^{-1} + q_N \tfrac{R}{|R|^3} \cdot \big(\langle \varphi, \widetilde{Q} \varphi \rangle_{L^2(\mathbf{X}^a)} + \widetilde{Q}^{\mathrm{ncl}} \big) + \mathcal{O}\big(|R|^{-3}\big). \quad (1.21)$$

这就导出了各种情形。

Case 1 $q_N Q \neq 0$.

Case 2 $q_N \langle \varphi, \widetilde{Q} \varphi \rangle_{L^2(\mathbf{X}^a)} \neq -q_N \widetilde{Q}^{\mathrm{ncl}}$ and $Q = 0$.

Case 3 $q_N = 0$, or $q_N \neq 0$, $Q = 0$ and $\langle \varphi, \widetilde{Q} \varphi \rangle_{L^2(\mathbf{X}^a)} = -\widetilde{Q}^{\mathrm{ncl}}$.

情形 1 是慢衰减情形，情形 2 是临界情形，而情形 3 是快速衰减情形。严格地说，当 φ是唯一的，即处于单重情形时，这种分类最为合理；在非单重情形下，则需要采用略有不同的术语，参见第 1.2.1 小节和第 4.3 节。

1.4 广义 N体薛定谔算子

受第 1.2 节和第 1.3 节启发，我们讨论抽象的 N体问题，参见 [DG，第 5.1]节。设 $\mathbf{X} \neq \{0\}$ 是一个带有内积 q的实有限维向量空间。我们考虑 $\mathbf{X}^a \subset \mathbf{X}$ 的子空间的有限族 $\{\mathbf{X}^a \mid a \in \mathcal{A}\}$，该有限族对加法稳定，并且包含 $\{0\}$和 $\mathbf{X}$。子空间的排序给出抽象指标集 $\mathcal{A}$、$a \subset b \Leftrightarrow \mathbf{X}^a \subset \mathbf{X}^b$的排序。记$\{0\} = \mathbf{X}^{a_{\min}}$、$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{a_{\max}}$ 以及 $\mathbf{X}^a + \mathbf{X}^b = \mathbf{X}^{a \cup b}$。$\mathbf{X}^a$的正交补记为 $\mathbf{X}_a$。我们将指标 $a \in \mathcal{A}$ 称为“簇分解”。簇分解链 $a_1 \subsetneq \cdots \subsetneq a_k$的长度是数目 k。称该链连接 $a = a_1$ 和 $b = a_k$。连接给定的 $a \in \mathcal{A} \setminus \{a_{\max}\}$和 $a_{\max}$的所有链的最大长度记为 $\#a$。我们定义 $\#a_{\max} = 1$，并记 $\#a_{\min} = N + 1$，称族 $\{\mathbf{X}^a \mid a \in \mathcal{A}\}$ 为 N体型。注意，对于第 1.2 节和第 1.3 节的设置，这些示例分别属于（$N - 1$）体型和N体型。对于第 1.2 节而言，这一术语可能略显误导。今后我们将只处理广义 N体框架。因此，这也适用于第 1.2 节的多体框架，只需将其中的 N 替换为 $N + 1$。如果 $\#a = k$，则称簇分解 a 为 k簇。

给定上述关于“内部子空间”结构的一致设置，我们可以引入相应的广义薛定谔算子。令 $-\Delta^a = (p^a)^2$ 和 $-\Delta_a = p_a^2$ 分别表示作用于 $L^2(\mathbf{X}^a)$ 和 $L^2(\mathbf{X}_a)$ 上的（负）拉普拉斯算子。这里，$p^a = \pi^a p$ 和 $p_a = \pi_a p$ 分别表示动量算子 $p = -\mathrm{i}\nabla$ 的内部（即“团簇内部”）分量和簇间分量。对于所有 $a \in \mathcal{A}'$: $= \mathcal{A} \setminus \{a_{\min}\}$，我们引入

$$H^a = -\Delta^a + V^a(x^a),\ V^a(x^a) = \sum_{b \subset a} V_b(x^b),\ H_a = H^a - \Delta_a,\ I_a(x) = \sum_{b \not\subset a} V_b(x^b),$$

其中势满足以下条件。我们在 $L^2(\mathbf{X}^{a_{\min}})$ 上定义 $H^{a_{\min}} = 0 = \mathbb{C}$，并在 $L^2(\mathbf{X})$ 上定义 $H = H^{a_{\max}}$。

条件 1.5。 存在 $\rho > 0$，使得对于所有 $a \in \mathcal{A}'$，给定一个函数 $V_a : \mathrm{X}^a \to \mathbb{R}$，其具有分解 $V_a = V_a^{(1)} + V_{(2)\,a}$，其中

(1) $V_a^{(1)}$光滑，且

$$\partial_y^\alpha V_a^{(1)}(y) = \mathcal{O}\big(|y|^{-\rho-|\alpha|}\big). \tag{1.22}$$

(2) $V_a^{(2)}$紧支撑，且

$$V_a^{(2)}(-\Delta_y + 1)^{-1} \text{ is compact on } L^2(\mathbb{R}_y^{\dim \mathbf{X}^a}). \tag{1.23}$$

条件 *1.5* 将贯穿本文始终。为处理局部奇点，我们还将施加一个附加条件，该条件取决于给定背景下的 $a \in \mathcal{A}$。第 1.2 节和第 1.3 节中的模型满足这一条件，参见 (1.12a)、(1.12b)、(1.18a) 和 (1.18b)。

对于给定的 $a \in \mathcal{A}$（其中 $\#a = 2$），考虑 $b \subset a$满足以下性质：

$$\operatorname{ran}\left(\pi^b \pi^a\right) = \{0\} \text{ or } \operatorname{ran}\left(\pi^b \pi^a\right) = \operatorname{ran}\, \pi^b, \tag{1.24a}$$

$$\pi^b : \mathbf{X}_a \to \mathbf{X}^b \text{ is onto.} \tag{1.24b}$$

注意，(1.24b) 中的映射必为单射；因此，若 (1.24b) 成立，该映射也是双射，见 (2.20)。

条件1.6。 对于所有不满足条件 (1.24a) 和 (1.24b) 的 $b \subset a$，奇异部分 $V_b^{(2)} = 0$，从而 $V_b = V_b^{(1)} \in C^\infty(\mathbf{X}^b)$。

如果 T 是希尔伯特空间上的自伴算子，则 $\mathbb{C}$ 的子集

$$\sigma(T), \sigma_{\mathrm{d}}(T), \sigma_{\mathrm{ess}}(T) \text{ and } \sigma_{\mathrm{pp}}(T)$$

分别表示 T 的谱、离散谱、本质谱和特征值集合。

算子 H^a 是与团簇分解 a 相关联的子哈密顿量，而 I_a 是所有簇间相互作用之和。H^a 的具体表达式取决于 X^a 上坐标的选择。令

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(H) = \cup_{a \in \mathcal{A}, \#a \geq 2}\, \sigma_{\mathrm{pp}}(H^a)$$

为 H 的阈值集合。HVZ 定理 [RS, 《定理 XIII.17》] 给出了 Σ_2 的本质谱底端，即 H 的 $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ 的下确界，公式为

$$\Sigma_2 = \min_{a \in \mathcal{A} \setminus \{a_{\max}\}} \inf \sigma(H^a) = \min_{a \in \mathcal{A}, \#a = 2} \inf \sigma(H^a). \tag{1.25}$$

如果 $N \geq 2$，我们还引入

$$\Sigma_3 := \min_{a \in \mathcal{A}, \#a \geq 3} \inf \sigma(H^a). \tag{1.26}$$

在条件 1.5 下，已知非阈值束缚态呈指数衰减 [FH]。众所周知 [FH]，在相当一般的条件下，广义薛定谔算子没有正特征值，并且 [Pe] 负特征值至多从下方聚积于阈值，这

些负特征值至多从下方聚积于阈值，另见[AIIS]。

本文的目标是获得H 在一般的双簇阈值 $\lambda_0 \le 0$附近的谱性质和散射性质，即

$$\lambda_0 \in \mathcal{T}_2 := \mathcal{T} \setminus \cup_{a\in\mathcal{A},\#a\ge 3}\, \sigma_{\rm pp}(H^a). \tag{1.27}$$

注意，对于 $N=1$， $\lambda_0=0$ ，而对于 $N\ge 2$， $\lambda_0<0$ 。还要注意，对于 $N\ge 2$ ， $\lambda_0\ne\Sigma_3$ ，并且对于 $N\ge 3$， $\lambda_0>\Sigma_3$ 可能出现。由于情形 $N=1$ 已在文献中得到广泛研究，因此在全文中我们假设 $N\ge 2$，从而 $\lambda_0<0$。对于 $N\ge 2$ 的特殊情形，当 λ_0 等于 Σ_2 且作为唯一一个双簇子哈密顿量的特征值给出时， [Wa2]研究了快速衰减势，即 $\rho>2$ 或更大时的情形。

1.4.1 空间和记号

对于给定的巴拿赫（或弗雷歇）空间 X 和 Y，从$X\to Y$到T的连续线性算子空间记为 $\mathcal{L}(X,Y)$，并将 $\mathcal{L}(X)$简写为 $=\mathcal{L}(X,X)$。

令 H^k_s, $k,s\in\mathbb{R}$ 表示 X 上的加权Sobolev空间（或者对于任意 $a\in\mathcal{A}'$，也可以是 X_a 上的空间），并赋予范数

$$\|u\|_{k,s} := \Big(\int \big|\langle x\rangle^s(1-\Delta)^{k/2}u\big|^2 {\rm d}x\Big)^{1/2}, \quad \text{where } \langle x\rangle := (1+|x|^2)^{1/2}.$$

空间 H^{-k}_{-s} 可视为 H^k_s 的对偶空间，其中通常的 L^2 内积用作“配对”。令 $\mathcal{L}(k,s;k',s') = \mathcal{L}(H^k_s,H^{k'}_{s'})$。将 H 视为 $\mathcal{L}(2,0;0,0)$ 中的算子，或视为 $\mathcal{L}(1,0;-1,0)$ 中的算子，将会很方便。我们将 $H^k=H^k_0$, $L^2_s=H^0_s$ 简写为 $H^k_\infty=\cap_{s\in\mathbb{R}}H^k_s$, $H^k_{-\infty}=\cup_{s\in\mathbb{R}}H^k_s$, $L^2_\infty=\cap_{s\in\mathbb{R}}L^2_s$和 $L^2_{-\infty}=\cup_{s\in\mathbb{R}}L^2_s$。此外，对于任意 $k,t\in\mathbb{R}$，引入 $H^k_{t+}=\cup_{s>t}H^k_s$, $H^k_{t-}=\cap_{s<t}H^k_s$, $L^2_{t+}=\cup_{s>t}L^2_s$和 $L^2_{t-}=\cap_{s<t}L^2_s$。

我们还将使用 X 上取值于 $\mathbb{C}^m$的函数/分布的加权 Sobolev 空间，并以类似的记号表示，例如 $H^k=H^k(\mathrm{X};\mathbb{C}^m)$。对于任意复希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_1$ ，我们使用记号 $\mathcal{C}(\mathcal{H}_1、\mathcal{H}_2)\subset\mathcal{L}(\mathcal{H}_1、\mathcal{H}_2)$ 表示紧算子 $T:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$所构成的空间。根据标准的索博列夫嵌入定理，对于所有$k_1>k_2$ 和 $s_1>s_2$ ，算子 $H^{k_1}_{s_1}\ni f\to f\in H^{k_2}_{s_2}$ 是紧的。令 $H^1_{\rm loc}$ 表示局部 H^1 函数的集合，更确切地说，是满足 $\varphi v\in H^1$对所有 $\varphi\in C^\infty_{\rm c}$成立的 $v\in L^2_{-\infty}$ 的集合。

考虑 $\mathrm{X}|\,|x|<R\}$中的球 $B(R)=\{x\in、\ R\ge 1$，以及特征函数

$$F_0=F\big(B(R_0)\big) \text{ and } F_{\nu+1}=F\big(B(R_{\nu+1})\setminus B(R_\nu)\big),\ R_\nu=2^\nu,\ \nu\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\},$$

其中， $F(M)$ 表示子集 $M\subset\mathrm{X}$ 的示性函数。我们引入 Besov空间 $\mathcal{B}_s=\mathcal{B}_s(\mathrm{X})$ 和 $\mathcal{B}^*_s=\mathcal{B}^*_s(\mathrm{X})=\big(\mathcal{B}_s(\mathrm{X})\big)^*$、 $s>0$，定义如下。

$$\mathcal{B}_s=\{\psi\in L^2_{\rm loc}\mid \|\psi\|_{\mathcal{B}_s}<\infty\},\quad \|\psi\|_{\mathcal{B}_s}=\sum_{\nu=0}^\infty R_\nu^s\|F_\nu\psi\|_{L^2},$$
$$\mathcal{B}^*_s=\{\psi\in L^2_{\rm loc}\mid \|\psi\|_{\mathcal{B}^*_s}<\infty\},\quad \|\psi\|_{\mathcal{B}^*_s}=\sup_{\nu\ge 0} R_\nu^{-s}\|F_\nu\psi\|_{L^2},$$

分别地。（注意，确实， $\mathcal{B}_s^*$ 是 $\mathcal{B}_s$ 的对偶空间。）我们将 $\mathcal{B}_{s,0}^*$ 定义为 L^2 在 $\mathcal{B}_s^*$ 中的闭包。注意

$$u \in \mathcal{B}_s^* \Leftrightarrow u \in L^2_{\mathrm{loc}} \text{ and } \sup_{R\geq 1} R^{-s}\|F\big(B(R)\big)u\|_{L^2} < \infty,$$

并且

$$u \in \mathcal{B}_{s,0}^* \Leftrightarrow u \in L^2_{\mathrm{loc}} \text{ and } \lim_{R\to\infty} R^{-s}\|F\big(B(R)\big)u\|_{L^2} = 0.$$

注意标准加权 L^2 空间与 Besov空间之间的以下关系：

$$\forall s_1 > s > 0: \quad L^2_{s_1} \subsetneq \mathcal{B}_s \subsetneq L^2_s \subsetneq L^2 \subsetneq L^2_{-s} \subsetneq \mathcal{B}_{s,0}^* \subsetneq \mathcal{B}_s^* \subsetneq L^2_{-s_1}. \tag{1.28}$$

我们对任意 $R \geq 1$引入

$$\chi_R(t) = \chi(t/R) \text{ for a real-valued } \chi \in C^\infty(\mathbb{R}): \quad \chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \leq 4/3 \\ 0 & \text{for } t \geq 5/3 \end{cases}, \tag{1.29}$$

以及 $\bar{\chi}_R = 1 - \chi_R$。我们假设 $-\chi' \geq 0$ 并且 $\sqrt{-\chi'} \in C^\infty$。

第2章

约化为单体问题

本章将说明，在条件 1.5 下，双簇阈值附近广义 N体算子的谱分析可以约化为带有非线性谱参数的单体算子的分析。当然，对于单体问题，这种约化并非必需；然而我们提醒读者，在本文中我们始终施加条件 $N \geq 2$。

约化的思路如下。对于给定的双簇阈值$\lambda_0 < 0$，记 $\mathcal{F}$ 为 $L^2(\mathbf{X})$ 中由所有可能的、特征值为 λ_0 的双簇子哈密顿量的束缚态“张成”的闭子空间。（特殊情形下的精确定义/表示见 (2.15) 及相关讨论。）令 Π 为从 $L^2(\mathbf{X})$ 到 $\mathcal{F}$的正交投影，$\Pi' = 1 - \Pi$ 和 $H' = \Pi' H \Pi'$。我们研究一个形如以下形式的算子的 Grushin问题

$$H(z) = \begin{pmatrix} H - z & S \\ S^* & 0 \end{pmatrix} \text{ on } L^2(\mathbf{X}) \oplus \mathcal{H}, \tag{2.1}$$

其中，空间 $\mathcal{H}$ 是某个辅助单体型空间，$S : \mathcal{H} \to L^2(\mathbf{X})$ 是一个适当定义的算子，其值域与 $\mathcal{F}$相同，即投影 Π的值域，而 S^* 是 S的伴随算子。$\mathcal{H}$ 和 S 的选择可根据不同情形而变化，目的是使 $H(z)$ 在 z 接近 λ_0 且 $\operatorname{Im} z \neq 0$时可逆。若此条件得以满足，我们令

$$H(z)^{-1} = \begin{pmatrix} E(z) & E_+(z) \\ E_-(z) & E_{\mathcal{H}}(z) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

于是，预解式 $R(z) = (H - z)^{-1}$ 可表示为

$$R(z) = E(z) - E_+(z) E_{\mathcal{H}}(z)^{-1} E_-(z). \tag{2.3}$$

算子 $H(z)^{-1}$ 可以用约化预解式 $R'(z) = (H' - z)^{-1}\Pi'$来计算。如果 $R'(z)$ 在 λ_0 附近具有某些良好性质，那么对H 在 λ_0 附近的谱分析便可约化为对 $E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}$ 在 $\mathcal{H}$上的分析。 $E_{\mathcal{H}}(z)$是一个对谱参数 z呈非线性依赖的单体算子。例如，为了得到预解式展开，可以尝试运用研究单体算子的已知方法，分析 $E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}$ 在 $z \to \lambda_0$, $\operatorname{Im} z > 0$ 时的渐近行为。

下面我们只在某些情形下给出详细分析。事实上，下面给出的约化仅在情形 $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$ 下有用。情形 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$ 可以通过添加一个额外的有限维空间来处理，正如 [Wa2 第 4] 节处理最低阈值时所做的那样。在讨论各种具体情形的细节之前，我们先从更一般的角度研究约化方案。正如我们随后将看到的，这一抽象方案可以应用于这些情形。

2.1 一个抽象约化方案

本节将介绍一种抽象约化方案，该方案将在许多地方用到。

抽象框架 设给定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$，且 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{G}$ 的闭子空间。设 $S : \mathcal{H} \to \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ 是双连续同构（即 S 是线性的、一一对应且映 onto $\mathcal{F}$，并且作为从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{F}$ 的映射是双连续的）。令 Π 表示 $\mathcal{G}$ 中到 $\mathcal{F}$ 上的正交投影，并令 $\Pi' = 1 - \Pi$。设 H 是作用于 $\mathcal{G}$ 上的自伴算子，满足 $\Pi : \mathcal{D}(H) \to \mathcal{D}(H)$，且 $\Pi' H \Pi$ 和 $\Pi H \Pi'$（最初定义在 H 的定义域 $\mathcal{D}(H)$ 上）可延拓为 $\mathcal{G}$ 上的有界算子。定义定义域为 $\mathcal{D}(H') = \mathcal{D}(H) \cap \mathrm{ran}(\Pi') = \Pi' \mathcal{D}(H)$ 的 $H' = \Pi' H \Pi'$，以及定义域为 $\mathcal{D}(H_\Pi) = \mathcal{D}(H) \cap \mathrm{ran}(\Pi) = \Pi \mathcal{D}(H)$ 的 $H_\Pi = \Pi H \Pi$。于是 H' 和 H_Π 分别是作用于 $\Pi'\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{F}$ 上的自伴算子（见引理2.8 3)的证明）。令 $R'(z) = (H' - z)^{-1}\Pi'$，其中 $\mathrm{Im}\, z \neq 0$。

对所有满足 $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ 的 $z \in \mathbb{C}$ 引入

$$E(z) = R'(z), \tag{2.4a}$$
$$E_+(z) = S - R'(z) H S, \tag{2.4b}$$
$$E_-(z) = S^* - S^* H R'(z), \tag{2.4c}$$
$$E_{\mathcal{H}}(z) = S^* \big(z - H + H R'(z) H\big) S. \tag{2.4d}$$

显然，$E(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$、$E_+(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$，且 $E_-(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$。另请注意，$S^* H S = S^* H_\Pi S$ 是自伴的，因此，(2.4d) 中的算子 $E_{\mathcal{H}}(z)$ 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的闭算子，其定义域由 $S^{-1}\mathcal{D}(H_\Pi)$ 给出。

命题 2.1。 在上述条件下，对于 $\mathrm{Im}\, z \neq 0$:

1) $E_{\mathcal{H}}(z)^* = E_{\mathcal{H}}(\bar{z})$。

2) $E_{\mathcal{H}}(z)$ 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的可逆算子，满足

$$\frac{\mathrm{Im}\, E_{\mathcal{H}}(z)}{\mathrm{Im}\, z} \geq S^* S. \tag{2.5}$$

3)

$$R(z) = E(z) - E_+(z) E_{\mathcal{H}}(z)^{-1} E_-(z). \tag{2.6}$$

证明。 恒等式 1) 根据命题前所述的自伴性，显然成立。

不等式 (2.5) 由恒等式推出

$$\operatorname{Im} E_{\mathcal{H}}(z) = \operatorname{Im} z\, S^*\big(1 + HR'(z)^* R'(z) H\big) S. \tag{2.7}$$

2) 的可逆性由标准的数值域论证得出，该论证结合了 1) 和 (2.5)。

最后，恒等式 (2.6) 可通过以下初等计算得出：在恒等式右端从左侧作用 $H - z$，并将 (2.6) 的第一项写作

$$H\Pi' = \Pi' H' \Pi' + \Pi H \Pi'. \tag{2.8}$$

所得结果为表达式 $\Pi' + \Pi H R'(z)$。对于 (2.6) 的第二项，我们代入表达式 (2.4b)，并再次使用 (2.8)（以处理 (2.4b) 的第二项）。可见，对 (2.6) 的第二项作用 $H - z$ 后，得到一个值域包含于 $\mathcal{F}$ 的算子。因此，我们可以在左侧插入 $\Pi = (S^*)^{-1} S^*$，然后将因子 S^* 与已计算出的表达式合并。这会得到一个因子 $E_{\mathcal{H}}(z) E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}$，当然可以在 $\mathcal{H} = \operatorname{ran} E_-(z)$ 上省略。然后代入表达式 (2.4c)，即可得出 (2.6) 第二项的贡献为 $\Pi - \Pi H R'(z)$。因此，从左侧作用 $H - z$ 于 (2.6) 右端所得结果为

$$\big(\Pi' + \Pi H R'(z)\big) + \big(\Pi - \Pi H R'(z)\big) = 1,$$

这与从恒等式左端左侧应用 $H - z$ 所得到的结果一致。

□

注记 2.2。 还有一种替代方法，可以基于某个抽象的 Grushin问题推导公式 (2.6)。关于这种方法的综述，可参见 [SZ], ；但为使论述完整，我们在此概述这种替代方法，参见本章开头：

我们考虑一个关于如下型式算子的 Grushin问题

$$H(z) = \begin{pmatrix} H - z & S \\ S^* & 0 \end{pmatrix} \text{ on } \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}. \tag{2.9}$$

为简化记号，我们仍用 $(SS^*)^{-1} = (SS^*)^{-1}\Pi$ 表示 $(SS^*)^{-1}$ 到 $\mathcal{G}$ 的延拓，即在 $\mathcal{F}^\perp$ 上令 $(SS^*)^{-1} = 0$。

SS^* 在 $\mathcal{F}$ 上的可逆性使我们能够证明 $H(z)$ 在 $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$ 上可逆。事实上，可以显式地计算其逆算子。设 $T := (SS^*)^{-1} S$，并令 $Q(z)$ 和 $B(z)$ 定义为

$$Q(z) = \begin{pmatrix} R'(z) & T \\ T^* & T^*(z - H)T \end{pmatrix} \text{ and } B(z) = \begin{pmatrix} \Pi H R'(z) & \Pi' H T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么，至少形式上有，

$$H(z) Q(z) = 1 + B(z).$$

由于 $B(z)^3 = 0$ 算子 $1 + B(z)$ 可逆，因此 $H(z)$ 有一个右逆。类似地，可以证明 $H(z)$ 有一个左逆。因此， $H(z)$ 应当是可逆的，其逆算子为

$$H(z)^{-1} = Q(z)(1 - B(z) + B(z)^2). \tag{2.10}$$

将 $H(z)^{-1}$ 写成型式

$$H(z)^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{E}(z) & \widetilde{E}_+(z) \\ \widetilde{E}_-(z) & \widetilde{E}_{\mathcal{H}}(z) \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

我们有以下公式

$$\widetilde{E}(z) = R'(z), \tag{2.12a}$$
$$\widetilde{E}_+(z) = T - R'(z)HT, \tag{2.12b}$$
$$\widetilde{E}_-(z) = T^* - T^*HR'(z), \tag{2.12c}$$
$$\widetilde{E}_{\mathcal{H}}(z) = T^*\big(z - H + HR'(z)H\big)T, \tag{2.12d}$$

and

$$R(z) = \widetilde{E}(z) - \widetilde{E}_+(z)\widetilde{E}_{\mathcal{H}}(z)^{-1}\widetilde{E}_-(z). \tag{2.13}$$

现在，(2.6) 由 (2.13) 和恒等式推出

$$T = (SS^*)^{-1}S = S(S^*S)^{-1}. \tag{2.14}$$

注2.3。 设 $\lambda_0 \notin \sigma(H')$，使得 (2.12a)–(2.12d) 中的算子在取 $z \to \lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}$ 时存在极限。由以下恒等式可知

$$\widetilde{E}_-(\lambda)(H-\lambda) \subset -\widetilde{E}_{\mathcal{H}}(\lambda)S^*,$$
$$S\widetilde{E}_{\mathcal{H}}(\lambda) \subset -(H-\lambda)\widetilde{E}_+(\lambda),$$

that

$$S^* : \ker(H-\lambda) \to \ker \widetilde{E}_{\mathcal{H}}(\lambda),$$
$$\widetilde{E}_+(\lambda) : \ker \widetilde{E}_{\mathcal{H}}(\lambda) \to \ker(H-\lambda),$$

分别地。

结合以下恒等式

$$\widetilde{E}_+(\lambda)S^* \supset 1 - \widetilde{E}(\lambda)(H-\lambda),$$
$$S^*\widetilde{E}_+(\lambda) = 1,$$

由此我们可以得出，事实上

$$\widetilde{E}_+(\lambda)S^* = 1 \text{ on } \ker(H-\lambda),$$
$$S^*\widetilde{E}_+(\lambda) = 1 \text{ on } \ker \widetilde{E}_{\mathcal{H}}(\lambda),$$

~即 $S^*: \ker(H-\lambda) \to \ker E_{\mathcal{H}}(\lambda)$ 是一个线性同构。

因此，参见(2.14)， $T^*: \ker(H-\lambda) \to \ker E_{\mathcal{H}}(\lambda)$是一个线性同构，其逆为 $E_+(\lambda)$: $\ker E_{\mathcal{H}}(\lambda) \to \ker(H-\lambda)$。我们将给定 $\phi \in \ker(H-\lambda)$的向量 $f = T^*\phi \in \ker E_{\mathcal{H}}(\lambda)$称为其特征变换，并将方程$\phi = E_+(\lambda)f$ 称为 ϕ的特征变换的反演公式。此处讨论的希尔伯特空间框架在我们的应用中是一个 L^2 框架，它将延拓到Besov空间框架以及 $\lambda_0 \in \sigma(H')$的框架，而后者与此处讨论的框架不相容。这些具体的延拓将在第4章中研究。

2.2 非重合双簇阈值情形

在本节中，假设 $\lambda_0 < 0$按以下意义是一个非重合双簇阈值：

条件 2.4。 存在唯一的 $a_0 \in \mathcal{A} \setminus \{a_{\max}\}$，使得 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H^{a_0})$。该簇分解是一个双簇分解，即 $\#a_0 = 2$。对于 $a = a_0$，条件1.6 得到满足。

注意，我们在此并未要求 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{d}}(H^{a_0})$。然而， λ_0 并不是哈密顿量 H^{a_0} 的阈值，因此相应的束缚态具有指数衰减，参见 [FH、AIIS]。注意， λ_0 作为 H^{a_0} 的特征值的重数（记为 m）可以是任意的。最简单的情形是 $\lambda_0 = \Sigma_2$ （在条件 2.4 下，此时必然有 $m = 1$ ），对于快速衰减势， [Wa2] 对此进行了研究。对于 $\lambda_0 > \Sigma_2$，我们可以使用相同的思路，将 H 化为带有非线性谱参数的一体型算子，不过会出现额外的复杂性，尤其是对于 $\lambda_0 > \Sigma_3$。

设 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ 为与λ_0对应的 H^{a_0} 的正交归一基。设 Π 为 $\mathcal{G}$ 中的投影：$= L^2(\mathrm{X})$定义为

$$\Pi g = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes \langle \varphi_j, g \rangle_{L^2(\mathbf{X}^{a_0})},\ g \in \mathcal{G}. \tag{2.15}$$

设 $\Pi' = 1 - \Pi$ 和 $H' = \Pi' H \Pi'$。注意， H' 是自伴的，其定义域为$\mathcal{D}(H') = \mathcal{D}(H) \cap \operatorname{ran}\ \Pi' = \Pi' \mathcal{D}(H)$。事实上， H_{a_0} 被 Π' 约化（“约化”的含义见 [Ka，第V.3.9]小节），特别地，这意味着 $H'_{a_0} = \Pi' H_{a_0} \Pi'$ 是自伴的。由于$I'_{a_0} = \Pi' I_{a_0} \Pi'$ 相对于H'_{a_0} 是无穷小的，根据 [RS，定理X.12] ，可知 H' 确实是自伴的。对于$\operatorname{Im} z \neq 0$ ，我们令

$$R'(z) = (H' - z)^{-1} \Pi'.$$

设 $I_0 = I_{a_0}$ ，并类似地简写 $p_0 = p_{a_0}$。由于我们在 $a = a_0$ 下施加了条件1.6，因此可以使用一个“自由因子”$(|p^{a_0}|^2 + 1)^{-1}$ （来自 Π），从而得到

$$\Pi' I_0 \Pi \in \mathcal{L}\big(\mathcal{G}\big). \tag{2.16}$$

令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{a_0} := L^2(\mathrm{X}_{a_0};\ \mathbb{C}^m)$、 $H^2_{a_0} := H^2(\mathrm{X}_{a_0};\ \mathbb{C}^m) \subset \mathcal{H}_{a_0}$，并将算子 $S : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ 定义为

$$S : f = (f_1, \dots, f_m) \to Sf = \sum_{j=1}^{m} S_j f_j = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x^{a_0}) f_j(x_{a_0}). \tag{2.17}$$

显然， $S : H^2_{a_0} \to H^2(\mathrm{X})$ 以及（L^2）伴随算子 $S^* : H^2 \to H^2_{a_0}$。由于在此情形下 S 是等距的，公式 (2.4a)–(2.4d) 与 (2.12a)–(2.12d) 重合。它们可表示为（用大小为 m 的单位矩阵 $\mathbf{1}_m$ 表示）

$$E(z) = R'(z), \tag{2.18a}$$
$$E_+(z) = (1 - R'(z) I_0) S, \tag{2.18b}$$
$$E_-(z) = S^* (1 - I_0 R'(z)), \tag{2.18c}$$
$$E_{\mathcal{H}}(z) = (z - \lambda_0) - (|p_0|^2 \mathbf{1}_m + S^* I_0 S - S^* I_0 R'(z) I_0 S), \tag{2.18d}$$

可将其与 (2.6) 结合使用，即

$$R(z) = E(z) - E_+(z)E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}E_-(z). \tag{2.19}$$

下面我们考察 $E_{\mathcal{H}}(z)$ 的一些基本性质。注意， $S^*I_{a_0}S$ 是矩阵值势。首先，我们按照条件 1.5 中的分解来分解 $I_0 = I_0^{(1)} + I_0^{(2)} = I_{a_0}^{(1)} + I_{a_0}^{(2)}$，并考察来自 $I_0^{(1)}$ 的贡献。回想一下基本的几何性质

$$X_a \cap X_b = \{0\} \text{ if } \#a = 2 \text{ and } b \not\subset a, \tag{2.20}$$

该性质保证对于所有 $b \not\subset a_0$， $\pi^b : \mathbf{X}_{a_0} \to \mathbf{X}^b$ 都是单射。由此，通过泰勒展开可知，首项具有标量主导形式。更精确地说，通过零阶泰勒展开，利用 (2.50a)（见下文），并利用束缚态 φ_j 的多项式衰减，我们得到

$$S_i^* I_0^{(1)} S_j = I_0^{(1)}(0+y)\delta_{ij} + \mathcal{O}(|y|^{-\rho-1}) \text{ for } |y| \to \infty; \quad i,j \le m. \tag{2.21a}$$

这里，变量 $y = x_{a_0}$ 可以看作 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量；此处及下文均以 $\dim \mathbf{X}_{a_0} = n$ 表示其维数。我们断言，对于 $I_0^{(2)}$，有与 (2.21a) 类似的结论：

$$S_i^* I_0^{(2)} S_j - I_0^{(2)}(0+y)\delta_{ij} \in \mathcal{C}\big(H_s^2(\mathbf{X}_{a_0}), L_t^2(\mathbf{X}_{a_0})\big) \text{ for all } s,t \in \mathbb{R}. \tag{2.21b}$$

为证明 (2.21b)，只需考虑在条件 (1.24a) 和 (1.24b) 下，来自 $V_b^{(2)}$ for any $b \not\subset a_0$ 的贡献，事实上此时 (1.24a) 的第二个条件也成立。由 (1.24b) 可知，限制 $V_{(2)b}(= V_{(2)b}(y)) \in \mathcal{C}\big(H_s^2(\mathbf{X}_{a_0})\ L_t^2(\mathbf{X}_{a_0})\big)$。它是紧支撑的，但可能具有奇异性。另一方面，由于 (1.24a) 的第二个条件， $S_i^* V_{(2)\,b}\ S_j$ 是一个有界势，因此只需证明该势比任意负幂 $\langle y\rangle^{-s}$ 衰减得更快。根据紧支撑性质，我们可以选取 $R > 1$，使得

$$F(|\pi^b \cdot| > R) S_i^* V_b^{(2)} S_j = S_i^* F\big(|\pi^b y| > R\big) F\big(|\pi^b x^{a_0}| \ge \tfrac{1}{2}|\pi^b y|\big) V_b^{(2)} S_j.$$

由于簇束缚态具有多项式衰减，右端也具有任意幂衰减，从而得到所需的衰减，因此 (2.21b) 成立。

由 (2.21a) 和 (2.21b) 可得

$$\begin{aligned} &S_i^* I_0 S_j - I_0^{(1)}(0+y)\delta_{ij} \in \mathcal{C}\big(H_s^2(\mathbf{X}_{a_0}), L_t^2(\mathbf{X}_{a_0})\big) \text{ for } s,t \in \mathbb{R},\ t < \rho + 1 + s, \\ &S_i^* I_0 S_j - I_0^{(1)}(0+y)\delta_{ij} \in \mathcal{L}\big(H_s^2(\mathbf{X}_{a_0}), L_{\rho+1+s}^2(\mathbf{X}_{a_0})\big) \text{ for } s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

接下来考察 (2.18d) 中的项 $S^*I_0R'(z)I_0S$ 。注意， I_0 的两个因子可以分别自由地改为 $\Pi I_0 \Pi'$ 和 $\Pi' I_0 \Pi$。然后，我们便可方便地对 (2.16) 作如下改进：

$$\Pi I_0 \Pi',\ \Pi' I_0 \Pi \in \mathcal{L}\big(L_s^2(\mathbf{X}), L_{\rho+1+s}^2(\mathbf{X})\big) \text{ for all } s \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

对于这些界，只需考虑 $\Pi' I_0 \Pi$。 $I_0^{(1)}$ 的贡献按照（2.21a）中的方式（以及通过（2.50a））使用泰勒展开进行处理。 $I_0^{(2)}$ 的贡献

通过使用一个“自由因子”（$|p^{a_0}|^2+1$）$^{-1}$（如（2.16）中所示）以及使用上述（2.21b）的证明进行处理。

我们得到算子 $E_{\mathcal{H}}(z)$的如下表示：

$$E_{\mathcal{H}}(z) + \big(p_0^2 + I_0^{(1)}(\pi_{a_0}\cdot) + \lambda_0 - z\big)\mathbf{1}_m = \widetilde{V} - \langle y\rangle^{-\rho-1}\widetilde{K}(z)\langle y\rangle^{-\rho-1};$$
$$\widetilde{V} = \mathcal{O}\big(\langle y\rangle^{-\rho-1}\big), \quad \widetilde{K}(z) = \mathcal{O}\big(\langle y\rangle^{0}\big);$$

这里， $\mathcal{O}(\cdot)$记号的含义由式 (2.22) 和 (2.23) 分别给出更精确的定义。注意， V 是乘法型矩阵值的，而 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$是非乘法型的，并通过因子 $R'(z)$的出现而依赖于 z。另请注意， $\langle y\rangle^{\rho} I_0^{(1)}$ (y)是有界的。尽管上述讨论基于对 $E_{\mathcal{H}}(z)$的自然算子解释，我们更倾向于采用相应的型式解释（关于不同但相似情境中的详细讨论，见注2.13）。

表示公式 (2.19) 对任意满足 $\operatorname{Im} z \neq 0$ 的 z 均成立，但就我们的目的而言，只有当 z 在 λ_0附近时， $R'(z)$具有良好性质，该公式才有用。当λ_0 是最低阈值时， H' 的本质谱向右平移，因此当 λ_0 不是 H'的特征值时，可以使用表示式 (2.19)，参见 Wa2 中的引理 2.1] （关于其延拓，见引理 2.10）。在此假设下，约化预解式 $R'(z)$在 λ_0的一个小邻域内全纯， $E_+(z)$ $E_{\mathcal{H}}(z)$和 $E_-(z)$也如此。此外，在这种情形下， $R'(z)$在带权 L^2 空间中具有一致界（关于重根情形中的类似结论，见式 (2.56)）。这有助于研究 $E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}$ 在 λ_0 处的渐近展开，进而（由式 (2.19)）研究 $R(z)$在 λ_0 附近的展开式（关于重根情形，见第5.1.2节）。如果 λ_0 恰好是 H' 的特征值，则还需要进行另一种约化。

如果 $\lambda_0 > \Sigma_2$, λ_0 属于 H' 的本质谱。在条件1.5和2.4下，我们将在第3章证明，对于 $R'(z)$，只要 λ_0 不是 H' 的特征值，且 z 位于 λ_0 附近，就成立极限吸收原理和微局部预解式估计。在这种情况下，这将使注2.3中讨论的“特征变换”得以延拓（见第4章），进而可以再次利用（2.19）分析阈值 λ_0 附近 H 的预解式（见第5.1.3节）。对于 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 的分析比对于 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 的分析更为复杂，因为需要研究 $R'(z)$ 在 λ_0 附近更精细的映射性质，尤其会造成一定的“权重损失”。

2.3 多重双簇阈值， $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$

现在考虑存在至少两个双簇分解的情形，使得相应子哈密顿量的双簇阈值 $\lambda_0(<0)$是一个特征值。为简化表述，我们仅详细考虑 λ_0 不计特征值重数地出现两次的情形：

条件 2.5。 存在唯一的 a_1、$a_2 \in \mathcal{A}\setminus\{a_{\max}\}$、 $a_1 \neq a_2$，使得 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H^{a_j})$、$j=1$、2。簇分解 a_1 和 a_2 是双簇分解，即 $\#a_1 = \#a_2 = 2$，且条件1.6对二者均成立。数值 λ_0 对算子 H^{a_1} 和 H^{a_2} 均为单特征值。

记作

$$\mathbf{X}^j = \mathbf{X}^{a_j}, \quad \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_{a_j} \quad \text{and} \quad n_j = \dim \mathbf{X}_j \quad \text{for} \quad j = 1, 2,$$

对于 $x\mathbf{X}^{a_j}$和 $\mathbf{X}^{a_j}$的元素也类似，亦即 $x = x^j \oplus x_j$。令 φ_j表示相应的（实）归一化特征向量 H^{a_j}， $j = 1$， 2。令

$$\mathcal{F}_j = \{g = \varphi_j(x^j) f_j(x_j) \mid f_j \in L^2(\mathbb{R}^{n_j}_{x_j})\}, \quad j = 1, 2.$$

注意， $\mathcal{F}_j$ 是 $\mathcal{G}$ 的闭子空间：$= L^2(\mathbf{X})$。令 Π 为 $\mathcal{G}$ 中投影到 $\mathcal{F}$上的正交投影，根据定义， $\mathcal{F}$是 $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ 在 $\mathcal{G}$中的闭包。令 $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{X}_1) \oplus L^2(\mathbf{X}_2)$。

为了构造相应的Grushin问题，我们需要区分两种情况：a) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$ 和b) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \{0\}$。在此我们将施加条件a)，即

$$\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2. \tag{2.24}$$

我们相信，对于第1.2节中的有限质量多体算子，该条件总是成立，但我们尚无证明。对于第1.3节中的无限质量多体算子，该条件失效的一个情形将在第 2.5 节中讨论。此外，b)的一般情形也将在那里研究。

令 $S = (S_1, S_2)$：$\mathcal{H} \to \mathcal{G}$由下式定义：对于 $f = (f_1, f_2)$，有 $Sf = S_1 f_1 + S_2 f_2$，并且

$$\begin{aligned} &S_j : L^2(\mathbf{X}_j) \to \mathcal{G}, \quad f_j \to S_j f_j = \varphi_j(x^j) \otimes f_j(x_j), \\ &S_j^* : \mathcal{G} \to L^2(\mathbf{X}_j), \quad f \to S_j^* f = \langle \varphi_j, f \rangle_j; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

这里， $\langle ., . \rangle_j$表示 $L^2(\mathbf{X}^j)$中的标量积；记号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 将用于表示 $\mathcal{G}$中的标量积。于是有

$$S^* S = 1 + \begin{pmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on } \mathcal{H} = L^2(\mathbf{X}_1) \oplus L^2(\mathbf{X}_2),$$

其中 $s_{ij} \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathbf{X}j)\ L^2(\mathbf{X}_i)\big)$, $i \neq j$由下式给出

$$s_{ij} f_j = \langle \varphi_i, \varphi_j \otimes f_j \rangle_i.$$

在下文所述命题2.7的证明中，我们将用到 $s_{ij} \in \mathcal{C}\big(L^2(\mathbf{X}j)\ L^2(\mathbf{X}_i)\big)$,$i \neq j$这一性质。该性质是以下引理的推论。

引理2.6。对所有 r， $t \in \mathbb{R}$

$$s_{ij} \in \mathcal{L}\big(L^2_r(\mathbf{X}_j), H^2_t(\mathbf{X}_i)\big) \cap \mathcal{L}\big(H^{-2}_r(\mathbf{X}_j), L^2_t(\mathbf{X}_i)\big).$$

证明。 注意到(2.20)意味着

$$\mathrm{ran}(\pi_b \pi^a) = \mathrm{ran}(\pi_b) \text{ if } \#b = 2 \text{ and } a \not\subset b. \tag{2.26}$$

我们将(2.26)应用于 $a = a_i$ 和 $b = a_j$，并进行分部积分（或者改用变量替换），得到

$$s_{ij} \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathbf{X}_j), H^2(\mathbf{X}_i)\big).$$

因此，对于 $|\alpha| \leq 2$，我们得到一个涉及偏导数 $\partial^\beta \varphi_k$、$k = 1$、2 和 $|\beta| \leq 2$ 的 $\partial^\alpha_{x_i} s_{ij}$ 公式。利用该公式、 $\partial^\beta \varphi_k$ 的多项式衰减以及界

$$|x^i| + |x^j| \geq c|x|$$

（后者是（2.20）的推论），我们确实可以得到

$$s_{ij} \in \mathcal{L}\big(L_r^2(\mathbf{X}_j), H_t^2(\mathbf{X}_i)\big).$$

由于 $s_{ij} = s_{ji}^*$ 也

$$s_{ij} \in \mathcal{L}\big(H_r^{-2}(\mathbf{X}_j), L_t^2(\mathbf{X}_i)\big).$$

□

命题2.7。假设(2.24)。那么

1） $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ （即 $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ 是闭的）。

2） $S^* = 0$ 在 $\mathcal{F}^\perp$ 上且 $S^* : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ 是双连续同构。同样，$S : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ 是双连续同构，因此 $SS^* : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 在 $\mathcal{F}$上可逆。于是有

$$S^*(SS^*)^{-1}S = 1 \ on \ \mathcal{H}. \tag{2.27}$$

3） S^*S 在 $\mathcal{H}$ 上可逆，并且

$$S(S^*S)^{-1}S^* = \Pi \ on \ \mathcal{G}. \tag{2.28}$$

证明。1). 对于 $f \in \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$，存在某个 $f_j \in L^2(\mathbf{X}j)$，使得

$$f = \varphi_1 \otimes f_1 + \varphi_2 \otimes f_2.$$

由于 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$，该分解是唯一的。我们声称， $N(f) = \|f_1\| + \|f_2\|$在 $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ 上定义了一个范数，且该范数与 $\mathcal{G}$的范数等价。显然，有

$$\|f\| \le N(f).$$

反过来，我们要证明存在一个常数 $C > 0$，使得 $N(f) \le C\|f\|$ 在 $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$上成立。若这不成立，则存在一个序列 $g_n \in \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$，使得 $\|g_n\| < 1/n$ 且 $N(g_n) = 1$。将 g_n 写成

$$g_n = \varphi_1 \otimes f_{1,n} + \varphi_2 \otimes f_{2,n}$$

其中$\|f_{1,\ n}\| + \|f_{2,\ n}\| = 1$。不失一般性，我们可以假设 $\{f_{k,n}\}$在 $L^2(\mathbf{X}_k)$ 中弱收敛到 f_k，当 $n \to \infty$时。于是有

$$f_{1,n} = \langle \varphi_1, g_n \rangle_1 - s_{12} f_{2,n} = \mathcal{O}(n^{-1}) - s_{12} f_{2,n},$$
$$f_{2,n} = \langle \varphi_2, g_n \rangle_2 - s_{21} f_{1,n} = \mathcal{O}(n^{-1}) - s_{21} f_{1,n}.$$

将第二个方程代入第一个方程，我们得到

$$f_{1,n} = \mathcal{O}(n^{-1}) + K_1 f_{1,n}, \ K_1 = s_{12}s_{21}.$$

由于 $f_{1,\ n}$ 弱收敛且 K_1 是紧的，$K_1 f_{1,\ n}$ 强收敛。这意味着 $f_{1,\ n}$ 收敛于 f_1 中的某个元素 $L^2(\mathbf{X}_1)$。类似地可以证明，$f_{2,\ n}$ 收敛于 f_2 中的某个元素 $L^2(\mathbf{X}_2)$。由于 $g_n \to 0$，这意味着

$$\varphi_1 \otimes f_1 + \varphi_2 \otimes f_2 = 0, \quad \|f_1\| + \|f_2\| = 1,$$

这是不可能的，因为 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$。这证明了范数等价性。由此可知， $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ 是闭的。

~ ~2)。令 $S : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ 作用为 S，即 $Sf = Sf$ 对于 $f \in \mathcal{H}$。由上文所示的范数等价性~可知， S 是一个双连续同构。显然， $S^* = 0$ 在 $\mathcal{F}^\perp$上成立。~ ~另一方面，我们可以将 $(S^*)|_{\mathcal{F}}$ 识别为映射 S的伴随算子，即 $(S)^*$，~这是一个双连续同构（因为 S 是双连续同构）。特别地， SS^* 在$\mathcal{F}$上可逆。至于 2) 的最后一部分，我们注意到 $P := S^*(SS^*)^{-1}S$ 在 $\mathcal{H}$ 上是双射，并且它还是一个投影， $P^2 = P$。因此 $P = 1$，从而得到（2.27）。

3)。 S^*S 在 $\mathcal{H}$ 上的可逆性由 2) 得出。令 $Q = S(S^*S)^{-1}S^*$，我们注意到

$$Q^2 = Q, \quad Q^* = Q, \quad \mathrm{ran}(Q) = \mathrm{ran}(S) = \mathcal{F},$$

表明了 $Q = \Pi$。

□

令 $\Pi' = 1 - \Pi$ 和 $H' = \Pi' H \Pi'$，定义域为 $\mathcal{D}(H') = \mathcal{D}(H) \cap \mathrm{ran}(\Pi') = \Pi' \mathcal{D}(H)$。下面证明，确实 Π' 保持 $\mathcal{D}(H)$，且 H' 是自伴的。令 $\Pi_j = S_j S_j^*$和 $\Pi_j' = 1 - \Pi_j$； $j = 1, 2$。我们回顾一下，条件1.6是针对 $a = a_1$ 和 $a = a_2$施加的。与（2.16）一样，我们记下

$$\Pi_j' I_j \Pi_j \in \mathcal{L}(\mathcal{G}); \, j = 1, 2. \tag{2.29}$$

此处及下文中，我们将 $I_j(x) = I_{a_j}(x)$简写为 $j = 1$， 2。

引理2.8。 假设 (2.24)。则

1） 算子

$$\Pi - SS^* \in \mathcal{L}\big(\mathcal{G}, H^2(\mathbf{X})\big). \tag{2.30}$$

2） Π 保持 $\mathcal{D}(H)$，且 $\Pi' H \Pi$ 和 $\Pi H \Pi'$ （最初定义在 $\mathcal{D}(H)$上）可延拓为 $\mathcal{G}$上的有界算子。

3) H' 是自伴算子。

证明。 1). 我们将使用以下恒等式

$$\Pi = S(S^*S)^{-1}S^* = SS^* + S\Big(S^*S)^{-1} - 1\Big)S^*, \tag{2.31a}$$

$$(S^*S)^{-1} - 1 = -\begin{pmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{21} & 0 \end{pmatrix} (S^*S)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.31b}$$

这些恒等式分别由命题2.7和一般恒等式推出

$$(A+1)^{-1} - 1 = -A(A+1)^{-1} = -A + A(A+1)^{-1}A,$$

r分别。陈述（2.30）由引理2.6、（2.31a）和（2.31b推出).

2). 记作 $SS^* = \Pi_1 + \Pi_2$，由于 1)，只需证明 Π_j 保持不变$\overline{\mathcal{D}}(H)$，并证明 $\Pi' H \Pi_j$ 可延拓为 $\mathcal{G}$ 上的有界算子（注意，有界性

由 $\Pi H \Pi'$ 的有界性推出）。由于 Π_j 约化 H_{a_j}，显然 Π_j保持不变 $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_{a_j})$；又由于 $\Pi' H \Pi_j = \Pi' \Pi'_j I_{a_j} \Pi_j \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$，参见（2.29），证毕。

3). 取 $g \in \mathcal{D}\big((H')^*\big) \subset \Pi' \mathcal{G}$。泛函 $\Pi' \mathcal{D}(H) \ni f \to \langle g, H' \Pi' f \rangle$ 可延拓为有界泛函，因此由 (2))， $\mathcal{D}(H) \ni f \to \langle g, H f \rangle$ 也可延拓为有界泛函。这表明 $g \in \mathcal{D}(H^*) = \mathcal{D}(H)$。由此得出 $g \in \mathcal{D}(H')$。 □

前述引理的某些部分可以推广如下。

引理 2.9. 假设 (2.24)。则

1) 对所有 $r, t \in \mathbb{R}$

$$\Pi - SS^* \in \mathcal{L}\big(L^2_r(\mathbf{X}), H^2_t(\mathbf{X})\big) \cap \mathcal{L}\big(H^{-2}_r(\mathbf{X}), L^2_t(\mathbf{X})\big).$$

2) 对所有 $t \in \mathbb{R}$，存在延拓

$$\langle x \rangle^{\rho+1} \Pi' H \Pi, \, \langle x \rangle^{\rho+1} \Pi H \Pi' \in \mathcal{L}\big(L^2_t(\mathbf{X})\big).$$

证明。 对于 1)，我们仿照引理2.8的证明。对于 2)，只需（利用 1) 可见）证明

$$\langle x \rangle^{\rho+1} \big(\Pi'_j - \Pi_i\big) I_j \Pi_j, \, \langle x \rangle^{\rho+1} \Pi_j I_j \big(\Pi'_j - \Pi_i\big) \in \mathcal{L}\big(L^2_t(\mathbf{X})\big); \, i \neq j.$$

Next 我们实施条件1.6中的 (1.24a)。由引理2.6和 (2.23) 可得 ,

$$\begin{aligned} \forall r, t \in \mathbb{R}: \quad & \Pi_i I_j \Pi_j, \, \Pi_j I_j \Pi_i \in \mathcal{L}\big(L^2_r(\mathbf{X}), L^2_t(\mathbf{X})\big) \, (i \neq j), \\ & \langle x \rangle^{\rho+1} \Pi'_j I_j \Pi_j, \, \langle x \rangle^{\rho+1} \Pi_j I_j \Pi'_j \in \mathcal{L}\big(L^2_t(\mathbf{X})\big). \end{aligned} \tag{2.32}$$

□

2.3.1 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$；情形 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 和 $\lambda_0 \notin \sigma_{\rm pp}\,(H')$

情形 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 较为简单，与情形 $\lambda_0 > \Sigma_2$相比，各种算子具有更好的映射性质。因此，我们将特别关注前一种情形。我们将证明 [Wa2，引理2.1] 的以下延拓。

引理 2.10。 设条件 *2.5* 以及 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 和 (2.24)成立。则存在$\epsilon_0 > 0$，使得 $H' = \Pi' H \Pi'$ 的本质谱满足

$$\sigma_{\rm ess}(H') \subset [\lambda_0 + \epsilon_0, \infty). \tag{2.33}$$

证明。注意

$$\lambda_0 = \Sigma_2 < \inf \sigma(H^b), \text{ for } b \notin \{a_1, a_2, a_{\max}\}. \tag{2.34}$$

特别地，我们有

$$\lambda_0 = \min \sigma_{\rm d}(H^{a_j}).$$

我们引入一个辅助哈密顿算符（其簇间动量为 $p_j = p_{a_j}$）

$$\begin{aligned}\breve{H} &= H' + p_1^2\Pi_1 + p_2^2\Pi_2,\\ \widetilde{H} &= H - \lambda_0\big(\Pi_1 + \Pi_2\big);\\ \mathcal{D}(\breve{H}) &= \mathcal{D}(\widetilde{H}) = \mathcal{D}(H).\end{aligned} \tag{2.35a}$$

这些算子相差 H-紧算子项：

$$\begin{aligned}\breve{H} &= \widetilde{H} - K_1 + K_2;\\ K_1 &= \Pi H \Pi' + \Pi' H \Pi + \Pi_1 I_1 \Pi_1 + \Pi_2 I_2 \Pi_2,\\ K_2 &= \Pi_1 H \Pi_1 + \Pi_2 H \Pi_2 - \Pi H \Pi.\end{aligned} \tag{2.35b}$$

注意，根据引理 2.9， K_1 的第一项和第二项是 H-紧的。通过重写 $\Pi_j I_j \Pi_j = \varphi_j \otimes S_j^* I_j S_j \langle\varphi_j|$，再调用（2.22）的完全类似项，可得 K_1 的第三项和第四项具有相对紧性。至于 K_2 ，我们也可以先应用引理 2.9，将第三项中 Π 的因子替换为 $SS^* = \Pi_1 + \Pi_2$ ，然后展开为四项。接下来只需考察交叉项之和

$$\Pi_1 H \Pi_2 + \Pi_2 H \Pi_1.$$

通过写成

$$\begin{aligned}\Pi_1 H \Pi_2 &= \Pi_1 I_1 \Pi_2 + H_{a_1} \Pi_1 \Pi_2,\\ \Pi_1 \Pi_2 &= \varphi_1 \otimes s_{12} \langle\varphi_2|,\end{aligned} \tag{2.36}$$

然后利用（2.32）和引理2.6，我们得出项 $\Pi_1 H \Pi_2$ 是 H-紧的。对项 $\Pi_2 H \Pi_1$ 也可作类似论证，进而得出K_2 同样是 H-紧的。

接下来，直接由定义 (2.35a) 可知， $\mathcal{F}$ 约化 $\breve{H}$。因此 $\sigma_{\text{ess}}(H') \subset \sigma_{\text{ess}}(\breve{H})$，从而只需证明将 H' 替换为 $\breve{H}$ 后的 (2.33)，进而只需证明将 H' 替换为 $\widetilde{H}$ 后的结论（根据上面证明的紧性）。

考虑 X 上满足以下条件的光滑非负函数族 $\{j_b | b \in \mathcal{A}, \#b = 2\}$ ：对于某个 $c > 0$:

$$\sum_{\#b=2} j_b(x)^2 = 1, \tag{2.37a}$$

$$|x^a| j_b(x) \geq c|x| j_b(x) \text{ for } a \not\subset b \text{ and } |x| \geq 1, \tag{2.37b}$$

$$|\partial^\alpha j_b(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{-|\alpha|} \text{ for all } \alpha \in \mathbb{N}_0^{\dim \mathbf{X}}. \tag{2.37c}$$

利用这一函数族，我们有

$$H = \sum_{\#a=2} j_a H_a j_a + \sum_{\#a=2} I_a j_a^2 - \sum_{\#a=2} |\nabla j_a|^2 = \sum_{\#a=2} j_a H_a j_a + K, \tag{2.38}$$

其中 K 是 H-紧的。

对于 $a \neq a_j$、 $j = 1$、2，由（2.34）可知，对于某个 $\epsilon_0' > 0$，$\inf \sigma(H_a) = \inf \sigma(H^a) \geq \lambda_0 + \epsilon_0'$。因此，

$$\sum_{\#a=2, a\neq a_j, j=1,2} j_a H_a j_a \geq (\lambda_0 + \epsilon_0') \sum_{\#a=2, a\neq a_j, j=1,2} j_a^2. \tag{2.39}$$

由于 λ_0 是 H^{a_j}、 $j = 1$、2 的最低特征值，存在 $\epsilon_1 > 0$ 使得

$$\Pi'_j H_{a_j} \Pi'_j \geq (\lambda_0 + \epsilon_1)\Pi'_j.$$

因此，对于 $a = a_j$、 $j = 1$、2，我们得到（在最后一步中假设 $\lambda_0 + \epsilon_1 \leq 0$，并利用 $p_j^2 \geq 0$）

$$\begin{aligned} j_{a_j} H_{a_j} j_{a_j} &\geq (\lambda_0 + \epsilon_1) j_{a_j} \Pi'_j j_{a_j} + j_{a_j} H_{a_j} \Pi_j j_{a_j} \\ &\geq (\lambda_0 + \epsilon_1) j_{a_j}^2 + \lambda_0 j_{a_j} \Pi_j j_{a_j}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

由（2.37a）和（2.37b）可知，算子 $\Pi_j j_{a_j}^2 - \Pi_j$是 H-紧的。利用（2.37c），通过泰勒展开可得 $[j_{a_j}, \Pi_j]\langle x\rangle$是有界的（参见（3.42））。因此我们还得到

$$K'_j := \lambda_0 \big(j_{a_j} \Pi_j j_{a_j} - \Pi_j \big) \text{ is } H\text{-compact.} \tag{2.41}$$

我们将（2.40）写为

$$j_{a_j} H_{a_j} j_{a_j} - \lambda_0 \Pi_j \geq (\lambda_0 + \epsilon_1) j_{a_j}^2 + K'_j, \ j = 1, 2. \tag{2.42}$$

令 $\epsilon_0 =$ 最小于$\{\epsilon'_0, \epsilon_1\}$。于是由（2.37a）、（2.38）可推出 (2.39) and (2.42) that

$$\widetilde{H} \geq (\lambda_0 + \epsilon_0) + \widetilde{K}, \tag{2.43}$$

其中 $\widetilde{K} = K + K'_1 + K'_2$。

由于 H-紧的，is 由 (2.43) 和韦伊定理 [RS, Theorem XIII.14] 可知

$$\sigma_{\rm ess}(\widetilde{H}) \subset [\lambda_0 + \epsilon_0, \infty).$$

□

注2.11。 通过适当扩大投影 Π，使其包含对应于阈值 $\lambda^a \in [\Sigma_2, \Sigma_3 - \epsilon_0)$ 的所有阈值本征态的张成空间，对于任意给定的 $\epsilon_0 > 0$，我们可以确保 $\sigma_{\rm ess}(H')$ $\subset [\Sigma_3 - \epsilon_0, \infty)$。此处 $H' = \Pi' H \Pi'$ 与前文相同，证明实质上与引理 2.10 的证明相同。这种“减去”所有低能二簇通道的技巧仅适用于低于 Σ_3 的能量。为使表述简洁，我们倾向于将双簇阈值 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 一视同仁，不区分情形 $\lambda_0 \in (\Sigma_2, \Sigma_3)$ 和 $\lambda_0 > \Sigma_3$。事实上，无论哪种情形，我们的结果都相同。

从现在起假设

$$\lambda_0 \text{ is not an eigenvalue of } H'. \tag{2.44}$$

因此，由引理 2.10 可选择 $\delta > 0$ 使得 $\sigma(H') \cap \{|z - \lambda_0| \leq \delta\} = \emptyset$。根据命题 2.1

$$R(z) = E(z) - E_+(z) E_{\mathcal{H}}(z)^{-1} E_-(z), \tag{2.45}$$

其中，此情形下的量 (2.4a)–(2.4d) 关于 $\{|z - \lambda_0| < \delta\}$ 是解析的 .

让我们分析 $E_{\mathcal{H}}(z)$ 的型式。对于 $f \in \mathcal{F}$、 $f = \varphi_1 \otimes f_1 + \varphi_2 \otimes f_2$，我们可以写成

$$Hf = \lambda_0 f + (p_1^2 + I_1)(\varphi_1 \otimes f_1) + (p_2^2 + I_2)(\varphi_2 \otimes f_2),$$

回忆 $p_j = p_{a_j}$ 和 $I_j = I_{a_j}$, $j = 1, 2$。因此，对于 i, j, $k \in \{1, 2\}$

$$S_k^*(H - z)S_k = p_k^2 + \lambda_0 - z + W_k(x_k), \tag{2.46a}$$
$$S_i^*(H - z)S_j = \check{s}_{ij}(z) + W_{ij}, \tag{2.46b}$$
$$S_i^* H R'(z) H S_j = -K_{ij}(z), \tag{2.46c}$$

其中

$$\check{s}_{ij}(z) = \langle \varphi_i, \varphi_j \otimes (p_j^2 + \lambda_0 - z)\cdot \rangle_i, \tag{2.47a}$$
$$W_{ij} = \langle \varphi_i, I_j \varphi_j \otimes \cdot \rangle_i, \tag{2.47b}$$
$$W_k(\cdot) = W_{kk} = \langle \varphi_k, I_k \varphi_k \rangle_k(\cdot), \tag{2.47c}$$
$$K_{ij}(z) = -\langle \varphi_i, I_i R'(z) I_j(\varphi_j \otimes \cdot) \rangle_i. \tag{2.47d}$$

引入 $\mathcal{H}^2 = H^2(\mathrm{X}_1) \oplus H^2(\mathrm{X}_2)$ 后，算子 $E_{\mathcal{H}}(z)$ 可表示为：$\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}$。

$$E_{\mathcal{H}}(z) = z - \lambda_0 - \begin{pmatrix} -\Delta_{x_1} + W_1(x_1) + K_{11}(z) & \check{s}_{12}(z) + W_{12} + K_{12}(z) \\ \check{s}_{21}(z) + W_{21} + K_{21}(z) & -\Delta_{x_2} + W_2(x_2) + K_{22}(z) \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

显然，对于 $i \neq j$, $\check{s}_{ij}(z) = s_{ij}(\lambda_0 - z + p_j^2)$，因此由引理2.6可知，对于 $i \neq j$，$\check{s}_{ij}(z)$ 是有界的，事实上还是多项式衰减的（在 λ_0 附近关于 z 一致）。在下文中，型式为 $b_{ij} : L^2(\mathrm{X}j) \to L^2(\mathrm{X}_i)$ 的算子被称为多项式衰减的，如果对于所有 r、$t \in \mathbb{R}$

$$b_{ij} \in \mathcal{C}\big(H_r^2(\mathbf{X}_j), L_t^2(\mathbf{X}_i)\big) \cap \mathcal{C}\big(L_r^2(\mathbf{X}_j), H_t^{-2}(\mathbf{X}_i)\big).$$

我们注意到，算子 W_{12} 和 W_{21} 也是多项式衰减的。若算子 B 作用于 $\mathcal{H}$，且其矩阵元 $b_{ij} : L^2(\mathrm{X}j) \to L^2(\mathrm{X}_i)$是多项式衰减的，则称该算子是多项式衰减的。

我们断言，$K_{12}(z)$ 和 $K_{21}(z)$ 也是多项式衰减的，事实上在 λ_0 附近关于 z 一致。为此，只需（利用对称性）考虑 $K_{12}(z)$，并且只需证明对于任意 $s \geq 0$，$K_{12}(z) \in \mathcal{L}\big(L_{-s}^2(\mathrm{X}_2)\ L_s^2(\mathrm{X}_1)\big)$。因此，固定$s \geq 0$。利用式（2.16）的论证以及簇束缚态的多项式衰减性质进行简单考察可知，只需验证

$$\langle x^1 \rangle^{-2s} \langle x \rangle^s R'(z) \langle x \rangle^s \langle x^2 \rangle^{-2s} \text{ is uniformly bounded near } \lambda_0. \tag{2.49}$$

回顾一下，对于足够小的 $\delta > 0$, $\{z \| z - \lambda_0| \leq \delta\}$ 属于 H' 的预解集，参见 (2.44)。我们还记录以下基本估计，

$$\langle x + y \rangle^t \leq 2^{|t|/2} \langle x \rangle^{|t|} \langle y \rangle^t, \tag{2.50a}$$
$$\langle x \rangle \leq C(\langle x^1 \rangle + \langle x^2 \rangle) \leq 2C \langle x^1 \rangle \langle x^2 \rangle. \tag{2.50b}$$

进而，通过插值并利用 (2.50b)，断言 (2.49) 可由下式推出

$$\langle x^2 \rangle^t R'(z) \langle x^2 \rangle^{-t} \text{ and } \langle x^1 \rangle^{-t} R'(z) \langle x^1 \rangle^t \text{ are uniformly bounded;} \quad t = 2s. \tag{2.51}$$

我们只对第一个表达式给出界。采用引理 2.10 证明中的记号，将其表示为

$$R'(z) = \breve{R}(z)\Pi', \ \breve{R}(z) = (\breve{H} - z)^{-1}, \tag{2.52}$$

我们首先给 $\langle x^2\rangle^t \breve{R}(z) \langle x^2\rangle^{-t}$ 取一个界。因此，我们希望对带有 $\kappa = 1$ 的 $\langle \kappa x^2\rangle^t \breve{R}(z) \langle \kappa x^2\rangle^{-t}$ 取界；为此，只需对任意小的 $\kappa > 0$ 给这个量取界。我们证明，当 z 在 λ_0 附近时，这个界是一致的。与引理 2.10 的证明一样

$$\breve{H} = H - \lambda_0(\Pi_1 + \Pi_2) - K_1 + K_2. \tag{2.53}$$

令 $\breve{H}_{\kappa,\ t} = \langle \kappa x^2\rangle^t \breve{H} \langle \kappa x^2\rangle^{-t}$ ，由 (2.53) 得

$$\breve{H}_{\kappa,t} = \breve{H} + \mathcal{O}(\kappa)(\breve{H} - \mathrm{i}).$$

例如，利用泰勒展开和 (2.50a) 即可看出，

$$\begin{aligned} \langle \kappa x^2\rangle^t \Pi_1 \langle \kappa x^2\rangle^{-t} - \Pi_1 &= [\langle \kappa \pi^2 x\rangle^t - \langle \kappa \pi^2 x_1\rangle^t, \Pi_1] \langle \kappa x^2\rangle^{-t} \\ &= \kappa \mathcal{O}\big(\langle \kappa \pi^2 x_1\rangle^{t-1}\big) \langle \kappa x_1\rangle^{-t} \\ &= \mathcal{O}(\kappa). \end{aligned} \tag{2.54}$$

我们可以类似地处理项 K_1 和 K_2。因此

$$\big(\breve{H}_{\kappa,t} - z\big)\breve{R}(z) = 1 + \mathcal{O}(\kappa)(\breve{H} - \mathrm{i})\breve{R}(z)$$

对 $|z - \lambda_0| \le \delta$ 可逆，且对较小的 $\kappa > 0$ 也可逆。这表明 ($\breve{H}_{\kappa,\ t} - z$)$^{-1}$ 一致有界，从而达成了我们的第一个目标。第二个目标（参见 (2.52)）是对 $\langle x^2\rangle^t \Pi' \langle x^2\rangle^{-t}$ 取界；事实上，由于引理 2.9 1) 和 (2.54)， $\langle x^2\rangle^t \Pi \langle x^2\rangle^{-t}$ 有界。因此，我们证明了 (2.51) 的合理性，并由此表明 $K_{12}(z)$ 在 λ_0 附近一致多项式衰减。

可以用类似的方法证明

$$\langle x_j\rangle^{\rho_1} K_{jj}(z) \langle x_j\rangle^{\rho_2} \text{在 } L^2(\mathbf{X}_j) \text{ 上对 } \rho_1 + \rho_2 \le 2\rho + 2. \text{ 一致有界} \tag{2.55}$$

事实上，我们可以使用与 (2.23) 和引理 2.9 2) 相关的 (2.16) 的一个改进形式。注意此处的泰勒展开 $I_j^{(1)}(x) = I_j^{(1)}(x_j) + \mathcal{O}(\langle x^j\rangle^{\rho+2}) \langle x_j\rangle^{-\rho-1}$，参见 (2.50a)，进而对所有 $s \in \mathbb{R}$ 以及 $\rho' \in \{\rho_1, \rho_2\}$ 得到以下界，

$$\Pi_j \langle x_j\rangle^{\rho'} I_j \Pi', \quad \Pi' I_j \langle x_j\rangle^{\rho'} \Pi_j \in \mathcal{L}\big(L^2_s(\mathbf{X}), L^2_{\rho-\rho'+1+s}(\mathbf{X})\big).$$

将这些界与 (2.50a) 和 (2.51) 的以下推论结合起来，我们得到 (2.55)，

$$\langle x\rangle^s \breve{R}(z) \Pi' \langle x\rangle^{-s} \text{ is bounded for all } s \in \mathbb{R} \text{ (uniformly near } \lambda_0). \tag{2.56}$$

根据上述讨论和 (2.22)，最终得到 (2.48) 的简化版本：

命题 2.12. 设条件 *2.5* 满足 $\lambda_0 = \Sigma_2$，并且满足 (2.24) 和 (2.44)。作为一个有界算子 $E_{\mathcal{H}}(z) : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}$，有

$$E_{\mathcal{H}}(z) \equiv z - \lambda_0 - \begin{pmatrix} -\Delta_{x_1} + W_1(x_1) + K_{11}(z) & 0 \\ 0 & -\Delta_{x_2} + W_2(x_2) + K_{22}(z) \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

其中，“≡”表示模去一个关于 z 在 λ_0 附近全纯依赖的多项式衰减项后相等。我们有

$$W_j(x_j) - I_j^{(1)}(x_j) \in \mathcal{L}\big(H_s^2(\mathbf{X}_j), L^2_{\rho+1+s}(\mathbf{X}_j)\big) \text{ for } s \in \mathbb{R}, \quad (2.58a)$$

$$W_j(x_j) - I_j^{(1)}(x_j) \in \mathcal{C}\big(H_s^2(\mathbf{X}_j), L_t^2(\mathbf{X}_j)\big) \text{ for } s \in \mathbb{R},\ t < \rho + 1 + s, \quad (2.58b)$$

$$K_{jj}(z) \in \mathcal{L}\big(L_s^2(\mathbf{X}_j), L^2_{2\rho+2+s}(\mathbf{X}_j)\big) \text{ for } s \in \mathbb{R}. \quad (2.58c)$$

此外，算子 $K_{jj}(z)$ 关于 z 全纯依赖，且势 W_j 是 p_j^2-紧的，其奇异性位于一个有界集中。

注2.13。 虽然并非必不可少，但我们更倾向于采用一种基于型而非算子的命题 2.12 版本。因此，我们将 $E_{\mathcal{H}}(z)$ 视为一个算子$E_{\mathcal{H}}(z)$: $H^1(\mathrm{X}_1) \oplus H^1(\mathrm{X}_2) \to H^{-1}(\mathrm{X}_1) \oplus H^{-1}(\mathrm{X}_2)$。现在，若对所有 $r, t \in \mathbb{R}$，算子 b_{ij}: $L^2(\mathrm{X}_j) \to L^2(\mathrm{X}_i)$ 都满足.....则称其为多项式衰减

$$b_{ij} \in \mathcal{C}\big(H_r^1(\mathbf{X}_j), H_t^{-1}(\mathbf{X}_i)\big).$$

还要注意，展开式 (2.58a) 应解释为属于空间 $\mathcal{L}\big(H_s^1(\mathrm{X}_j)\ H^{-1}_{\rho+1+s}(\mathrm{X}_j)\big)$, $s \in \mathbb{R}$，而非文中所述的空间（(2.58b) 也同样如此）。作为对比，请注意 $I_j^{(1)}(x_j) \in \mathcal{L}\big(L_s^2(\mathrm{X}_j)\ L^2_{\rho+s}(\mathrm{X}_j)\big), s \in \mathbb{R}$。作此修改后，(2.57) 仍然成立。此外，利用预解式方程很容易证明，无论对 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 采用算子解释还是型式解释，其零空间 $\ker E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 都相同。

2.4 情形 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$

我们简要讨论为处理情形 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$ 而对前两节所需作的修改。

2.4.1 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$；非重数情形

为简单起见，我们假设 $m = 1$ 处于第2.2节的设定中。相应的特征函数记为 φ（而不是 φ_1），并采用记号 $\langle\varphi|\cdot\rangle_0 = \langle\varphi, \cdot\rangle_0 = \langle\varphi, \cdot\rangle_{L^2(\mathbf{X}^{a_0})}$。我们沿用 [Wa2]，为简单起见，假设 λ_0 是 H' 的单特征值，并引入相应的归一化特征函数 ψ，($H' - \lambda_0)\psi = 0$。令 $I_0 = I_{a_0}$。

现在，$\mathcal{H} = L^2(\mathrm{X}_{a_0}) \oplus \mathbb{C}$，且 S: $\mathcal{H} \to \mathcal{G} = L^2(\mathrm{X})$ 由下式给出

$$S(f, c) = \varphi \otimes f + c\psi.$$

我们将到这个新 S 的值域上的正交投影 SS^* 记为$1 - \Pi''$（第2.2节中的 S 投影记为 $1 - \Pi'$），并引入

$H'' = \Pi'' H \Pi''$ 作用于希尔伯特空间 $\Pi''\mathcal{G}$上。根据构造， λ_0 不是H''的特征值。像之前一样，利用（2.4a）–（2.4d），我们得到（2.19），此时

$$
\begin{aligned}
-E_{\mathcal{H}}(z) &= -S^*\big(z - H + HR''(z)H\big)S \\
&= \begin{pmatrix} \Big(\lambda_0 - z + p_{a_0}^2 + \langle\varphi|I_0|\varphi\otimes\cdot\rangle_0 - \langle\varphi|I_0R''(z)I_0|\varphi\otimes\cdot\rangle_0\Big) & \langle\varphi, I_0\psi\rangle_0 \\ \langle I_0\psi, \varphi\otimes\cdot\rangle & \lambda_0 - z \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Let

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{H} = H - \lambda_0\Pi, \quad \Pi = \varphi\otimes\langle\varphi|\cdot\rangle_0, \\
&\breve{H} = \widetilde{H} - \breve{K}; \\
&\qquad \breve{K} = \Pi I_0 + I_0\Pi - \Pi I_0\Pi + \lambda_0|\psi\rangle\langle\psi|.
\end{aligned}
\tag{2.59a}
$$

注意到， K 是 H-紧的。该构造的动机来自以下直和分解。

$$
\breve{H} = H'' + p_{a_0}^2\Pi; \; H'' = \Pi''H\Pi''. \tag{2.59b}
$$

预解式的基本结构如下所示。

$$
\begin{aligned}
&R''(z) = \breve{R}(z) - (p_{a_0}^2 - z)^{-1}\Pi - z^{-1}|\psi\rangle\langle\psi|, \\
&R''(z) = \Pi''\breve{R}(z)\Pi'' = \Pi''\breve{R}(z) = \breve{R}(z)\Pi''; \quad \breve{R}(z) = (\breve{H} - z)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.59c}
$$

我们将证明 $\psi \in H^2_\infty$(X)（见定理3.12），进而推出 $\breve{R}(z)$和 Π'' 在 λ_0 附近具有“良好”性质（见注 3.21）。

2.4.2 $\lambda_0 \in \sigma_{\rm pp}(H')$；重根情形

在第 2.3.1 小节的情形（2.44）不满足且不施加该小节中的条件 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 时，我们对第 2.3 节的设置作相应调整。特别地，（2.24）得到满足。

为简便起见，假设 λ_0 是 H'的单特征值。我们引入相应的归一化特征函数（$H' - \lambda_0$）$\psi = 0$。现在， $\mathcal{H} = L^2(\mathrm{X}_1) \oplus L^2(\mathrm{X}_2) \oplus \mathbb{C}$，并且 $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G} = L^2(\mathrm{X})$表示为

$$
S(f_1, f_2, c) = \varphi_1\otimes f_1 + \varphi_2\otimes f_2 + c\psi.
$$

我们按照前一小节中的方式，用这个 S 引入 Π''，并再次令$H'' = \Pi''H\Pi''$。注意到 $\Pi'' = 1 - \Pi - |\psi\rangle\langle\psi| = \Pi' - |\psi\rangle\langle\psi|$，其中 Π 按第 2.3 节中的方式给出。现在我们得到（2.19），其中

$$
E_{\mathcal{H}}(z) = S^*\big(z - H + HR''(z)H\big)S),
$$

并且，该算子具有与前一小节中类似的表示形式，但现在采用 3×3-分块表示 $(e_{ij})_{i,\ j\le 3}$而不是其中给出的 2×2-分块表示。这里，$(e_{ij})_{i,\ j\le 2}$ 按照命题 2.12 给出（以 $R'(z)$ 替换为$R''(z)$）， $e_{33} = z - \lambda_0$、 $e_{i3} = -\langle\varphi_i, I_i\psi\rangle_i$和 $e_{3i} = e_{i3}^* = \langle e_{3i}|$; $i = 1$、2。(2.35a) 的对应形式为

$$
\begin{aligned}
&\breve{H} = H'' + p_1^2\Pi_1 + p_2^2\Pi_2, \\
&\widetilde{H} = H - \lambda_0\big(\Pi_1 + \Pi_2\big); \\
&\mathcal{D}(\breve{H}) = \mathcal{D}(\widetilde{H}) = \mathcal{D}(H).
\end{aligned}
\tag{2.60a}
$$

这些算子相差 H-紧算子项，参见 (2.35b)：

$$\begin{aligned} \breve{H} &= \widetilde{H} - K_1 + K_2; \\ K_1 &= \Pi H \Pi' + \Pi' H \Pi + \Pi_1 I_1 \Pi_1 + \Pi_2 I_2 \Pi_2 + \lambda_0 |\psi\rangle\langle\psi|, \\ K_2 &= \Pi_1 H \Pi_1 + \Pi_2 H \Pi_2 - \Pi H \Pi. \end{aligned} \tag{2.60b}$$

预解式的基本结构如下所示。

$$\begin{aligned} &R''(z) = \breve{R}(z) - (p_1^2 \Pi_1 + p_2^2 \Pi_2 - z)^{-1} \Pi - z^{-1} |\psi\rangle\langle\psi|, \\ &R''(z) = \Pi'' \breve{R}(z) \Pi'' = \Pi'' \breve{R}(z) = \breve{R}(z) \Pi''; \quad \breve{R}(z) = (\breve{H} - z)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.60c}$$

同样，我们对 ψ 具有良好的衰减性质，参见定理3.12和注3.20，这进而在 λ_0 附近给出了 $R(z)$ 的良好性质，参见注 3.21。

2.5 多重双簇情形，$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \{0\}$

条件（2.24）可能不满足。我们首先给出一个例子（这是我们所知的唯一一个例子）。它由一个原子型二体薛定谔算子和一个固定在原点、具有无限质量的第三个粒子构成（属于第1.3节的 N-体情形框架）：

$$H = \sum_{j=1}^{2} (-\Delta_{x^j} + V_j(x^j)) + V_{12}(x^1 - x^2), \tag{2.61}$$

其中 $x^j \in \mathbb{R}^n$。这里，$x = (x^1, x^2)$ 被用作 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的全局坐标。令 λ_0 为 H 的最低阈值。假设该阈值是二重的，并且由 H_j 的最低特征值达到

$$H_j = -\Delta_{x^j} + V_j(x^j), \quad j = 1, 2.$$

在这种情况下，条件 (2.24) 不满足。事实上，设 $\varphi_j(x^j)$ 为与 λ_0 相关联的 H_j 的特征函数。那么显然有

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \operatorname{span}\{\varphi_1(x^1)\varphi_2(x^2)\}.$$

2.5.1 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \{0\}$；一种通用方法

我们讨论一种易于推广到双簇阈值 λ_0 任意重数情形的方法。

我们定义

$$\mathcal{H} = \big\{ f \in L^2(\mathbf{X}_1) \oplus L^2(\mathbf{X}_2) \mid f \perp \ker S^* S \big\}, \tag{2.62}$$

其中该 S =(S_i)的分量由(2.25)给出。根据引理2.6，空间ker S^*S 是有限维的，由分量属于 H^2_∞(X$_i$)的向量组成。由假设，dim(ker S^*S) ≥ 1。显然，S : $\mathcal{H} \to \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G} = L^2$(X)是连续同构。按照命题2.7的证明中的反证法，我们推得事实上 $S : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ 是双连续的。特别地，$\mathcal{F}$ 是闭的

在 $\mathcal{G}$中，并相应地令 Π、 Π'、 H' 和 $R'(z)$如第2.1节中所给出。若我们将 S 视为从更大的空间 $L^2(\mathbf{X}_1) \oplus L^2(\mathbf{X}_2)$出发的映射（如(2.62)中所示），记号 S^*g、 $g \in \mathcal{G}$ 可能会显得含混。然而，事实上并非如此，因为此时$\ker S^*S$，所以 $S^*g \in \mathcal{H}$。因此，引理2.8和引理2.9的结论仍然成立，公式(2.48)再次适用。

和之前一样，我们希望在 λ_0 的邻域内使用 (2.48)。这里假设 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 和 (2.44)。那么当然可以在 (2.48) 中令 $z = \lambda_0$，并得到与命题 2.12 和注2.13 中相同的公式。相应地，我们将算子 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 视为从 $\big(H^2(\mathbf{X}_1)$ 到 $\oplus H^2(\mathbf{X}_2)\big) \cap \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 的算子，或者视为一个映射

$$\big(H^1(\mathbf{X}_1) \oplus H^1(\mathbf{X}_2)\big) \cap \mathcal{H} \to \{f \in H^{-1}(\mathbf{X}_1) \oplus H^{-1}(\mathbf{X}_2) \mid f \perp \ker S^*S\}.$$

如果 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$，我们需要修改 S 和 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 的构造。可以按照小节 2.4.2中的思路完成。最后，令 P_0 表示 $L^2(\mathbf{X}_1) \oplus L^2(\mathbf{X}_2)$ 中到 $\ker S^*S$ 的正交投影，研究 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0) + P_0$ 在 $L^2(\mathbf{X}_1) \oplus L^2(\mathbf{X}_2)$ 上是方便的（而不是在 $\mathcal{H}$ 上研究 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$）。这是因为我们在 $L^2(\mathbf{X}_1) \oplus L^2(\mathbf{X}_2)$ 上有 $\mathrm{diag}(h_1, h_2)$ 的一个“良好拟逆”。

在第4.3节中，我们将看到上述思想在第1章介绍的物理模型背景下意味着什么。这将是一种不假设 $\lambda_0 = \Sigma_2$的一般性处理。

第3章

H' 在 λ_0附近的谱分析

本章的大部分内容中，我们假设条件1.5和2.4成立。我们将为 Grushin˘方法中出现的算子 H' 证明各种 N体预解估计（更准确地说，是为下文定义的算子 H 证明这些估计）。该分析与[AIIS], 有重叠，特别是建立在适当的Mourre估计之上。尽管我们的处理秉承了 [AIIS] 的思想，但在其他方面避免了'经典Mourre理论'[Mo、Je、JMP、Wa1]。多重双簇情形可以用类似的方法处理，不过记号上更为复杂，见注记3.20–3.22。

回顾第2.2节中的记号 $I_0 = I_{a_0}$ 和 $p_0 = p_{a_0}$。我们对 H 作如下修改（注意它们与(2.35a)和(2.35b)的相似性）：

$$\begin{aligned} \widetilde{H} &= H - \lambda_0 \Pi, \\ \breve{H} &= \widetilde{H} - \breve{K}; \\ \breve{K} &= \Pi I_0 + I_0 \Pi - \Pi I_0 \Pi. \end{aligned} \tag{3.1a}$$

˘注意， K 是 H-紧的。这一构造的动机来自以下直和分解。

$$\breve{H} = H' + p_0^2 \Pi; \; H' = \Pi' H \Pi'. \tag{3.1b}$$

预解式的基本结构如下所示。

$$\begin{aligned} &R'(z) = \breve{R}(z) - (p_0^2 - z)^{-1}\Pi, \\ &R'(z) = \Pi' \breve{R}(z) \Pi' = \Pi' \breve{R}(z) = \breve{R}(z)\Pi'; \quad \breve{R}(z) = (\breve{H} - z)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.2a}$$

注意，(3.2a) 给出了 $R'(z)$ 在 λ_0 附近的"良好估计"，前提是我们能够证明 $\breve{R}(z)$ 在 λ_0 附近具有"良好估计"。本章的目标是证明后者，这或多或少对应于 (3.79) 和推论3.19，具体表述如下：假设 $\lambda_0 \notin \sigma_{\rm pp}(\breve{H})$。那么存在强弱星极限

$$\text{s-w}^\star\text{-}\lim_{\epsilon \to 0_+} \breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}\epsilon) = \breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{1/2}(\mathbf{X}), \mathcal{B}^*_{1/2}(\mathbf{X})), \tag{3.2b}$$

并且，如果对于某个给定的 $f \in L^2_s$，存在某个 $s > 1/2$，使得 $\breve{R}(\lambda_0 + \mathrm{i}0) f = \breve{R}(\lambda_0 - \mathrm{i}0) f$，那么

$$\breve{R}(\lambda_0 + \mathrm{i}0) f = \breve{R}(\lambda_0 - \mathrm{i}0) f \in L^2_{s-1}. \tag{3.2c}$$

我们将证明，在 λ_0 附近， H 满足 Mourre估计，并证明 λ_0 不可能是 H 的特征值的累积点（这些特征值与 H' 的特征值相同）。如果 λ_0 不是特征值，那么在 λ_0 附近，H 的预解式满足极限吸收原理和一些微局部估计。
如果 λ_0 是 H 的特征值，则相应的特征函数呈多项式衰减。我们不假设 $\lambda_0 < \Sigma_3$。

多重双簇阈值的情形可以类似处理，本文不再详细讨论。有关讨论请参见注 3.20；与(3.2a)–(3.2c)类似的结果请参见(4.37a)–(4.37c)。

3.1 Mourre估计

我们将使用由Graf [Gr] 构造的向量场及其相应的共轭算子族，参见[Sk1]–[Sk3] 和 [IS1]。该向量场满足以下性质，参见 [Sk3，引理 4.3]。

引理 3.1。 在$\mathbf{X}$ 上存在一个具有对称导数 $\tilde{\omega}_*$的光滑向量场 $\tilde{\omega}$， 以及一个以 $a \in \mathcal{A}$ 为索引、由光滑函数$0 \le \tilde{q}_a \le 1$组成的单位分解 $\{\tilde{q}_a\}$， 使得对于某些正常数 r_1 和 r_2

(1) $\tilde{\omega}_*(x) \ge \sum_a \pi_a \tilde{q}_a$.(2) $\tilde{\omega}^a(x) = 0$ 若 $|x^a| < r_1$.(3) $|x^b| > r_1$ 在 supp($\tilde{q}_a$) 若 $b \not\subset a$.(4) $|x^a| < r_2$ 在 supp($\tilde{q}_a$)。

(5) 对于所有的 $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\dim \mathbf{X}}$和 $k \in \mathbb{N}_0$， 存在 $C \in \mathbb{R}$:

$$|\partial_x^\alpha \tilde{q}_a| + |\partial_x^\alpha (x \cdot \nabla)^k \big(\tilde{\omega}(x) - x\big)| \le C.$$

对于每个 $a \in \mathcal{A}$， 都有一个类似的向量场，记为 $\tilde{\omega}^a$。根据这些向量场的构造，我们得到一个将要使用的关系（参见[Sk2，附录A] 中关于第1.2.1节模型的证明，另见 [Sk6，第5]节）。

对于任意 $\delta > 0$， 存在 $R = R(\delta) > 1$， 使得对于所有 $a \in \mathcal{A}$

$$\tilde{\omega}(x) = x_a + \tilde{\omega}^a(x^a) \text{ for all } x \in \mathbf{Y}, \tag{3.3}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{a,\delta,\widetilde{R}} := \{x \in \mathbf{X} \mid |x| > \widetilde{R},\, |x^b| > \delta |x| \text{ if } b \not\subset a\}.$$

考虑缩放后的向量场 $\tilde{\omega}_R^a(x) := R\tilde{\omega}(x^a/R)$， $R \ge 1$，显然，（3.3）的一个直接推论是，缩放后的向量场也满足类似的结论，

$$\tilde{\omega}_R(x) = x_a + \tilde{\omega}_R^a(x^a) \text{ for all } x \in \mathbf{Y}_{a,\delta,R\widetilde{R}},\ R \ge 1. \tag{3.4}$$

现在，如 [Sk3]，中所述，我们引入

$$A_R = \tfrac{1}{2}\big(\tilde{\omega}_R(x) \cdot p + p \cdot \tilde{\omega}_R(x)\big),\ R \ge 1,$$

以及一个函数 $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，定义为

$$d(\lambda)=\begin{cases}\inf_{\tau\in\mathcal{T}(\lambda)}(\lambda-\tau),\ \mathcal{T}(\lambda):=\mathcal{T}\cap]-\infty,\lambda]\neq\emptyset,\\ 1,\ \mathcal{T}(\lambda)=\emptyset.\end{cases}\tag{3.5}$$

这些工具导出了如下 Mourre估计（关于另一个N体 Mourre估计，参见 [PSS] ）。我们参见 [Sk3, 推论 4.5] ，并注意到证明所需的所有输入均已在引理 3.1 中陈述。

引理 3.2. 对于所有 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和 $\epsilon>0$，存在 $R_0\geq 1$，使得对于所有 $R\geq R_0$，存在 λ 的一个邻域 $\mathcal{V}$ 以及作用于 L^2 上的紧算子 K，使得

$$f(H)\mathrm{i}[H,A_R]f(H)\geq f(H)\{2d(\lambda)-\epsilon-K\}f(H)\ \textit{for all real}\ f\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{V}).\tag{3.6}$$

对于某个正的光滑函数 r，我们可以将 $\tilde{\omega}=\nabla r^2/2$ 写成这样，其中 r^2-x^2 有界，参见 [De3]。

我们方法的一个基本组成部分是算子

$$B=\tfrac{1}{2}\big(\omega(x)\cdot p+p\cdot\omega(x)\big)\in\mathcal{L}(H^1,L^2),\tag{3.7}$$

其中 $\omega=\omega_R=\tilde{\omega}_R/r_R$、$r_R(x)=Rr(\frac{x}{R})$。注意到 $\tilde{\omega}_R=\nabla r_R^2/2$，从而 $\omega_R=\nabla r_R$。我们将省略对参数 R 的依赖（该参数最终取为一个依赖于 λ 的大数）。特别地，我们会稍微滥用记号，例如写成 r，而不是重标度后的版本 r_R。使用记号 $\mathbf{D}$ 表示海森堡导数 $\mathrm{i}[H,\cdot]$，我们注意到以下计算 $2B=\mathbf{D}r$、$A=r^{1/2}Br^{1/2}$ 以及（形式上）

$$\mathbf{D}B=r^{-1/2}\big(\mathbf{D}A-2B^2\big)r^{-1/2}+\mathcal{O}(r^{-3}).\tag{3.8}$$

此处函数

$$\mathcal{O}(r^{-3})=\tfrac{1}{2}\omega\cdot(\nabla^2 r)\omega/r^2=r^{-3}v(x),$$

其中 v 属于 X 上满足以下条件的光滑函数代数 $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathrm{X})$

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}_0^{\dim\mathbf{X}}\quad\forall k\in\mathbb{N}_0:|\partial_x^{\alpha}(x\cdot\nabla)^k v(x)|\leq C_{\alpha,k}.$$

另请注意，函数 $r^2-x^2\in\mathcal{F}$。显然，对于任意 $a\neq a_{\min}$，$\mathcal{F}(\mathrm{X})\supset\mathcal{F}(\mathrm{X}^a)$。$\mathbf{D}A$ 的精确计算为

$$\mathbf{D}A=2p\tilde{\omega}_*\big(\tfrac{x}{R}\big)p-\big(4R^2\big)^{-1}\big(\triangle(\nabla\cdot\tilde{\omega})\big)\big(\tfrac{x}{R}\big)-R\tilde{\omega}\big(\tfrac{x}{R}\big)\cdot\nabla V.\tag{3.9}$$

特别地

$$\mathbf{D}A=\mathrm{i}[H,A]=\sum_{|\alpha\leq 2}v_\alpha p^\alpha;\quad v_\alpha\in\mathcal{F},$$

它们作为 $H^1=Q(H)$ 上的有界型是有意义的。虽然我们通过 (3.9) 定义 $\mathbf{D}A$，但它可以计算为强极限，

$$\mathrm{i}[H,A]=\operatorname*{s-lim}_{t\to 0}t^{-1}\big(H\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}H\big)\in\mathcal{L}(H^1,H^{-1}).\tag{3.10}$$

类似地，(3.8) 中的形式交换子可以计算为 in$\mathcal{L}(H^1, H^{-1})$ 中的强极限，

$$\begin{aligned}\mathbf{D}B &= \text{s-}\lim_{t\to 0} t^{-1}\big(H\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}tB}H\big)\\ &= r^{-1/2}\big(\mathbf{D}A - 2B^2\big)r^{-1/2} + r^{-3}v\\ &= \sum_{|\alpha|\le 2} r^{-1}v_\alpha p^\alpha; \quad v_\alpha \in \mathcal{F}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

断言 (3.10) 和 (3.11) 是标准结果，它们由相关群的映射性质以及形式交换子在 H^1 上是有界型这一事实推出。

我们需要对 A 和 B 进行关于参数 κ 的修改。该参数用于控制某些多重交换子。令

$$B_{\kappa,R} = B(\kappa^2B^2+1)^{-1}, \quad A = A_{\kappa,R} = r^{1/2}B_{\kappa,R}r^{1/2}; \quad \kappa\in[0,1]. \tag{3.12}$$

~我们可以将 (3.1a) 中定义的 H 视为一个“广义”的 N 体薛定谔
~ ~算子。 H 的阈值集合，记为 $\mathcal{T}$，与 H 的阈值集合 $\mathcal{T}$ 重合，但少了一个点。这一例外源于恒等式

$$\sigma_{\mathrm{pp}}\big(\widetilde{H}^{a_0}\big) = \Big(\sigma_{\mathrm{pp}}\big(H^{a_0}\big)\setminus\{\lambda_0\}\Big)\cup\{0\}; \quad \widetilde{H}^{a_0} := H^{a_0} - \lambda_0\Pi.$$

~特别注意，由此可得 $\lambda_0\notin\mathcal{T}$。另一方面， H 的特征值与 H 的特征值之间不存在简单的~关系。在 [AHS] 中也采用了对 H 的一个真正特征投影 P 进行类似“减法”的方法；在该情形下，$\sigma_{\mathrm{pp}}\big(H-\lambda_0P\big)$ 与 $\sigma_{\mathrm{pp}}\big(H\big)$ 确实满足类似的关系。以下令

~ ~$d : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
表示将 ~(3.5) 中的 $\mathcal{T}\to\mathcal{T}$ 替换后定义的（较低的）距离函数。注意， $d(\lambda_0) > 0$。

˘**命题3.3**。设条件*1.5*和*2.4*成立。令$A_{\kappa,\ R}$ 和 H 分别由(3.12)和$(3.1\mathrm{a})$给出。

对于所有的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和 $\epsilon>0$，存在 $R_0\ge 1$ 和 $\kappa_0\in\ (0,1]$ 使得对于所有的 $R\ge R_0$，存在 λ 的一个邻域 $\mathcal{U}$ 以及作用于 L^2上的紧算子 K：

$$\begin{aligned}&f(\breve{H})\mathrm{i}[\breve{H}, A_{\kappa,R}]f(\breve{H})\\ &\quad\ge f(\breve{H})\{2\tilde{d}(\lambda)-\epsilon-K\}f(\breve{H}) \ \textit{for all}\ \kappa\in[0,\kappa_0]\ \textit{and real}\ f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathcal{U}).\end{aligned} \tag{3.13}$$

出现的交换子的含义将在第3.1.1小节中解释。然而，对于 $\kappa=0$，现在可以对其作另一种解释。我们声称，可以在 $\lambda=\lambda_0$ 处且对于 $\kappa=0$ 使用(3.13)来得出： H' 在 λ_0的一个邻域内至多有有限个特征值。为说明这一点，只需证明，将(3.13)中的交换子解释为形式交换子后，可以将其计算为强极限

$$\mathrm{i}[\breve{H}, A_R] = \text{s-}\lim_{t\to 0} t^{-1}\big(\breve{H}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA_R} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA_R}\breve{H}\big)\in\mathcal{L}(H^2,H^{-2}). \tag{3.14}$$

记 $\breve{H} = H - T$, $T := \lambda_0\Pi + \breve{K}$，(3.14) 中与 H 相关的部分由 (3.10) 得到证明。对于与第二项相关的部分，只需证明该型式（暂且定义在 C_{c}^∞(X) 上）可以作如下延拓。

引理3.4。 型式 $\mathrm{iad}_{A_R}(T)$: $=\mathrm{i}[T,A_R]$ 可延拓为 H^2 上的有界型。更一般地，$\mathrm{iad}_{A_R}(T)$ $\in\mathcal{L}(H^2,H^{-1})\cap\mathcal{L}(H^1,H^{-2})$。

证明。 将型式写成

$$\mathrm{i}[\lambda_0\Pi+\Pi I_0+I_0\Pi-\Pi I_0\Pi,A_R]=T_1+\cdots+T_4.$$

我们知道 $[I_0,A_R]\in\mathcal{F}\subset\mathcal{L}(L^2)$。我们只考虑来自 T_2 的贡献 $[\Pi,A_R]I_0$，并且只需证明 $[\Pi,A_R]I_0\in\mathcal{L}(H^2,H^{-1})$。为此，只需证明 $[\Pi,A_R]\in\mathcal{L}(L^2,H^{-1})$。

设 $1=\chi_1+\chi_2$ 是 $\mathbf{X}$ 上如下给出的单位分解。我们要求对于某个（较小的） $\sigma>0$ 以及所有 $R\geq1$，有˘:

(1) $\chi_1\in C^\infty(\mathbf{X})$，并且对于所有 $\alpha\in\mathbb{N}_0^{\dim\mathbf{X}}$，存在 $C\in\mathbb{R}$:

$$|\langle x\rangle^{|\alpha|}\partial_x^\alpha\chi_1(x)|\leq C.$$

˘(2) $\chi_1(x)=1$ 对于 $x\in\{|x|\geq2R,\ |x^{a_0}|\leq\sigma|x|\}$ 且

$$\operatorname{supp}\chi_1\subset\{|x|>\breve{R},\ |x^{a_0}|<2\sigma|x|\}\subset\mathbf{X}\setminus\cup_{b\not\subset a_0}\mathbf{X}_b.$$

注意到（2）意味着，参照（3.3）中的记号，其中 $\delta=\delta(\sigma)>0$ 取为˘充分小（与 R无关），

$$\operatorname{supp}\chi_1\subset\mathbf{Y}_{a_0,\delta,\breve{R}}.\tag{3.15}$$

记作

$$\mathrm{i}[\Pi,A_R]=(\chi_1+\chi_2)\mathrm{i}[\Pi,A_R](\chi_1+\chi_2)=\chi_1\mathrm{i}[\Pi,A_R]\chi_1+S.\tag{3.16}$$

˘ ˘ ˜ ˜现在，对于所有充分大的 R 值（即 $R\geq RR=RR(\delta)$），结合（3.4）和（3.15）可得

$$\tilde{\omega}_R(x)=x_{a_0}+\tilde{\omega}_R^{a_0}(x^{a_0})\text{ for all }x\in\operatorname{supp}\chi_1.\tag{3.17}$$

上述构造可以显式地完成（包括参数 R 的显式依赖关系）：在此以及下文中，固定 $R=RR(\delta)$，并选择$\chi_1(x)=\bar{\chi}_{\breve{R}}(|x|)\Theta(x/|x|)$，其中 $\bar{\chi}_{\breve{R}}$在（1.29）中规定，并取适当的实值光滑函数 Θ。我们记录（1）的以下改进形式。

（1）' 对于所有 $\alpha\in\mathbb{N}_0^{\dim\mathbf{X}}$和 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C\in\mathbb{R}$，使得对所有 $R\geq1$:

$$|\langle x\rangle^{|\alpha|}\partial_x^\alpha\chi_1(x)|+\Big|\langle x\rangle^{|\alpha|}\partial_x^\alpha\Big(\tfrac{\langle x\rangle^k}{\langle x^{a_0}\rangle^k}\bar{\chi}_{2\breve{R}}(|x|)\chi_2(x)\Big)\Big|\leq C.$$

由于算子 A_R 是一个局部算子，(3.16) 中的第一项根据 (3.17) 可简化为

$$\chi_1\mathrm{i}[\Pi,A_R]\chi_1=\chi_1\mathrm{i}[\Pi,A_R^{a_0}]\chi_1=\mathrm{i}\chi_1\big(\Pi A_R^{a_0}-A_R^{a_0}\Pi\big)\chi_1\in\mathcal{L}(L^2).\tag{3.18}$$

现在来看 (3.16) 中的项 S。它表示为

$$S=\chi_2\mathrm{i}[\Pi,A_R]+\chi_1\mathrm{i}[\Pi,A_R]\chi_2.\tag{3.19}$$

这两项的处理方式类似，因此我们只详细说明第一项。记

$$A_R = r_R B_R - \tfrac{\mathrm{i}}{2}|(\nabla r)(x/R)|^2,$$

然后

$$\begin{aligned}\chi_2[\Pi, A_R] &= \chi_2 \Pi A_R - \chi_2 A_R \Pi \\ &= K_1 B_R - B_R K_2 - \mathrm{i} K_3; \\ K_1 &= \chi_2 \Pi r_R, \\ K_2 &= r_R \chi_2 \Pi, \\ K_3 &= \tfrac{1}{2}\chi_2 \Pi\, |(\nabla r)(x/R)|^2 + \tfrac{1}{2}\chi_2 |(\nabla r)(x/R)|^2\, \Pi + \big(\tilde{\omega}_R \cdot \nabla \chi_2\big)\Pi.\end{aligned} \tag{3.20}$$

注意到，参见 (1)’,

$$K_1, K_2 \in \mathcal{L}(H^{-1}) \cap \mathcal{L}(L^2),\ K_3 \in \mathcal{L}(L^2) \text{ and } B_R \in \mathcal{L}(L^2, H^{-1}), \tag{3.21}$$

我们就完成了。 □

注3.5。 由证明的技术可知，二阶交换子 $\mathrm{ad}^2_{A_R}(T) \in \mathcal{L}(H^2, H^{-2})$（对于奇异势，可能无法得到更高阶的结果）。这足以得到 λ_0处的极限吸收原理，参见 [PSS]。然而，高阶交换子并不存在，而我们需要精细微局部估计，这通常要求使用多重交换子。（特别地，我们需要带有位置空间权重的界。）利用 κ对 A_R 和 B_R 的扭曲，我们将能够处理多重交换子。例如，对于 $\kappa > 0$，上述证明至少形式上给出了改进的结果 $\mathrm{ad}_{A_{\kappa,R}}(T) \in \mathcal{L}(H^1, H^{-1})$。我们引入 κ对 B 的扭曲演算，这将是研究的主要对象。相关内容将在第3.2节中完成，并且我们将在第3.3节中给出命题3.3及这一演算的一些应用。

3.1.1 命题3.3的证明

引入以下算子 $\varepsilon > 0$

$$X_\varepsilon = X_{\varepsilon,R} = r/(1+\varepsilon r), \quad A_{\varepsilon,\kappa,R} = X_\varepsilon^{1/2} B_{\kappa,R} X_\varepsilon^{1/2}; \quad \kappa \in [0,1]. \tag{3.22}$$

注意，$A_{\varepsilon,\,\kappa,\,R} \in \mathcal{L}(H^2, H^1)$。因此，$\mathrm{i}[H, A_{\varepsilon,\kappa,R}]$ 是在 H^2 上定义良好的型式。我们定义交换子 $\mathrm{i}[H, A_{\kappa,R}]$、$\mathrm{i}[\widetilde{H}, A_{\kappa,R}]$ 和 $\mathrm{i}[\breve{H}, A_{\kappa,R}]$，将其视为 $\mathcal{L}(H^2, H^{-2})$ 中的强弱星极限，具体如下。出于技术原因（将在定义之后解释），这仅在 κ 取足够小的值时成立。对于算子 $H^\# = H$、$\widetilde{H}$ 或 $\breve{H}$ 中的每一个，令

$$\mathrm{i}[H^\#, A_{\kappa,R}] = \text{s-w}^\star\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0_+} \mathrm{i}[H^\#, A_{\varepsilon,\kappa,R}]. \tag{3.23}$$

容易看出，对于 $\kappa = 0$，这些极限形式存在，并且与我们之前的计算一致，参见式 (3.14) 和引理3.4。 $\kappa > 0$ 的情形需要在引理 3.6 中作进一步阐述。

(3.23) 的一个直接优点是维里定理成立。因此，例如对于$\breve{}$，结合命题3.3与 (3.23) 可得， H 的特征值不可能在 λ_0处聚积。注意，这一断言不要求 $\lambda_0 = \Sigma_2$；事实上，对于该情形， $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(\breve{H})$，参见 [Wa2、引理 2.1] 或引理 2.10 的证明。命题3.3 仅在 $\lambda_0 > \Sigma_2$时才会成为我们的关键工具。在证明层面，读者将会看到引理 2.10 与命题3.3 的证明之间存在相似之处。

我们将使用对于 $\kappa > 0$

$$B_{\kappa,R} = \tfrac{1}{2\kappa}\big((\kappa B + \mathrm{i})^{-1} + (\kappa B - \mathrm{i})^{-1}\big). \tag{3.24}$$

注意到，根据 Mourre 理论， [Mo], 当 κ 足够小时，$(\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1}$ 保持 H^2。我们需要关于 κ 和 R 的一致界。因此，更确切地说，我们声称存在 $\kappa_0' \in (0,1]$，使得对于所有 $\kappa \in [0, \kappa_0']$ 以及所有 $R \geq 1$，空间 H^2 得以保持，事实上

$$\sup_{R\geq 1,\, \kappa \leq \kappa_0'} \|(\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^2)} < \infty. \tag{3.25a}$$

我们可以将此常数取为 $\kappa_0' = \min\{(2C)^{-1}, 1\}$，其中

$$C = \sup_{R\geq 1} \|[H_0, B](H_0 + 1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} < \infty. \tag{3.25b}$$

注意， R 对 B 的依赖性是通过 $\omega_R(x) = (\nabla r)(x/R)$ 体现的，该函数及其所有导数均有界。因此，上述有限性结论成立。我们还注意到，对于任意 $R \geq 1$

$$\text{s-}\lim_{\kappa \to 0} (\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1} = \mp \mathrm{i} \text{ in } \mathcal{L}(H^2). \tag{3.25c}$$

显然，对于任意 $s \geq 0$，将 H^2 替换为 L^2_s 后，也具有与 (3.25a) 和 (3.25c) 类似的性质。对于此时的 (3.25a)， κ_0' 可以是任意正数（不必很小）；参见引理 3.9 证明的开头。

引理 3.6。 </style}极限 i$[H^{\#}, A_{\kappa,R}]$（其中 $H^{\#} = H$， $\widetilde{H}$ 或 $\breve{H}$）在 H^2 上对 $\kappa \in [0, \kappa_0']$是定义良好的有界型。更一般地，$\mathrm{i}[H^{\#}, A_{\kappa,R}] \in \mathcal{L}(H^2, H^{-1}) \cap \mathcal{L}(H^1, H^{-2})$。

此外，对于上述三个型式中的每一个

$$\exists C > 0\, \forall R \geq 1\, \forall \kappa \in [0, \kappa_0'] : \quad \big\|\mathrm{i}[H^{\#}, A_{\kappa,R}] - \mathrm{i}[H^{\#}, A_R]\big\|_{\mathcal{L}(H^2, H^{-2})} \leq C\kappa. \tag{3.26}$$

证明。 我们需要考察情形 $\kappa > 0$。我们首先考察量 i$[H, A_{\kappa,R}]$。

我们利用（3.11）、（3.24）和（3.25a）进行计算

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\Big[H, A_{\varepsilon,\kappa,R}\Big] \\
&= \mathrm{i} X_\varepsilon^{1/2}\Big[H, B_{\kappa,R}\Big] X_\varepsilon^{1/2} + 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\Big[H, X_\varepsilon^{1/2}\Big] B_{\kappa,R} X_\varepsilon^{1/2}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\sum_{\pm} X_\varepsilon^{1/2}(\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1}\mathrm{i}\Big[H, B\Big](\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1} X_\varepsilon^{1/2} + 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Re}\left(X_\varepsilon^{-1/2}(\nabla X_\varepsilon)\cdot p\right) B_{\kappa,R} X_\varepsilon^{1/2}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\sum_{|\alpha|\leq 2,\,\pm} X_\varepsilon^{1/2}(\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1}) r^{-1} v_\alpha p^\alpha (\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1} X_\varepsilon^{1/2} \\
&+ 2\,\mathrm{Re}\Big(r^{-1/4}(1+\varepsilon r)^{-3/4} B_R (1+\varepsilon r)^{-3/4} r^{-1/4} B_{\kappa,R} X_\varepsilon^{1/2}\Big); \quad v_\alpha \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

我们可以令 $\varepsilon \to 0$，从而得到所需极限在 H^2-型式意义下的存在性。结果为

$$\mathrm{i}\Big[H, A_{\kappa,R}\Big] = -\tfrac{1}{2} \sum_{|\alpha|\le 2,\,\pm} r^{1/2}(\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1})r^{-1}v_\alpha p^\alpha (\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1} r^{1/2} + 2\,\mathrm{Re}\left(r^{-1/4} B_R r^{-1/4} B_{\kappa,R} r^{1/2}\right); \quad v_\alpha \in \mathcal{F}.$$

这个表达式显然属于 $\mathcal{L}(H^2, H^{-1}) \cap \mathcal{L}(H^1, H^{-2})$（事实上，在此情形下属于 $\mathcal{L}(H^1, H^{-1})$）。

接下来，我们将乘法算子移到中间，使其被 $(\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1}$夹住。由此产生了阶为 $\mathcal{O}(\kappa)$ 的误差，该误差在 $R \ge 1$ 中关于 $\mathcal{L}(H^2, H^{-2})$ 一致，参见 (3.25a) 以及 (3.25c) 后的注记。这意味着我们只需考虑

$$-\tfrac{1}{2} \sum_{\pm} (\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1} \mathrm{i}\big[H, A\big](\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1}, \tag{3.27}$$

其中 $\mathrm{i}\big[H, A\big]$ 由 (3.9) 给出。但是

$$(\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1} \pm \mathrm{i} = \pm \mathrm{i}\kappa (\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1} B, \tag{3.28}$$

当在 (3.27) 中逐个移除因子 $(\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1}$时，会在 $\mathcal{L}(H^2, H^{-2})$ 中额外产生一个 $\mathcal{O}(\kappa)$ 阶的误差。这就证明了 $H^\# = H$ 情形下的 (3.26)。

对于交换子 $\mathrm{i}[\breve{H}, A_{\kappa,R}]$ 和 $\mathrm{i}[\breve{H}, A_{\kappa,R}]$，我们采用类似的方法，并额外使用引理3.4的证明。注意，在 $H^\# = \breve{H}$ 的情形下，(3.26)中的拓扑是通过此方法处理奇异势时所能使用的最强索博列夫空间拓扑，参见注3.5。 □

引理3.7。 对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$，存在 $R_0 \ge 1$，使得对于所有 $R \ge R_0$，存在一个 λ 的邻域 $\mathcal{V}$ 以及作用于 L^2上的一个紧算子 K：

$$\begin{aligned} &f(\widetilde{H})\mathrm{i}[\widetilde{H}, A_R] f(\widetilde{H}) \\ &\qquad \ge f(\widetilde{H})\{2\tilde{d}(\lambda) - \epsilon - \widetilde{K}\} f(\widetilde{H}) \ \textit{for all real}\ f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathcal{V}). \end{aligned} \tag{3.29}$$

证明。 我们将证明分为几个步骤。

I。注意，对于任意一个由因子 P_l 构成的乘积 $P_1 \cdots P_m$，若这些因子分别为 $P_l = \langle x^{a_0}\rangle$或$P_l = A_R^{a_0}$，则有

$$P_1 \cdots P_m \Pi \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathbf{X}^{a_0})\big). \tag{3.30}$$

In fact，因为 $\langle x^{a_0}\rangle^m (H^{a_0} + \mathrm{i})^m \Pi \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathbf{X}^{a_0})\big)$，结论由该性质得出

$$P_1 \cdots P_m (H^{a_0} + \mathrm{i})^{-m} \langle x^{a_0}\rangle^{-m} \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathbf{X}^{a_0})\big),$$

这又是由重复换序以及性质 $A_R^{a_0}\langle x^{a_0}\rangle^{-1}(H^{a_0}+\mathrm{i})^{-1} \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathbf{X}^{a_0})\big)$ 得出的。

II. 引理 3.2 对三元组 $\big(H、\mathrm{i}[H, A_R]、d\big)$ 被 $\big(\widetilde{H}、\mathrm{i}[H, A_R]、\tilde{d}\big)$ 替换的情形也完全类似。方便起见，将其表述如下。

对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$，存在 $R_0 \geq 1$，使得对于所有 $R \geq R_0$，存在~有界邻域 $\mathcal{V}$ 和作用于 L^2 上的紧算子 K_1：

$$\begin{aligned} & f(\widetilde{H})\mathrm{i}[H, A_R]f(\widetilde{H}) \\ & \qquad \geq f(\widetilde{H})\{2\tilde{d}(\lambda) - \epsilon/2 - \widetilde{K}_1\}f(\widetilde{H}) \text{ for all real } f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{V}). \end{aligned} \tag{3.31}$$

该陈述可通过仿照 [Sk3、推论4.2和4.5]的证明得到。由于'势' Π 不是局部的，因此需要作一点说明：展开 [Sk3（4.16）] 中出现的算子$T(\delta')$，其中一个'新项'为 $T := [\Pi, j_b]$；这里的 j_b 是一个分割函数，其具有与（2.37a）–（2.37c）中的分割函数相似的性质。我们需要~证明 T 是 H-紧的。若 $a_0 \not\subset b$ 确实 Πj_b 且 $j_b\Pi$，因而 T也同样是H-紧的，参见步骤*I*。另一方面，若 $a_0 \subset b$ 我们有 $a_0 = b$，则可写成 $T = -\sum_{d \neq b}[\Pi, j_d]$。由于对于任意这样的项都有 $a_0 \not\subset d$，由前面的论证可得 $[\Pi, j_d]$ 是 H- 紧的。

III。回顾定义 (3.1a)，只需证明关于 (3.31) 中的集合 $\mathcal{V} = \mathcal{V}(R)$ 的以下估计。

~ ~存在一个紧算子 $K_2 = K_2(R)$，使得

$$1_{\mathcal{V}}(\widetilde{H})\mathrm{i}[-\lambda_0\Pi, A_R]1_{\mathcal{V}}(\widetilde{H}) \geq -\epsilon/2 - \widetilde{K}_2. \tag{3.32}$$

显然，结合 (3.31) 和 (3.32) 可得 (3.29)，其中邻域为~ ~ ~ $\mathcal{V}$，且 $K = K_1 + K_2$。为证明 (3.32)，我们仿照引理3.4的证明进行分解，写作

$$\mathrm{i}\Big[\Pi, A\Big] = (\chi_1 + \chi_2)\mathrm{i}\Big[\Pi, A\Big](\chi_1 + \chi_2) = \chi_1\mathrm{i}\Big[\Pi, A_R^{a_0}\Big]\chi_1 + S.$$

由于

$$\|\Pi A_R^{a_0} - A_R^{a_0}\Pi\| \to 0 \text{ for } R \to \infty,$$

参见引理 3.1(2) 和步骤 *I*，第一项符合 (3.32)。

还需考察 S，它由 (3.19) 给出。我们仿照 (3.20) 进行分解（同样只处理 S 的第一项）。算子 K_1、K_2 和 K_3 不仅有界（如 (3.21) 所述），而且是 $\langle p \rangle$-紧的。由于 $\mathcal{V}$ 有界，(3.32) 得证。 □

命题 *3.3* 的证明。设定给定的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$。我们需要指定 $R_0 \geq 1$、$\kappa_0 \in (0, \kappa_0']$，并为 $R \geq R_0$ 指定 λ 的一个邻域 $\mathcal{U}$（R）和一个紧集 K（R），使得（3.13）成立。

I。首先，我们使用引理3.7，得到陈述(3.29)，其中$f(\widetilde{H})$的因子替换为 $f(\breve{H})$的因子。更确切地说，我们使用将ϵ 替换为 $\epsilon/2$ 的陈述，从而可以为 $R \geq R_0$ 选取相应的 $R_0 \geq 1$ 以及~邻域 $\mathcal{V}(R)$和紧集 $K(R)$，使得(3.29)成立。现在，对于任意这样的集合 $\mathcal{V}(R)$，取 λ的任意更小邻域，记为 $\mathcal{U}(R)$，其紧闭包包含于 $\mathcal{V}(R)$的内部中。我们可以选取一个实函数~ ~$f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{V}(R))$，使其在 $\mathcal{U}(R)$上满足 $f = 1$，于是估计如下。注意，

$\breve{K}_0 = \breve{K}_0(R) := \big(H_0+1\big)\big(\tilde{f}(\breve{H}) - \tilde{f}(\widetilde{H})\big)$ 是紧的（参见下面给出的(3.37), 并且 $\widetilde{\ }\ \mathrm{i}[H, A_R] \in \mathcal{L}(H^2, H^{-2})$（参见引理3.4）。于是写成

$$\begin{aligned}\breve{K}_1 :=& \tilde{f}(\breve{H})\mathrm{i}[\widetilde{H}, A_R]\tilde{f}(\breve{H}) - \tilde{f}(\widetilde{H})\mathrm{i}[\widetilde{H}, A_R]\tilde{f}(\widetilde{H})\\ =& \breve{K}_0^*\breve{T} + \widetilde{T}^*\breve{K}_0;\\ \breve{T} =& \big(H_0+1\big)^{-1}\mathrm{i}[\widetilde{H}, A_R]\tilde{f}(\breve{H}),\\ \widetilde{T} =& \big(H_0+1\big)^{-1}\mathrm{i}[\widetilde{H}, A_R]\tilde{f}(\widetilde{H}),\end{aligned}$$

$\breve{\ }$我们得出结论： K_1 是紧的。另请注意,

$$\breve{K}_2(R) := \big(2\tilde{d}(\lambda) - \epsilon/2\big)\big(\tilde{f}(\breve{H})^2 - \tilde{f}(\widetilde{H})^2\big)$$

是紧的。

总之，我们取上述所述的 $R_0 \geq 1$、 $\mathcal{U}$（R），并且

$$\breve{K}_3(R) := \tilde{f}(\widetilde{H})\widetilde{K}\tilde{f}(\widetilde{H}) - \breve{K}_1 + \breve{K}_2; \quad R \geq R_0,$$

从而得到

$$\begin{aligned}&f(\breve{H})\mathrm{i}[\widetilde{H}, A_R]f(\breve{H})\\ &\quad \geq f(\breve{H})\{2\tilde{d}(\lambda) - \epsilon/2 - \breve{K}_3\}f(\breve{H}) \text{ for all real } f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{U}(R)).\end{aligned}$$

II. 注意到

$$\breve{K}_4(R) := 1_{U(R)}(\breve{H})\mathrm{i}[\breve{K}, A_R]1_{U(R)}(\breve{H}) \text{ is compact.}$$

我们在前一个估计式中减去这些项，得到

$$\begin{aligned}&f(\breve{H})\mathrm{i}[\breve{H}, A_R]f(\breve{H})\\ &\quad \geq f(\breve{H})\{2\tilde{d}(\lambda) - \epsilon/2 - K\}f(\breve{H}) \text{ for all real } f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{U}(R)),\end{aligned}$$

其中 $K = K(R) = \breve{K}_3 + \breve{K}_4$。

III。我们调用 (3.26)，估计得

$$1_{U(R)}(\breve{H})\big(\mathrm{i}[\breve{H}, A_{\kappa,R}] - \mathrm{i}[\breve{H}, A_R]\big)1_{U(R)}(\breve{H}) \geq -\epsilon/2,$$

对所有充分小的 κ 都成立。结合前一个估计，这一估计给出 (3.13)。

□

3.2 多重交换子与演算

引入某些线性算子类的“阶”这一概念是很方便的T 在 L^2上，参见 [GIS]。它基于以下初等结果，参见引理 3.9。

$$\forall \kappa \in (0,1],\ \forall R \geq 1: \quad B_{\kappa,R}\, L^2_{\infty} \subset L^2_{\infty}. \tag{3.33}$$

对于算子 S, T 在 L^2 上，我们（形式上）定义多重交换子如下:

$$\mathrm{ad}_S^0(T) = T \text{ and } \mathrm{ad}_S^k(T) = [\mathrm{ad}_S^{k-1}(T), S] \text{ for } k \in \mathbb{N}.$$

令 X 为在 L^2上的 $r = r_R$，并回顾一下， $\kappa_0' \in$ $(0,1]$ 已在对 (3.25a) 和 (3.25b) 的讨论中引入。

定义 3.8。 给定 $R \geq 1$。 L^2 上的算子 T 若为 κ阶 $t \in \mathbb{R}$，则称其为

(1) $\mathcal{D}(T)\ \mathcal{D}(T^*) \supset L^2_\infty$,

(2) T 和 T^* 保持 L^2_∞ 不变,

(3) $\forall \kappa \in (0, \kappa_0'] \ \forall s \in \mathbb{R} \ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \quad X^{s-k-t}\mathrm{ad}^k_{B_{\kappa,R}}(T)X^{-s} \in \mathcal{L}(L^2).$

对于任意 κ 阶 t 的算子 T，其伴随算子 T^* 也具有 κ 阶 t，记作T, $T^* = \mathcal{O}_\kappa(X^t)$。这类算子记为 $\mathfrak{O}_\kappa(X^t)$。容易看出， $X^t = \mathcal{O}_\kappa(X^t)$，参见下文所述的（3.39）和（3.40）。这与以下事实有关：对于 $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ad}^k_B(X^k) \in \mathcal{F}$，其中代数 $\mathcal{F}$ 在对（3.8）的讨论中引入。根据莱布尼茨法则，若 S 和 T 分别具有 κ 阶 s 和 t，则 ST 的阶为 $s+t$。不过，我们不跟踪 κ 阶或 R 依赖性；然而，对于上述“阶”概念在我们应用中的重要性而言， $\kappa = 0$ 不包含在（3）中。我们将 $\breve{R}(z) = (\breve{H} - z)^{-1}$ 和$R_\kappa(z) = (B_\kappa - z)^{-1} = (B_{\kappa,R} - z)^{-1}$简写为。

引理 3.9。 设 $R \geq 1$ 充分大。则对于任意 $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}$（$\mathbb{R}$）、 $g \in C^\infty$（$\mathbb{R}$）、 $v \in \mathcal{F}$、 $|\alpha| \leq 2$、 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 以及多项式 P_1、 P_2（它们取自 A^{a_0} 以及 x^{a_0}和 p^{a_0} 的分量），若对于 P_1 以及 P_2， p^{a_0} 的分量总数均至多为二，则算子

$$g(B_\kappa),\ v,\ P_1 \Pi P_2,\ I_0(p^2+1)^{-1},\ p^\alpha \breve{R}(z),\ I_0 \Pi \breve{R}(z),\ f(\breve{H}) \in \mathfrak{O}_\kappa(X^0). \tag{3.34}$$

证明。 我们逐一证明这些界。为便于表述，上述列表并未尽可能完整地列出所有内容。在证明中我们将看到，某个代数 $\breve{\mathcal{B}} \subset \mathfrak{O}_\kappa(X^0)$ 还包含一些上面未列出的算子；稍后还将用到这些算子属于 $\mathfrak{O}_\kappa(X^0)$ 这一断言。

通过重复换序，对于（3.22）的正则化 X_ε，我们得到：对于任意 $s \geq 0$、 $\varepsilon > 0$ 和 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X^s_\varepsilon (B-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{[s]} (-1)^k (B-z)^{-k-1} \mathrm{ad}^k_B(X^s_\varepsilon) \\ + (-1)^{[s]+1} (B-z)^{-[s]-1} \mathrm{ad}^{[s]+1}_B(X^s_\varepsilon)(B-z)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

我们在右侧乘以 X^{-s}，并取 $\varepsilon \to 0$，注意到所得右端显式地属于 $\mathcal{L}(L^2)$。注意，算子 $\mathrm{ad}^{[s]+1}_B(X^s) \in \mathcal{F}$，因此它是一个有界乘法算子。对于$s < 0$，我们也可以用类似的方法论证。特别地，我们得出 (3.33)（使用 (3.24)），以及引理 3.6 之前提到的一个有界性结果。事实上，由此可知

$$(\kappa B \pm \mathrm{i})^{-1} \in \mathfrak{O}_\kappa(X^0). \tag{3.36}$$

$g(B_\kappa)$；第一次证明。就给定的 $g \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ 的几乎解析延拓 $\tilde{g}$ 而言（将其“吸收”到测度 $\mu = \mu_g$ 中，并记作 $z = u + \mathrm{i}v$）

$$g(B) = \tfrac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \big(\bar{\partial}\tilde{g}\big)(z)(B-z)^{-1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{C}} (B-z)^{-1} \mathrm{d}\mu(z). \tag{3.37}$$

令任意 $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{G}_t = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}) | \, \forall k \in \mathbb{N}_0 : \, |g^{(k)}(x)| \leq C_k \langle x \rangle^{t-k}\}. \tag{3.38}$$

众所周知，对于任意自伴算子 B，(3.37) 实际上对 $g \in \mathcal{G}_t$ 以及 $t < 0$ 均成立。

现在，对于任意给定的 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$，我们将 $g(B_\kappa) = g_\kappa(B) + g(0)$ 写成 $g_\kappa \in \mathcal{G}_{-1}$。利用 g_κ 的 (3.37)，再结合 $\varepsilon = 0$ 的 (3.35)（以及其伴随版本），我们得出 $g(B_\kappa) = g_\kappa(B) + g(0) \in \mathfrak{O}_\kappa(X^0)$。

$g(B_\kappa)$；第二个证明。由于 $B_{\kappa,\, R}$ 有界，我们可以将 $g(B_{\kappa,\, R})$ 写成 $= f(B_{\kappa,\, R})$，其中 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，然后应用 (3.37)。对于 $s \geq 0$ （在 (3) 中仅处理这种情况），我们按照 (3.35) 展开

$$X^s R_\kappa(z) = \sum_{k=0}^{[s]} (-1)^k R_\kappa(z)^{k+1} \mathrm{ad}_{B_\kappa}^k(X^s) + (-1)^{[s]+1} R_\kappa(z)^{[s]+1} \mathrm{ad}_{B_\kappa}^{[s]+1}(X^s) R_\kappa(z).$$

只需证明

$$\mathrm{ad}_{B_\kappa}^k(X^s) X^{k-s}, k = 0, \ldots, [s], \text{ and } \mathrm{ad}_{B_\kappa}^{[s]+1}(X^s) \text{ are bounded.} \tag{3.39}$$

利用 (3.24) 和 (3.36)，我们对 $k = 1$、...、$[s]+1$ 进行计算

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{B_\kappa}^k(X^s) &= \sum_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\in\{-1,1\}^k} T_\sigma v_\sigma X^{s-k} T_\sigma; \\ T_\sigma &= \prod_{j=1}^k (\kappa B + \sigma_j \mathrm{i})^{-1}, \quad v_\sigma \in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

显然，这表明 $\mathrm{ad}_{B_\kappa}^{[s]+1}(X^s)$ 是有界的。对于 $k \leq [s]$，利用 $X^{s-k} T_\sigma X^{k-s}$ 是有界的这一事实（参见 (3.36)），我们得到 (3.39) 的第一部分。因此证明完毕。

v。我们类似地计算（使用相同的记号）

$$\mathrm{ad}_{B_\kappa}^k(v) = \sum_{\sigma\in\{-1,1\}^k} T_\sigma v_\sigma X^{-k} T_\sigma.$$

再次利用 (3.36)，我们得到 $v \in \mathfrak{O}_\kappa(X^0)$。

$P_1 \Pi P_2$。我们令 T 具有 $T = P_1 \Pi P_2$ 的型式，并计算

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{B_\kappa}(T) &= -\sum_{\sigma\in\{-1,1\}} (\kappa B + \sigma \mathrm{i})^{-1} [T, B] (\kappa B + \sigma \mathrm{i})^{-1}, \\ \mathrm{i}[T, B] &= r^{-1/2} \mathrm{i}[T, A] r^{-1/2} + 2 \,\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\left[T, r^{-1/2}\right] A r^{-1/2}\right) \\ &= \mathrm{i} r^{-1/2} \chi_1 \big(T A^{a_0} - A^{a_0} T\big) \chi_1 r^{-1/2} + T_1 + T_2 + T_3; \\ T_1 &= r^{-1/2} \chi_2 \mathrm{i}[T, r^{1/2} B r^{1/2}] r^{-1/2}, \\ T_2 &= r^{-1/2} \chi_1 \mathrm{i}[T, r^{1/2} B r^{1/2}] \chi_2 r^{-1/2}, \\ T_3 &= 2 \,\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\left[T, r^{-1/2}\right] r^{1/2} B\right). \end{aligned}$$

我们还需要计算高阶交换子，因此需要迭代这一计算。我们将展示一种自相似结构，以便控制高阶交换子。为此，我们引入分次代数$\mathcal{B}=\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\mathcal{B}_k$，其中 $\mathcal{B}_k$ 由任意乘积的线性组合给出

$$X^{-s}\ (s\in\mathbb{R}), v\in\mathcal{F}, (\kappa B\pm \mathrm{i})^{-1}, T, P_\sigma^\alpha, (P_\sigma^\alpha)^*;\quad P_\sigma^\alpha := p^\alpha T_\sigma (p^2+1)^{-1}\ (|\alpha|\le 2).$$

这里 T 是形如 $T=P_1\Pi P_2$ 的任意算子，而当 $k\in\mathbb{N}$ 时，T_σ 由方程 (3.40) 的最后一个方程给出；对于 $k=0$，$T_\sigma := I$，并且对于任意这样的乘积，其中出现的指数总和 $s\in\mathbb{R}$ 由 k 给出。我们断言

$$\forall S\in\mathcal{B}_k:\quad \mathrm{ad}_{B_\kappa}(S)\in\mathcal{B}_{k+1}. \tag{3.41}$$

由此性质可知，对于任意 $S\in\mathcal{B}_0$，$\mathrm{ad}_{B_\kappa}^k(S)\in\mathcal{B}_k$（特别地，对于 T），并且我们很容易看到，X 的幂可以按需要重新分配，即得到 $\mathcal{B}\subset\mathfrak{O}_\kappa(X^0)$，特别地可推出 $T\in\mathfrak{O}_\kappa(X^0)$。

为证明 (3.41)，只需考虑 $k=0$，然后依次只考虑算子 $T=P_1\Pi P_2\in\mathcal{B}_0$。因此，我们考察上述与 B_κ 的交换子的计算。第一项显然属于 $\mathcal{B}_1$，因为 TA^{a_0} 和 $A^{a_0}T$ 与 T 具有相同的型式，而 $r^{-1/2}$ 的两个外因子合在一起提供了 $\mathcal{B}_1$ 类所要求的额外因子 X^{-1}。

对于项 T_1 和 T_2，我们也将交换‘还原’。因此

$$-\mathrm{i}T_1 = r^{-1/2}\chi_2 T r^{1/2}B - B\chi_2 r^{1/2}Tr^{-1/2} + [B,\chi_2]r^{1/2}Tr^{-1/2}.$$

我们利用 (3.28) 将 B 的因子与 $(\kappa B+\sigma\mathrm{i})^{-1}$ 的因子合并。对于任意 $s\in\mathbb{R}$ $X^{-s}v_1Tv_2X^{-s}$ $v_1\ v_2\in\mathcal{F}$，其余的$\check{}$项都可$\check{}$以写成，其中，且 T 具有与 T 相同的型式（参见引理3.4证明中的 (1)’）。特别地，通过取 $s=1/2$，我们得到额外的因子 X^{-1}。对于 T_2，我们可以进行类似的论证。

对于项 T_3，我们注意到以下一般公式。令 $g\in\mathcal{G}_t$，其中任意 $t\in\mathbb{R}$，并考虑复合 $g(r)$ 的交换公式，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\big[\Pi, g(r)\big] &= \Pi h(x) - h(x)\Pi,\\ h(x) &= \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t\, g'(r(tx^a+x_a))\int_0^t x^a\cdot(\nabla^2 r)\big((sx^a+x_a)\big)x^a\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.42}$$

这里我们使用了两个零阶泰勒展开、$[\Pi, g(r(x_a))]=0$这一事实以及性质 $\nabla r\big(x_a\big)\cdot x^a=0$，参见引理 3.1(2)。

应用于 $g(r)=r^{-1/2}$，我们得出

$$\mathrm{i}\big[T, r^{-1/2}\big] = Th(x) - h(x)T, \tag{3.43}$$

其中 h 由（3.42）给出。我们可以写成 $h=\langle x^{a_0}\rangle^{7/2}r^{-3/2}v$，其中 $v\in\mathcal{F}$。

利用公式可以细化这一表示

$$r\nabla^2 r = \nabla^2 r^2/2 - |\nabla r\rangle\langle\nabla r|\in\mathcal{F}. \tag{3.44}$$

事实上，由 (3.42) 和 (3.44) 可知，(3.43) 成立，其中

$$h=\langle x^{a_0}\rangle^{9/2}r^{-5/2}v,\ \text{where } v\in\mathcal{F}. \tag{3.45}$$

因此，直观地说，交换子比 X 多两个逆幂。显然，对于 $g \in \mathcal{G}_t$，与 $g(r)$ 交换具有这一普遍性质；这一点在后文会派上用场，参见引理 3.10 的证明。无论如何，由于至少多出一个 X^{-1} 的幂，再结合 (3.28)，我们可知 T_3 也会贡献一个 $\mathcal{B}_1$ 中的项。

为应用于证明的下一步，我们注意到

$$S_1 := (p^2+1)\Pi(p^2+1)^{-1} \in \mathcal{B}_0 \text{ and } S_2 := (p^2+1)[\Pi, B_\kappa](p^2+1)^{-1} \in \mathcal{B}_1. \quad (3.46)$$

显然，$S_1 \in \mathcal{B}_0$，因此第二个断言由 (3.41) a 得出 nd

$$S_2 = [S_1, B_\kappa] - [p^2, B_\kappa](p^2+1)^{-1}S_1 + S_1[p^2, B_\kappa](p^2+1)^{-1} \in \mathcal{B}_1.$$

$I_0(p^2+1)^{-1}$ 和 $p^\alpha T_{\sigma_1,\dots,\sigma_j}\breve{R}(z)$ $p^\alpha T_{\sigma_1,\dots,\sigma_j}\Pi\breve{R}(z)$; $|\alpha| \le 2$, $j \in \mathbb{N}_0$。我们将这些算子以及伴随表达式也加入代数 $\mathcal{B}$的生成元列表，并将相应的代数记为 $\breve{\mathcal{B}} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \breve{\mathcal{B}}_k$。与之前一样，元素 $\mathcal{B}_k$ 的任意一项中出现的指数总和 $s \in \mathbb{R}$ 记为 k，且总˘。我们声称

$$\forall S \in \breve{\mathcal{B}}_k : \quad \mathrm{ad}_{B_\kappa}(S) \in \breve{\mathcal{B}}_{k+1}. \quad (3.47)$$

由这一性质可知，对于任意 $S \in \breve{\mathcal{B}}_0$ （特别是列出的算子及其伴随表达式），a $\mathrm{d}^k_{B_\kappa}(S) \in \breve{\mathcal{B}}_k$；同样，我们可以按照需要重新分配 X 的幂。因此我们得到 $\breve{\mathcal{B}} \subset \mathfrak{O}_\kappa(X^0)$，特别是 (3.34) 中列出的第四、第五和第六个算子都属于 $\mathfrak{O}_\kappa(X^0)$，如所声称的。总之，只需证明 (3.47)，进而只需证明带有 $k = 0$的 (3.47)。关于第一项，我们注意到 $[I_0, B] \in X^{-1}\mathcal{F}$。因此只需考虑其余各项。对于第二项 $S = p^\alpha T_{\sigma_1,\dots,\sigma_j}\breve{R}(z)$ $= p^\alpha T_\sigma \breve{R}(z)$，我们计算

$$\begin{aligned}
[S, B_\kappa] &= [p^\alpha, B_\kappa]T_\sigma\breve{R}(z) - p^\alpha T_\sigma \breve{R}(z)[\breve{H}, B_\kappa]\breve{R}(z) \\
&= T_1 + T_2 + T_3 + T_4; \\
T_1 &= -\sum_{\sigma'\in\{-1,1\}} (\kappa B + \sigma' \mathrm{i})^{-1}[p^\alpha, B]T_{\sigma_1,\dots,\sigma_j,\sigma'}\breve{R}(z), \\
T_2 &= -p^\alpha T_\sigma \breve{R}(z)[H, B_\kappa]\breve{R}(z), \\
T_3 &= \lambda_0 p^\alpha T_\sigma \breve{R}(z)[\Pi, B_\kappa]\breve{R}(z), \\
T_4 &= p^\alpha T_\sigma \breve{R}(z)[\breve{K}, B_\kappa]\breve{R}(z).
\end{aligned}$$

由于 $[p^\alpha, B] \in X^{-1}\sum_{|\beta|\le 2} v_\beta p^\beta$ 其中 $v_\beta \in \mathcal{F}$，算子 $T_1 \in \breve{\mathcal{B}}_1$。根据 (3.11)，我们还可得出 $T_2 \in \breve{\mathcal{B}}_1$。由于 $\Pi \in \mathcal{B}_0$，因此 $[\Pi, B_\kappa] \in \mathcal{B}_1$ （根据 (3.41)）也有 $T_3 \in \breve{\mathcal{B}}_1$。对于 T_4，我们结合以下事实：

$$I_0(p^2+1)^{-1}, (p^2+1)\breve{R}(z) \in \breve{\mathcal{B}}_0$$

以及 (3.46)。因此，例如（其中 S_2 在 (3.46) 中给出）

$$[I_0\Pi, B_\kappa]\breve{R}(z) - [I_0, B_\kappa]\Pi\breve{R}(z) = \big(I_0(p^2+1)^{-1}\big)S_2\big((p^2+1)\breve{R}(z)\big) \in \breve{\mathcal{B}}_1.$$

˘显然，左侧的第二项也属于 $\mathcal{B}_1$，从而完成了对 K三个项之一

˘的处理。这个论证对 K的其他项也适用。

最后，对于第三项 $S = p^\alpha T_\sigma \Pi \breve{R}(z)$，我们写出

$$S = P_\sigma^\alpha S_1\big((p^2+1)\breve{R}(z)\big).$$

由于 P_σ^α，参见（3.46），$[P_\sigma^\alpha S_1, B_\kappa] \in \mathcal{B}_1 \subset \breve{\mathcal{B}}_1$，并且由于 $[(p^2+1)\,\breve{R}(z)\;B_\kappa] \in \breve{\mathcal{B}}_1$（如上文所证明），因此确实有 $[S, B_\kappa] \in \breve{\mathcal{B}}_1$，正如我们所希望的那样。

$f(\breve{H})$。我们使用（3.37），将其中的 B 替换为 $\breve{H}$。我们已经证明，对于任意固定的非实数 z，$R(z) = \mathcal{O}_\kappa(X^0)$。因此，我们可以利用 B_κ 计算任意多个交换子，按照需要重新分配 X 的幂，然后进行估计，从而确实得到 $f(\breve{H}) \in \mathcal{O}_\kappa(X^0)$。注意，在估计类似（3.37）的积分时，$\|\breve{R}(z)^m\| \le |\operatorname{Im} z|^{-m}$ 的界自然会出现；事实上，与所出现的测度 μ 结合时，它们显得“无害”。 □

3.2.1 计算交换子

我们感兴趣的是计算交换子 $\mathrm{i}[\breve{H}, P]$，其中在所有相关情形下，P具有如下形式

$$P = f(\breve{H})h(r)g(B_\kappa)h(r)f(\breve{H}); \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}),\, h, g \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \text{real-valued}.$$

˘~ ~(我们省略对 R 的依赖。) 令 $f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$，对任意实值 $f \in$˘ ˘ ˘$C_c^\infty(\mathbb{R})$，选取使得 $f = 1$ 在 f 的支集上成立的函数。令 $H = f(H)$，并将相应的海森堡导数 $\mathrm{i}[H, \cdot]$ 记为 D，特别地，$\mathrm{i}[H, P] = \mathrm{D}P$。我们关注 h 和 g 的特定选取；对于这些选取，P 的阶为 κ 阶，记作 $2t$。更确切地说，我们施加条件 $h \in \mathcal{G}_t$，参见 (3.38)，并得出复合函数 $h(r)$ 的阶为 κ 阶 t，因此 P 的阶确实为 κ 阶 $2t$（注意，由引理 3.9 可知，$g(B_\kappa)$ 和 H 的 κ 阶均为零）。这意味着交换子 $\mathrm{D}P$ 的阶为 $2t$，且可能（事实上也确实）更低。我们需要更精确地计算其阶以及主导阶项。

引理 3.10. 设 $R \ge 1$ 足够大，并假设 $h \in \mathcal{G}_t$。那么

$$\begin{aligned}
&\breve{\mathbf{D}}P - L_1 - L_2 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-2});\\
&L_1 = 4f(\breve{H})\operatorname{Re}\big((\kappa^2 B^2+1)h'(r)B_\kappa g(B_\kappa)h(r)\big)f(\breve{H}),\\
&L_2 = f(\breve{H})h(r)\operatorname{Re}\big(g'(B_\kappa)\breve{\mathbf{D}}B_\kappa\big)h(r)f(\breve{H}).
\end{aligned} \tag{3.48a}$$

算子 $L_1, L_2 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-1})$，因此特别有 ˘$\mathbf{D}P \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-1})$。

此外，假设 $g' \ge 0$，且 $(g')^{1/2} \in C^\infty$。那么，L_2 可以替换为以下任一表达式：L_3，L_4，$L_5 \in \mathfrak{O}_\kappa($ $X^{2t-1})$，其中 *Com*˘ ˘ ˘ $= f(H)\mathrm{i}$ $[H, A_\kappa]f(H)$ 按照引理 *3.6* 的约定有定义。

$$L_3 = h(r)\sqrt{g'(B_\kappa)}f(\breve{H})\mathrm{i}[\breve{H}, B_\kappa]f(\breve{H})\sqrt{g'(B_\kappa)}h(r), \tag{3.48b}$$

$$\begin{aligned}
L_4 = {}& h(r)\sqrt{g'(B_\kappa)}X^{-1/2}\,Com\,X^{-1/2}\sqrt{g'(B_\kappa)}h(r)\\
&- 2h(r)\sqrt{g'(B_\kappa)}X^{-1/2}f(\breve{H})(\kappa^2B^2+1)B_\kappa^2 f(\breve{H})X^{-1/2}\sqrt{g'(B_\kappa)}h(r),
\end{aligned} \tag{3.48c}$$

$$\begin{aligned}
L_5 = {}& h(r)X^{-1/2}\sqrt{g'(B_\kappa)}\,Com\,\sqrt{g'(B_\kappa)}X^{-1/2}h(r)\\
&- 2h(r)X^{-1/2}\sqrt{g'(B_\kappa)}f(\breve{H})(\kappa^2B^2+1)B_\kappa^2 f(\breve{H})\sqrt{g'(B_\kappa)}X^{-1/2}h(r)。
\end{aligned} \tag{3.48d}$$

证明。我们写作

$$\begin{aligned}
&\check{\mathbf{D}}P = L_1' + L_2';\\
&L_1' = 2f(\check{H})\operatorname{Re}\Big(\big(\check{\mathbf{D}}h(r)\big)g(B_\kappa)h(r)\Big)f(\check{H}),\\
&L_2' = f(\check{H})h(r)\big(\check{\mathbf{D}}g(B_\kappa)\big)h(r)f(\check{H}).
\end{aligned}\tag{3.49}$$

由 (3.37)

$$\check{\mathbf{D}}h(r) = -\int_{\mathbb{C}} \check{R}(z)\mathrm{i}[\check{H}, h(r)]\check{R}(z)\mathrm{d}\mu_{\check{f}}(z);\tag{3.50a}$$

$$\mathrm{i}[\check{H}, h(r)] = 2\operatorname{Re}\big(h'(r)B\big) - \lambda_0\mathrm{i}[\Pi, h(r)] - \mathrm{i}[\check{K}, h(r)].\tag{3.50b}$$

将 (3.50b) 代入 (3.50a)，得到三项，记为 T_1、T_2、T_3。我们可以写成（由交换可知）

$$T_1 = 2\check{f}'(\check{H})h'(r)B + O_\kappa(X^{t-2}) \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{t-1}).$$

利用 (3.42)、(3.44) 和引理 3.9（参见 (3.44) 后讨论的证明）处理 T_2 和 T_3 两项，得到

$$T_2,\, T_3 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{t-2}).$$

接下来，我们将所得公式代入

$$\check{\mathbf{D}}h = 2\check{f}'(\check{H})h'(r)B + \mathcal{O}_\kappa(X^{t-2}) \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{t-1})\tag{3.51}$$

表达式 L_1' 中，得到 $L_1' = L_1 + \mathcal{O}_\kappa(X^{2t-2})$（注意，$f\check{}f' = f$）。显然，$L_1 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-1})$。

对于 L_2'，我们可以假设 $g \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$（由于 B_κ 有界，我们可以在 $\sigma(B_\kappa)$ 外截断g），并再次使用 (3.37)

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{D}}g(B_\kappa) &= -\int_{\mathbb{C}} R_\kappa(z)\big(\check{\mathbf{D}}B_\kappa\big)R_\kappa(z)\mathrm{d}\mu_g(z)\\
&= g'(B_\kappa)\check{\mathbf{D}}B_\kappa + \int_{\mathbb{C}} R_\kappa(z)^2[\check{\mathbf{D}}B_\kappa, B_\kappa]R_\kappa(z)\mathrm{d}\mu_g(z)\\
&= g'(B_\kappa)\check{\mathbf{D}}B_\kappa + \mathcal{O}_\kappa(X^{-2}) \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{-1});
\end{aligned}\tag{3.52}$$

对于最后一个恒等式，我们使用了引理 3.9（及其证明）。显然，右侧的第一项可以替换为其实部。由此得到 $L_2' = L_2 + \mathcal{O}_\kappa(X^{2t-2})$。因此 $L_1' + L_2' = L_1 + L_2 + \mathcal{O}_\kappa(X^{2t-2})$，从而证明 (3.48a)。显然，$L_2 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-1})$。

接下来，为了证明在关于 g 的附加条件下 $L_3 - L_2 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-2})$，我们首先注意到，将 g 在 $\sigma(B_\kappa)$ 之外截断以使其具有紧支撑，显然同样适用于 $(g')^{1/2}$，从而再次可以应用 (3.37)。因此我们可以对 L_2 进行对称化，只需证明

$$\begin{aligned}
&\bar{L}_2 - \bar{L}_3 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-2});\\
&\bar{L}_2 = f(\check{H})h(r)\sqrt{g'(B_\kappa)}\big(\check{\mathbf{D}}B_\kappa\big)\sqrt{g'(B_\kappa)}h(r)f(\check{H}),\\
&\bar{L}_3 = h(r)\sqrt{g'(B_\kappa)}f(\check{H})\big(\check{\mathbf{D}}B_\kappa\big)f(\check{H})\sqrt{g'(B_\kappa)}h(r).
\end{aligned}\tag{3.53}$$

– ˇ（注意 $L_3 = L_{3\circ}$ ）将 (3.51) 和 (3.52) 中的 f 替换为 f 后，我们看到

$$[f(\breve{H}), h(r)] \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{t-1}),\ [f(\breve{H}), \sqrt{g'(B_\kappa)}] \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{-1}),$$

这表明了（3.53）。通过该证明，我们看到 $L_3 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-1})$。或者，我们也可以直接轻易地验证后一个性质。（同样可以验证，$L_4, L_5 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-1})$。）

要证明 $L_4 - L_3 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-2})$，只需证明

$$\begin{aligned} X^{1/2} f(\breve{H}) \mathrm{i}[\breve{H}, B_\kappa] f(\breve{H}) X^{1/2} - f(\breve{H}) \mathrm{i}[\breve{H}, A_\kappa] f(\breve{H}) \\ + 2 f(\breve{H})(\kappa^2 B^2 + 1) B_\kappa^2 f(\breve{H}) \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{-1}). \end{aligned} \tag{3.54}$$

对于第一项，我们代入

$$\mathrm{i}[\breve{H}, B_\kappa] = \mathrm{i}[H, B_\kappa] - \lambda_0 \mathrm{i}[\Pi, B_\kappa] - \mathrm{i}[\breve{K}, B_\kappa].$$

正如我们在引理 3.9 的证明最后一部分中所看到的，这些交换子中的每一个都会产生一个属于 $\breve{\mathcal{B}} \subset \mathfrak{O}_\kappa(X^0)$ 的算子。如果将该项替换为，这仍然成立

$$f(\breve{H}) X^{1/2} \mathrm{i}[\breve{H}, B_\kappa] X^{1/2} f(\breve{H}),$$

事实上，误差项（通过交换 $X^{1/2}$ 和 $f(\breve{H})$ 的因子得到）产生了一个属于 $\mathfrak{O}_\kappa(X^{-1})$ 的算子。另一方面

$$\begin{aligned} f(\breve{H}) \Big(& X^{1/2} \mathrm{i}[\breve{H}, B_\kappa] X^{1/2} - \mathrm{i}[\breve{H}, A_\kappa] + 2(\kappa^2 B^2 + 1) B_\kappa^2 \Big) f(\breve{H}) \\ & = f(\breve{H}) \Big(- 2 \operatorname{Re} \big(\mathrm{i}[\breve{H}, X^{1/2}] B_\kappa X^{1/2} \big) + 2(\kappa^2 B^2 + 1) B_\kappa^2 \Big) f(\breve{H}) \\ & = f(\breve{H}) \Big(- \operatorname{Re} \big(X^{-1/2} 2 B B_\kappa X^{1/2} \big) + 2(\kappa^2 B^2 + 1) B_\kappa^2 \Big) f(\breve{H}) + O_\kappa(X^{-1}) \\ & \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{-1}). \end{aligned}$$

因此，（3.54）得证。

注意到 $\mathrm{Com} \in \mathfrak{O}_\kappa(X^0)$ 和 $\big[\sqrt{g'(B_\kappa)}\, X^{-1/2}\big] \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{-3/2})$，可知$L_5 - L_4 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-2})$，从而完成证明。 □

注 3.11。公式（3.52）是下面这个适用于 $\mathfrak{O}_\kappa(X^t)$ 中算子的通用对易子展开公式的一个例子，参见 [GIS]。因此，对于给定的$S \in \mathfrak{O}_\kappa(X^t)$、$t \in \mathbb{R}$、$g \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ 和 $K \geq 1$

$$\begin{aligned} & [S, g(B_\kappa)] \\ & \quad = - \int_{\mathbb{C}} R_\kappa(z) \mathrm{ad}_{B_\kappa}(S) R_\kappa(z) \mathrm{d}\mu_g(z) \\ & \quad = \sum_{k=1}^{K} \tfrac{(-1)^{k-1}}{k!} g^{(k)}(B_\kappa) \mathrm{ad}_{B_\kappa}^k(S) + R(K); \\ & \qquad R(K) = (-1)^{K+1} \int_{\mathbb{C}} R_\kappa(z)^{K+1} \mathrm{ad}_{B_\kappa}^{K+1}(S) R_\kappa(z) \mathrm{d}\mu_g(z) \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{t-K-1}). \end{aligned} \tag{3.55}$$

在第3.3.3小节的应用中，我们需要更好地控制引理 3.10 的误差项。这里我们说明一种建立这种控制的方法。如前所述

引理第一部分中的函数 g 可以取为紧支撑的，以满足（3.55）的要求。一个主要目标是细化该陈述的右端

$$\check{\mathbf{D}}P - L_1 - L_5 = (L_1' - L_1) + (L_2' - L_5) \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-2}).$$

根据 (3.51)，我们可以写成

$$\begin{aligned} L_1' &= 4f(\check{H})\,\mathrm{Re}\,\big(h'(r)Bg(B_\kappa)h(r)\big)f(\check{H}) \\ &\quad + f(\check{H})\,\mathrm{Re}\,\big(\mathcal{O}_\kappa(X^{t-2})g(B_\kappa)h(r)\big)f(\check{H}) \\ &= L_1 + f(\check{H})\,\mathrm{Re}\,\big(\mathcal{O}_\kappa(X^{t-2})g(B_\kappa)h(r)\big)f(\check{H}). \end{aligned} \tag{3.56}$$

对于 L_2'，我们将 (3.55) 应用于 $S = \check{f}(\check{H})$，得到（对于 $K \geq 2$）

$$\begin{aligned} L_2' &= f(\check{H})h(r)\big(\check{\mathbf{D}}g(B_\kappa)\big)h(r)f(\check{H}) \\ &= \mathrm{i}\sum_{k=1}^{K} \tfrac{(-1)^{k-1}}{k!}\, f(\check{H})h(r)g^{(k)}(B_\kappa)\mathrm{ad}_{B_\kappa}^k(\check{f}(\check{H}))h(r)f(\check{H}) + O_\kappa(X^{2t-K-1}) \\ &= f(\check{H})h(r)g'(B_\kappa)\big(\check{\mathbf{D}}B_\kappa\big)f(\check{H}))h(r)f(\check{H}) + \sum_{k=2}^{K} S_k + O_\kappa(X^{2t-K-1}). \end{aligned} \tag{3.57}$$

项 $S_k \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2t-k})$，并且它们具有适用于第3.3.3小节归纳论证的显式形式。(3.57) 的一个推论是精细化公式

$$L_2' = L_2 + \sum_{k=2}^{K} \mathrm{Re}(S_k) + O_\kappa(X^{2t-K-1}). \tag{3.58}$$

3.2.1.1 光滑符号函数

在引理 3.10 的某些应用中，函数 g 将是一个“光滑符号函数” ζ_ϵ，参见 [AIIS]。它通过具有特殊性质的截断函数 $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ 构造：参数 $\epsilon > 0$ 被视为很小，并定义 $\eta_\epsilon(b) = \frac{1}{\epsilon}\eta(\frac{b}{\epsilon})$，其中 $\eta'(b) > 0$ 对于 $|b| < 1$，$\eta(b) = 0$ 对于 $b \leq -1$，且 $\eta(b) = 1$ 对于 $b \geq 1$。我们可以选择 η，使得 η' 为偶函数，$\sqrt{\eta}$，$\sqrt{\eta'} \in C^\infty(\mathbb{R})$，并且对于某个 $c > 0$

$$\eta'(b) \geq c\,\eta(b) \text{ for } b \in (-1, 1/2]. \tag{3.59}$$

这种 c 的最佳选择对我们并不重要，因为接下来我们只需要以下伪装形式的 (3.59)：对于任意 $\tilde{c} > 0$ 以及所有足够小的 ϵ （$\epsilon^2 \leq \frac{2}{3}c\tilde{c}$即可）

$$(\tfrac{\epsilon}{2} - b)\eta_\epsilon(b) \leq \tilde{c}\,\eta_\epsilon'(b) \text{ for all } b \in \mathbb{R}. \tag{3.60a}$$

还要注意，由于 η_ϵ' 是偶函数

$$1 = \epsilon\eta_\epsilon(b) + \epsilon\eta_\epsilon(-b). \tag{3.60b}$$

令 $\zeta_\epsilon(b) = \eta_\epsilon(b) - \eta_\epsilon(-b)$。

3.3 正交换子估计

我们将证明 H 在 λ_0处可能存在的特征函数的性质。若情形下这些特征函数不存在，我们将证明 H 在 λ_0附近的各种预解估计。我们的分析基于引理 3.10，以及 [IS2],[AIIS] 和 [GIS]的正交换子方法。为方便起见，本节将指标为 $s = 1/2$ 的 Besov空间简记为 $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{1/2}$, $\mathcal{B}^* := \mathcal{B}^*_{1/2}$ $\mathcal{B}^*_0 := \mathcal{B}^*_{1/2,\ 0}$。（但请注意，在小节 3.3.2中，同一记号的含义略有不同。）

3.3.1 Rellich 型定理

作为第一个应用，我们证明以下结果，其大体上模仿了 [IS2]。

定理3.12。 $\mathcal{B}^*_0$ 中在 λ_0处，或在任意充分接近的实 λ'_0处的每个广义特征函数，都属于 L^2_∞。

证明。 我们将使用 Mourre估计 (3.13)，取 $\lambda = \lambda_0$，例如取正的数 $\epsilon = d(\lambda_0)$，并取 $R = R_0 \geq 1$ 充分大且固定。与陈述一致， $\kappa_0 > 0$ 也固定（且很小）；我们可以自由地对$\kappa \in (0, \kappa_0]$ 使用该估计，并对 λ_0 的一个固定（很小）邻域 $\mathcal{U}$ 以及一个固定的紧的 K使用该估计。因此，在证明过程中，只要方便，我们就可以自由选择 $\kappa > 0$ 非常小（注意， $\mathcal{U}$和 K不依赖于 κ）。现在设 $\phi \in \mathcal{B}^*_0$且 $(\breve{H} - \lambda'_0)\phi = 0$，其中 $|\lambda_0 - \lambda'_0|$很小，则可以写成 $\phi = f(H)\phi$，其中 $f \in C^\infty_c(\mathcal{U})$、$f(\lambda'_0) = 1$，且 f 为实数。

令 $y_\varepsilon(r) = \frac{1}{1+\varepsilon r}$ 和 $x_\varepsilon(r) = r y_\varepsilon(r)$，其中 $\varepsilon \in [0, 1]$；并令 X_ε 和 Y_ε 分别为乘以 x_ε 和 y_ε的乘法算子（此记号与 (3.22) 一致）。下文中这些量仅与 $R = R_0$ 一起使用。注意，$X := X_0$ 与第3.2节中使用的记号一致，且 $X_\varepsilon = XY_\varepsilon$。还要注意， $\nabla x_\varepsilon(r) = y^2_\varepsilon \omega$，因此例如 $\mathrm{i}[H, X_\varepsilon] = 2Y_\varepsilon B Y_\varepsilon$。

为方便起见，我们引入以下术语，用于描述 L^2, $t \in \mathbb{R}$ 上算子族 $(T_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1} \subset \mathfrak{O}_\kappa(X^t)$。若 (T_ε) 一致地具有 κ阶 t，则称其

$$\forall \kappa \in (0, \kappa'_0]\ \forall s \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \quad \sup_{\varepsilon \in (0,1]} \| X^{s-k-t} \mathrm{ad}^k_{B_{\kappa,R_0}}(T_\varepsilon) X^{-s} \| < \infty.$$

我们将用 $T_\varepsilon = \mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(X^t)$ 和 $T_\varepsilon \in \mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(X^t)$ 表示算子 T_ε 属于算子族 (T_ε)，且该算子族一致地具有κ阶 t。若 (S_ε) 和 (T_ε) 分别一致地具有 κ阶 s 和 t，则 $(S_\varepsilon T_\varepsilon)$ 一致地具有 κ阶 $s + t$。

一。我们证明 $\phi \in L^2_{-1/2}$。任取 $\delta \in (0, 1/2)$。我们将考虑“传播观测量”

$$P_\varepsilon = f(\breve{H}) X^\delta_\varepsilon \zeta_\epsilon(B_\kappa) X^\delta_\varepsilon f(\breve{H}),\ \varepsilon \in (0, 1].$$

显然 $P_\varepsilon \in \mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(X^{2\delta})$。这里使用的正参数 ϵ 稍后将固定为一个足够小的值。注意，由于因子 y_ε的出现， X_ε 和 P_ε 是有界的。最终，将令 $\varepsilon \to 0$，以去掉这一因子。更确切地说，我们将证明 $\mathrm{i}[\breve{H}, P_\varepsilon]$ 的某种“本质正性”在 $\varepsilon \to 0$极限下仍然成立。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，函数 $\phi_n = \chi_n(r)\phi \in H^1$ （参见记号 (1.29)），

$(\breve{H}-\lambda_0')\phi_n=[\breve{H},\chi_n]\phi$，因此得到期望值（一般采用记号 $\langle T\rangle_\phi=\langle\phi,\ T\phi\rangle$）

$$\langle \mathrm{i}[\breve{H},P_\varepsilon]\rangle_{\phi_n}=-2\,\mathrm{Re}\langle \mathrm{i}[\breve{H},\chi_n]P_\varepsilon\chi_n\rangle_\phi. \tag{3.61a}$$

由于 $\phi\in\mathcal{B}_0^*$ 右侧的项在 $n\to\infty$ 时趋于零。写作 $H=H-\lambda_0\Pi-K$ 时，这一结论对来自 H 的贡献显然成立。对于其余各项，交换子实际上是 X^{-2} 阶的，参见 (3.42) 及其后续讨论，因此它们的贡献在 $n\to\infty$ 时也趋于零。在此极限下，仍需研究 (3.61a) 的左端。

设 $S_\varepsilon=Y_\varepsilon^2X_\varepsilon^{\delta-1}\big(\in\mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(X^{\delta-1})\big)$ 且 $\theta_\epsilon=\sqrt{\eta_\epsilon'}$。利用引理 3.10，我们计算得

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{i}[\breve{H},P_\varepsilon]\rangle_{\phi_n}&=\langle\breve{\mathbf{D}}P_\varepsilon\rangle_{\phi_n}=\langle L_1+L_5+\mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(X^{2\delta-2})\rangle_{\phi_n};\\
L_1&=4\delta f(\breve{H})\,\mathrm{Re}\left((\kappa^2B^2+1)S_\varepsilon B_\kappa\zeta_\varepsilon(B_\kappa)X_\varepsilon^\delta\right)f(\breve{H}),\\
X^{1/2}X_\varepsilon^{-\delta}L_5X_\varepsilon^{-\delta}X^{1/2}&=\theta_\epsilon(B_\kappa)f(\breve{H})\mathrm{i}[\breve{H},A_\kappa]f(\breve{H})\theta_\epsilon(B_\kappa)\\
&\quad+\theta_\epsilon(-B_\kappa)f(\breve{H})\mathrm{i}[\breve{H},A_\kappa]f(\breve{H})\theta_\epsilon(-B_\kappa)\\
&\quad-2\theta_\epsilon(B_\kappa)f(\breve{H})(\kappa^2B^2+1)B_\kappa^2f(\breve{H})\theta_\epsilon(B_\kappa)\\
&\quad-2\theta_\epsilon(-B_\kappa)f(\breve{H})(\kappa^2B^2+1)B_\kappa^2f(\breve{H})\theta_\epsilon(-B_\kappa).
\end{aligned}$$

注意到含有因子 κ^2B^2 的项具有本质正性，对其进行对称化后可得

$$L_1\geq 4\delta f(\breve{H})Y_\varepsilon X_\varepsilon^{\delta-1/2}B_\kappa\zeta_\varepsilon(B_\kappa)X_\varepsilon^{\delta-1/2}Y_\varepsilon f(\breve{H})+O_{\mathrm{unf}}(X^{2\delta-2}). \tag{3.61b}$$

利用证明开始处讨论的 Mourre 估计型式，以及 $\tilde{f}$ 的因子（后者可以直接插入，以界定 κ^2B^2），对于充分小的 $\kappa>0$，我们可以估计

$$\begin{aligned}
L_5&\geq X_\varepsilon^\delta X^{-1/2}\theta_\epsilon(B_\kappa)f(\breve{H})\big(\tilde{d}(\lambda_0)-K\big)f(\breve{H})\theta_\epsilon(B_\kappa)X^{-1/2}X_\varepsilon^\delta\\
&\quad+X_\varepsilon^\delta X^{-1/2}\theta_\epsilon(-B_\kappa)f(\breve{H})\big(\tilde{d}(\lambda_0)-K\big)f(\breve{H})\theta_\epsilon(-B_\kappa)X^{-1/2}X_\varepsilon^\delta\\
&\quad-4\epsilon^2f(\breve{H})X_\varepsilon^\delta X^{-1/2}\Big(\eta_\epsilon'(B_\kappa)+\eta_\epsilon'(-B_\kappa)\Big)X^{-1/2}X_\varepsilon^\delta f(\breve{H})+\mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(X^{2\delta-2}).
\end{aligned}$$

我们要求 $\epsilon>0$ 足够小，使得 $8\epsilon^2<d(\lambda_0)$，从而推出 $d(\lambda_0)-4\epsilon^2>\tilde{d}(\lambda_0)/2$。我们将使用 (3.60a)，其中 $\tilde{c}=d(\lambda_0)/8\delta$ 以及任何可能更小的 ϵ，并在下文中将其视为固定值。现在我们取一个足够大的 $m\in\mathbb{N}$，使得（对于这个 ϵ）

$$\tilde{d}(\lambda_0)-4\epsilon^2-\|K-\chi_mK\chi_m\|\geq\tilde{d}(\lambda_0)/2,$$

并注意到算子 $\chi_mK\chi_m$ 的贡献属于 $\mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(X^{2\delta-2})$。于是我们估计

$$\begin{aligned}
L_5&\geq 2^{-1}\tilde{d}(\lambda_0)f(\breve{H})X_\varepsilon^\delta X^{-1/2}\Big(\eta_\epsilon'(B_\kappa)+\eta_\epsilon'(-B_\kappa)\Big)X^{-1/2}X_\varepsilon^\delta f(\breve{H})+\mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(X^{2\delta-2})\\
&\geq 4\delta\tilde{c}f(\breve{H})Y_\varepsilon X_\varepsilon^{\delta-1/2}\Big(\eta_\epsilon'(B_\kappa)+\eta_\epsilon'(-B_\kappa)\Big)X_\varepsilon^{\delta-1/2}Y_\varepsilon f(\breve{H})+\mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(X^{2\delta-2}).
\end{aligned}$$

结合此界与 (3.61b)，并利用 (3.60a) 和 (3.60b)，我们得出以下下界，

$$\begin{aligned}
L_1+L_5&\geq 2\delta\epsilon f(\breve{H})Y_\varepsilon X_\varepsilon^{\delta-1/2}\big(\eta_\epsilon(B_\kappa)+\eta_\epsilon(-B_\kappa)\big)X_\varepsilon{}^{\delta-1/2}Y_\varepsilon f(\breve{H})+\mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(X^{2\delta-2})\\
&=2\delta f(\breve{H})X_\varepsilon^{2\delta-1}Y_\varepsilon^2f(\breve{H})+\mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(X^{2\delta-2}).
\end{aligned}$$

因此，我们从这些论证中得到一致界

$$\|X_\varepsilon^{\delta-1/2}Y_\varepsilon\phi\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|X_\varepsilon^{\delta-1/2}Y_\varepsilon f(\breve{H})\phi_n\|^2 \le C\|X^{\delta-1}\phi\|^2. \tag{3.62}$$

令 $\varepsilon\to 0$，由（3.62）可得 $\phi\in L^2_{\delta-1/2}\subset L^2_{-1/2^\circ}$

II. 我们通过自举论证证明 $\phi\in L^2_\infty$。因此，假设我们已经证明，对于某个 $m\in\mathbb{N}$，有 $\phi\in L^2_{(m-1)/2-1/2}$。在步骤*I*中，我们已经对 $m=0$ 证明了这一点。于是，通过重复先前的过程、但现在使用观测量，我们得出结论：$\phi\in L^2_{m/2-1/2}$

$$P=P_\varepsilon=f(\breve{H})X_\varepsilon^{m/2}\zeta_\epsilon(B_k)X_\varepsilon^{m/2}f(\breve{H}),\ \varepsilon>0,$$

从而得到界

$$\|Y_\varepsilon X_\varepsilon^{m/2-1/2}\phi\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|Y_\varepsilon X_\varepsilon^{m/2-1/2}f(\breve{H})\phi_n\|^2 \le C\|X^{(m-1)/2-1/2}\phi\|^2. \tag{3.63}$$

令 $\varepsilon\to 0$，我们推得$\phi\in L^2_{m/2-1/2^\circ}$

□

3.3.2 LAP界

我们证明一个Besov空间极限吸收原理界，其主要仿照[AIIS]。

˘**定理3.13**。 假设 λ_0 不是 H的特征值。那么存在 λ_0 的一个邻域 $I\subset\mathbb{R}$ 以及 $C>0$，使得对于所有满足$\mathrm{Re}\, z\in I$ 的 $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 以及所有 $\psi\in\mathcal{B}$

$$\|\breve{R}(z)\psi\|_{\mathcal{B}^*}\le C\|\psi\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.64}$$

为证明这个界，我们将使用以下由$\nu\in\mathbb{N}_0$ 参数化并定义在 $\mathbb{R}_+$上的权函数

$$\Theta=\Theta_\nu(r)=1-\big(1+r/2^\nu\big)^{-1}.$$

注意到导数公式

$$\Theta^{(k)}=(-1)^{k-1}k!2^{-k\nu}\big(1+r/2^\nu\big)^{-1-k};\quad k\ge 1,$$

我们得到以下界

$$\begin{aligned}&0<\Theta\le\min\{1,r/2^\nu\},\\ &0<(-1)^{k-1}\Theta^{(k)}\le k(-1)^k r^{-1}\Theta^{(k-1)}\le k!r^{-k}\Theta;\quad k\ge 2.\end{aligned} \tag{3.65}$$

下面我们将考虑由命题3.3中出现的参数 R 给出的组合 $\Theta=\Theta_\nu(r_R)$。事实上，我们将以与定理3.12证明开头基本相同的方式应用命题3.3，特别地，仅针对 $R=R_0$。由于 $\lambda_0\notin\sigma_{\mathrm{pp}}(\breve{H})$，现在可以取 $K=0$，因此在(3.13)中可将 $2d(\lambda_0)-\epsilon-K$替换为 $d(\lambda_0)\tilde{}$ $\tilde{}$。更确切地说，我们使用Mourre估计

˜(3.13)，其中 $\epsilon = d(\lambda_0)/2 > 0$ ，并将 $R = R_0 \geq 1$ 固定得足够大。与这一断言一致， $\kappa_0 > 0$ 也被固定（较小，特别是 $\kappa_0 \leq \kappa_0'$），并且我们可以自由地对 $\kappa \in (0, \kappa_0]$使用该估计，其中 $\mathcal{U}$ 是λ_0的一个固定的（较小的）开邻域，事实上取 $K = 0$，从而得到上文所述的下界 $d(\lambda_0)$。由维里定理， $\sigma_{\mathrm{pp}}(\breve{H}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$。我们固定 λ_0˘的一个紧邻域 $I \subset \mathcal{U}$，使得在 $\mathcal{B}_0^*$ 中 H 不存在任何非零广义特征函数在I的任一点处成立；这得益于定理3.12，因此是可行的。正如我们将看到的，这个 I 在定理3.13中有效。取一个实值的 $f \in C_c^\infty(\mathcal{U})$，使得在 I的一个邻域上 $f = 1$ 。

下面我们用记号 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}^*$ 表示以 r_{R_0}（而非像之前那样以 $|x|$ ）定义的Besov空间，后者简记为 $r = r_{R_0}$。当然，空间 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(r)$ 和 $\mathcal{B}(|x|)$ 相同，伴随空间也类似（这使我们可以改变 (3.64) 中记号的含义）。我们本可以像前一小节那样用 X 表示乘以 r 的乘法算子，不过我们发现只使用记号 r 更方便，尽管它大多表示乘以 r的算子。我们将赋予记号 $\mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(r^t)$ 不同于（尽管密切相关于）前一小节所用的 $\mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(X^t)$ 的含义。更准确地说，我们对定义在 L^2 上的算子族 $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ 引入如下术语。

我们称 $(T_\nu) \subset \mathfrak{O}_\kappa(X^t)$ 是一致具有 κ 阶 t （对于 $t \in \mathbb{R}$）当且仅当

$$\forall \kappa \in (0, \kappa_0'] \; \forall s \in \mathbb{R} \; \forall k \in \mathbb{N}_0 : \\ \sup_{\nu \in \mathbb{N}_0} \|r^{s-k-t} \mathrm{ad}^k_{B_{\kappa,R_0}}(T_\nu) r^{-s}\| + \sup_{\nu \in \mathbb{N}_0} 2^{\nu/2} \|r^{s-k-t-1/2} \mathrm{ad}^k_{B_{\kappa,R_0}}(T_\nu) r^{-s}\| < \infty.$$

对于此类族中的元素 T_ν，我们记为 $T_\nu = \mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(r^t)$ 和 $T_\nu \in \mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(r^t)$。注意，例如 $\Theta^{1/2}$，作为复合函数 $\Theta_\nu^{1/2}(r(\cdot))$ 考虑时，一致地具有 κ- 阶 0，参见 (3.65)。如果 $T_\nu \in \mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(r^t)$ 且 S 是引理 3.9 中列出的任一算子（其中 $R = R_0$），那么 (ST_ν) 和 $(T_\nu S)$ 也一致地具有 κ-阶 t。更一般地，对于任意 $T_\nu \in \mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(r^t)$ 和 $S \in \mathfrak{O}_\kappa(X^s)$，算子 ST_ν、 $T_\nu S \in \mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(r^{s+t})$。类似地，如果 $S_\nu \in \mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(r^s)$ 和 $T_\nu \in \mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(r^t)$，那么 $S_\nu T_\nu$、 $T_\nu S_\nu \in \mathfrak{O}_{\mathrm{unf}}(r^{s+t})$。

引理3.14。 存在 $C > 0$，使得对所有满足 实部$z \in I$ 的 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，以及所有 $\nu \in \mathbb{N}_0$ 和 $\psi \in \mathcal{B}$

$$\|\Theta'^{1/2} \phi\|^2 \leq C\big(\|\phi\|_{\mathcal{B}^*} \|\psi\|_{\mathcal{B}} + \|\psi\|_{\mathcal{B}}^2 + 2^{-\nu/2} \|r^{-3/4}\phi\|^2\big), \tag{3.66a}$$

$$\|\phi\|_{\mathcal{B}^*}^2 \leq C\big(\|\psi\|_{\mathcal{B}}^2 + \|r^{-3/4}\phi\|^2\big); \tag{3.66b}$$

这里 $\Theta = \Theta_\nu(r(\cdot))$ 以及 $\phi = \breve{R}(z)\psi$。

证明。 对 $\nu \geq 0$ 取上确界，即可由 (3.66a) 推出界 (3.66b)。因此，只需证明 (3.66a)。

我们考虑 $P_\nu = f(\breve{H})\Theta^{1/2}\zeta_\epsilon(B_\kappa)\Theta^{1/2} f(\breve{H})$，其中 B_κ和 ζ_ϵ如前一小节所述，f是上文引入的函数。注意， $P_\nu = \mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(r^0)$。与之前一样，我们可以自由选择足够小的 $\kappa > 0$ ，而参数 $\epsilon > 0$ 也将再次固定为足够小。

令 $\theta_\epsilon = \sqrt{\eta'_\epsilon}$。我们利用引理 3.10 进行计算

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{i}[\breve{H}, P_\nu]\rangle_\phi &= \langle \breve{\mathbf{D}} P_\nu\rangle_\phi = \langle L_1 + L_5 + \mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(r^{-2})\rangle_\phi;\\
L_1 &= 2f(\breve{H})\,\mathrm{Re}\,\big((\kappa^2B^2+1)\tfrac{\Theta'}{\Theta^{1/2}}B_\kappa\zeta_\epsilon(B_\kappa)\Theta^{1/2}\big)f(\breve{H}),\\
r^{1/2}\Theta^{-1/2}L_5\Theta^{-1/2}r^{1/2} &= \theta_\epsilon(B_\kappa)f(\breve{H})\mathrm{i}[\breve{H},A_\kappa]f(\breve{H})\theta_\epsilon(B_\kappa)\\
&\quad+\theta_\epsilon(-B_\kappa)f(\breve{H})\mathrm{i}[\breve{H},A_\kappa]f(\breve{H})\theta_\epsilon(-B_\kappa)\\
&\quad-2\theta_\epsilon(B_\kappa)f(\breve{H})(\kappa^2B^2+1)B_\kappa^2f(\breve{H})\theta_\epsilon(B_\kappa)\\
&\quad-2\theta_\epsilon(-B_\kappa)f(\breve{H})(\kappa^2B^2+1)B_\kappa^2f(\breve{H})\theta_\epsilon(-B_\kappa).
\end{aligned}$$

注意到包含因子 κ^2B^2 的项具有本质正性，对其进行对称化后得到

$$L_1 \geq 2f(\breve{H})\Theta'^{1/2}B_\kappa\zeta_\varepsilon(B_\kappa)\Theta'^{1/2}f(\breve{H}) + O_{\mathrm{unf}}(r^{-2}). \tag{3.67}$$

利用证明开头所讨论的 Mourre估计 型式以及因子 $\tilde{f}(\breve{H})$（后者可以免费插入以界定 κ^2B^2），对于充分小的 $\kappa>0$，我们可以估计

$$L_5 \geq (\tilde{d}(\lambda_0) - 4\epsilon^2)f(\breve{H})\Theta^{1/2}r^{-1/2}\Big(\eta'_\epsilon(B_\kappa)+\eta'_\epsilon(-B_\kappa)\Big)r^{-1/2}\Theta^{1/2}f(\breve{H}) + \mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(r^{-2}).$$

我们要求 $\epsilon>0$ 足够小，使得 $8\epsilon^2 < \tilde{d}(\lambda_0)$，从而 $\tilde{d}(\lambda_0) - 4\epsilon^2 \geq \tilde{d}(\lambda_0)/2$。今后我们将使用 (3.60a)，其中 $\tilde{c} = \tilde{d}(\lambda_0)/4$，并将任何可能更小的 ϵ 视为固定值。因此，将上述界与 (3.67) 结合，并利用界 $r\Theta' \leq \Theta$，我们最终得到以下下界

$$\begin{aligned}
L_1 + L_5 &\geq \epsilon f(\breve{H})\Theta'^{1/2}\big(\eta_\epsilon(B_\kappa)+\eta_\epsilon(-B_\kappa)\big)\Theta'^{1/2}f(\breve{H}) + \mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(r^{-2})\\
&= f(\breve{H})\Theta' f(\breve{H}) + \mathcal{O}_{\mathrm{unf}}(r^{-2}).
\end{aligned}$$

还要注意平凡的界 $\langle\Theta'\rangle_{(1-f(\breve{H}))\phi} \leq C\|\psi\|_{\mathcal{B}}^2$（利用 $\mathrm{Re}\, z \in I$），最终得到界

$$\|\Theta'^{1/2}\phi\|^2 \leq 2\langle \mathrm{i}[\breve{H}, P_\nu]\rangle_\phi + C\big(2^{-\nu/2}\|r^{-3/4}\phi\|^2 + \|\psi\|_{\mathcal{B}}^2\big). \tag{3.68}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{i}[\breve{H}, P_\nu]\rangle_\phi &= \mathrm{i}\langle\psi, P_\nu\phi\rangle - \mathrm{i}\langle P_\nu\phi,\psi\rangle + 2(\mathrm{Im}\, z)\langle P_\nu\rangle_\phi\\
&\leq 2\|P_\nu\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})}\|\psi\|_{\mathcal{B}}\|\phi\|_{\mathcal{B}^*} + 2\|P_\nu\||\mathrm{Im}\,\langle\breve{H}-z\rangle_\phi|\\
&\leq 2(\|P_\nu\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} + \|P_\nu\|)\|\psi\|_{\mathcal{B}}\|\phi\|_{\mathcal{B}^*}\\
&\leq C\|\phi\|_{\mathcal{B}^*}\|\psi\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

结合（3.68）和（3.69）可得（3.66a）。 □

定理*3.13*的证明。令 I 如引理3.14所述。反设 $z_n \to \lambda'_0 \in I$、$\|\psi_n\|_{\mathcal{B}} \to 0$ 和 $\|\phi_n\|_{\mathcal{B}^*} = 1$，其中 $\phi_n = \breve{R}(z_n)\psi_n$（这里 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}^*$ 根据 $r = r_{R_0}$ 定义）。固定 $s \in (1/2, 3/4)$。不妨设存在 $\mathsf{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty}\phi_n =: \phi \in L^2_{-s}$。由局部紧性和能量估计，我们很容易看到（使用记号（1.29）和 $\chi_m = \chi_m(r)$），

$$\forall m \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n\to\infty}\chi_m\phi_n = \chi_m\phi \text{ in } H^1.$$

此外，由（3.66a）

$$\exists C>0\,\forall m\in\mathbb{N}\,\forall \nu\in\mathbb{N}_0:\quad \|\Theta'^{1/2}\chi_m\phi\|^2=\lim_{n\to\infty}\|\Theta'^{1/2}\chi_m\phi_n\|^2\le C2^{-\nu/2}.$$

由这个界可知 $\phi\in\mathcal{B}_0^*$，又由于（$\breve{H}-\lambda_0'$）$\phi=0$，我们得到 $\phi=0$（参见定理3.12）。由局部紧性可知 $\lim_{n\to\infty}\phi_n=\phi=0$ in $L^2_{-3/4}$，再根据（3.66b），我们推得 $\lim_{n\to\infty}\|\phi_n\|^2_{\mathcal{B}^*}=0$，这与假设对所有 n都有 $\|\phi_n\|_{\mathcal{B}^*}=1$ 相矛盾。 □

3.3.3 微局部估计与极限吸收原理

我们证明预解式 $\breve{R}(z)$ 的微局部估计，大体上仿照 [GIS] 和[AIIS]。与 [GIS] 中一样，我们随后得到预解式幂的类似估计，由此可得 $\breve{H}$ near λ_0处的极限吸收原理（LAP）。

我们假设 $\lambda_0\notin\mathrm{Thr}(\breve{H})$。由于我们不需要使用命题3.3中采用最优常数的最精确版本的这些微局部估计，因此我们将简化论述，并完全按照前一小节开头的方式进行，此处不再重复。（更精确的版本可通过将引理 3.15 中的 $\tilde{d}(\lambda_0)/2$ 替换为任何小于 $d(\lambda_0)$ 的正数得到。）给定邻域 $I\ni\lambda_0$，我们定义 $I_\pm=\{z\,|\,\mathrm{Re}\ z\in I、\ \pm\mathrm{Im}\ z>0\}$ 和 $I_{\mathbb{C}}=I_+\cup I_-$。

我们首先展示归纳过程第一步的一个版本，即[GIS],，参见 [AIIS]。对所有 $\sigma>0$，记号 $\mathcal{G}^\sigma_-$ 和 $\mathcal{G}^\sigma_+$ 分别表示支集包含于 $(-\infty,\sigma)$ 和 $(-\sigma,\infty)$ 中的实函数 $g\in C^\infty(\mathbb{R})$ 类。

引理 3.15。在上述条件下，设 $\tilde{\sigma}>0$ 由 $\tilde{\sigma}^2=\tilde{d}(\lambda_0)/2$ 给出，并设 $\sigma\in(0,\tilde{\sigma})$。存在 $\breve{\kappa}_0\in(0,\kappa_0]$，使得对任意$\chi(\pm\cdot<\sigma)\in\mathcal{G}^\sigma_\pm$ 以及 $t\in(0,1/2)$，以下界成立。

$$\forall\kappa\in(0,\breve{\kappa}_0]\,\exists C>0\,\forall z\in I_\pm:\quad \|\chi(\pm B_\kappa<\sigma)\breve{R}(z)\|_{\mathcal{L}(L^2_{1-t},L^2_{-t})}\le C. \tag{3.70}$$

证明。 设 $t\in(0,1/2)$ 和 $\delta=1/2-t$。令 $z\in I_+$、$\psi\in L^2_{1-t}$ 和 $\phi=\breve{R}(z)\psi$（我们只考虑 I_+）。对于 $\epsilon>0$（且满足 $R=R_0$），我们引入如下的 κ-阶算子P，

$$P=f(\breve{H})X^\delta g_\epsilon(B_\kappa)X^\delta f(\breve{H});\quad g_\epsilon(b)=-(\sigma+2\epsilon-b)^{2\delta}\eta_\epsilon^2(\sigma-b). \tag{3.71}$$

我们计算

$$\tfrac{1}{2}(\sigma+2\epsilon-b)^{2t}g_\epsilon'(b)=\delta\eta_\epsilon^2(\sigma-b)+(\sigma+2\epsilon-b)(\eta_\epsilon\eta_\epsilon')(\sigma-b), \tag{3.72}$$

注意到 $g_\epsilon'\ge0$ 以及 $(g_\epsilon')^{1/2}\in C^\infty$，可知引理 3.10 的全部结论均适用。令 $\theta_\epsilon=\sqrt{g_\epsilon'}$，可直接得到

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{i}[\breve{H},P]\rangle_\phi&=\langle\breve{\mathbf{D}}P\rangle_\phi=\langle L_1+L_5+\mathcal{O}_\kappa(X^{2\delta-2})\rangle_\phi;\\ L_1&=4\delta f(\breve{H})\,\mathrm{Re}\left((\kappa^2B^2+1))X^{\delta-1}B_\kappa g(B_\kappa)X^\delta\right)f(\breve{H}),\\ X^tL_5X^t&=\theta_\epsilon(B_\kappa)f(\breve{H})\mathrm{i}[\breve{H},A_\kappa]f(\breve{H})\theta_\epsilon(B_\kappa)\\ &\quad-2\theta_\epsilon(B_\kappa)f(\breve{H})(\kappa^2B^2+1)B_\kappa^2f(\breve{H})\theta_\epsilon(B_\kappa).\end{aligned}$$

令 $T = (\sigma + 2\epsilon - B_\kappa)^{-t}\eta_\epsilon(\sigma - B_\kappa)X^{-t}f(\breve{H})$，我们可以估计

$$\begin{aligned} L_1 &\geq 4\delta f(\breve{H})X^{-t}B_\kappa g(B_\kappa)X^{-t}f(\breve{H}) + \mathcal{O}_\kappa(X^{2\delta-2}) \\ &\geq 4\delta T^*\big(B_\kappa^2 - (\sigma+\epsilon)(\sigma+2\epsilon)\big)T + \mathcal{O}_\kappa(X^{2\delta-2}). \end{aligned}$$

为给出 L_5 的界，我们首先固定 $\breve{\kappa}_0 \in (0, \kappa_0]$，使其满足 $C' = \|\tilde{f}(\breve{H})B^4\tilde{f}(\breve{H})\|$，并取任意充分小的 $\epsilon' > 0$，常数

$$c' = \tilde{d}(\lambda_0) - 2(\sigma+\epsilon')(\sigma+2\epsilon') - 2\breve{\kappa}_0^2 C' \text{ is positive.} \tag{3.73}$$

于是，对于所有 $\kappa \in (0, \breve{\kappa}_0]$ 和 $\epsilon \in (0, \epsilon']$，(3.72) 右端的第二项贡献一个非负项，从而得到

$$\begin{aligned} L_5 &\geq X^{-t}f(\breve{H})\big(\tilde{d}(\lambda_0) - 2\kappa^2 C' - 2B_\kappa^2\big)g'(B_\kappa)f(\breve{H})X^{-t} + \mathcal{O}_\kappa(X^{2\delta-2}) \\ &\geq 2\delta T^*\big(\tilde{d}(\lambda_0) - 2\kappa^2 C' - 2B_\kappa^2\big)T + \mathcal{O}_\kappa(X^{2\delta-2}). \end{aligned}$$

注意到含有 B_κ^2 的项相互消去，这些界给出下界

$$\begin{aligned} \breve{\mathbf{D}}P &\geq 2\delta T^*\big(-2(\sigma+\epsilon)(\sigma+2\epsilon) + \tilde{d}(\lambda_0) - 2\kappa^2 C'\big)T + \mathcal{O}_\kappa(X^{2\delta-2}) \\ &\geq 2\delta c' T^*T + \mathcal{O}_\kappa(X^{2\delta-2}); \quad \kappa \in (0, \breve{\kappa}_0],\ \epsilon \in (0, \epsilon']. \end{aligned} \tag{3.74}$$

接下来，引入 $S = \eta_\epsilon(\sigma - B_\kappa)X^{-t}$，并利用 B_κ 有界这一事实，得到

$$\|Sf(\breve{H})\phi\| \leq C_1\|T\phi\|.$$

采用记号 $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{L^2_s}$，我们还注意到

$$\|S(1 - f(\breve{H})\phi\| \leq C_2\|\psi\|_{\delta-1/2}.$$

我们得出结论：

$$\|S\phi\|^2 \leq C_3\big(\|T\phi\|^2 + \|\psi\|^2_{\delta-1/2}\big).$$

将这个界与（3.74）结合，我们得到

$$c\|S\phi\|^2 \leq \langle\breve{\mathbf{D}}P\rangle_\phi + C_4\big(\|\phi\|^2_{\delta-1} + \|\psi\|^2_{\delta-1/2}\big); \quad c = 2\delta c'/C_3.$$

另一方面，对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \langle\breve{\mathbf{D}}P\rangle_\phi =\ & \mathrm{i}\langle\psi, P\phi\rangle - \mathrm{i}\langle P\phi, \psi\rangle + 2(\operatorname{Im} z)\langle P\rangle_\phi \\ \leq & C\big(\|S\phi\| + \|\phi\|_{\delta-3/2}\big)\,\|\psi\|_{\delta+1/2} \\ \leq & C\varepsilon\big(\|S\phi\|^2 + \|\phi\|^2_{\delta-3/2}\big) + C\varepsilon^{-1}\|\psi\|^2_{\delta+1/2}. \end{aligned}$$

我们选择 $\varepsilon = c/(2C)$，从而得到

$$\tfrac{c}{2}\|S\phi\|^2 \leq C_5\big(\|\phi\|^2_{\delta-1} + \|\psi\|^2_{\delta+1/2}\big).$$

最后，我们调用定理3.13并得出结论（经过一次交换）对于所有$\kappa \in (0, \check{\kappa}_0]$ 和 $\epsilon \in (0, \epsilon']$

$$\|\eta_\epsilon(\sigma - B_\kappa)\phi\|^2_{\delta-1/2} \le C_6\|\psi\|^2_{\delta+1/2}. \tag{3.75}$$

这就完成了证明，因为对于任意给定的函数 $\chi = \chi(\cdot < \sigma)$，当 ϵ 足够小时，我们可以写成 $\chi = \epsilon\chi\eta_\epsilon(\sigma - \cdot)$，于是对于任意 $\kappa \in (0, \check{\kappa}_0]$ 界

$$\|\chi(B_\kappa < \sigma)\phi\|_{\delta-1/2} \le C_7\|\eta_\epsilon(\sigma - B_\kappa)\phi\|_{\delta-1/2} \le C_8\|\psi\|_{\delta+1/2}.$$

□

命题 3.16。 在引理 *3.15* 的条件下，对于任意 $t < 1/2$，同样的断言成立（即去掉引理中的约束 $t > 0$）。

证明。 令 $J_m = \frac{1}{4}\big([2, 3) - m\big)$； $m \in \mathbb{N}$。我们在前面的证明中看到，选择与（3.73）一致的 $\check{\kappa}_0 = \check{\kappa}_0(\sigma) \in (0, \kappa_0]$，对于任意给定的 $\sigma \in (0, \tilde{\sigma})$ 都成立，特别地，我们得到了带有 $t \in J_1$ 的（3.70）。我们以这种方式固定 $\check{\kappa}_0 = \check{\kappa}_0(\sigma)$，以及（3.73）中的另一个正常数 $\epsilon' = \epsilon'(\sigma)$，并通过归纳法证明断言 $q(m)$：

$$\forall \sigma \in (0, \tilde{\sigma})\, \forall t \in J_m\, \forall g \in \mathcal{G}^\sigma_\pm\, \forall \kappa \in (0, \check{\kappa}_0(\sigma)] : \\ \sup_{z \in I_\pm} \|g(B_\kappa)\breve{R}(z)\|_{\mathcal{L}(L^2_{1-t}, L^2_{-t})} < \infty.$$

由于我们已经证明了 $q(1)$，因此可以假设对于给定的 $m \ge 2$， $q(m-1)$ 已知，接下来只需验证 $q(m)$。

设定 $t \in J_m$ 和 $\kappa \in (0, \check{\kappa}_0]$，并再次引入 $\delta = 1/2 - t$。设 $z \in I_+$、$\psi \in L^2_{1-t}$ 和 $\phi = \breve{R}(z)\psi$（我们只考虑 I_+）。对于 $\epsilon \in (0, \epsilon']$，我们再次考虑 (3.71)。根据引理 3.15 证明末尾的论证，只需对任意这样的 ϵ 证明 (3.75) 即可。为此，我们使用与之前相同的证明方案；然而，由于现在可能有 $\delta - 1 \ge -1/2$，我们不能以相同方式使用定理3.13。相反，我们需要将交换子展开公式 (3.55) 与引理 3.10 结合起来，这样便可以将归纳假设与定理3.13结合使用。这一点已经在注 3.11 中讨论过。

首先，我们考察以下部分的贡献 的(3.56)，即我们考察

$$Q_{2\delta-2} = f(\breve{H})\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{O}_\kappa(X^{\delta-2})g_\epsilon(B_\kappa)X^\delta\right)f(\breve{H}).$$

通过交换子展开，我们看到，对于 $\check{g}_\epsilon = \eta_\epsilon(\sigma + 2\epsilon - \cdot)$

$$\begin{aligned} Q_{2\delta-2} &= \check{g}_\epsilon(B_\kappa)Q_{2\delta-2}\check{g}_\epsilon(B_\kappa) + \mathcal{O}_\kappa(X^{-2}) \\ &= \check{g}_\epsilon(B_\kappa)X^{-t-1/2}\mathcal{O}_\kappa(X^0)X^{-t-1/2}\check{g}_\epsilon(B_\kappa) + \mathcal{O}_\kappa(X^{-2}). \end{aligned} \tag{3.76}$$

因此，归纳假设结合定理3.13，在取$\epsilon > 0$ 充分小时即可成立。

接下来我们考察 $L'_2 - L_5 \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2\delta-2})$ 对 $\check{\mathsf{D}}P$ 的贡献。与引理 3.10 的证明一样，我们将其拆分为

$$L'_2 - L_5 = (L'_2 - L_2) - (L_3 - L_2) - (L_4 - L_3) - (L_5 - L_4) = \sum_{j=1}^4 T_j \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2\delta-2}).$$

根据 (3.58)，项 T_1 可表示为 $Q_{2\delta-2}$ （见 (3.76)），因此我们可以用同样的方法处理这一项。通过检查引理 3.10 的证明，我们看到，对于 $T_j \in \mathfrak{O}_\kappa(X^{2\delta-2})$、$j=2$、3、4，也有类似的展开式，这使我们能够以同样的方式处理这些项。

最后，利用引理 3.15 证明中的辅助算子 S 和 T，我们可以再次使用上述局部化论证来处理低阶项，从而仿照证明的最后部分，特别是处理 $\mathfrak{O}_\kappa(X^{2\delta-2})$ 中的各种项。我们得到$q(m)$。 □

通过相同的方法，我们可以证明一个双侧估计。

˜**命题 3.17**。 设 $\tilde\sigma > 0$ 由 $\tilde\sigma^2 = d(\lambda_0)/2$ 给出，并令 $\sigma \in (0,\tilde\sigma)$。存在 ˇ$\kappa_0 > 0$，使得对于任意 $s > 0$ 以及满足 $\sup\operatorname{supp} g_- < \inf\operatorname{supp} g_+$ 的任意一对$g_\pm \in \mathcal{G}^\sigma_\pm$，以下界成立。

$$\forall \kappa \in (0,\check\kappa_0]\, \exists C>0\, \forall z \in I_+ : \quad \|g_-(B_\kappa)\breve R(z) g_+(B_\kappa)\|_{\mathcal{L}(L^2_{-s},L^2_s)} \le C. \tag{3.77}$$

如同在 [GIS] 中一样，定理3.13以及命题 3.16 和 3.17 的断言在代数上结合起来，给出预解式幂的界（包括微局部界）。特别地，可以推出以下界，进而得到极限吸收原理。

ˇ**定理3.18**。 假设 λ_0 不是 H的特征值。那么

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \forall s < 1/2\, \exists C>0\, \forall z \in I_{\mathbb{C}} : \quad \|\breve R(z)^k\|_{\mathcal{L}(L^2_{k-s},L^2_{s-k})} \le C. \tag{3.78}$$

特别地，对于任意 $t > 1/2$，极限 $\breve R(\lambda \pm \mathrm{i}0) = \lim_{\epsilon\to 0_+} \breve R(\lambda \pm \mathrm{i}\epsilon)$ 在$\mathcal{L}(L^2_t, L^2_{-t})$ 中一致地存在于 $\lambda \in I$。此外，还存在强弱星极限

$$\text{s-w}^\star\text{-}\lim_{\epsilon\to 0_+} \breve R(\lambda \pm \mathrm{i}\epsilon) = \breve R(\lambda \pm \mathrm{i}0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{B}^*); \quad \lambda \in I. \tag{3.79}$$

我们将需要以下应用，参见(4.37c)。

推论3.19。 假设 λ_0 不是 $\breve H$的特征值， $s > 1/2$，并且 $f \in L^2_s$ 是ˇ ˇ给定的，使得 $R(\lambda_0 + \mathrm{i}0)f = R(\lambda_0 - \mathrm{i}0)f$。那么

$$\breve R(\lambda_0 + \mathrm{i}0)f = \breve R(\lambda_0 - \mathrm{i}0)f \in L^2_{s-1}. \tag{3.80}$$

证明。 利用适当的分解 $1 = g_-(B_\kappa) + g_+(B_\kappa)$， $g_\pm \in \mathcal{G}^\sigma_\pm$，由命题 3.16和定理3.18可得该结果。 □

注3.20。 对于重根情形，本文仅在第2.3节的假设下讨论（特别是施加了(2.24)），我们需要(3.79)和推论3.19的类似结果，参见(4.37a)–(4.37c)。我们将说明，只需对必要的修改作些说明，证明中的相同方法便可奏效，且不会带来太多额外复杂性。

首先注意，(3.1a) 中的算子 $\breve K$ 需要替换为 $\breve K = K_1 - K_2$，其中 K_1 和 K_2 由 (2.35b) 给出。为简化该算子 $\breve K$ 的型式，我们引入记号

$$\mathcal{L}_{-\infty,\infty} = \cap_{r,t\in\mathbb{R}}\, \mathcal{L}\big(L^2_r(\mathbf{X}), L^2_t(\mathbf{X})\big). \tag{3.81}$$

现在，按照引理 2.10 的证明，利用 (2.32)、引理 2.6 和引理 2.9，我们得到

$$\begin{aligned}&\breve{K}-\breve{K}_1-\breve{K}_2\in\mathcal{L}_{-\infty,\infty};\\&\breve{K}_j=\Pi_jI_j+I_j\Pi_j-\Pi_jI_j\Pi_j,\quad j=1,2.\end{aligned}\tag{3.82}$$

例如，请注意

$$\Pi-\Pi_1-\Pi_2\in(1-\Delta)^{-1}\mathcal{L}^2_{-\infty,\infty}\subset\mathcal{L}^2_{-\infty,\infty}.$$

利用 (3.82)，我们可以仿照非重根情形的证明来证明命题3.3。在引理3.7的证明第一步中，我们对 a_j 和 Π_j, $j=1,2$具有给定的性质，而不是对 a_0 和 Π。这就足以让我们重复该证明。在引理 3.9中，我们需要进行类似的替换（尤其是，$P_1\Pi_jP_2$ 中的多项式因子是关于为 a_j 而非为 a_0定义的量的多项式）。在引理 3.9 的证明中，显然可以将所有有限 κ阶算子的交集$\breve{}$中的算子类加入 $\mathcal{B}_k$。注意，$\mathcal{L}_{-\infty,\infty}$ 也以这种方式包含在内，因此我们可以重复该证明。第3.2.1小节和本节的应用与之前相同。

注记3.21。 1) 我们讨论延拓到情形 $\lambda_0\in\sigma_{\rm pp}(H')$。我们将使用第 2.4 节和注3.20。注意，$\lambda_0\notin\sigma_{\rm pp}(H'')$，并且定理3.12意味着，$H'$ 在 λ_0 处的 L^2-特征函数属于 L^2_∞（另请注意，相应特征子空间的维数是有限的，参见命题3.3）。在第 2.4 节的假设下，(2.59a) 和 (2.60b) 的“额外项” $\lambda_0|\psi\rangle\langle\psi|$ 因此属于$\mathcal{L}_{-\infty,\,\infty}$。因此，我们可以使用第 2.4 节的算子 $\breve{H}$ 证明命题3.3（参见注3.20），并从小节 3.3.2 和 3.3.3 得到 R 相应的$\breve{}$预解式估计。特别地，推论3.19在情形 $\lambda_0\in\sigma_{\rm pp}(H')$下对第 2.4 节的算子 H 和 R 同样成立。

2) 在第5章中，我们将使用这一构造的变体。这些变体通过将本章的理论应用于以 H_σ 替代 H 的情形而得到：$=H-\sigma\Pi_H$、$\sigma>0$ 较小，其中 Π_H 是对应于 λ_0 的 H 的特征子空间上的正交投影（假设 λ_0 是一个特征值）。在第5章的背景下，这个投影是有限秩的；如果所有 L^2-特征函数都属于 L^2_∞，则本章的结果很容易推广。然而，对于第5章所考虑的情形，我们并没有特征函数的这种良好衰减。假设具有“充分衰减”，例如见（5.159）和（3.82），则本章的结果在一定程度上仍然适用（对于第5章而言已经足够好）。具体而言，定理3.18和推论3.19（部分内容）有如下版本。设

$$\operatorname{ran}\Pi_H\subset H^2_t\text{ for some }t\in(1,3/2),\tag{3.83}$$

并假设 λ_0 不是 $\breve{H}_\sigma$ 的特征值，并且对于某个 $s\in(1/2,t-1/2)$ 有 $f\in L^2_s$。那么存在极限 $\breve{R}_\sigma(\lambda_0+{\rm i}0)f$、$\breve{R}_\sigma(\lambda_0-{\rm i}0)f\in L^2_{(-1/2)-0}$$\breve{}$$\breve{}$如果进一步有 $R_\sigma(\lambda_0+{\rm i}0)f=R_\sigma(\lambda_0-{\rm i}0)f$，则

$$\breve{R}_\sigma(\lambda_0+{\rm i}0)f=\breve{R}_\sigma(\lambda_0-{\rm i}0)f\in L^2_{s-1}.\tag{3.84}$$

这些结果可通过对前述证明进行直接修改得到。注意，演算中涉及扰动 $-\sigma\Pi_H$ 的所有项都被视为“误差”；事实上，我们可以使用引理 3.10，将 $f(\breve{H})$ 与 $\breve{f}(\breve{H})$ 分别自由地替换为 $f(\breve{H}_\sigma)$ 和 $\breve{f}(\breve{H}_\sigma)$，Mourre 估计命题 3.3同样如此。要在给定假设以及对 s 和 t 的 $\breve{}$ 限制下得到 (3.84)，我们需要针对 R_σ 使用引理 3.15；感兴趣的读者可以仿照该引理的证明检查，来自所指示替换的误差是无害的。

在第 5.3 节中需要使用 (3.84) 的一个版本，但仅适用于 s 任意接近$1/2$ 的情形。

注 3.22。 (2.24) 不成立的情形已在第 2.5 节中讨论。于是可以得到与注 3.20 和注 3.21 中相同的结果（分别取决于 λ_0 是否为 H' 的特征值）。利用第 2.5.1 小节，我们可以再次对 $\breve{H}$ （在相应的情形下）使用公式 (2.35b) 和 (2.60b)，事实上可以像之前一样进行论证，从而得到这些结果。

第4章

Rellich型定理

我们研究在条件 1.5 和（条件1.6 的相关部分）下，双簇阈值处特征函数和共振态的结构。这一结构很大程度上取决于有效势的衰减性质。在第4.1节中，我们处理最低阈值情形；与高于该阈值的情形相比，这种情形允许得出更强一些的结论。在第4.2节中，我们研究后一种情形，这要求更加仔细地考察注2.3中的“特征变换”。在第4.3节中，我们通过应用前面讨论过的方法，研究第 1.2 节和第 1.3 节中的物理模型；特别是，我们将主要应用第4.2节中的内容。

我们将使用最低阈值处的命题 2.12，详细处理多重双簇情形。非多重双簇情形可以用类似的方法处理；当然，其记号更为简单，因此我们不特别关注这一情形。非简单情形也可以用类似的方法处理。只有在第4.3节中，我们才对所有情形进行完整研究，不过仅限于物理模型。

在命题 2.12 的条件下（第4.2节中使用时不包括最低阈值条件），将算子视为定义在一阶Sobolev空间上的二次型会比较方便，参见注2.13。对于 k、$s\in\mathbb{R}$，令 H^k_s 表示阶为 k 、位置空间权重为 $\langle x\rangle^s$ 的加权Sobolev空间（定义见小节 1.4.1），并且

$$\begin{gathered}\mathcal{H}^{k,l}_{s,t}=H^k_s(\mathbf{X}_1)\oplus H^l_t(\mathbf{X}_2),\quad \mathcal{H}^k_s=\mathcal{H}^{k,k}_{s,s},\quad \mathcal{H}^k=\mathcal{H}^k_0,\quad \mathcal{H}_s=\mathcal{H}^0_s,\quad \mathcal{H}=\mathcal{H}^0_0,\\ \mathcal{H}^k_\infty=\cap_{s\in\mathbb{R}}\mathcal{H}^k_s,\quad \mathcal{H}^k_{-\infty}=\cup_{s\in\mathbb{R}}\mathcal{H}^k_s,\quad \mathcal{H}^k_{s+}=\cup_{t>s}\mathcal{H}^k_t,\quad \mathcal{H}^k_{s-}=\cap_{t<s}\mathcal{H}^k_t.\end{gathered}\tag{4.1}$$

我们可以将命题 2.12 中的算子 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 写作

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)=-(p_1^2+W_1)\oplus(p_2^2+W_2)-V.\tag{4.2}$$

这仅适用于最低阈值，而算子 V是一个阶为 $\mathcal{O}(|x|^{-2-2\rho})$ 的非局部对称势，见命题 2.12 和注2.13。第4.2节将讨论针对更高阈值对 (4.2) 的修改，而第2.4节和第2.5节中的“例外情形”将在注记 4.9 和 4.16 中讨论。我们将简要介绍一种略有不同的分解（及相应的不同记号）。

4.1 $\lambda_0=\Sigma_2$情形

对于 $\rho<2$，一般而言，单体问题尚无结果。因此，例如尚不清楚零是否可以是具有无限重数的特征值。不过，如果

势在无穷远处为负或为正，分别如 $-|x|^{-\rho}$ 或 $|x|^{-\rho}$，那么已知零至多是具有有限重数的特征值（事实上，在负的情形下它不是特征值）。本节中我们施加命题 2.12 的条件。在小节 4.1.2 和 4.1.3 中，我们将结合对有效势 W_1 和 W_2的附加符号条件来使用该命题。在小节 4.1.4 中，假设有效势的主导阶为齐次 -2，这是一个具有丰富结构的临界情形。情形 $\lambda_0 > \Sigma_2$分为若干类似情形，将在第4.2节中讨论。在这两种情形下，我们都需要对注2.3的延拓，分别在小节 4.1.1 和 4.2.1 中加以讨论。

4.1.1 $\lambda_0 = \Sigma_2$的扩展本征变换

Rec根据注2.3中的全部内容，本征变换及相应的反演公式 :

$$f = T^* u \text{ and } u = E_+(\lambda_0) f = Sf - \breve{R}(\lambda_0)\Pi' HSf. \tag{4.3}$$

我们也可以将这些关系应用于 L^2特征函数以及广义特征函数。在这种扩展意义下，以下结果成立。

引理 4.1. 对于任意 $s \in \mathbb{R}$，关系式 (4.3) 满足

$$u \in H^1_s (= H^1_s(\mathbf{X})) \text{ and } (H - \lambda_0)u = 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}^1_s \text{ and } E_{\mathcal{H}}(\lambda_0) f = 0. \tag{4.4}$$

证明. 设 $s \in \mathbb{R}$ 给定。首先我们扩展有界性结果 (2.56)，现在断言

$$\breve{R}(z)\Pi' \in \mathcal{L}(L^2_s, H^2_s) \subset \mathcal{L}(L^2_s, H^1_s) \quad (\text{in particular for } z = \lambda_0).$$

注意到 $\langle x\rangle^s(-\Delta - \breve{H})\langle x\rangle^{-s}$ 相对于 $-\Delta$ 是 ϵ-有界的，利用 (2.56) 进行标准计算即可得到该结果。由 (2.31b)、引理 2.6、引理 2.9 2) 以及阈值束缚态的多项式衰减，进一步可得

$$S^*, T^* \in \mathcal{L}(H^1_s, \mathcal{H}^1_s) \text{ and } \big(1 - \breve{R}(\lambda_0)\Pi' H\big)S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_s, H^1_s). \tag{4.5}$$

特别地，(4.4) 成立。 □

上述证明相当简单，这是由于 $\lambda_0 \notin \sigma(H')$。在小节 4.2.1 中，当 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 时，我们将推导出该引理的一个相当详细的版本。在这种情况下，特征变换及其相应的反演公式需要更为细致的处理。此外，我们注意到，由于 (4.4) 左端方程的椭圆性，可以将要求 $u \in H^1_s$ 替换为 $u \in L^2_s$ 或 $u \in H^2_s$，而不改变 (4.4) 这一侧的含义。对于 (4.4) 的右端也有类似的说明，参见注 2.13 的最后一部分。

4.1.2 负慢衰减有效势

假设 $\rho < 2$并且 $I_j(x_j) = I_j(x)_{x^j=0}$、$j = 1$、2 满足以下条件，参见 [FS]:

$$\begin{aligned} &\exists R \geq 0 \quad \exists \epsilon > 0 \quad \forall y \in \mathbf{X}_j \text{ with } |y| \geq R : \\ &\qquad I_j(y) \leq -\epsilon\langle y\rangle^{-\rho} \text{ and } -2I_j(y) - y \cdot \nabla I_j(y) \geq \epsilon\langle y\rangle^{-\rho}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

对于每个 j，我们可以将势写成 $W_j(x_j) = W_j(x_j) + B_j(x_j)$，其中 B_j 多项式衰减，$\widehat{W}_j$ 光滑，并且满足 $\partial_y^\alpha \widehat{W}_j = \mathcal{O}(\langle y\rangle^{-\rho-|\alpha|})$ 以及

$$\begin{aligned} &\exists \epsilon > 0 \quad \forall y \in \mathbf{X}_j : \\ &\qquad \widehat{W}_j(y) \leq -\epsilon\langle y\rangle^{-\rho} \text{ and } -2\widehat{W}_j(y) - y\cdot\nabla\widehat{W}_j(y) \geq \epsilon\langle y\rangle^{-\rho}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

为说明这一点，我们将 I_j 定义中的每个 V_b 拆分为 $V_b = V_b^{(1)} + V_b^{(2)}$，其中第二项是紧支撑的。注意，$\langle V(2)_b \rangle_{\varphi_j}(x_j) = \langle \varphi_j, V(2)_b(\cdot + x_j)\varphi_j\rangle_j$ 是多项式衰减的。证明方法与证明 (2.22) 时相同。现在只需考虑来自 $V_b^{(1)}$ 的贡献。势 $A(x_j) = \langle V(1)_b \rangle_{\varphi_j}(x_j) - V(1)_b(x_j)$ 是 C^∞。注意，$A(y) = \mathcal{O}(\langle y\rangle^{-\rho-1})$ 可用与证明 (2.21a) 相同的方法得到。类似地，可以验证 $y\cdot\nabla A(y) = \mathcal{O}(\langle y\rangle^{-\rho-1})$ 也成立；由于这些性质，我们需要考虑 $V(1)_b(x_j)$，或者说 $I_j^{(1)}(x_j) = \sum_b V(1)_b(x_j)$。由于我们知道这个和满足性质 (4.6)，因此可得 $\sum_b \langle V(1)_b \rangle_{\varphi_j}$ 也满足类似性质，并且可以加入一个适当的紧支撑势，使 $R = 0$（以及某个 $\epsilon > 0$）满足相应的界，参见 [FS]。由此得到一个满足 (4.7) 的 W_j。

为方便起见，以下用记号 w_j 表示势 W_j。引入算子 $h_j = p_j^2 + w_j$、$j = 1$、2，我们将（4.2）写成

$$-E_{\mathcal{H}}(\lambda_0) = h_1 \oplus h_2 + v. \tag{4.8}$$

注意到 $v - V$ 是多项式衰减的。算子 h_1 和 h_2 具有 [FS，定理4.1和4.2]中所述的一些微局部性质。特别地，在零点处存在极限吸收原理：设 $s_0 = \frac{1}{2} + \frac{\rho}{4}$。那么对于任意 $s > s_0$，都存在范数极限

$$r_j(0 \pm \mathrm{i}0) = \lim_{\epsilon\to 0_+} r_j(\pm\mathrm{i}\epsilon) \in \mathcal{L}(H_s^{-1}(\mathbf{X}_j), H_{-s}^1(\mathbf{X}_j)),$$

其中 $r_j(z) = (h_j - z)^{-1}$。此外，由 [Sk4] 可知

$$r_j(0 \pm \mathrm{i}0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{s_0}, \mathcal{B}_{s_0}^*), \tag{4.9a}$$

其表述使用了小节1.4.1中引入的Besov空间。我们还将使用另一个性质。

设对于给定的 $f \in L_t^2$，存在某个 $t > s_0$，使得 $r_j(0+\mathrm{i}0)f = r_j(0-\mathrm{i}0)f$，则

$$r_j(0+\mathrm{i}0)f = r_j(0-\mathrm{i}0)f \in L_s^2 \text{ for any } s < t - 2s_0,$$

参见 [FS，定理4.1（ii）和（iii）]。事实上，可以加强 [FS] 中的证明，并得到以下陈述：

设对于给定的 $f \in L_t^2$，存在某个 $t > s_0$，使得 $r_j(0+\mathrm{i}0)f = r_j(0-\mathrm{i}0)f$，则

$$r_j(0+\mathrm{i}0)f = r_j(0-\mathrm{i}0)f \in L_{t-2s_0}^2. \tag{4.9b}$$

该陈述类似于推论3.19，可以通过改进 [FS] 中的一些预解式估计来证明；这些估计是命题 3.16 中估计的一体阈值类比。

定理 4.2。 在命题 *2.12* 的条件以及 $j = 1(4.6)$ 下，对于，2，

$$\dim\ker(H - \lambda_0) < \infty.$$

如果 $\phi \in \mathcal{B}^*_{s_0,\ 0}(\mathbf{X})$ 满足分布方程 $(H - \lambda_0)\phi = 0$，则 $\phi \in L^2_\infty(\mathbf{X})$。

证明. *I.* 根据注记 2.3 和 2.13

$$\dim\ker(H - \lambda_0) = \dim\ker E_{\mathcal{H}}(\lambda_0).$$

注意到，我们按照注2.13采用了所出现算子的形式解释，但注2.3中的算子解释得到的是相同的空间，参见注2.13。令 $R^{\pm}{}_{\text{diag}} = r_1(0 \pm \text{i}0) \oplus (r_2(0 \pm \text{i}0)$，并假设 $f \in$ 核 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$。我们将方程 $R^{\pm}{}_{\text{diag}} E_{\mathcal{H}}(\lambda_0) f = 0$ 写成

$$(1 + K^{\pm})f = 0, \quad K^{\pm} = R^{\pm}_{\text{diag}} v, \tag{4.10}$$

其中， $1f$ 通过写出 $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}^1$ 并使用（将在下文证明的）定理而得到 at

$$r_j(0 \pm \text{i}0) h_j f_j = f_j. \tag{4.11}$$

注意到

$$K^{\pm} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^1_{-s}) \text{ for } s \in (s_0, 2\rho + 2 - s_0). \tag{4.12}$$

由于 $K^{\pm}$ 是紧的（在任意此类空间上），由弗雷德霍姆理论可知，dimker $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ $< \infty$.

II。我们证明 (4.11) 的以下更一般的版本：设 $f_j \in \mathcal{B}^*_{s_0,\ 0}(\mathbf{X}j)$，且分布 $h_j f_j \in \mathcal{B}_{s_0}$ $(\mathbf{X}j)$，则 (4.11) 成立，并且函数 $f_j \in H^1_{-s}$ 对于任意 $s > s_0$ （对于上述问题，$h_j f_j \in L^2_s(\mathbf{X}j) \subset \mathcal{B}_{s_0}(\mathbf{X}j)$ 对任意如 (4.12) 中的 s ）。为此，令 $\chi_R(x) = \chi(|x|/R)$，$R \geq 1$，按照 (1.29) 给定。我们将 χ_R视为 $\mathbf{X}j$上的乘法算子。现在，对于所有 $R > 1$，有 $r_j(0 \pm \text{i}0) h_j \chi_R f_j = \chi_R f_j$。另一方面

$$h_j \chi_R f_j = \chi_R h_j f_j - (\Delta\chi_R) f_j - 2(\nabla\chi_R) \cdot \nabla f_j.$$

对于最后一项

$$\begin{aligned}
&R^2 \|(\nabla\chi_R) \cdot \nabla f_j\|^2_{L^2(\mathbf{X}_j)} \\
&\leq C_1 \langle p^2 \rangle_{\chi_{2R}\bar{\chi}_{R/2} f_j} \\
&\leq C_2 \big(\text{Re}\langle \chi^2_{2R} \bar{\chi}^2_{R/2} f_j, h_j f_j \rangle + R^{-\rho} \|\chi_{4R} f_j\|^2 \big) \\
&= C_2 \big(\mathcal{O}(R^0) + R^{-\rho} o(R^{2s_0}) \big) \\
&= o(R^{1-\rho/2}),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

从而得到

$$\lim_{R\to\infty} R^{s_0} \|(\nabla\chi_R) \cdot \nabla f_j\|_{L^2(\mathbf{X}_j)} = 0.$$

对于中间项

$$R^{s_0}\|(\Delta\chi_R)f_j\|_{L^2(\mathbf{X}_j)} \le CR^{2s_0-2}\big(R^{-s_0}\|\chi_{2R}f_j\|_{L^2(\mathbf{X}_j)}\big),$$

从而得到

$$\lim_{R\to\infty} R^{s_0}\|(\Delta\chi_R)f_j\|_{L^2(\mathbf{X}_j)} = 0.$$

这些计算导致

$$f_j = \mathrm{w}^\star\text{-}\lim_{R\to\infty} \chi_R f_j = \mathrm{w}^\star\text{-}\lim_{R\to\infty} r_j(0\pm \mathrm{i}0)h_j\chi_R f_j = r_j(0\pm \mathrm{i}0)h_j f_j \text{ in } \mathcal{B}^*_{s_0}(\mathbf{X}_j),$$

因此，对于满足 $h_j f_j \in \mathcal{B}_{s_0}(\mathrm{X}j)$ 的 $f_j \in \mathcal{B}^*_{s_0,\ 0}(\mathrm{X}j)$，(4.11) 成立。

III. 再次使用注2.3中的“特征变换”，很容易看出，任何求解分布方程 $(H-\lambda_0)\phi = 0$ 的 $\phi \in \mathcal{B}^*_{s_0,\ 0}(\mathrm{X})$ 都对应于一个（分布意义下的）解 $f = (f_1, f_2)$，$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0$，其中满足 $h_j f_j \in \mathcal{B}_{s_0}(\mathrm{X}j)$ 的 $f_j \in \mathcal{B}^*_{s_0,\ 0}(\mathrm{X}j)$，参见引理 4.1。由前面的步骤，我们于是得出 (4.10) 成立。特别地，$K^+f = K^-f$。反过来，利用 v 是对称的，我们得到

$$0 = \mathrm{Im}\langle f, vf\rangle = -\,\mathrm{Im}\langle R^+_{\mathrm{diag}} vf, vf\rangle \tag{4.14}$$

对于 $(1+K^+)f = 0$ 的任意解，其中 $f = (f_1, f_2)$ 满足 $f_j \in \mathcal{B}^*_{s_0}(\mathrm{X}j)$，$j = 1, 2$。因此，对于任意这样的 f，$(1+K^-)f = 0$ 也成立。（类似地，$(1+K^-)f = 0$ 的一个解也是 $(I+K^+)f = 0$ 的一个解。）此外，$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0$ 在分布意义下成立。如果 $(1+K^+)f = 0$ 且 $(1+K^-)f = 0$，其中 $f = (f_1, f_2)$，并且 $f_j \in \mathcal{B}^*_{s_0}(\mathrm{X}j)$ 具有更快衰减，则可通过调用 (4.9b) 获得。明确地，我们可以固定如 (4.12) 中的 s，并从输入 $f \in \mathcal{H}^0_{-s}$ 出发得出 $f \in \mathcal{H}^0_{-s+2\kappa}$，其中 $\kappa = \rho + 1 - s_0$。通过迭代这一论证，我们得出 $f_j \in L^2_\infty(\mathrm{X}j)$。接下来，根据注2.3中的“反演公式”，任意这样的 f 都对应于一个

$$\phi \in \ker(H-\lambda_0) \cap L^2_\infty(\mathbf{X}),$$

参见引理 4.1。特别地，参见段落开头的注释，这对任何满足（$H-\lambda_0$）$\phi = 0$的 $\phi \in \mathcal{B}^*_{s_0,0}(\mathrm{X})$ 均成立。

□

4.1.3 正的慢衰减有效势

Sup假设 $\rho < 2$，并且 $I_j(x_j) = I_j(x)|_{x^j=0}$, $j = 1, 2$ 满足以下条件 :

$$\begin{aligned}\exists R \ge 0 \quad \exists \epsilon > 0 \quad \exists \bar\rho \in [\rho, \tfrac{2}{3}(1+\rho)) \quad \forall y \in \mathbf{X}_j \text{ with } |y| \ge R : \\ I_j(y) \ge \epsilon\langle y\rangle^{-\bar\rho}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

我们对每个 j记势为 $W_j(x_j) = W_j(x_j) + B_j(x_j)$，其中 B_j按多项式递减，且 $\widehat{W}_j$ 光滑，满足 $\partial_y^\alpha \widehat{W}_j = \mathcal{O}(\langle y\rangle^{-\rho-|\alpha|})$，并且满足

$$\exists \epsilon > 0 \quad \exists \bar\rho \in [\rho, \tfrac{2}{3}(1+\rho)) \quad \forall y \in \mathbf{X}_j : \quad \widehat{W}_j(y) \ge \epsilon\langle y\rangle^{-\bar\rho}. \tag{4.16}$$

这可通过类似第4.1.2小节中的论证看出（利用 $\bar\rho<1+\rho$）。同样，我们将使用记号 w_j 表示势 $\widehat{W}_j$，引入算子 $h_j=p_j^2+w_j$、$j=1$、2，并将（4.2）写成（4.8）。

我们引入符号 $s_j=s_j(y,\xi)=(\xi_j^2+w_j(y))^{-1}$。注意到 s_j 属于 Hörmander 类 $S\big(\langle y\rangle^{\bar\rho}\langle\xi\rangle^{-2},g\big)$，其中度量定义为

$$g(v)=\langle y\rangle^{2(\bar\rho-\rho-1)}\,v_y^2+\langle y\rangle^{\bar\rho}\,v_\xi^2,\quad v=(v_y,v_\xi),$$

接下来注意到，相应的 Weyl 演算具有大小为以下数值的“普朗克常数”

$$\langle y\rangle^{(\bar\rho-\rho-1)}\langle y\rangle^{\bar\rho/2}=\langle y\rangle^{-t};\ t=1+\rho-3\bar\rho/2.$$

接下来，按照标准步骤，我们可以为 $h_j=\mathrm{Op^w}(\xi_j^2+w_j(y))$ 构造任意阶的拟逆。不过，对于下面的定理，我们只需要第一步，即令拟逆为 $r_j^0=\mathrm{Op^w}(s_j)$。对于某个 $A_j=\mathrm{Op^w}(a_j)$ 且满足 $a_j\in S(\langle y\rangle^{-t}\langle\xi\rangle^{-1},g)$，我们计算得到 $r_j^0h_j=1+A_j$。

定理 4.3。 在命题 *2.12* 的条件以及对于 $j=1$，2 的 （4.15） 下，

$$\dim\ker(H-\lambda_0)<\infty.$$

若 $\phi\in L^2_{-\infty}(\mathbf{X})$ （或者 $\phi\in H^1_{-\infty}(\mathbf{X})$）满足分布方程 $(H-\lambda_0)\,\phi=0$，则 $\phi\in L^2_{\infty}(\mathbf{X})$。

证明。*I.* 根据注2.3

$$\dim\ker(H-\lambda_0)=\dim\ker E_{\mathcal{H}}(\lambda_0).$$

假设 $(H-\lambda_0)\phi=0$ 对某个 $s\in\mathbb{R}$ （可能非零）满足 $\phi\in H^1_s(\mathbf{X})$。由引理 4.1，特征变换 $f=T^*\phi\in\mathcal{H}^1_s$ 且 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$。令 $R=r_1^0\oplus r_2^0$且 $A=A_1\oplus A_2$。于是，对任意 $f\in L^2_s$，我们将方程 $RE_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$ 写成

$$(1+A+K)f=0,\quad K=Rv, \tag{4.17}$$

其中我们使用了 (4.8) 以及 $f=(f_1,f_2)$ 的分量满足

$$r_j^0(0)h_jf_j=(1+A_j)f_j.$$

注意到 $A+K\in\mathcal{C}(\mathcal{H}^1_s)$。由弗雷德霍姆理论可知，$f$ 属于 $\mathcal{H}^1_s$ 的一个有限维子空间。该维数是满足 $(H-\lambda_0)\phi=0$ 的函数 $\phi\in H^1_s(\mathbf{X})$ 所成集合维数的一个上界（由反演公式可知）。特别地，后者空间是有限维的。对 $s=0$ 运用这一论证，即得定理的第一个陈述。

II. 通过使用 (4.17) 的迭代过程（参见定理 4.2 的证明），可知任何（零能量）广义特征函数 $f\in\mathcal{H}^1_{-\infty}$ 都必须属于 $\mathcal{H}^1_{\infty}$。注意，给定 $f\in\mathcal{H}^1_{s+(k-1)t}$，我们可以推导出 $f\in\mathcal{H}^1_{s+t}$，其中 $t=1+\rho-3\bar\rho/2$。由于此论证对所用的 $k(\in\mathbb{N})$ 没有限制，事实上，这一结论是通过迭代得出的。因此，借助引理 4.1，H 在 $H^1_{-\infty}(\mathbf{X})$ 中 λ_0 处的广义特征函数都属于 $L^2_{\infty}(\mathbf{X})$。 □

方程 (4.17) 可能存在“伪”解，即与 H 的特征函数不对应的解。我们可以通过证明精确逆算子 h_j^{-1}, $j=1,2$ 实际上是一个伪微分算子，来弥补这一“缺陷”。下文将对此进行证明。特别是， h_j^{-1}与构型空间中的幂型权重具有良好的交换性质。Yafaev [Ya2], 已证明了这类性质，而我们实际上将使用 [Ya2]。更确切地说，我们将使用以下断言

$$\forall a,b\geq 0, a-b\geq \bar\rho: \quad B=\operatorname*{s-lim}_{\epsilon\to 0_+}\langle y\rangle^{-a}(h_j+\epsilon)^{-1}\langle y\rangle^{b} \text{ exists.} \tag{4.18}$$

这里注意到，对于小的正值 ϵ， $B_\epsilon=\langle y\rangle^{-a}(h_j+\epsilon)^{-1}\langle y\rangle^{b}$ 一致有界；这可通过在证明 [Ya2，定理 1] 时仔细追踪常数得出。由于当 $u=\langle y\rangle^{-b}h_j v$ 满足 $v\in\mathcal{D}(h_j)$ 时，$\lim_{\epsilon\to 0_+}B_\epsilon u$ 存在，且这类 u 在 $L^2(\mathbb{X})$ 中稠密，因此 (4.18) 确实成立（事实上，对于任意这种形式的 u， $Bu=\langle y\rangle^{-a}h_j^{-1}\langle y\rangle^{b}u$ ）。

引理 4.4。 算子 $\operatorname{s-lim}_{\epsilon\to 0_+}\langle y\rangle^{-\bar\rho}(h_j+\epsilon)^{-1}$, $j=1,2$（扩张 $\langle y\rangle^{-\bar\rho}h_j^{-1}$）是符号属于 $S\big(\langle\xi\rangle^{-2}, g\big)$ 的伪微分算子。

证明。 回顾 $r_j^0h_j=1+A_j$，其中 A_j的符号为 $a_j\in S(\langle y\rangle^{-t}\langle\xi\rangle^{-1},g)$。如果 $-1\notin\sigma(A_j)$

$$(h_j+\epsilon)^{-1}=(1+A_j)^{-1}r_j^0-\epsilon(1+A_j)^{-1}r_j^0(h_j+\epsilon)^{-1},$$

从而 $\operatorname{s-lim}_{\epsilon\searrow 0}\langle y\rangle^{-\bar\rho}(h_j+\epsilon)^{-1}=\langle y\rangle^{-\bar\rho}(1+A_j)^{-1}r_j^0$。（因此形式上有 $h_j^{-1}=(1+A_j)^{-1}r_j^0$。）利用 Neumann 级数展开 $(1+A_j)^{-1}$ 并应用 Beal 判据，参见 [FS，小节 4.2], 我们得出，确实 $\langle y\rangle^{-\bar\rho}(1+A_j)^{-1}r_j^0$的符号属于$S\big(\langle\xi\rangle^{-2},g\big)$ 从而完成了这一情形下的证明。

为处理一般情形，我们令 $\chi_1(r)=\chi(r<1)$ 和 $\chi_2(r)=\chi(r>1)$ 在 $\mathbb{R}$ 上构成由光滑非负函数组成的二次单位分解， $\chi_1(r)^2+\chi_2(r)^2=1$，使得 χ_1 支撑在 $(-\infty,2)$ 中，并且对于 $r<1$有 $\chi_1(r)=1$。对于$l>1$， 我们引入函数 $\chi_{i,l}(r):=\chi_i(r/l)$; $i=1,2$。令

$$R_l=\oplus_{j=1}^2\big(\chi_{1,l}(r_j)h_j^{-1}\chi_{1,l}(r_j)+\chi_{2,l}(r_j)r_j^0\chi_{2,l}(r_j)\big)=\oplus_{j=1}^2 r_{j,l}.$$

这里 $\chi_{1,l}(r_j)h_j^{-1}\chi_{1,l}(r_j):=\operatorname{s-lim}_{\epsilon\searrow 0}\chi_{1,l}(r_j)(h_j+\epsilon)^{-1}\chi_{1,l}(r_j)$。利用（4.18）和 Beal 判据，我们推得 $\chi_{1,l}(r_j)h_j^{-1}\chi_{1,l}(r_j)$，因此 $r_{j,l}$ 也是符号属于 $S\big(\langle y\rangle^{\bar\rho}\langle\xi\rangle^{-2},g\big)$ 的伪微分算子。接下来我们写出 $r_{j,l}h_j=1+A_{j,l}$，并注意到（如上所述）$A_{j,l}$ 的符号为 $a_{j,l}\in S(\langle y\rangle^{-t}\langle\xi\rangle^{-1},g)$。我们还注意到

$$\|\chi_{2,l}(r_j)A_j\chi_{2,l}(r_j)\|\to 0 \text{ for } l\to\infty.$$

利用这一点并经过简单计算可得

$$\|A_{j,l}\|\to 0 \text{ for } l\to\infty.$$

特别地，对于取足够大的 l，可得 $-1\notin\sigma(A_{j,\,l})$。因此，对于任意这样的足够大的数 $\langle y\rangle^{-\bar\rho}h_j^{-1}=\langle y\rangle^{-\bar\rho}(1+A_{j,\,l})^{-1}r_{j,\,l}$ 的符号属于 $S\big(\langle\xi\rangle^{-2},g\big)$。 □

我们注意到，可以使用引理 4.4 将（4.17）替换为更简洁的断言

$$(1+\widetilde K)f=0;\quad \widetilde K=\widetilde R v,\quad \widetilde R=h_1^{-1}\oplus h_1^{-1}, \tag{4.19}$$

当然，这需要作适当的解释。

4.1.4 齐次阶数为 -2 的有效势

假设 $\rho \geq 1/2$ 满足命题 2.12 的条件，并且 $W_j = W_j(x_j)$、$j = 1$、2 满足以下条件（回顾一下，一般而言，W_j 在有界集之外是有界的）：

对于 $j = 1$，2，在 X 的单位球面$\mathbb{S}_j$ 上存在一个实连续函数 $q_j = q_j(y)_j$ 以及一个有界势 $B_j(x_j) = \mathcal{O}(\langle x_j \rangle^{-3})$，定义在 X$_j$ 上，使得

$$\exists R > 0 \quad \forall y = r\theta \in X_j \text{ with } |y| = r \geq R : W_j(y) = \tfrac{q_j(\theta)}{r^2} + B_j(y). \tag{4.20}$$

该条件可能由 $I_j(x)$ 的泰勒展开（$j = 1$，2）得到，如下所示：分解

$$\sum_{b \not\subset a_j} V_b^{(1)}(x^b) = \sum_{b \not\subset a_j} V_b^{(1)}((x_j)^b) + \sum_{b \not\subset a_j} (x^j)^b \cdot \nabla V_b^{(1)}((x_j)^b) + \mathcal{O}(\langle x_j \rangle^{-\rho-2}).$$

现在假设第一项恒等于零，且最后一项通过一个阶为 $\mathcal{O}(\langle x_j \rangle^{-3})$ 的项对 W_j 作出贡献（当然，这对 $\rho \geq 1$ 有效）。中间项通过 $\sum_{b \not\subset a_j} k_j^b \cdot \nabla V_{(1)b}((x_j)^b)$ 对 W_j 作出贡献，其中 $k_j = \langle \varphi_j、\ x^j \varphi_j \rangle_j$，因此（4.20）的内容在此情形下就是条件

$$\sum_{b \not\subset a_j} k_j^b \cdot \nabla V_b^{(1)}((x_j)^b) = \tfrac{q_j(\theta)}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}).$$

这与某种情形下具有非零 q_j 的库仑相互作用系统有关，参见小节 1.2.1 和 1.3.1。当然，$q_j = 0$, $j = 1$,2 的情形包含在 (4.20) 中，该情形对于物理模型的重要性也已在那里进行了说明。

为简化表述，下面假设 $R = 1$。对于 $n_j =$dim X$_j \geq 2$，单位球面 $\mathbb{S}_j \subset$ X$_j$ 上（负的）拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $-\Delta_{\theta_j}$ 的谱已知为 $\{l(l + n_j - 2) \mid l \in \mathbb{N}_0\}$。对于我们的问题，研究 $-\Delta_{\theta_j} + q_j$ 的谱是相关的。对于 $n_j = 1$，我们定义 $-\Delta_{\theta_j} = 0$，因此在这种情形下，$-\Delta_{\theta_j} + q_j$ 的谱为 $\{q_j(-1)\ q_j(1)\}$。在任意维数下，使用以下参数化方式都很方便：将每个 $\mu \in \sigma(-\Delta_{\theta_j} + q_j)$ 写成

$$\mu = \nu^2 - \tfrac{(n_j-2)^2}{4}, \tag{4.21}$$

按照约定，当 $\nu \geq 0$if $\mu \geq -\frac{(n_j-2)^2}{4}$,时为 i$\nu > 0$，当 $\mu < -\frac{(n_j-2)^2}{4}$ 时为 0。这样的数的集合记为 $\nu\ \sigma_j$。令 $P_{j,\ \nu}$, $\nu \in \sigma_j$ 表示投影到相应特征子空间上的正交投影。为方便起见，以下省略下标 j。令 ζ 表示相应的特征向量，则特征值问题

$$(-\Delta + \tfrac{q_j(\theta)}{r^2})\big(r^{\frac{1-n_j}{2}} u(r)\big) \otimes \zeta(\theta) = 0$$

归结为欧拉方程

$$-u''(r) + \tfrac{\nu^2 - 1/4}{r^2} u(r) = 0. \tag{4.22}$$

现在考虑任意 $\nu \geq 0$ 或 $\mathrm{i}\nu > 0$ 的狄利克雷问题

$$u \text{ fulfills (4.22) for } r \geq 1, \text{ and } u(1) = 0. \tag{4.23}$$

该正则解为

$$\phi_\nu(r) = \begin{cases} \frac{r^{1/2+\nu} - r^{1/2-\nu}}{2\nu} & \text{for } \nu \neq 0, \\ r^{1/2} \ln r & \text{for } \nu = 0 \end{cases};$$

注意，确实有 $\phi_\nu(1) = 0$。方程 (4.22) 的出射解（对 $r \geq 1$ 也有定义）为

$$\psi_\nu(r) = r^{1/2-\nu};$$

注意，对 ν 复数而言，这确实是“出射的”。这两个解构成一个基本解系，因此我们可以定义格林函数如下：

$$R_\nu(r, r') = \phi_\nu(r_<)\psi_\nu(r_>); \quad r_< = \min\{r, r'\},\ r_> = \max\{r, r'\}.$$

其形式伴随算子 $R_\nu^*(r, r') = \phi_\nu(r_<)\overline{\psi_\nu(r_>)}$ 也是一个格林函数。这意味着，对于所有充分衰减的函数 $v = v(r)$

$$-u''(r) + \tfrac{\nu^2 - 1/4}{r^2} u(r) = v(r), \text{ where } u(r) = \int_1^\infty R_\nu(r, r') v(r')\, \mathrm{d}r',$$

对于 R_ν^* 也类似。

令 $\chi_1(r) = \chi(r < 8)$ 和 $\chi_2(r) = \chi(r > 8)$ 构成 $\mathbb{R}$ 上光滑非负函数的二次单位分解，$\chi_1(r)^2 + \chi_2(r)^2 = 1$，使得 χ_1 支撑在 $(-\infty, 8)$ 中，且对于 $r < 4$，$\chi_1(r) = 1$。

令 $w_j = W_j$、$h_j = p_j^2 + w_j$ 和 $v = V$（此记号与前面的小节一致）。容易验证，对于 $s \in \mathbb{R}$，有 $v \in \mathcal{L}\big(\mathcal{H}^0_s, \mathcal{H}^0_{3+s}\big)$，参见（2.58c）。令

$$\begin{aligned} G_+ &= \oplus_{j=1}^2 \Big(\chi_1(r_j)(h_j - \mathrm{i})^{-1} \chi_1(r_j) + \sum_{\nu \in \sigma_j} \big(\chi_2(r_j) r_j^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r_j^{\frac{n_j-1}{2}} \chi_2(r_j) \big) \otimes P_{j,\nu} \Big), \\ G_+^* &= \oplus_{j=1}^2 \Big(\chi_1(r_j)(h_j + \mathrm{i})^{-1} \chi_1(r_j) + \sum_{\nu \in \sigma_j} \big(\chi_2(r_j) r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu}^* r^{\frac{n_j-1}{2}} \chi_2(r_j) \big) \otimes P_{j,\nu} \Big), \end{aligned} \tag{4.24}$$

其中 $r_j = |x_j|$ 和 $R_{j,\,\nu}$ 可形式化地解释为作用在 L^2_I 上的一个（无界）算子：$= L^2(I; \mathrm{d}r)$，$I := [1, \infty)$。换言之，r 的幂将空间 L^2_I 与 $L^2(I; r^{n_j-1}\mathrm{d}r)$ 等距地对应起来；注意，后一个空间自然地出现在球坐标下的张量分解中。算子 G_+ 和 G_+^* 是 $-E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 的拟逆，其含义见下述引理。当然，这些算子并不是拟逆构造的唯一选择。在更强的条件下，我们实际上在第5.1.2节中考虑一种更简单的拟逆。

此外，引入以下数

$$\nu_0 = \min_{j \in \{1,2\}} \min_{\nu \in \sigma_j} \operatorname{Re} \nu, \qquad s_0 = 1 + \nu_0. \tag{4.25}$$

在快速衰减情形下，$q_j = 0$ 对于 $j = 1$、2，这些数是显式的、取决于维数的常数，参见（4.67）。例如，在此情形下$\nu_0 = \frac{1}{2}$ 对于 $n_1 = n_2 = 3$（将在第5.1.2节中考察）。

引理 4.5。 *1*）算子

$$G_+, G_+^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s'}^{-1}, \mathcal{H}_{-s}^{1}) \text{ for } s, s' > 1-\nu_0 \text{ with } s+s' > 2, \tag{4.26}$$
$$K_+^* := -E_{\mathcal{H}}^*(\lambda_0)G_+^* - 1 \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_s^{-1}) \text{ for any } s \in (1-\nu_0, 2+\nu_0); \tag{4.27}$$

这里 $E_{\mathcal{H}}^*(\lambda_0) = E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 赋予分布意义，并定义$K^+ =(K_+^*)^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_{-s}^{1})$。明确地说

$$\begin{aligned} K^+ = G_+ v + \oplus_{j=1}^2 \Big(& \chi_1 (h_j - \mathrm{i})^{-1} \big(\mathrm{i}\chi_1 + [\chi_1, p_j^2] \big) \\ & + \sum_{\nu \in \sigma_j} \Big(\big(\chi_2 r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r^{\frac{n_j-1}{2}} \chi_2 \big) \otimes P_{j,\nu} \Big) B_j \\ & + \sum_{\nu \in \sigma_j} \big(\chi_2 r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r^{\frac{n_j-1}{2}} [\chi_2, p_j^2] \big) \otimes P_{j,\nu} \Big). \end{aligned} \tag{4.28}$$

2） $K^+ f = -G_+ E_{\mathcal{H}}(\lambda_0) f - f$ 对满足 $f \in \mathcal{H}_{-s_0}^{1}$ 的每个 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0) f \in \mathcal{H}_s^{-1}$，其中某个 $s > 1-\nu_0$。

3）对于任意 $s > 1$，算子 $G_+ \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s^{-1}, \mathcal{H}_{-s}^{1})$ 是单射，并且

$$\operatorname{Im} G_+ = \tfrac{G_+ - G_+^*}{2\mathrm{i}} \geq \oplus_{j=1}^2 \big(\chi_1 (h_j + \mathrm{i})^{-1} (h_j - \mathrm{i})^{-1} \big) \chi_1 \geq 0. \tag{4.29}$$

证明。*I*。设 s、s'如（4.26）中所给。我们证明 $r^{-s} R_{j,\ \nu} r^{-s'}$ 在L_I^2 上有界，且其界与 $\nu \in \sigma_j$无关。希尔伯特-施密特判据适用。我们注意到以下界（这里只考虑 $\nu \neq 0$； $\nu = 0$ 的情形更简单）

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \mathrm{d}r |\nu|^{-2} r^{1+2\operatorname{Re}\nu - 2s} \int_r^\infty r'^{(1-2\operatorname{Re}\nu - 2s')} \mathrm{d}r' \leq C|\nu|^{-2} (s' + \operatorname{Re}\nu - 1)^{-1}, \\ & \int_1^\infty \mathrm{d}r |\nu|^{-2} r^{1-2\operatorname{Re}\nu - 2s} \int_1^r r'^{(1+2\operatorname{Re}\nu - 2s')} \mathrm{d}r' \\ & \leq C|\nu|^{-2} \begin{cases} (s + \operatorname{Re}\nu - 1)^{-1} (s' - \operatorname{Re}\nu - 1)^{-1} & \text{for } s' > \operatorname{Re}\nu + 1, \\ (\operatorname{Re}\nu + 1 - s')^{-1} & \text{for } s' < \operatorname{Re}\nu + 1, \\ \int_1^\infty r^{1-2\operatorname{Re}\nu - 2s} \ln r \, \mathrm{d}r & \text{for } s' = \operatorname{Re}\nu + 1, \end{cases} . \end{aligned}$$

特别地，当 $\operatorname{Re}\nu \to \infty$ 时，这给出算子界 $\mathcal{O}(|\nu|^{-3/2})$。类似地$\partial_r r^{1-s} R_{j,\ \nu} r^{-s'}$ 是有界的，其界为 $\mathcal{O}(|\nu|^{-1/2})$。由此得到

$$\begin{aligned} & \big(-\Delta_j + \tfrac{q_j(\theta)}{r^2} \big) \Big(\big(\chi_2 r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r^{\frac{n_j-1}{2}} \chi_2 \big) \otimes P_{j,\nu} \Big) \\ & = \big([p_j^2, \chi_2] r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r^{\frac{n_j-1}{2}} \chi_2 \big) \otimes P_{j,\nu} + \chi_2^2 \otimes P_{j,\nu} \in \mathcal{L}(L_{s'}^2, L_{-s}^2), \end{aligned}$$

其中第一项由 $\mathcal{O}(|\nu|^{-1/2})$ 有界。利用 $-\Delta_j + {}^{q_j(\theta)}\, r^2$ 的椭圆性和插值，我们进而得到

$$\big(\chi_2 r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r^{\frac{n_j-1}{2}} \chi_2 \big) \otimes P_{j,\nu} \in \mathcal{L}(H_{s'}^{-1}, H_{-s}^{1})$$

其界为 $\mathcal{O}(|\nu|^0)$。

由于定义 G_+ 的无穷和是正交直和分解（并且显然有 $\chi_1(h_j - \mathrm{i})^{-1}\chi_1 \in \mathcal{L}(H^{-1}_{s'}, H^1_{-s})$），我们得出（4.26）。

II。紧性断言（4.27）可通过先计算 K^*_+，按照步骤 I 进行估计（选择适当的参数），然后利用“每个 ν-扇区”上的紧性（通过希尔伯特-施密特判据得到）以及 $\mathcal{O}(|\nu|^{-1/2})$ 界（同样来自 I）来证明。要求 $s \in (1-\nu_0, 2+\nu_0)$ 是由希尔伯特-施密特判据决定的。更确切地说，固定任意这样的 s，我们需要找到 $s' \in \mathbb{R}$，使得最重要的是，$r^{-s'}R^*_{j,\,\nu}r^{-s}$ 和 $r^{s-3}R^*_{j,\,\nu}r^{-s}$ 在 L^2_I 上有界。由于（4.26），只需满足

$$s' > 1 - \nu_0,\ s + s' > 2 \text{ and } s - 3 + s' \leq 0.$$

这些要求由 $s' = 3 - s$ 得到满足，因此我们可以使用 $\|r^{s-3}R^*_{j,\,\nu}r^{-s}\| \to 0$ 对于 $\nu \to \infty$。我们已经证明了 1)。

III。我们通过仿照定理 4.2 的证明来证明 2)。对于任意给定的 $f \in \mathcal{H}^1_{-s_0}$ with $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f \in \mathcal{H}^{-1}_s$ for some $s > 1 - \nu_0$，我们将 G_+ 应用于 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f$，并进行分部积分。更准确地说，对于任意 $g \in \mathcal{H}^0_\infty$，我们使用定理 4.2 证明中步骤 II 的光滑截断论证（分部积分），如下计算，其中分部积分出现在下面的第三步：

$$\begin{aligned}\langle g, G_+E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f\rangle &= \langle G^*_+g, E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f\rangle = \lim_{R\to\infty}\langle G^*_+g, \chi_R E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f\rangle \\ &= \langle -K^*_+g - g, f\rangle = \langle g, -K^+f - f\rangle,\end{aligned}$$

由稠密性论证可得 2)。该论证巧妙地利用了 $vf \in \mathcal{H}^{-1}{}_{(3-s_0)^-}$，而这又由 (2.56) 得出。

IV. 对于断言 (4.29)，只需证明 $\mathrm{Im}R_{j,\nu} \geq 0$。对于 $\nu \geq 0$，$R_{j,\nu}$ 的核为实且对称，因此在这种情况下 $\mathrm{Im}R_{j,\nu} = 0$。若 $\nu = -\mathrm{i}\sigma$，其中 $\sigma > 0$ 的核为

$$\big(\operatorname{Im} R_{j,\nu}\big)(r, r') = \sigma\phi_\nu(r_<)\phi_\nu(r_>),$$

并且由于 ϕ_ν 为实数，由此可知在这种情况下 $\mathrm{Im}R_{j,\nu} \geq 0$ 也成立。

若 $G_+f = 0$, $f = (f_1, f_2)$，则 (4.29) 得出 $\chi_1 f = 0$。因此

$$\Big(\chi_2 r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r^{\frac{n_j-1}{2}}\Big) \otimes P_{j,\nu}\chi_2 f_j = 0 \text{ for all } \nu \in \sigma_j.$$

由于 $R_{j,\nu}(r, r')$ 是一个格林函数，由这些公式可知 $\chi_2 f = 0$ 也成立。因此进而有 $f = 0$，并证明了 3)。 □

注记。2) 中的空间 $\mathcal{H}^1_{-s_0}$ 对于该断言而言并非最优。只需要求 $f_j \in \mathcal{B}^*_{s_0,0}(\mathrm{X}_j)$、$j = 1$、2。另一方面，在情形 $s_0 = 1$ 下，若使用比下文稍小的空间来定义共振的概念，即 $\mathcal{H}^1{}_{(-1)^+} = \cup_{s>-1}\mathcal{H}^1_s$ 而不是 $\mathcal{H}^1_{-1}$，则可避免在定理 4.7 的 3) 和 4) 中对情形 $s_0 = 1$ 进行特殊处理。

定义 4.6。 (1) 如果方程 $(H-\lambda_0)u=0$存在一个解 $u\in H^1_{-s_0}\setminus H^1$，则称 λ_0 为 H 的共振。这样的解称为 H的共振态。共振 λ_0 的重数定义为商空间的维数，记作n_{res}

$$\ker(H-\lambda_0)_{|H^1_{-s_0}}/\ker(H-\lambda_0)_{|H^1}.$$

（2）若方程 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$ 有解$f\in\mathcal{H}^1_{-s_0}\setminus\mathcal{H}^1$，则称 0 是 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 的共振。这样的解称为 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 的共振态。共振 0 的重数定义为商空间的维数

$$\ker E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)_{|\mathcal{H}^1_{-s_0}}/\ker E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)_{|\mathcal{H}^1}.$$

由引理 4.1（应用 $s=s_0$ 和 $s=0$）可知， λ_0 是 H 的共振（分别为特征值）当且仅当 0 是 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 的共振（分别为特征值），且它们的重数相同。

对于 $j=1$，我们引入 2，

$$\sigma_{j,k}=\sigma_j\setminus(k,\infty)\text{ and }\sigma^+_{j,k}=\sigma_j\cap(0,k];\quad k\in\mathbb{N}.$$

我们在 ran $P_{j,\nu}$ 中为每个 $\nu\in\sigma_j$ 取一个正交归一基，记为 $\zeta^{(1)}_{j\nu}$、……、$\zeta^{(n_{j,\nu})}_{j,\nu}$。共振集合部分由集合 $\sigma^+_{j,1}$ 决定，以下结果说明了这一点。

定理 4.7。 设对于 $j=1$，2满足命题 *2.12* 和 （4.20）的条件。

1）求解 $(H-\lambda_0)u=0$ 的向量 $u\in H^1_{-s_0}$所构成空间的维数是有限的。如果向量 $u\in H^1_{-s_0}$满足 $(H-\lambda_0)u=0$，那么 $f=T^*u\in\mathcal{H}^1_{-s_0}$和 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$；反之，如果 $f\in\mathcal{H}^1_{-s_0}$ 满足 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$，那么 $u=E_+(\lambda_0)f\in H^1_{-s_0}$以及 $(H-\lambda_0)u=0$。

2）向量 $f\in\mathcal{H}^1_{-s_0}$ 满足 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$，当且仅当$f\in\mathcal{H}^1_{(\nu_0-1)}$ - 且 $f\in$核$(1+K^+)$；这里 K^+ 由 (4.28) 给出（作为作用于 $\mathcal{H}^1_{-s}$ 上的算子，其中任意 $s\in(1-\nu_0,\ 2+\nu_0)$）。

3) 假设 $f\in\mathcal{H}^1_{-s_0}$ 和 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$。情形 $s_0=1$ 下，进一步假设对于某个 $s<1$，有 $f\in\mathcal{H}^1_{-s}$。则 $f=(f_1,f_2)$ 的分量可以分解为

$$\begin{aligned}
-f_j(r_j\theta_j)&=\sum_{\nu\in\sigma_{j,1}}\sum_{k=1}^{n_{j,\nu}}l_{j,\nu,k}(f)r_j^{\frac{2-n_j}{2}-\nu}\chi_2(r_j)\zeta^{(k)}_{j,\nu}(\theta_j)+g_j,\\
&\quad where\ g_j\in L^2\ and\\
l_{j,\nu,k}(f)&=\big\langle\phi_\nu(|y_j|)|y_j|^{-\frac{n_j-1}{2}}\otimes\zeta^{(k)}_{j,\nu},\tilde f_j(y_j)\big\rangle_{L^2(\mathrm{d}y_j)};\\
\tilde f_j&=\chi_2\big(vf\big)_j+\chi_2B_jf_j+[\chi_2,p_j^2]f_j\,(\in L^2_{3-s_0}).
\end{aligned}\tag{4.30}$$

Here

$$l_{j,\nu,k}(f)=0\ for\ \mathrm{i}\nu\geq0.\tag{4.31}$$

特别是

$$\begin{aligned}
f\in\mathcal{H}\quad\Longleftrightarrow\quad&\forall j=1,2,\,\nu\in\sigma^+_{j,1},\,k=1,\dots,n_{j,\nu}:\\
&l_{j,\nu,k}(f)=0.
\end{aligned}\tag{4.32}$$

4）假设 $u \in H^1_{-s_0}$ *and* $(H-\lambda_0)u = 0$。在情形 $s_0 = 1$ 中，进一步假设对于某个 $s < 1$，有 $u \in H^1_{-s}$。那么

$$u \in L^2(\mathbf{X}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall j = 1,2,\, \nu \in \sigma^+_{j,1},\, k = 1,\dots,n_{j,\nu} : \\ l_{j,\nu,k}(T^*u) = 0. \end{array} \tag{4.33}$$

特别地，如果 $s_0 \neq 1$，则 H 在 λ_0处的共振（如果存在）的重数 n_{res} 有界于

$$n_{\mathrm{res}} \leq \sum_{j=1}^{2} \sum_{\nu \in \sigma^+_{j,1}} n_{j,\nu}. \tag{4.34}$$

对于 $s_0 = 1$，界 (4.34) 成立，前提是将左端替换为商空间 $\ker(H-\lambda_0)^{|H^1(-1)^+} \big/ \ker(H-\lambda_0)^{|H^1}$ 的维数。

证明。*I*。关于 1) 的第二部分，我们参见引理 4.1。为证明 1) 的第一部分，我们使用这一对应关系，并研究方程 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0$，其中 $f \in \mathcal{H}^1_{-s_0}$。根据引理 4.5 2)，我们可以写成 $-f = G_+E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f + K^+f = K^+f$，并回顾对于任意 $s \in (1-\nu_0,\, 2+\nu_0)$，都有 $K^+ \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^1_{-s})$。特别地，$f \in \mathcal{H}^1_{-s'}$，$K^+ \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^1_{-s'})$，且当 $s' = 3/2 + \nu_0$ 时有 $f + K^+f = 0$。因此，由弗雷德霍姆理论可知，满足 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0$ 的函数空间的维数是有限的。于是我们证明了 1)。

II. 为证明 2) 的“仅当部分”，我们考虑任意 $f \in \mathcal{H}^1_{-s_0} \cap \ker(1+K^+)$。根据步骤 I，只需证明 $f \in \mathcal{H}^{1\,(\nu_0-1)^-}$。对于$s_0 = 1$，该性质显然成立。若 $s_0 > 1$，则论证如下。利用 (4.28) 可得，对于任意 $s_1 > \max\{s_0 - 1, 1-\nu_0\}$，都有 $f \in \mathcal{H}^1_{-s_1}$；当 $s_0 \leq 2 - \nu_0$ 时，证明即告完成。一般而言，我们选取最小的 $k \in \mathbb{N}$，使得 $s_0 - k \leq 1 - \nu_0$，并注意到，经过上述论证的 $k-1$ 次迭代后，对于任意 $s_k > \max\{s_0 - k, 1-\nu_0\} = 1 - \nu_0$，我们得到 $f \in \mathcal{H}^{1,\,-s_k}$。

为证明 2) 的“如果部分”，设 $f \in \mathcal{H}^{1\,(\nu_0-1)^-} \cap \ker(1+K^+)$。我们需要证明 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0$。通过利用 (4.28) 进行直接计算可得，对于所有 $s < 2+\nu_0$，都有$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = -E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)K^+f \in \mathcal{H}^{-1}_s$，特别地，对于某个 $s > 1-\nu_0$ 也成立。因此，根据引理 4.5 的 2)，有 $-G_+E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = f + K^+f = 0$。再应用引理 4.5 的 3)，我们得到 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0$。

III。我们证明任意满足 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0$ 的 $f \in \mathcal{H}^1_{-s_0}$ 都满足 (4.30)。根据假设，如果 $\nu_0 = 0$，则对于某个 $s < 1$ 有 $f \in \mathcal{H}^1_{-s}$。如果 $\nu_0 > 0$，我们由步骤 II 知道，对于所有 $s > 1 - \nu_0$，都有 $f \in \mathcal{H}^1_{-s}$。因此

$$\text{for some } s < 1 : \quad f \in \mathcal{H}^1_{-s}. \tag{4.35}$$

由于定义中出现的 v 和 B_j，以及 (4.30) 中的 $l_{j,\,\nu,\,k}(f)$，均为 r^{-3} 阶，因此我们得到

$$\text{for some } s < 1 \text{ and } j = 1,2 : \quad \tilde{f}_j \in L^2_{3-s}. \tag{4.36}$$

另一方面，对于 $\nu \in \sigma_{j,\,1}$向量 $\chi_2(|y_j|)\phi_\nu(|y_j|)|y_j|^{-\frac{n-1}{2}} \otimes \zeta_j^{(k),\,\nu} \in H^{1\,(-2)^-}$，因此 $l_{j,\,\nu,\,k}(f)$ 定义良好。正如我们在引理 4.5 的证明中所看到的，算子

$r^{-s}R_{j,\,\nu}r^{-s'}$ 在 L^2_I 上是有界的，只要 $s, s' > 1 - \operatorname{Re}\nu$ 和 $s + s' > 2$，其界与 $\nu \in \sigma_j$ 无关。特别地，如果 $\nu > 1$，我们可以取 $s = 0$，从而得到 $R_{j,\,\nu}r^{-s'}$ 对任意 $s' > 2$都具有有界性。结合 (4.36)，我们得到 $-K_+f$ 的展开中对应于 $\nu > 1$ 的各项在 L^2中求和为一个向量。

还需考虑来自 $\nu \in \sigma_{j,1}$ 的贡献。我们考察 K_+f 中对应于任意固定的 $j, \nu \in \sigma_{j,1}$ 以及 $k = 1, \dots, n_{j,\nu}$ 的项。将其写成

$$\begin{aligned}&\Big\langle \zeta^{(k)}_{j,\nu}, \Big(\chi_2 r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r^{\frac{n_j-1}{2}} \tilde{f}_j\Big)(r_j, \cdot)\Big\rangle_{L^2(\mathbb{S}_j)} \otimes \zeta^{(k)}_{j,\nu} \\ &= r_j^{\frac{1-n_j}{2}} \chi_2(r_j)\Big(l_{j,\nu,k}(f)\psi_\nu(r_j) + f_{j,\nu,k}(r_j)\Big) \otimes \zeta^{(k)}_{j,\nu},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}f_{j,\nu,k}(r) = \phi_\nu(r) \int_r^\infty \psi_\nu(r') \big\langle \zeta^{(k)}_{j,\nu}, r'^{\frac{n_j-1}{2}} \tilde{f}_j(r', \cdot)\big\rangle_{L^2(\mathbb{S}_j)} \,\mathrm{d}r' \\ - \psi_\nu(r) \int_r^\infty \phi_\nu(r') \big\langle \zeta^{(k)}_{j,\nu}, r'^{\frac{n_j-1}{2}} \tilde{f}_j(r', \cdot)\big\rangle_{L^2(\mathbb{S}_j)} \,\mathrm{d}r'.\end{aligned}$$

利用柯西–施瓦茨不等式和（4.36），我们得到

$$\text{for } r \geq 1 \text{ and for some } s < 1 : |f_{j,\nu,k}(r)| \leq C r^{s-3/2}.$$

特别地，我们看到，由 $g(r\theta) = r^{\frac{1-n_j}{2}} \chi_2(r) f_{j,\nu,k}(r) \zeta^{(k)}_{j\,\nu}(\theta)$ 给出的函数 g 属于 L^2。

我们已经证明了（4.30）。显然，（4.31）和（4.32）是（4.30）和（4.35）的推论。

IV。关于 4)，我们注意到 (4.33) 可由 1)、3) 和引理 4.1 推出，而 4) 的其余陈述则由 (4.33) 得出。

□

注4.8。本节中，我们施加了命题 2.12 的条件，并考察了有效簇间相互作用W_j, $j = 1, 2$ 的三种不同渐近行为情形。为简单起见，我们没有考虑这些渐近行为混合的情形。由于命题 2.12 所呈现的对角结构，很容易看出，对角参数构造在这类情形下也适用。例如，W_1 可能由满足 (4.6) 的 I_1 决定，而 W_2 满足 (4.20)。此时，拟逆的第一个对角元应取 (4.9a) 中的算子（取正号），第二个对角元则应为引理 4.5 中出现的算子 G_+。利用 (4.14) 的一个类似结果，并采用与前文相同的迭代方案，可以推出 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 的共振态（在此情形下按类似方式定义）具有与定理 4.7 3) 中类似的结构，并且构成 $\mathcal{H}^{1,\infty}_{1,-s_0}$ 的一个子空间，其中 s_0 根据W_2 的（假定）渐近行为，按 (4.25) 定义。

注4.9。由于我们施加了命题 2.12 的条件，因此没有讨论第2.4节和第2.5节中提到的例外情形。这是一个额外的技术问题，基本上可以采用上文讨论过的同一种参数化构造来处理。关于物理模型的处理，详情从略，读者可参阅第4.3节。

4.2 情形 $\lambda_0 > \Sigma_2$

这里我们考察 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 的情形。我们需要在命题 2.12（或者更确切地说，在注 2.13）的定义中，用 $R'(\lambda_0) \to R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)$ 替代 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$，从而引入记号 $E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$。为此（以及其他目的），我们需要第3章中的若干陈述。预解式的基本结构为

$$\begin{aligned} &R'(z) = \breve{R}(z) - (p_1^2\Pi_1 + p_2^2\Pi_2 - z)^{-1}\Pi, \\ &R'(z) = \Pi'\breve{R}(z)\Pi' = \Pi'\breve{R}(z) = \breve{R}(z)\Pi'; \quad \breve{R}(z) = (\breve{H} - z)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.37a}$$

我们将使用以下与(4.9a)和(4.9b)平行的性质。对于非多重双簇情形，参见推论3.19；对于目前的重根情形，参见注3.20。存在强弱星极限

$$\text{s-w}^{\star}\text{-}\lim_{\epsilon \to 0_+} \breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}\epsilon) = \breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{1/2}(\mathbf{X}), \mathcal{B}^*_{1/2}(\mathbf{X})), \tag{4.37b}$$

并且如果对于给定的 $f \in L^2_t$，存在某个 $t > 1/2$，使得 $\breve{R}(\lambda_0 + \mathrm{i}0)f = \breve{R}(\lambda_0 - \mathrm{i}0)f$，那么

$$\breve{R}(\lambda_0 + \mathrm{i}0)f = \breve{R}(\lambda_0 - \mathrm{i}0)f \in L^2_{t-1}. \tag{4.37c}$$

我们将使用小节 4.1.2–4.1.4 中的算子 $h_j = p_j^2 + w_j$, $j = 1, 2$。回顾一下，$w_j - W_j$ 是实多项式衰减势，其具体含义随不同的假设 (4.6)、(4.15) 和 (4.20) 而异。在本节中，我们修改这三个小节，以涵盖情形 $\lambda_0 > \Sigma_2$。对于每种情形，我们将 (4.2) 写为

$$-E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0) = h_1 \oplus h_2 + v^{\pm} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}), \tag{4.38}$$

其中唯一的新特征是，先前的 v 被分别替换为根据两个极限 $R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)$ 定义的算子 $v^{\pm}$。与之前一样，它们是非局部的，但现在不再是对称的。由于 (4.37b)，它们大致是 $\mathcal{O}(|x|^{-1-2\rho})$ 阶的；原则上，它们在与乘法算子交换时不具有“良好的交换性质”（这与命题 2.12 的最低阈值设置形成对比）。更准确地说，我们需要 (2.48) 和 (2.57) 的以下版本

$$-E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0) \equiv h_1 \oplus h_2 + (K^{\pm}_{ij}(\lambda_0))_{i,j\le 2}, \tag{4.39}$$

其中差值不仅是多项式衰减的，事实上还是对称的（将在 (4.41) 中使用）。由 (4.37b) 可得以下界

$$K^{\pm}_{ij}(\lambda_0) \in \mathcal{L}\big(L^2_s(\mathbf{X}_j), L^2_t(\mathbf{X}_i)\big) \text{ for all } s > -1/2 - \rho \text{ and } t < 1/2 + \rho, \tag{4.40}$$

并且我们注意到

$$\begin{aligned} \mp \operatorname{Im} v^{\pm} &= \mp \operatorname{Im}(K^{\pm}_{ij}(\lambda_0))_{i,j\le 2} \ge 0, \\ \mp \operatorname{Im} \sum_{i,j\le 2} \langle f_i, K^{\pm}_{ij}(\lambda_0) f_j\rangle &= \pm\langle F, \operatorname{Im} R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)F\rangle; \\ F &:= \sum_{i\le 2} F_i, \quad F_i = I_i\varphi_i \otimes f_i. \end{aligned} \tag{4.41}$$

4.2.1 对于 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 的扩展本征变换

由于不能指望算子 $\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)\Pi'$ 在 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 时保持加权空间（如式 (2.56)），因此我们需要仔细考察注2.3中的“特征变换”，参见引理 4.1。

首先我们注意到（4.5）的以下修改形式,

$$E_+^{\pm}(\lambda_0) = \big(1 - \breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0))\Pi'(H - \lambda_0)\big)S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s^1, H_t^1) \\ \text{provided } s > -1/2 - \rho,\, t < -1/2 \text{ and } t \le s, \tag{4.42}$$

参见引理 4.1 的证明。我们将使用（4.42）的 Besov空间版本；事实上，我们需要（参见引理 4.1 的证明）

$$\langle -\Delta\rangle^{1/2}\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)\Pi'(H - \lambda_0)S \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*_{1/2}(\mathbf{X})); \\ \mathcal{B} := \mathcal{B}_{1/2}(\mathbf{X}_1) \oplus \mathcal{B}_{1/2}(\mathbf{X}_2). \tag{4.43}$$

以下引理 4.10 对第 4.1.2–4.1.4 小节中讨论的情形成立；事实上，这里的设定是命题 2.12 的设定（现在带有 $\lambda_0 > \Sigma_2$）。我们引入$s_0' = 1/2 + \rho'/4$，其中 $0 < \rho' < 4\rho$, $\rho' \le 2$ 以及

$$|W_j(y)| \le C\langle y\rangle^{-\rho'} \text{ for } |y| \ge R; \quad R \text{ large}. \tag{4.44}$$

如果 $\rho = 1$ （这是我们主要关注的情形），则条件可化为对于某个 $\rho' \le 2$ 满足（4.44），在这种情况下，我们分别在第 4.2.2 和第 4.2.4 小节中取 $\rho' = 1$ 和 $\rho' = 2$。另一方面，第 4.2.3 小节不涉及（4.44）和引理 4.10 本身，而是涉及下面作为引理 4.11 陈述的引理 4.10 的一个版本。我们将引理 4.10 和引理 4.11 视为引理 4.1 的替代。回顾记号$\mathcal{H}_s = L^2_s(\mathrm{X}_1) \oplus L^2_s(\mathrm{X}_2)$。

引理 4.10。 假设命题 *2.12* 的条件成立（但现在假设$\lambda_0 > \Sigma_2$除外）。令 $s \le s_0'$ 和 $t \in (0,\ s_0']$。

1）映射 T^*： $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s} \to \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，其中

$$\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s} := \{u \in L^2_{-s}(\mathbf{X}) \mid (H - \lambda_0)u = 0,\ \Pi' u \in \mathcal{B}^*_{1/2,0}(\mathbf{X})\}, \\ \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s} := \{f \in \mathcal{H}_{-s} \mid E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0\},$$

是定义良好的线性同构，其逆算子为 $E^+_+(\lambda_0)$： $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s} \to \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$。

2）空间 $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$和 $\{f \in \mathcal{H}_{-s} \mid E^-_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0\}$重合，并且对所有 $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，$E^-_+(\lambda_0)f = E^+_+(\lambda_0)f$。

3）映射 T^*：核$(H-\lambda_0) \to$核 $E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)|^{\mathcal{H}}$ 是定义良好的线性同构，其逆算子为 $E^+_+(\lambda_0)$。

4）映射 T^*： $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-t,\ 0} \to \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-t,\ 0}$，其中

$$\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-t,0} := \{u \in \mathcal{B}^*_{t,0}(\mathbf{X}) \mid (H - \lambda_0)u = 0,\ \Pi' u \in \mathcal{B}^*_{1/2,0}(\mathbf{X})\}, \\ \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-t,0} := \{f \in \mathcal{B}^*_{t,0}(\mathbf{X}_1) \oplus \mathcal{B}^*_{t,0}(\mathbf{X}_2) \mid E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0\},$$

是一个定义良好的线性同构，其逆算子为 $E^+_+(\lambda_0)$:$\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-t,0} \to \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-t,0}$。

5) 空间 $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-t,0}$和 $\{f \in \mathcal{B}^*_{t,0}(\mathbf{X}_1) \oplus \mathcal{B}^*_{t,0}(\mathbf{X}_2) |\ E^-_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0\}$ 相同，并且对于所有 $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-t,0}$，$E^-_+(\lambda_0)f = E^+_+(\lambda_0)f$。

6) 存在 $\sigma < 0$，使得对于任意实函数 $\chi_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$，若其支集在 $(-\infty, \sigma/2)$ 内，且在 1 上取值为 $(-\infty, \sigma)$，则 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s'_0,0}$，并且两个空间

$$\mathcal{E}^{\mathcal{G},\pm}_{-s'_0,\pm\sigma} := \{u \in \mathcal{B}^*_{s'_0,0}(\mathbf{X}) \mid (H-\lambda_0)u = 0,\ \Pi' u \in \mathcal{B}^*_{1/2}(\mathbf{X}), \\ \chi_\sigma(\pm B_{R_0})\Pi' u \in \mathcal{B}^*_{1/2,0}(\mathbf{X})\}$$

完全相同。（这里 $B = B_{R_0}$ 由 (3.7) 给出。）

证明。*I*。设 $u \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$已给定。于是 $f = T^*u \in \mathcal{H}_{-s}$容易得到，因此要证明$f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，只需证明 $E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0$。注意到 $\Pi'(H-\lambda_0)\Pi u \in \mathcal{B}_{1/2}(\mathbf{X})$，参见引理 2.9，因此 $R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)(H-\lambda_0)\Pi u$ 是 $\mathcal{B}^*_{1/2}(\mathbf{X})$ 中定义良好的元素。利用这一事实以及 (2.14) 和 (2.31a)，我们计算得

$$\begin{aligned} E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f &= S^*(\lambda_0 - H)ST^*u + S^*HR'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)(H-\lambda_0)ST^*u \\ &= S^*(\lambda_0 - H)\Pi u + S^*HR'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)(H-\lambda_0)\Pi u \\ &= S^*(\lambda_0 - H)\Pi u + S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)(H-\lambda_0)\Pi u \\ &= S^*(\lambda_0 - H)\Pi u + \lim_{R\to\infty} S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)(H-\lambda_0)\Pi\chi_R u; \end{aligned}$$

此处根据（1.29）给出了 $\chi_R(x) = \chi(|x|/R)$，$R \geq 1$。我们利用 $\mathcal{B}^*$ 上的弱星拓扑计算第二项，其中 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{1/2}(\mathbf{X}_1) \oplus \mathcal{B}_{1/2}(\mathbf{X}_2)$

$$\begin{aligned} &\lim_{R\to\infty} S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)(H-\lambda_0)\Pi\chi_R u \\ &= -\operatorname*{w^\star\text{-}lim}_{R\to\infty} S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)(H-\lambda_0)\Pi'\chi_R u \\ &\quad + \operatorname*{w^\star\text{-}lim}_{R\to\infty} S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)(H-\lambda_0)\chi_R u \\ &= \operatorname*{w^\star\text{-}lim}_{R\to\infty} S^*(\lambda_0 - H)\Pi'\chi_R u \\ &\quad + \operatorname*{w^\star\text{-}lim}_{R\to\infty} S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)[H-\lambda_0, \chi_R]u \\ &= S^*(\lambda_0 - H)\Pi' u \\ &\quad + \operatorname*{w^\star\text{-}lim}_{R\to\infty} S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)[H-\lambda_0, \chi_R]u. \end{aligned}$$

假设我们可以证明第二项

$$\operatorname*{w^\star\text{-}lim}_{R\to\infty} S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)[H-\lambda_0, \chi_R]u = 0. \tag{4.45}$$

由上述计算，我们得到了所需的结果

$$\begin{aligned} E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f &= S^*(\lambda_0 - H)\Pi u + S^*(\lambda_0 - H)\Pi' u \\ &= S^*(\lambda_0 - H)u \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此，只需证明（4.45）。我们注意到

$$-[(H-\lambda_0),\chi_R]u = 2\nabla\cdot(\nabla\chi_R)\,u - (\Delta\chi_R)u$$

并且对于 ∇ 的所有分量 ∇_k，算子 ∇_k 与 (4.45) 中左侧的算子组合；对于这一组合，我们可以使用 (4.43)。牢记这种“有效有界性”，我们通过代入以下内容来处理第一项

$$u = \Pi u + \Pi' u = \Pi_1 u + \Pi_2 u + (\Pi - SS^*)u + \Pi' u.$$

对于 $j=1,\ 2$

$$\Pi'\nabla\cdot(\nabla\chi_R)\Pi_j u = \Pi'\nabla_{x_j}\cdot(\nabla\chi_R)_{|x^j=0}\Pi_j u + \mathcal{O}(R^{-2})\Pi u = 0 + \mathcal{O}(R^{-2})u, \quad (4.46)$$

因此，第一项和第二项在极限中均无贡献。第三项由引理 2.9 处理。同理

$$\Pi'\nabla\cdot(\nabla\chi_R)\Pi' u = \mathcal{O}(R^{-1})\Pi' u$$

在极限中无贡献，并且显然，项 $(\Delta\chi_R)u = \mathcal{O}(R^{-2})u$ 也没有贡献。由此得到 (4.45)。

II. 首先注意，对于 $f\in\mathcal{H}_{-s}$，$E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f$ 在分布意义下有定义，因此 $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$ 有定义。我们证明，$E^{+}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$ 当且仅当 $E^{-}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$。设 $E^{+}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$。首先证明

$$\mathrm{Im}\langle f_j, \check{h}_j f_j\rangle = 0; \quad \check{h}_j = -\Delta_j + W_j,\ j=1,2. \quad (4.47)$$

注意，对于任意 $s<1/2+\rho$、$f_j\in L^2_{-s'_0}$，都有 $\check{}\ h_j f_j\in L^2_s$，且 $s'_0<1/2+\rho$，因此 $\check{}\langle f_j$、$h_j f_j\rangle$ 有良好定义。我们计算

$$\chi_R\check{h}_j f_j = \check{h}_j\chi_R f_j + (\Delta\chi_R)f_j + 2(\nabla\chi_R)\cdot\nabla f_j,$$

然后

$$\mathrm{Im}\langle f_j,\check{h}_j f_j\rangle = \lim_{R\to\infty}\mathrm{Im}\langle\chi_R f_j,\chi_R\check{h}_j f_j\rangle = 2\lim_{R\to\infty}\mathrm{Im}\langle\chi_R f_j,(\nabla\chi_R)\cdot\nabla f_j\rangle$$

接下来，我们按照（4.13）估计

$$\begin{aligned}
&R^2\|(\nabla\chi_R)\cdot\nabla f_j\|^2_{L^2(\mathbf{X}_j)}\\
&\le C_1\langle p^2\rangle_{\chi_{2R}\bar{\chi}_{R/2}f_j}\\
&\le C_2\big(\,\mathrm{Re}\langle\chi^2_{2R}\bar{\chi}^2_{R/2}f_j,\check{h}_j f_j\rangle + R^{-\rho'}\|\chi_{4R}f_j\|^2\big)\\
&= C_2\big(o(R^0)+R^{-\rho'}o(R^{2s'_0})\big)\\
&= o(R^{1-\rho'/2}),
\end{aligned}$$

从而得到

$$\lim_{R\to\infty} R^{s'_0}\|(\nabla\chi_R)\cdot\nabla f_j\|_{L^2(\mathbf{X}_j)} = 0.$$

此外

$$\lim_{R\to\infty} R^{-s_0'}\|\chi_R f_j\|_{L^2(\mathbf{x}_j)} = 0.$$

由柯西-施瓦茨不等式可得（4.47）。

接下来，利用（4.41）和（4.47）计算可得

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Im}\langle f, E_{\mathcal{H}}^{+}(\lambda_0) f\rangle = \mathrm{Im}\langle F, R'(\lambda_0 + \mathrm{i}0) F\rangle; \\ F = \sum_{i\le 2} F_i, \quad F_i = I_i \varphi_i \otimes f_i. \end{aligned} \tag{4.48}$$

因此也有 $\mathrm{Im}\langle F, R'(\lambda_0 - \mathrm{i}0)F\rangle = 0$，由此可知 $R'(\lambda_0 + \mathrm{i}0)F = R'(\lambda_0 - \mathrm{i}0)F$，从而也有 $E_{\mathcal{H}}^{-}(\lambda_0)f = 0$。对于另一个蕴含关系，也可用类似方法论证。

III。设 $f \in \mathcal{E}_{-s}^{\mathcal{H}}$。我们需要证明 $u := E_{+}^{+}(\lambda_0)f \in \mathcal{E}_{-s}^{\mathcal{G}}$，并且 $T^*u = f$。显然，$Sf \in L^2_{-s}(\mathrm{X})$。我们在步骤 *II* 中指出，$R'(\lambda_0 + \mathrm{i}0)F = R'(\lambda_0 - \mathrm{i}0)F$，其中 F 在（4.48）中给出。这意味着 $u = E_{+}^{-}(\lambda_0)f$，再利用（4.37a）–（4.37c），即可得出 $u \in L^2_{-s}(\mathrm{X})$ 以及 $\Pi' u \in \mathcal{B}^*_{1/2,\,0}(\mathrm{X})$。为了证明 $u \in \mathcal{E}_{-s}^{\mathcal{G}}$，还需证明 $(H - \lambda_0)u = 0$。我们计算

$$\begin{aligned} (H-\lambda_0)u &= (H-\lambda_0)Sf - (H-\lambda_0)R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)HSf \\ &= (H-\lambda_0)Sf - \Pi'(H-\lambda_0)R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)(H-\lambda_0)Sf \\ &\quad - \Pi(H-\lambda_0)R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)(H-\lambda_0)Sf \\ &= (H-\lambda_0)Sf - \Pi'(H-\lambda_0)Sf - \Pi H R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)HSf \\ &= \Pi(H-\lambda_0)Sf - \Pi H R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)HSf. \end{aligned}$$

我们得出（$H - \lambda_0$）$u \in \Pi L^2_{-s}(\mathrm{X})$（因为 $\Delta f \in \mathcal{H}_{-s}$），并且

$$S^*(H-\lambda_0)u = -E_{\mathcal{H}}^{+}(\lambda_0)f = 0,$$

因此（因为 S^* 在空间 $\Pi L^2_{-s}(\mathrm{X})$ 上是单射的），确实有（$H - \lambda_0$）$u = 0$。

接下来我们计算

$$\begin{aligned} T^*E_{+}^{+}(\lambda_0)f &= T^*Sf - T^*R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)(H-\lambda_0)Sf \\ &= f - 0 \quad (\text{since } T^*\Pi' = 0) \\ &= f. \end{aligned}$$

IV。令 $u \in \mathcal{E}_{-s}^{\mathcal{G}}$，并注意到我们在步骤 *I* 中证明了 $f := T^*u \in \mathcal{E}_{-s}^{\mathcal{H}}$。利用证明中的部分内容，我们如下证明 $u = E_{+}^{+}(\lambda_0)f$。

$$\begin{aligned} E_{+}^{+}(\lambda_0)T^*u &= ST^*u - R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)(H-\lambda_0)ST^*u \\ &= \Pi u - R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)(H-\lambda_0)\Pi u \\ &= \Pi u - \lim_{R\to\infty} \Pi' \breve{R}(\lambda_0+\mathrm{i}0)(H-\lambda_0)\Pi\chi_R u \\ &= \Pi u + \Pi' u \\ &= u. \end{aligned}$$

这就完成了对 1）和 2）的证明，而 3）是 1）的特殊情形。陈述 4）和 5）分别完全按照 1）和 2）进行证明。

V。显然 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s_0',0} \subset \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{,-s_0',\pm\sigma}$。我们选择 $\sigma < 0$ 使得

$$\bar\chi_\sigma(B_{R_0})\breve R(\lambda_0 - \mathrm{i}0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{1/2}(\mathbf{X}), \mathcal{B}^*_{1/2,0}(\mathbf{X})); \quad \bar\chi_\sigma(B_{R_0}) = \big(1 - \chi_\sigma(B_{R_0})\big),$$

参见引理 3.15。我们只证明 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{,-s_0',\sigma}$ 的反向包含。因此，设 $u \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{,-s_0',\sigma}$ 给定。然后我们可以模仿步骤*I*，并看出在这种情况下也有 $f = T^*u \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s_0',0}$。注意，为了证明 (4.45)，我们可以使用上述界来估计

$$\begin{aligned}
&\mathrm{w}^\star\text{-}\lim_{R\to\infty} S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve R(\lambda_0+\mathrm{i}0)[H-\lambda_0,\chi_R]u\\
&= -2\,\mathrm{w}^\star\text{-}\lim_{R\to\infty} S^*(H-\lambda_0)\Pi'\breve R(\lambda_0+\mathrm{i}0)\Pi'\nabla\cdot(\nabla\chi_R)\Big(\chi_\sigma(B_{R_0}) + \bar\chi_\sigma(B_{R_0})\Big)\Pi' u\\
&= 0 + 0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

我们采用模仿步骤*IV*的相同论证，参见 4)。因此确有 $u \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s_0',0}$，并且我们已证明 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{,-s_0',\sigma} = \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s_0',0}$。 □

在区域 $s \in (s_0', 1/2+\rho)$ 中，我们可以按照引理 4.10 1) 的方式定义 $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，但在这种情况下无法得出引理 4.10 2)。这引出了以下定义

$$\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s} := \{f \in \mathcal{H}_{-s} | \quad E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = E^-_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0\} \quad \text{for} \quad s < 1/2+\rho,$$

这与引理 4.10 一致。显然，我们也可以将引理 4.10 1) 中给出的 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$ 的定义扩展到任意实数 s。

引理 4.11. 设命题 *2.12* 的条件成立（但现在假设 $\lambda_0 > \Sigma_2$）。设 $s \le 3/2$ 和 $s < 1/2+\rho$。则映射

$$T^* : \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s} \to \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$$

是一个良定义的线性同构，其逆算子为 $E^+_+(\lambda_0) : \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s} \to \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$（由(4.42)定义）。此外，对于所有 $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，$E^-_+(\lambda_0)f = E^+_+(\lambda_0)f$。

证明. 我们可以假设 (4.44) 成立，且 $s \in (s_0', 1/2+\rho)$，特别是 $s > 1/2$。由引理 4.10 证明中的步骤 *I* 可知，T^* 映入 $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$。显然，$E^+_+(\lambda_0)$ 映入 $L^2_{-s}(\mathbf{X})$，但要证明 $E^+_+(\lambda_0)$ 实际上映入 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$，我们不能使用 (4.48)；不过，下面的替代方法可行：

$$\begin{aligned}
0 = \mathrm{Im}\langle f, E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f - E^-_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f\rangle = 2\,\mathrm{Im}\langle F, R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)F\rangle;\\
F = \sum_{i\le 2} F_i, \quad F_i = I_i\varphi_i \otimes f_i.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

这表明对于所有 $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，$R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)F = R'(\lambda_0-\mathrm{i}0)F$，从而$\Pi' E^+_+(\lambda_0)$ $f \in \mathcal{B}^*_{1/2,\ 0}(\mathbf{X})$ 以及对于所有 $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，$E^-_+(\lambda_0)f = E^+_+(\lambda_0)f$。接下来我们使用步骤 *III* 来说明 $(H-\lambda_0)E^+_+(\lambda_0)f = 0$，这表明确实 $E^+_+(\lambda_0)$ 映入$\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$。

最后，由步骤 *III* 和步骤 *IV* 的最后部分可知，T^* 和$E^+_+(\lambda_0)$ 互为逆算子，正如我们所要证明的。 □

4.2.2 负的缓慢衰减有效势

我们的目标是在第4.1.2小节的框架下证明定理 4.2 的一个版本（不过现在 $\lambda_0 > \Sigma_2$）。特别是 $\rho < 2$，因此我们可以将引理 4.10 与$s_0' = s_0 = 1/2 + \rho/4$ 结合使用（这相当于取 $\rho = \rho'$）。

定理 4.12。 在命题 *2.12* 的条件下（但现在假设$\lambda_0 > \Sigma_2$），并且对于 $j = 1$ 满足 (4.6)，2

$$\dim \ker(H - \lambda_0) < \infty.$$

此外 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s_0,\ 0} \subset H^1_\infty$。

证明。 我们基本上仿照定理 4.2 的证明，并以引理 4.10 替代引理 4.1。

注意到引理 4.10 3) 蕴含

$$\dim \ker(H - \lambda_0) = \dim \ker E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0), \tag{4.50}$$

并且该映射

$$E^{\pm}_{+}(\lambda_0) : \ker E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0) \to \ker(H - \lambda_0) \tag{4.51}$$

是一个同构。

我们将使用定理 4.2 的证明中的记号 h_1、 h_2 和 $R^{\pm}{}_{\text{diag}} = r_1(0 \pm \mathrm{i}0) \oplus (r_2($ $0 \pm \mathrm{i}0)$。设 $f \in \ker E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$。于是我们将方程 $R^{\pm}{}_{\text{diag}} E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0) f = 0$ 写成

$$(1 + K^{\pm}) f = 0, \quad K^{\pm} = R^{\pm}_{\text{diag}} v^{\pm}, \tag{4.52}$$

其中， $1f$ 通过将 $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}^1$ 写出并利用

$$r_j(0 \pm \mathrm{i}0) h_j f_j = f_j. \tag{4.53}$$

注意，在定理 4.2 的证明的步骤 II 中已经证明，一般而言，如果$f_j \in \mathcal{B}^*_{s_0,0}(\mathrm{X}j)$ 满足 $h_j f_j \in \mathcal{B}_{s_0}(\mathrm{X}j)$，则 (4.53) 成立。特别地，(4.53) 对 $f \in \ker E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 成立。

接下来，(4.40) 和 (4.9a) 蕴含

$$K^{\pm} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^1_{-s}) \text{ for } s \in (s_0, 1/2 + \rho). \tag{4.54}$$

由于 $K^{\pm}$ 是紧的（在任何此类空间上），根据弗雷德霍姆理论可知 $\dim \ker E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ $< \infty$，从而证明了定理的第一个断言。

根据引理 4.10，任意给定的 $\phi \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s_0,}$ $=$都对应于向量 $f = (f_1, f_2)$，$T^*\phi \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s_0\,0}$ $\phi = E^{+}_{+}\ \lambda_0\ f = E^{-}_{+}\ \lambda_0\ f$ $h_j f_j \in L^2_{s\quad j}$ $\subset$（满足 ( ) ( ) ）。还需注意，对于任意按 (4.54) 给定的 s，(X) $\mathcal{B}_{s_0}(\mathrm{X}j)$，因此根据定理 4.2 证明中步骤$II$ 的断言，可以得出 (4.52) 成立。特别是 $K^+ f = K^- f$。

逆命题成立。首先利用（4.41）观察到，$\operatorname{Im} v^+ \le 0$。由于 $\operatorname{Im} R^+{}_{\text{diag}} \ge 0$ 该方程

$$0 = \operatorname{Im}\langle f, v^+ f\rangle + \operatorname{Im}\langle R^+_{\text{diag}} v^+ f, v^+ f\rangle \tag{4.55}$$

对于 $(1+K^+)f=0$的任意解，其中 $f=(f_1,f_2)\in \mathcal{B}^*_{s_0}(\mathrm{X}_1)\oplus\mathcal{B}^*_{s_0}(\mathrm{X}_2)$，于是得到 $v^-f=v^+f$，并且对于任意这样的 f，同样有 $(1+K^-)f=0$。（类似地，$(1+K^-)f=0$ 的一个解也是 $(I+K^+)f=0$的一个解。）此外，$E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$ 在分布意义下确实成立，从而得到一个逆命题。

更重要的是，通过反复应用 (4.9b) 和 (4.37c)，我们可以改善任何满足 $(1+K^+)f=0$（因此也满足 $(1+K^-)f=0$）的 $f=(f_1,f_2)\in\mathcal{B}^*_{s_0}(\mathrm{X}_1)\oplus\mathcal{B}^*_{s_0}(\mathrm{X}_2)$ 的衰减性质：由于 $f_j\in\mathcal{B}^*_{s_0}(\mathrm{X}j)$、$j=1$、2 以及 $v^-f=v^+f$（如上所述），由 (4.37c) 可推出，对于任意 $t<1+2\rho-s_0$，都有 $v^+f\in\mathcal{H}^{-1}_t$。接下来，利用 (4.9b)（结合 (4.55)），我们可以推出，对于任意 $\epsilon<\epsilon_0$，都有 $f=-K^+f\in\mathcal{H}^1_{\epsilon-s_0}$，其中 $\epsilon_0=1+2\rho-2s_0=\frac{3}{2}\rho$。重复这一论证，例如重复 k 次，可得对于任意 $t<\epsilon_0 k$，都有 $f\in\mathcal{H}^1_{t-s_0}$，从而得到 $f\in\mathcal{H}^1_\infty$。

我们已经证明，对于任意给定的 $\phi\in\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s_0,\,0}$向量 $f=(f_1,f_2)=T^*\phi\in\mathcal{H}^1_\infty$，因此根据引理 4.10 1)，确实有 $\phi=E^+_+(\lambda_0)f\in H^1_\infty$。 □

4.2.3 正的慢衰减有效势

我们旨在证明定理 4.3 在第4.1.3小节设定下的一个版本（但现在 $\lambda_0>\Sigma_2$）。

Th定理 4.13. 在命题 *2.12* 的条件及 (4.15) 对 $j=1$，2成立的情况下 ，

$$\dim\ker(H-\lambda_0)<\infty.$$

此外，对于实数 s，若 $s\le 3/2$ 且 $s<1/2+\rho$，则 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}\subset H^1_\infty$。

证明。 根据引理 4.11，我们需要研究空间 $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，其中任意 s 均满足上述条件。采用 (4.19) 中的记号 $\widetilde{R}=h_1^{-1}\oplus h_2^{-1}$ 以及 (4.38) 中的记号，我们将 ~ 方程 $RE^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$ 对任意 $f\in\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$ 写成

$$(1+\widetilde{K})f=0;\quad \widetilde{K}=\widetilde{R}v^+. \tag{4.56}$$

~根据引理 4.4，我们可以轻松验证 $K\in\mathcal{C}(\mathcal{H}^1_{-s})$。随后由弗雷德霍姆理论可知，$f$ 属于 $\mathcal{H}^1_{-s}$的一个有限维子空间，取 $s=0$便特别得到该定理的第一个陈述。

最后我们证明

$$\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}\subset\mathcal{H}^1_\infty, \tag{4.57}$$

使用与定理 4.12 的证明中相同的迭代过程。注意，由于引理 4.11，我们可以使用 (4.37c) 和 (4.56) 来改善衰减。我们推得$f\in\mathcal{H}^1_{-s+\bar{t}}$ 给定 $f\in\mathcal{H}^1_{-s+(k-1)\bar{t}}$ 其中 $\bar{t}:=1+2\rho-\bar{\rho}$。由于该论证对所使用的 $k(\in\mathbb{N})$ 没有限制，事实上 (4.57) 可通过迭代得到。由引理 4.11 和 (4.57) 可得 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}\subset H^1_\infty$。 □

4.2.4 齐次次数为 -2 的有效势

我们的目标是在类似于第 4.1.4 小节的框架下证明定理 4.7 的一个版本。现在当然有 $\lambda_0 > \Sigma_2$，并且考虑到物理学示例，我们要求$\rho = 1$ 而不是像之前那样要求 $\rho \geq 1/2$。容易看出，如果保持 $\rho = 1/2$，我们的理论将失去意义。另一方面，在情形 $\rho \in (1/2, 1)$ 下仍有一些内容可说，但为简化表述，我们略去这一情形。事实证明，定理 4.7 的证明经过少量修改后仍然适用，特别是我们将需要带有 $s_0' = 1$ 的引理 4.10 2)。

首先，我们考察如何将引理 4.5 修改以适用于 $\lambda_0 > \Sigma_2$。由于 v^+ 的映射性质受限，我们只能得到以下较弱的结果（证明相同）。令 $s_1 = \max\{1 - \nu_0, 1/2\}$，并回顾 $s_0 = 1 + \nu_0$ 与 (4.25) 一致。

引理 4.14. *1)* 算子

$$G_+, G_+^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{-1}_{s'}, \mathcal{H}^1_{-s}) \text{ for } s, s' > 1 - \nu_0 \text{ with } s + s' > 2, \tag{4.58}$$

$$K_+^* := -E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)^* G_+^* - 1 \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^{-1}_s) \text{ for } s \in (s_1, 3/2); \tag{4.59}$$

此处 $E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)^*$ 取分布意义，并定义 $K^+ = (K_+^*)^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^1_{-s})$。明确地说

$$\begin{aligned} K^+ = G_+ v^+ + \oplus_{j=1}^2 \Big(& \chi_1 (h_j - \mathrm{i})^{-1} \big(\mathrm{i}\chi_1 + [\chi_1, p_j^2] \big) \\ & + \sum_{\nu \in \sigma_j} \Big(\big(\chi_2 r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r^{\frac{n_j - 1}{2}} \chi_2 \big) \otimes P_{j,\nu} \Big) B_j \\ & + \sum_{\nu \in \sigma_j} \big(\chi_2 r^{\frac{1-n_j}{2}} R_{j,\nu} r^{\frac{n_j - 1}{2}} [\chi_2, p_j^2] \big) \otimes P_{j,\nu} \Big). \end{aligned} \tag{4.60}$$

2) 对每个满足 $E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0) f \in \mathcal{H}^{-1}{}_{(1-\nu_0)^+}$ 的 $f \in \cup_{s<3/2} \mathcal{H}^1_{-\min\{s, s_0\}}$，均有 $K^+ f = -G_+ E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0) f - f$。

3) 对于任意 $s > 1$，算子 $G_+ \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{-1}_s, \mathcal{H}^1_{-s})$ 是单射的。

利用引理 4.10 和引理 4.14（作为引理 4.5 的替代），以及引理 4.11（作为引理 4.1 的替代），我们可以证明定理 4.7 的以下弱化版本。我们仿照其证明，立即由引理 4.11 得到定理 4.15 1)（见下文）的第二个断言，进而由引理 4.14 2) 得到第一个断言。结果 2) 和 3) 部分地可按之前的方式得到。然而请注意，2) 的第二个蕴含使用了引理 4.10 2)。显然，4) 由 1)、3) 和引理 4.11 推出。

定理 4.15。 设命题 *2.12* 的条件以及 (4.20) 对 $j = 1,2$成立。设 $s < 3/2$ 和 $s \leq s_0$。

1) 空间 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s} \subset H^1_{-s}$ 的维数有限。

如果一个向量 $u \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$，那么 $f = T^* u \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s} \subset \mathcal{H}^1_{-s}$。反之，如果 $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，那么$u = E^+_+$（$\lambda_0$）$f \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$且 $v^+ f = v^- f$。

2) 如果 $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$，那么 $f \in \mathcal{H}^1{}_{(\nu_0-1)}$ - 且 $f \in \ker(1+K^+)$；这里 $K^+ \in \mathcal{C}$（$\mathcal{H}^1_{-t}$）由（4.60）给出，而 $t \in$（s_1，$3/2$）是任意的。

反之，若 $f \in \mathcal{H}^1_{-1}$ 和 $f \in$ 核$(1+K^+)$，则 $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-1}$ *(*特别是$E^-_+(\lambda_0)$ $f = E^+_+(\lambda_0)f$。

3) 假设 $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-s}$。在情形 $s_0 = 1$ 中，进一步假设对于某个 $t < 1$，有 $f \in \mathcal{H}^1_{-t}$。那么，$f = (f_1, f_2)$ 的分量可分解为

$$\begin{gathered} -f_j(r_j\theta_j) = \sum_{\nu\in\sigma_{j,1}} \sum_{k=1}^{n_{j,\nu}} l_{j,\nu,k}(f) r_j^{\frac{2-n_j}{2}-\nu} \chi_2(r_j)\zeta^{(k)}_{j,\nu}(\theta_j) + g_j, \\ \textit{where } g_j \in L^2 \textit{ and} \\ l_{j,\nu,k}(f) = \left\langle \phi_\nu(|y_j|)|y_j|^{-\frac{n_j-1}{2}} \otimes \zeta^{(k)}_{j,\nu}, \tilde{f}_j(y_j)\right\rangle_{L^2(\mathrm{d}y_j)}; \\ \tilde{f}_j = \chi_2\big(v^+ f\big)_j + \chi_2 B_j f_j + [\chi_2, p_j^2] f_j. \end{gathered} \tag{4.61}$$

Here

$$l_{j,\nu,k}(f) = 0 \textit{ for } \mathrm{i}\nu \geq 0. \tag{4.62}$$

特别是

$$\begin{gathered} f \in \mathcal{H} \iff \forall j = 1,2,\, \nu \in \sigma^+_{j,1},\, k = 1,\dots,n_{j,\nu} : \\ l_{j,\nu,k}(f) = 0. \end{gathered} \tag{4.63}$$

4) 假设 $u \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$。在情形 $s_0 = 1$ 中，进一步假设对于某个 $t < 1$，有 $u \in H^1_{-t}$。那么

$$\begin{gathered} u \in L^2(\mathbf{X}) \iff \forall j = 1,2,\, \nu \in \sigma^+_{j,1},\, k = 1,\dots,n_{j,\nu} : \\ l_{j,\nu,k}(T^*u) = 0. \end{gathered} \tag{4.64}$$

特别是，若 $s_0 \neq 1$，则

$$\dim\left(\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-1}/\ker(H-\lambda_0)_{|H^1}\right) \leq \sum_{j=1}^{2} \sum_{\nu\in\sigma^+_{j,1}} n_{j,\nu}. \tag{4.65}$$

对于 $s_0 = 1$，只要将左侧的 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-1}$ 替换为$\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-1} \cap H^1{}_{(-1)^+}$，界 (4.65) 即成立。

注 4.16。我们注意到，注 4.8 和注 4.9 同样适用于情形$\lambda_0 > \Sigma_2$。

4.3 物理学模型

本节讨论小节 1.2.1 和 1.3.1 中的库仑势模型（分别对应 $N \geq 3$ 和 $N \geq 2$），并展示前几节关于这些模型对于任意给定双簇阈值 $\lambda_0 < 0$ 的推论。对于

方便起见，我们将不再像之前那样区分情形 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 和 $\lambda_0 > \Sigma_2$。因此，我们只关注推广第4.2节（请注意，情形 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 可视为第4.2节的特殊情形，尽管第4.1节给出了更强的结果）。与第 1.2 节和第 1.3 节一样，我们不考虑包含自旋的模型（但请参见备注4.19）。

我们考虑第 1.2 节和第 1.3 节中的模型的双簇阈值 λ_0，将阈值集合 a（其中 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H^a)$）分为 $\mathcal{A}_1$、$\mathcal{A}_2$ 和 $\mathcal{A}_3$（均取决于 λ_0），对于这些阈值，

$\mathcal{A}_1$：有效簇间相互作用的主导阶为吸引型库仑，

$\mathcal{A}_2$：有效簇间相互作用的主导阶为库仑排斥，

$\mathcal{A}_3$：有效簇间相互作用为 $\mathcal{O}(|x_a|^{-2})$。

请注意，这一区分不取决于相应子哈密顿量束缚态 φ^a（即通道）的选择；它仅由电荷决定（参见上述两节中各自独立引入的情形 1）。

令 $a \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$（再次省略对 λ_0 的依赖）算子 P^a 是 $L^2(\mathrm{X}^a)$ 中对应于 $\ker(H^a - \lambda_0)$ 的正交投影，并令 m_a 为该空间的维数。显然，$\Pi^a := P^a \otimes 1$ 投影到由形如 $\varphi^a \otimes f_a$、$\varphi^a \in \ker(H^a - \lambda_0)$ 的函数张成的空间上，该空间位于 $L^2(\mathrm{X})$ 中。我们将 $\operatorname{ran} P^a$（设其由正交归一基 φ^a_1、$\ldots \varphi^a_{m_a}$ 张成）与 $\mathbb{C}^{m_a}$（使用该基）等同起来，同样地

$$\begin{aligned} L^2(\mathbf{X}_a, \mathbb{C}^{m_a}) &\simeq \oplus_{m \le m_a} L^2(\mathbf{X}_a) \ni \oplus_{m \le m_a} f_{a,m} = f_a \\ &\simeq S_a f_a := \sum_{m \le m_a} \varphi^a_m \otimes f_{a,m} \in \operatorname{ran} \Pi^a. \end{aligned}$$

暂时仅考虑 $a \in \mathcal{A}_3$，我们写作 $W_a := S_a^* I_a S_a = Q_a |x_a|^{-2} + B_a$，其中 Q_a 是一个仅依赖于 $\theta = \hat{x}_a = |x_a|^{-1} x_a$ 的 $m_a \times m_a$ 矩阵值函数，而 $B_a = B_a(x_a) = \mathcal{O}(|x_a|^{-3})$。“恰当的推广”到 $m_a > 1$ 情形，就是将 Cases 2) 和 3) 之间的区别（主要针对 $m_a = 1$，分别在第 1.2 节和第 1.3 节中讨论）分别令情形 2) 对应于 $Q_a \neq 0$，令情形 3) 对应于 $Q_a = 0$。

令 $\mathbb{S}_a = \mathbb{S}^{n-1}_a$，$n = \dim \mathrm{X}_a$ 表示 X_a中的单位球面。我们在 X_a 上使用球坐标和拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ_θ 来表示 $L^2(\mathrm{X}_a, \mathbb{C}^{m_a})$ 上的拉普拉斯算子p_a^2。算子 $-\Delta_\theta + Q_a$在 $L^2(\mathbb{S}_a, \mathbb{C}^{m_a})$ 上具有离散谱。与 (4.21) 中一样，我们用参数 ν 来参数化其特征值，这些参数的集合记为 σ_a。更确切地说，对每个 $\mu \in \sigma(-\Delta_\theta + Q_a)$，考虑方程 $\mu = \nu^2 - \left(\frac{n-2}{4}\right)^2$，，其中按约定，若 $\mu \geq -\frac{(n-2)^2}{4}$，则 $\nu \geq 0$；若 $\mu < -\frac{(n-2)^2}{4}$，则 $\mathrm{i}\nu > 0$。这类数 ν 的集合记为 σ_a。相应特征子空间上的正交投影记为 $P_{a,\nu}$。对于每个 $\nu \in \sigma_a$，我们取 $\operatorname{ran} P_{a,\nu}$中的一组正交归一基，例如 $\zeta^{(1)}_{a,\nu}, \ldots, \zeta_{(n_a,\nu)a,\nu}$。令

$$\begin{aligned} &\sigma_{a,1} = \sigma_a \setminus (1, \infty), \quad \sigma^+_{a,1} = \sigma_a \cap (0, 1], \\ &\nu_a = \min_{\nu \in \sigma_a} \operatorname{Re} \nu, \quad s_a = 1 + \nu_a, \quad d_a = \sum_{\nu \in \sigma^+_{a,1}} n_{a,\nu}. \end{aligned}$$

现在，对于物理模型，我们有以下结果；回顾记号$L^2_{t^+} = L^2_{t^+}$(X) $= \cup_{s>t} L^2_s$(X)，其中任意实数 t均适用。

定理 4.17。 *1*）局部 H^1 解的空间 $(H - \lambda_0)\, u = 0$ 中

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_1} \Pi^a L^2_{-3/4} + \sum_{a\in\mathcal{A}_2} \Pi^a L^2_{(-3/2)^+} + \sum_{a\in\mathcal{A}_3} \Pi^a L^2_{(-\min\{3/2,\, s_a\})^+} + L^2_{-1/2},$$

记作 $\mathcal{E}$，具有有限维数。

如果 $\mathcal{A}_3 = \emptyset$，则 $\mathcal{E} \subset H^1_\infty$。

2）数目

$$\dim\left(\mathcal{E}/\ker(H - \lambda_0)_{|H^1}\right) \le \sum_{a\in\mathcal{A}_3} d_a.$$

3）存在定义在 $a \in \mathcal{A}_3$, $\nu \in \sigma^+_{a,1}$ 和$k = 1, \ldots, n_{a,\nu}$ 上的线性泛函 $\check{l}_{a,\nu,k}$：$\mathcal{E} \to \mathbb{C}$，使得对于任意 $u \in \mathcal{E}$

$$u \in L^2 \Leftrightarrow \check{l}_{a,\nu,k}(u) = 0 \text{ for all such } a, \nu \text{ and } k.$$

任意 $u \in \mathcal{E}$ 满足渐近行为

$$u - \sum_{a,\nu,k,m} \check{l}_{a,\nu,k}(u)\varphi^a_m \otimes \zeta^{(k)}_{a,\nu,m} \otimes |x_a|^{\frac{2-n}{2}-\nu} F(|x_a| > 1) \in L^2. \tag{4.66}$$

（此处 $\zeta^{(k)}_{a\,\nu,\cdot}$标记 m_a坐标 $\zeta_{(k)a,\nu}$。）

对于满足 $a \in \mathcal{A}_3$且使 $s_a \in (1, 3/2)$ 的那些 L^2，我们可以在 $\mathcal{E}$的定义中用 $L^2_{-s_a}$替换 $L^2{}_{(-\min\{3/2,\, s_a\})^+}$。如果 $\lambda_0 = \Sigma_2$，在某种程度上，我们可以使用比 1）中所考虑的更大的广义特征函数空间，参见定理 4.3 和 4.7（不再详述）。

在给出证明的详细内容之前，我们讨论 Q_a 角度依赖势消失时（对于给定的 $a \in \mathcal{A}_3$）(4.66) 的结构。注意，对于 $m_a = 1$，这对应于第 1.2 节和第 1.3 节中的情形 3。如果 $Q_a = 0$ 集合 $\sigma^+_{a,1}$ 被明确给出为

$$\sigma^+_{a,1} = \begin{cases} \{\frac{1}{2}\}, & n = 3, \\ \{1\}, & n = 4, \\ \emptyset, & n \ge 5. \end{cases} \tag{4.67}$$

此外，对于 $n = 3$ 和 $n = 4$，$\sigma^+_{a,\,1}$ 中单点的总重数为 m_a（对应于常值特征函数 $\zeta^{(k)}_{a,\,\nu}$、$k = 1$、……、m_a）。特别地，我们看到，如果对于所有 $a \in \mathcal{A}_3$ 都有 $Q_a = 0$，那么空间 $\mathcal{E}$ 可简化为其中的广义特征函数空间

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_1} \Pi^a L^2_{-3/4} + \sum_{a\in\mathcal{A}_2\cup\mathcal{A}_3} \Pi^a L^2_{(-3/2)^+} + L^2_{-1/2},$$

并且我们看到，λ_0 只有在 $n = 3$ 或 $n = 4$ 的情形下才可能是一个“共振”，且其重数至多为 $\Sigma_{a\in\mathcal{A}_3} m_a$。

定理 4.17 的证明很大程度上依赖于第4.2节。显然，断言 2) 是断言 3) 的推论。断言 1) 和 (4.66) 的证明之所以复杂，是因为可能存在此前讨论过、且部分在注释中提及的例外情形。事实上，泛函 $l_{a,\nu,k}$ 的定义取决于这些情形。我们将先给出“通常”情形下定理 4.17 的证明，然后概述例外情形下的证明。

“一般”情形下定理 *4.17* 的证明。我们考虑非例外情形。这相当于在另外两个彼此独立的附加条件下证明定理。我们引入 $\mathcal{G} = L^2(\mathbf{X})$ 和 $\mathcal{F}_a = \Pi^a\mathcal{G}$, $a \in \mathcal{A}$。第一个假设是

$$\mathcal{F} := \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \mathcal{F}_a = \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \oplus \mathcal{F}_a. \tag{4.68a}$$

令 Π 为 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{F}$ 上的正交投影（根据命题2.7，(4.68a) $\mathcal{F}$ 是闭的）。第二个假设是

$$\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(H'); \quad H' = \Pi' H \Pi', \, \Pi' = 1 - \Pi. \tag{4.68b}$$

在 (4.68a) 和 (4.68b) 下，我们令 $\mathcal{H} = \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \oplus \mathcal{H}_a$，其中 $\mathcal{H}_a = L^2(\mathbf{X}_a, \mathbb{C}^{m_a}) = \oplus_{m\le m_a} L^2(\mathbf{X}_a)$，并令 $S = (S_a)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ 由以下给出

$$\oplus_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} f_a \to \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} S_a f_a; \quad f_a = \sum_{m\le m_a} \oplus f_{a,m}, \quad S_a f_a = \sum_{m\le m_a} \varphi_m^a \otimes f_{a,m}.$$

令 $T = (SS^*)^{-1}S$，我们注意到 $\Pi = ST^*$。

与 (2.4d) 和 (4.39) 一致，我们考虑由各项指定的两个算子$E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$

$$-E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)_{ab} = S_a^*(p_b^2 + I_b)S_b + K^{\pm}_{ab}(\lambda_0) \equiv \delta_{ab}\check{h}_a + K^{\pm}_{ab}(\lambda_0); \quad a, b \in \widetilde{\mathcal{A}}, \tag{4.69}$$

作为从 $\mathcal{H}^1 = \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \oplus H^1(\mathbf{X}_a, \mathbb{C}^{m_a})$ 到 $\mathcal{H}^{-1} = \sum_{a\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} \oplus H^{-1}(\mathbf{X}_a, \mathbb{C}^{m_a})$ 的算子。其中 $\check{h}_a = -\Delta_a + S_a^* I_a S_a$ 以及 $K^{\pm}_{ab}(\lambda_0) = -S_a^* I_a R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0) I_b S_b$。与 (4.39) 一样，该差值是对称的并且多项式衰减。后一个概念的定义与备注 2.13 中相同，即 (b_{ab}) 若满足对所有 r, $t \in \mathbb{R}$ 均有 多项式衰减 if $b_{ab} \in \mathcal{C}(H^1_r(\mathbf{X}_b, \mathbb{C}^{m_b}) \, H^{-1}_t(\mathbf{X}_a, \mathbb{C}^{m_a}))$，则称其为多项式衰减。

我们注意到

$$K^{\pm}_{ab}(\lambda_0) \in \mathcal{L}(L^2_{-s}(\mathbf{X}_b, \mathbb{C}^{m_b}), L^2_s(\mathbf{X}_a, \mathbb{C}^{m_a})) \text{ for all } s < 3/2. \tag{4.70a}$$

对于 $a \in \mathcal{A}$，有效簇间相互作用 $W_a = S_a^* I_a S_a$ 满足

$$\begin{aligned} W_a &= C_a |x_a|^{-1} 1_{\mathbb{C}^{m_a}} + \mathcal{O}(|x_a|^{-2}), \\ &\quad \text{where } C_a \neq 0 \text{ if and only if } a \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2. \end{aligned} \tag{4.70b}$$

另请回忆

$$\forall a \in \mathcal{A}_3: \quad W_a = |x_a|^{-2} Q_a(\hat{x}_a) + B_a(x_a), \quad B_a = \mathcal{O}(|x_a|^{-3}). \tag{4.70c}$$

记 $\mathcal{A}_3=\{a_1,\dots,a_{\bar l}\}$（假设 $\mathcal{A}_3\neq\emptyset$），并令 $\mathcal{T}$ 表示向量集 $\bar t=(t_1、\dots\dots、t_{\bar l})\in\mathbb{R}^{\bar l}$，使得 $t_l>-$ 对所有 $l\le\bar l$ 都有最小值 $\{3/2,\, s_{a_l}\}$。对于 $r\ge -3/4$、$s>-3/2$ 和 $\bar t\in\mathcal{T}$，我们引入空间

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^k_{a,s}=H^k_s(\mathbf{X}_a,\mathbb{C}^{m_a}),\quad k\in\mathbb{R},\quad a\in\widetilde{\mathcal{A}},\\
&\mathcal{H}^k_{r,s,\bar t}=\oplus_{b\in\mathcal{A}_1}\mathcal{H}^k_{b,r}\bigoplus\oplus_{b\in\mathcal{A}_2}\mathcal{H}^k_{b,s}\bigoplus\oplus_{l\le\bar l}\mathcal{H}^k_{a_l,t_l},\quad k\in\mathbb{R},\\
&\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{r,s,\bar t}=\{f\in\mathcal{H}^1_{r,s,\bar t}|\quad E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=E^-_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0\},
\end{aligned}$$

其中 $E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 由 (4.69) 给出。如果 $\mathcal{A}_3=\emptyset$，例如 $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{r,\,s}$，也可以采用类似的记号，不过我们更倾向于保留统一记号 $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{r,\,s,\,\bar t}$，不区分集合 $\mathcal{A}_1$、$\mathcal{A}_2$ 和 $\mathcal{A}_3$ 中是否有一个（或两个）为空，或者可能三个集合都非空。令

$$\mathcal{E}^{\mathcal{H}}=\cup_{s>-3/2,\,\bar t\in\mathcal{T}}\quad\mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-3/4,s,\bar t}. \tag{4.71}$$

令 $E^{\pm}_{+}(\lambda_0)\in\mathcal{L}(\mathcal{E}^{\mathcal{H}},\mathcal{E})$ 由下式给出

$$E^{\pm}_{+}(\lambda_0)f=Sf-\sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}}R'(\lambda_0\pm\mathrm{i}0)I_aS_af_a. \tag{4.72}$$

仿照引理 4.11 的证明，我们可以证明事实上 $E^{+}_{+}(\lambda_0):\mathcal{E}^{\mathcal{H}}\to\mathcal{E}$，并且将其视为这样的映射时，它是一个线性同构，其逆算子为 $T^*:\mathcal{E}\to\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$。注意，与之前一样，我们需要如下性质：对于任意 $f\in\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$，$E^{+}_{+}(\lambda_0)f=E^{-}_{+}(\lambda_0)f$。

接下来，我们调整第4.2节中的拟参数构造（结合其中讨论的三种不同情形），并将方程 $E^{+}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f=0$, $f\in\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ 转化为形如 $(1+K^+)f=0$ 的方程。随后，我们可以通过迭代证明 f 属于某个适当的空间（与 f 无关），在该空间上 K^+ 是紧的，从而得到 1)。

为更详细地实施这一过程，令我们定义 $R^+=\oplus_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}}r_a$，其中 r_a 是如下拟逆（取决于这三种情形）：对于 $a\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$，我们取 r_a 在 $\mathcal{H}_a$, $r_a=\oplus_{m\le m_a}r_{a,m}$ 中为对角的。对于 $a\in\mathcal{A}_1$ 和 $m\le m_a$，我们令

$$r_{a,m}=\lim_{\epsilon\to0_+}(h_a-\mathrm{i}\epsilon)^{-1}\in\mathcal{L}(H^{-1}_s(\mathbf{X}_a),H^1_{-s}(\mathbf{X}_a)),\ s>3/4,$$

其中 $h_a=p_a^2+w_a$ 按照第4.1.2小节中的方式构造。对于 $a\in\mathcal{A}_2$，我们令 $r_a=\oplus_{m\le m_a}r_{a,m}$，其中 $r_{a,m}=h_a^{-1}$，且 $h_a=p_a^2+w_a$ 按照第4.1.3小节中的方式构造。注意，在这种情况下，$\langle\cdot\rangle^{-1}h_a^{-1}$ 是一个有界伪微分算子，参见引理 4.4。最后，对于 $a\in\mathcal{A}_3$，我们令算子 $r_a=G_{a+}$，其中G_{a+} 按照第 4.1.4 小节中的方式构造，即

$$G_{a+}=\chi_1(\check h_a-\mathrm{i})^{-1}\chi_1+\sum_{\nu\in\sigma_a}\left(\chi_2|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}R_{a,\nu}|\cdot|^{\frac{n-1}{2}}\chi_2\right)\otimes P_{a,\nu}. \tag{4.73}$$

这里 $\check{}\, h_a=p_a^2+W_a$，其中 $W_a=S_a^*I_aS_a=|\cdot|^{-2}Q_a+\mathcal{O}(|\cdot|^{-3})$ 作为作用于 $\mathcal{H}_a$上的（矩阵值）乘法算子。量 Q_a、σ_a 和 $P_{a,\,\nu}$ 在定理 4.17 之前引入，而算子 $R_{a,\,\nu}$ 是第 4.1.4 小节中研究的一维格林函数。虽然 $a\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ 的拟逆 r_a 在某种意义上被视为精确逆，但为 $a\in\mathcal{A}_3$ 选取的算子 $r_a=G_{a+}$ 不够

精确。这一点在式 (4.60) 中有明确体现，其中第二项至第四项是对 $a \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ 而言并不存在的“误差”项。

接下来，我们将方程 $-R^+E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f = 0$ for $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ 写成 $(1+K^+)f = 0$，其中通过分部积分得到项 $1f$。根据小节 4.2.2–4.2.4 中的论证，分别对 f 的各个分量进行处理。由 (4.69) 可知，K^+ 中有些项涉及多项式衰减因子，也有一些项具有 $r_aK^{\pm}_{ab}(\lambda_0)$ 的形式。实际上，$K^{\pm}_{ab}(\lambda_0)$ 作用于上述给定的 f 时，其阶为 -3。对于 $a \in \mathcal{A}_3$，还有如上所述的其他项，参见 (4.60)。无论如何，可以得出，K^+f 各分量的加权阶通常至少比 $f(=-K^+f)$ 各分量的先验阶好 $1/2$ 次方（由 (4.70a)–(4.70c) 确定；此处还要注意 (4.53) 及其应用 (4.9b)）。然而，由于 G_{a+} 的映射性质所施加的限制 $s > 1-\nu_a$，这一一般规则也有例外，参见 (4.58)。例如，注意到要证明 $\sum_b r_aK^{\pm}_{ab}(\lambda_0)f_b \in \mathcal{H}^1_{a,-s}$ for $a \in \mathcal{A}_3$，至少需要 $s > 1-\nu_a$。这是迭代论证唯一的限制。实际上，从一次迭代（即仅凭 K^+f 的性质）可推知，对于 $a \in \mathcal{A}_1$，分量 $f_a \in \mathcal{H}^1_{a,-1/4}$；对于 $a \in \mathcal{A}_2$，分量 $f_a \in \mathcal{H}^1_{a,-1/2}$；而 $f_a \in \mathcal{H}^1_{a,\epsilon-1}$ 对某个正的 ϵ，适用于 $a \in \mathcal{A}_3$（不过要注意，若 $\nu_a = 0$，后一性质是一个假设）。再迭代一次，我们便得到，对于 $a \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$，$f_a \in \mathcal{H}^1_{a,0}$。若 $\mathcal{A}_3 = \emptyset$，继续迭代可得 $f \in \mathcal{H}^1_{\infty}$（结合引理 4.11，这就证明了 1) 的最后一部分）。特别是，我们可以得出

$$f \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}} \Rightarrow f \in \mathcal{H}^1_* := \mathcal{H}^1_{-1,-1,\bar{t}},$$

其中 $\bar{t}$ 的所有坐标均取为 $-4/3$。由于 $K^+ \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^1_*)$，我们已经证明了 1)。

˘ 还需证明 3)。我们只需构造线性泛函 $l_{a,\nu,k} : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$，使得对于任意 $u \in \mathcal{E}$，(4.66) 都成立。给定 $u \in \mathcal{E}$，令 $f = T^*u$，并考察 f 的分量 f_a，其中这些分量可能不属于 $\mathcal{H}_a$。正如我们所看到的，这相当于只考察 $a \in \mathcal{A}_3$，在这种情况下，我们知道类似于 (4.35) 的结果，即 $f_a \in \mathcal{H}^1_{a,-s}$，其中某个 $s < 1$。考察这类 a 的 $-f_a = (K^+f)_a$，我们需要将 (4.69) 的第一个方程写成

$$-E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)_{ab} = S^*_a(p_b^2 + I_b)S_b + K^{\pm}_{ab}(\lambda_0) = \delta_{ab}\check{h}_a + v^+_{ab}; \quad \check{h}_a = p_a^2 + W_a. \tag{4.74}$$

现在，利用 (4.73) 及类似于 (4.60) 的结果，通过仿照定理 4.7 证明中的步骤 *III*，我们得到

$$\begin{aligned} -f_a(|x_a|\theta_a) &= \sum_{\nu\in\sigma_{a,1}} \sum_{k=1}^{n_{a,\nu}} l_{a,\nu,k}(f)|x_a|^{\frac{2-n}{2}-\nu}\chi_2(|x_a|)\zeta^{(k)}_{a,\nu}(\theta_a) + g_a, \\ &\qquad \text{where } g_a \in \mathcal{H}_a \text{ and} \\ l_{a,\nu,k}(f) &= \big\langle \phi_\nu(|y_a|)|y_a|^{-\frac{n-1}{2}} \otimes \zeta^{(k)}_{a,\nu}, \tilde{f}_a(y_a)\big\rangle_{\mathcal{H}_a}; \\ \tilde{f}_a &= \chi_2 \sum_{b\in\widetilde{\mathcal{A}}} v^+_{ab}f_b + \chi_2 B_a f_a + [\chi_2, p_a^2]f_a. \end{aligned} \tag{4.75}$$

注意到 $\tilde{f}_a \in \mathcal{H}^0_{a,\,3-s}$ 对于某个 $s < 1$，参见 (4.36)，从而特别得到 $l_{j,\,\nu,\,k}(f)$ 定义良好。接下来由 (4.75) 可推得

$$l_{j,\nu,k}(f) = 0 \text{ for i}\nu \geq 0. \tag{4.76}$$

显然，(4.75) 和 (4.76) 结合 (4.72) 以及引理 4.11 的相应版本（在 (4.72) 之后陈述），可得到带有 $l_{a,\ \nu,\ k}$ 的 (4.66)，其中 k 由下式给出

$$\check{l}_{a,\nu,k}(u) = -l_{a,\nu,k}(T^*u); \quad u \in \mathcal{E},\, a \in \mathcal{A}_3,\, \nu \in \sigma^+_{a,1},\, k = 1, \dots, n_{a,\nu}.$$

□

定理 *4.17* 在“广义”情形下的证明概要。我们概述不施加两个附加条件 (4.68a) 和 (4.68b) 的定理证明。我们将尽可能沿用先前的记号来落实注记 4.9 和 4.16。

首先，若 (4.68a) 不成立，我们再次通过像在第 2.5 小节中那样将 S 限制到 ……，推知空间 $\sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}}\mathcal{F}_a$ 是闭的

$$\mathcal{H}_0 := \Big\{ f \in \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \oplus \mathcal{H}_a \mid f \perp \ker\big(S_{ab}\big)_{a,b\in\widetilde{\mathcal{A}}} \Big\},\ S_{ab} = S_a^* S_b, \tag{4.77}$$

其中，与之前一样，$\mathcal{H}_a = L^2(\mathrm{X}_a, \mathbb{C}^{m_a})$。于是 $S = (S_a)\colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{F}_0 := \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}}\mathcal{F}_a \subset \mathcal{G} = L^2(\mathrm{X})$ 是一个连续同构。特别地，$\mathcal{F}_0$ 确实是闭的，我们记 Π 为 $\mathcal{G}$ 中到 $\mathcal{F}_0$ 上的正交投影。量 Π'、H' 和 $R'(z)$ 按照前几节中的方式引入（其中 $\mathcal{F}_0$ 起着 $\mathcal{F}$ 的作用）。

接下来，我们希望考虑极限 $R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)$，在条件 (4.68b) 下这是可行的。不过，我们也允许并在此处考虑 (4.68b) 不成立这一例外情形，因此需要一个第 2.4 节的变体来处理这种情况。根据定理 3.12 的一个变体（参见注记 3.20、3.21 和 3.22），λ_0 是 H' 的一个特征值，具有有限重数，其特征函数属于 H^2_∞。

为简化表述，我们作出与小节2.4 中相同的假设，即该特征子空间由 $\mathrm{span}\{\psi\}$，$\|\psi\| = 1$ 给出。于是引入 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathbb{C}$ 和 $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{F} := \mathcal{F}_0 \oplus \mathrm{span}\{\psi\}$，定义如下：

$$S\tilde{f} = \sum_a S_a f_a + c\psi, \quad \tilde{f} = \big((f_a), c\big).$$

我们用 Π'' 表示投影到 $\mathcal{G}$ 中 $\mathcal{F}$ 的正交补上的正交投影，并令 $H'' := \Pi'' H \Pi''$ 和 $R''(z) = (H'' - z)^{-1}$。注意，$\Pi'' = 1 - \Pi - |\psi\rangle\langle\psi| = \Pi' - |\psi\rangle\langle\psi|$。再回忆 (2.4d)

$$E_{\mathcal{H}}(z) = S^*\big(z - H + HR''(z)H\big)S. \tag{4.78}$$

~令 $M = \#\mathcal{A} + 1$，该算子具有 $M \times M$-分块表示 $(e_{ij})_{\ i,\ j\le M}$。~这里（将元素 $a \in \mathcal{A}$ 列为 a_1、……、a_{M-1}）$e_{MM} = z - \lambda_0$，$e_{iM} = -S^*_{a_i} H\psi = -S^*_{a_i} I_{a_i}\psi$，且当 $i \le M-1$ 时 $e_{Mi} = e^*_{iM} = \langle e_{Mi}|$，而对于 $i,\ j \le M-1$，我们令 $e_{ij} = S^*_{a_i}\big(z - H + HR''(z)H\big)S_{a_j}$。（2.60a）的类似表达式为

$$\begin{aligned} \breve{H} &= H'' + \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} p_a^2 \Pi^a, \\ \widetilde{H} &= H - \lambda_0 \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \Pi^a; \\ \mathcal{D}(\breve{H}) &= \mathcal{D}(\widetilde{H}) = \mathcal{D}(H). \end{aligned} \tag{4.79a}$$

这些算子相差 H-紧算子项，参见（2.60b），

$$\begin{aligned}\breve{H} &= \widetilde{H} - K_1 + K_2;\\ K_1 &= \Pi H \Pi' + \Pi' H \Pi + \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \Pi^a I_a \Pi^a + \lambda_0 |\psi\rangle\langle\psi|,\\ K_2 &= \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \Pi^a H \Pi^a - \Pi H \Pi,\end{aligned} \tag{4.79b}$$

预解式的基本结构如下所示

$$\begin{aligned}R''(z) &= \breve{R}(z) - \Big(\sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} p_a^2 \Pi^a - z\Big)^{-1} \Pi - z^{-1}|\psi\rangle\langle\psi|,\\ R''(z) &= \Pi'' \breve{R}(z) \Pi'' = \Pi'' \breve{R}(z) = \breve{R}(z)\Pi''; \quad \breve{R}(z) = (\breve{H} - z)^{-1}.\end{aligned} \tag{4.79c}$$

由于 ψ 具有良好的性质，我们可以定义 $\breve{R}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)$，进而定义 $R''(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)$。特别地，在 (4.72) 中将 f 替换为 $\tilde{f} := \big((f_a)\ c\big) \in \mathcal{H}$，并将 $R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)$ 替换为 $R''((\lambda_0 \pm \mathrm{i}0))$，即

$$E_+^{\pm}(\lambda_0)\tilde{f} = S\tilde{f} - \sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} R''(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0) I_a S_a f_a. \tag{4.80a}$$

同样地，通过在 (4.78) 中取极限，我们得到

$$E_{\mathcal{H}}^{\pm}(\lambda_0) = S^*\big(\lambda_0 - H + HR''(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)H\big)S = (e_{ij})_{i,j\le M,\, z=\lambda_0\pm\mathrm{i}0}. \tag{4.80b}$$

此前在 (4.71) 中给出的 $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ 定义需要作如下修改。我们引入（参数如前所述）

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{k,0}_{r,s,\bar{t}} &= \Big\{ f \in \mathcal{H}^k_{r,s,\bar{t}} \mid f \perp \ker\big(S_{ab}\big)_{a,b\in\widetilde{A}} \Big\},\\ \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{r,s,\bar{t}} &= \{\tilde{f} = (f,c) \mid f \in \mathcal{H}^{1,0}_{r,s,\bar{t}},\ c\in\mathbb{C},\ E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)\tilde{f} = E^-_{\mathcal{H}}(\lambda_0)\tilde{f} = 0\},\\ \mathcal{E}^{\mathcal{H}} &= \cup_{s>-3/2,\,\bar{t}\in\mathcal{T}} \quad \mathcal{E}^{\mathcal{H}}_{-3/4,s,\bar{t}}.\end{aligned}$$

如前所述，现在可以验证 $E_+^+(\lambda_0)$：$\mathcal{E}^{\mathcal{H}} \to \mathcal{E}$，并且将其视为这样的映射时，它是一个线性同构，其逆算子为 $T^* = S^*(SS^*)^{-1}$：$\mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\mathcal{H}}$。

接下来我们考虑空间

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \Big(\sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \oplus \mathcal{H}_a\Big) \oplus \mathbb{C}.$$

显然，$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \ker\big(S_{ab}\big)_{a,b\in\widetilde{A}}$，且 $E^{\pm}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(\lambda_0)$ 仅作用于第一个分量。引入 $\widetilde{E}^{\pm}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(\lambda_0) = E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0) + P_0$，其中 P_0 表示到 $\big(S_{ab}\big)_{a,b\in\widetilde{A}}$ 的核的正交投影，该投影作用于 $\sum_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} \oplus \mathcal{H}_a$。我们可以将 P_0 视为作用于 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 的第二个分量，因此写作 $\widetilde{E}^{\pm}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(\lambda_0) = E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0) \oplus 1$。显然，$\ker \widetilde{E}^{\pm}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(\lambda_0) = \ker E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$，加权 Sobolev 空间中也有类似关系。因此，我们需要考虑作用于如下形式空间上的 $\widetilde{E}^{\pm}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(\lambda_0) = E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0) \oplus 1$

$$\widetilde{\mathcal{H}}^k_{r,s,\bar{t}} = \Big(\mathcal{H}^{k,0}_{r,s,\bar{t}} \oplus \mathbb{C}\Big) \oplus \ker\big(S_{ab}\big)_{a,b\in\widetilde{A}} = \mathcal{H}^k_{r,s,\bar{t}} \oplus \mathbb{C}.$$

在对参数施加相同限制的条件下，我们可以证明引理 4.11 的一个版本（使用相同的证明）。将定理先前证明（正则情形）中的拟参数构造 $\oplus_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} r_a$扩展为 $R^{+\,\mathrm{diag}} = \big(\oplus_{a\in\widetilde{\mathcal{A}}} r_a\big)\oplus 1_{\mathbb{C}}$并应用于方程

$$\widetilde{E}^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)\tilde{f} = 0, \quad \tilde{f} := \big(f, c\big) = \Big(\big(P_0' f, c\big), P_0 f\Big) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{k}_{r,s,\tilde{t}},\ P_0' = 1 - P_0,$$

我们再次回到了弗雷德霍姆理论。更准确地说，利用算子 $E^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)\oplus 0$ 由 (4.80b) 右端的表达式具体实现这一事实，我们得到方程

$$0 = R^{+}_{\mathrm{diag}}\big(P_0 f + (\widetilde{E}^{\pm}_{\mathcal{H}}(\lambda_0)\tilde{f} - P_0 f)\big) = -(1 + \widetilde{K}^{+})\tilde{f}$$

~对于一个“良好”的算子 K^{+}。事实上，利用这个略作修改的新 K^{+} 的具体型式，我们可以像之前一样继续进行。细节从略。 □

~**注4.18.** 如果 $\mathcal{A}_3 = \emptyset$，我们可以将上述算子写成 $K^{+} = R^{+}{}_{\mathrm{diag}}\tilde{v}^{+}$ 的形式，其中 ~$\mathrm{Im}\,\tilde{v}^{+} \le 0$，然而一般而言， K^{+} 的型式更为复杂。此外，在上述证明中研究的方程 $(1 + K^{+})f = 0$ 或 $(1 + K^{+})f=0$的解集的 ~ ~结构，在此情形下显得最为“简洁”，其意义在于“伪”解，即共振态，不会出现。另一方面，如果 $\mathcal{A}_3 \neq \emptyset$，则可能出现共振态，因此，我们关于双簇阈值处预解式展开的理论对于 $\mathcal{A}_3 \neq \emptyset$ 而言更为复杂。关于适用于快速衰减情形的系统研究，请参见第5章；在该情形下， $\mathcal{A} = \mathcal{A}_3$，且有效簇间相互作用为 $\mathcal{O}(|x_a|^{-3})$，其中 $a \in \mathcal{A}$。某些非快速衰减情形下双簇阈值处的预解式展开见第6章，参见注 6.1。

备注4.19。 我们在定理 4.17 中没有考虑带自旋粒子的情形。然而，该定理也适用于带自旋的情况，因为这基本上相当于将算子 H 限制在适当的子空间上。不过，这一结论的前提是λ_0 是一个（未受限制的）双簇阈值。 λ_0 也可能不是这种类型的阈值，但在受限意义下却是一个双簇阈值。要处理这种情况，需要采用不同的步骤，不过也可能可以通过某种类似的方法来处理。因此，例如，作为一种可能的初步步骤，修改 S 以适用于费米子的一种显而易见的方法，是对 $S_a f_a = \varphi^a \otimes f_a$ 进行反对称化，从而将该向量变换到 $L^2(X)$的费米子子空间中。

第5章

双簇阈值附近的预解式渐近行为

本章致力于研究 H这一 N体薛定谔算子在任意双簇阈值 λ_0 附近的预解式渐近行为。如第 4 章所述，对于物理模型，有效势的衰减形式可能为 $\mathcal{O}(|x_a|^{-1})$（慢衰减情形）、 $\mathcal{O}(|x_a|^{-2})$（临界衰减情形）或 $\mathcal{O}(|x_a|^{-3})$（快速衰减情形）。我们只研究两种情形：1）有效势快速衰减；2）有效势慢衰减，且在某个紧集之外为正。这两种情形的主要区别在于，第一种情形可能出现阈值共振，而第二种情形则不会出现。对于快速衰减的有效势，我们只详细研究两种情况：i） $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是双重二簇阈值（ $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是非重合双簇阈值的情形较为简单，且已在 [Wa2]中研究）；ii） $\lambda_0 > \Sigma_2$ 是H的非重合双簇阈值。我们根据阈值是特征值和/或共振，计算预解式展开的首项。对于正的慢衰减有效势，我们只研究最低阈值，并证明预解式展开余项在指数加权空间中的Gevrey估计（参见针对单体算子的([AW, Wa6])）。我们的研究将应用于第 1.2 节和第 1.3 节的物理模型。我们的部分研究很容易推广，从而涵盖第 1.2 节和第 1.3 节物理模型中一些有趣的情形；我们将陈述结果并略述证明。

本章的组织如下。在第 5.1 节中，我们研究快速衰减的有效势的预解式 $R(z) = (H - z)^{-1}$ 的渐近展开。为简便起见，我们假设簇间空间的维数为三，并在小节 5.1.1 中分析双簇阈值共振的概念。根据双簇阈值的谱性质，我们给出共振态的一些归一化条件。这些条件很有用，因为它们允许在具有物理意义的模型中显式计算某些常数（参见第6章）。对于 $\lambda_0 = \Sigma_2$ （当 Σ_2 是一个双重二簇阈值时），预解式展开在第5.1.2节中给出；对于 $\lambda_0 > \Sigma_2$，则在第5.1.3节中给出。在第 5.2 节中，我们研究有效势在紧集之外为正且在无穷远处缓慢衰减的情形。在这种情形下，不存在阈值共振，并且我们在最低阈值 Σ_2处证明了预解式的一项展开，同时给出了余项的 Gevrey估计。这些结果可用于证明局域能量的次指数时间衰减。在第 5.3 节中，我们研究前几节内容的结合，

第 1.2 节和第 1.3 节中的物理模型。

5.1 快速衰减的有效势

5.1.1 双簇阈值共振

设 $\lambda_0 \in \mathcal{T}$ 是 H的一个双簇阈值。在本小节中，假设通过 Grushin方法得到的有效势衰减得足够快，我们分析 H 在 λ_0处的谱性质。此外，对于满足λ_0 是 H^a 的一个特征值的双簇分解 a ，我们假设簇间构型 X_a 的维数为三。

5.1.1.1 情形 $\lambda_0 = \Sigma_2$

先考虑情形

$\lambda_0 = \Sigma_2$ 是符合条件 2.5 意义下的双重二簇阈值。 (5.1)

由此，最低阈值 Σ_2 是 H 的一个双簇阈值，也是恰好两个子哈密顿量 H^{a_j}、$j = 1$ 的特征值，2。当然，这里的 a_1 和 a_2 是 N 体系统的双簇分解。上述条件意味着 $\Sigma_2 < 0$；然而，条件 2.5 要求 λ_0（$= \Sigma_2$）对 H^{a_1} 和 H^{a_2} 均为单特征值，这一要求自动满足。条件 2.5 还要求 $a = a_1$ 和 $a = a_2$ 满足条件 1.6。与第 2.3 节一致，令 φ_j 表示 H^{a_j}、 $j = 1$ 的相应（实）归一化特征向量，2。记

$$\mathbf{X}^j = \mathbf{X}^{a_j}, \quad \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_{a_j}, \quad j = 1, 2,$$

以及 x^j （分别为 x_j）是 X^j （分别是 X_j）中的变量。令

$$\mathcal{F}_j = \{g = \varphi_j(x^j) f_j(x_j) \mid f_j \in L^2(\mathbf{X}_j)\}, \quad j = 1, 2.$$

$\mathcal{F}_j$ 是 $L^2(\mathrm{X})$的闭子空间。假设（参见(2.24)），

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\} \quad \text{and } n_j := \dim \mathbf{X}_j = 3 \text{ for } j = 1, 2.$$

回顾命题2.7， $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ 是 $L^2(\mathrm{X})$中的闭子空间。令 Π 为从 $L^2(\mathrm{X})$到 $\mathcal{F}$ 的正交投影，并令 $\Pi' = 1 - \Pi$。我们沿用记号(4.1)，特别记作，

$$\mathcal{H}_s^k = H_s^k(\mathbf{X}_1) \oplus H_s^k(\mathbf{X}_2), \quad \mathcal{H}^k = \mathcal{H}_0^k, \quad \mathcal{H}_s = \mathcal{H}_s^0, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0^0.$$

令 $\mathcal{L}(k, s;\ k', s') = \mathcal{L}(\mathcal{H}_s^k, \mathcal{H}_{s'}^{k'})$，参见小节1.4.1。

令 $S = (S_1, S_2) : \mathcal{H} \to L^2(\mathrm{X})$由 $Sf = S_1 f_1 + S_2 f_2$ 定义，其中 $f = (f_1, f_2)$，并且

$$S_j : L^2(\mathbf{X}_j) \to L^2(\mathbf{X}), \quad f_j \to S_j f_j = \varphi_j(x^j) \otimes f_j(x_j).$$

于是， S_j^*: $L^2(\mathrm{X}) \to L^2(\mathrm{X}_j)$由 S_j^*: $f \to S_j^* f = \langle \varphi_j, f \rangle_j$给出，其中 $j = 1$， 2。这里，$\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ 表示 $L^2(\mathrm{X}^j)$中的标量积；记号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 将用于表示 $L^2(\mathrm{X})$（或 $L^2(\mathrm{X}_j)$）中的标量积。于是有

$$S^* S = 1 + \begin{pmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on } \mathcal{H} = L^2(\mathbf{X}_1) \oplus L^2(\mathbf{X}_2),$$

其中 $s_{ij} \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathrm{X}_j)\ L^2(\mathrm{X}_i)\big)$, $i \neq j$由 $s_{ij} f_j = \langle \varphi_i, \varphi_j \otimes f_j \rangle_i$给出。

对 $z \in \mathbb{C}$ 且 $\operatorname{Im} z \neq 0$, 引入

$$\begin{aligned} E(z) &= R'(z), \\ E_+(z) &= S - R'(z)HS, \\ E_-(z) &= S^* - S^*HR'(z), \\ E_{\mathcal{H}}(z) &= S^*\big(z - H + HR'(z)H\big)S. \end{aligned}$$

那么（回顾第 2.3 节中的内容）

$$R(z) = E(z) - E_+(z)E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}E_-(z). \tag{5.2}$$

$E_{\mathcal{H}}(z)$: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 由 (2.48) 计算得出:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{H}}(z) &= z - \lambda_0 \\ &\quad - \begin{pmatrix} -\Delta_{x_1} + W_1(x_1) + K_{11}(z) & \check{s}_{12}(z) + W_{12} + K_{12}(z) \\ \check{s}_{21}(z) + W_{21} + K_{21}(z) & -\Delta_{x_2} + W_2(x_2) + K_{22}(z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

其中

$$\begin{aligned} \check{s}_{ij}(z) &= \langle \varphi_i, \varphi_j \otimes (\lambda_0 - z - \Delta_{x_j})\cdot \rangle_i, \\ W_{ij} &= \langle \varphi_i, I_j\varphi_j \otimes \cdot \rangle_i, \\ W_k(\cdot) &= W_{kk} = \langle \varphi_k, I_k\varphi_k \rangle_k(\cdot), \\ K_{ij}(z) &= -\langle \varphi_i, I_iR'(z)I_j(\varphi_j \otimes \cdot) \rangle_i. \end{aligned}$$

现在假设 $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{d}}(H')$。那么根据引理 2.10 $R'(z)$ 在 z 中对 z （在 λ_0 附近）是全纯的，并且 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 定义良好。为简化记号，将 $P = -E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 记作.....，并将此算子分解为 $P = P_0 + U$，其中

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{1,0} & 0 \\ 0 & P_{2,0} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\Delta_{x_1} & 0 \\ 0 & -\Delta_{x_2} \end{pmatrix}, \tag{5.5a}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} W_1 & W_{12} + \check{s}_{12}(\lambda_0) \\ W_{21} + \check{s}_{21}(\lambda_0) & W_2 \end{pmatrix} + K(\lambda_0). \tag{5.5b}$$

我们施加条件 $\rho > \frac{1}{2}$ （其中 ρ 由 (1.22) 给出）以及 (4.20)，并令$q_j(\theta) = 0$ 对 $j = 1$、2 成立，因此（参见命题 2.12）至少对于 $\rho_0 = 3$

$$U : \mathcal{H}^1_{-s} \to \mathcal{H}^{-1}_{\rho_0 - s} \quad \text{is continuous for any } s \in [0, \rho_0]. \tag{5.6}$$

最后，我们据此施加以下条件集（包括前述条件）：

$$\dim \mathbf{X}_1 = \dim \mathbf{X}_2 = 3, \quad \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\} \text{ and } \lambda_0 \notin \sigma(H'), \tag{5.7a}$$

$$\rho > \tfrac{1}{2} \text{ and } \operatorname{diag}(W_1, W_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}_{\rho_0}) \text{ for some } \rho_0 \geq 3, \tag{5.7b}$$

$$2 + 2\rho \geq \rho_0. \tag{5.7c}$$

实际上，(5.7c) 仅针对第5.1.2节提出；对于情形 $\rho_0 > 3$ 而言，这是一个便于使用的相关假设。显然，(5.6) 得到满足（事实上，第5.1.2节的算子 $U(z)$ 满足 $U(z) \in \mathcal{L}(1, -s; -1, \rho_0 - s)$，对于 $0 \leq s \leq \rho_0$ 一致地

z 在零附近，这推广了 (5.6)）。条件 (5.7a) 和 (5.7b) 将在本节中始终采用。

回顾对于任意 $t \in \mathbb{R}$ 的记号 $H^1_{t^-} = \cap_{s<t} H^1_s$ 和 $\mathcal{H}^1_{t^-} = \cap_{s<t} \mathcal{H}^1_s$，(5.7a) 和 (5.7b) 导出如下定义 4.6 的有效版本，见定理 4.7 和 4.15（以及 (4.67)）。

定义 5.1。 (1) λ_0 是 H 的共振，如果方程 $Hu = \lambda_0 u$ 存在一个解 $u \in H^1_{(-1/2)^-} \setminus H^1$。共振 λ_0 的重数定义为商空间 $\ker(H-\lambda_0)_{|H^1_{(-1/2)^-}} / \ker(H-\lambda_0)_{|H^1}$ 的维数。

(2) 0 是 P 的共振，如果方程 $Pv = 0$ 有一个解 $v \in \mathcal{H}^1_{(-1/2)^-} \setminus \mathcal{H}^1$。零共振的重数定义为商空间 $\ker P_{|\mathcal{H}^1_{(-1/2)^-}} / \ker P_{|\mathcal{H}^1}$ 的维数。

类似地，我们可以定义（尽管本文不会用到） $\widetilde{P = (S^*S)^{-1}P(S^*S)^{-1}}$的零共振概念。由于$(S^*S)^{-1}$ 和 S^*S 在 $\mathcal{H}^1_s$上对任意 s均为连续函数，零是 P 的共振，当且仅当它是 P 的共振，且二者的重数相同。按照 [Ne, JK] ，我们根据阈值 λ_0 的谱性质将其区分为以下四种情形。

情形 0 正则点： λ_0 (0，分别地)既不是H (P，分别地)的特征值，也不是其共振。

情形 1 第一类例外点： λ_0 (0，分别地)是 H (P，分别地)的共振，但不是特征值。

情形 2 第二类异常点： λ_0 (0，分别地)是 H (P，分别地)的特征值，但不是共振。

情形 3 第三类异常点： λ_0 (或 λ_0 (0)) 同时是 H (P, 或 H (P) 的特征值和共振。

由引理 4.1 可得以下结果。

引理 5.2. λ_0 是 H 的共振（或特征值），当且仅当零是 P 的共振（或特征值），且二者的重数相同。

我们需要定理 4.7 的以下简化版本。

定理5.3. 假设条件 (5.7a)和 (5.7b)成立。

(a) 假设 $v = (v_1, v_2) \in \mathcal{H}^1_{(-1/2)^-}$ 且 $Pv = 0$。则有

$$v_j(x_j) = -\frac{\langle 1, U_{j1}v_1 + U_{j2}v_2\rangle}{4\pi|x_j|} + w_j \ for\ |x_j| \geq 1, \tag{5.8}$$

其中 $w_j \in L^2(\mathbf{X}j)$; $j = 1,2$。此外

$$v \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \langle 1, U_{j1}v_1 + U_{j2}v_2\rangle = 0; \quad j = 1, 2. \tag{5.9}$$

(b) 假设 $u \in H^{1\ (-1/2)^-}$ 是方程 $(H-\lambda_0)u=0$ 的一个解。令 $v = T^*u \in \mathcal{H}^1_{(-1/2)^-}$。那么，当且仅当 u 是 H 在 λ_0 处的特征函数时，

$$\langle 1, U_{j1}v_1 + U_{j2}v_2\rangle = 0; \quad j=1,2. \tag{5.10}$$

证明。由于 $n_j = 3$，并且我们假设对于 $j=1$，2，在定理 4.7 中集合 $\sigma_{j,1} = \{\frac{1}{2}\}$。因此，根据该定理，我们需要考虑泛函 $l_{j,12,1}$，将其应用于 $v \in \mathcal{H}^1_{(-1/2)^-}$，求解 $Pv=0$。由于 $q_j = 0$,

$$\sqrt{4\pi}\, l_{j,\frac{1}{2},1}(v) = \left\langle \phi_{\frac{1}{2}}(|y_j|)|y_j|^{-1}, \Delta_{y_j}(\chi_2 v_j)(y_j)\right\rangle_{L^2(\mathrm{d}y_j)}.$$

B通过对该方程右侧积分进行分部积分，我们验证了 t

$$\sqrt{4\pi}\, l_{j,\frac{1}{2},1}(v) = \left\langle 1, \Delta_{y_j}(\chi_2 v_j)(y_j)\right\rangle_{L^2(\mathrm{d}y_j)} = \left\langle 1, \Delta_{y_j} v_j(y_j)\right\rangle_{L^2(\mathrm{d}y_j)} = \langle 1, U_{j1}v_1 + U_{j2}v_2\rangle,$$

从而得到（5.8）。显然，（5.9）是（5.8）的推论。上述计算和定理 4.7 的第 4) 条推出（b）。 □

注 5.4。尽管上文未使用这一点，我们还是注意到，对于 $v=(v_1,v_2) \in \mathcal{H}^1_{(-1/2)^-}$，方程$Pv=0$（等价地）写成

$$v = -G_0 U v, \tag{5.11}$$

其中 $G_0 := \text{s-lim}_{z\to 0,\, z\notin[0,\infty)}(P_0 - z)^{-1}$按其积分核计算为 $G_0 = G_{0,1}\oplus G_{0,2}$，其中 $G_{0,j}$ 由其积分核给出

$$G_{0,j}(x_j,y_j) = \frac{1}{4\pi|x_j-y_j|}; \quad j=1,2.$$

该断言可通过分部积分论证得出，论证方式与引理 4.5 2) 的证明相同。注意，对于 s、$s' > \frac{1}{2}$ 和 $s+s'>2$，算子 $\langle x\rangle^{-s} G_{0,j}\langle x\rangle^{-s'}$ 是希尔伯特-施密特算子，参见 [JK，引理 2.2]。渐近行为 (5.8) 也可以由 (5.11) 推导得出。

对于 $j=1$，2，条件 $\langle 1, U_{j1}v_1 + U_{j2}v_2\rangle = 0$ 等价于对所有 $c\in\mathbb{C}^2$ 都成立的条件$\langle U^*c, v\rangle = 0$。由于当且仅当 $Pv=0$ 且 $v = T^*u$ 时 $Hu = \lambda_0 u$，以下结果直接由定理5.3得出。

推论5.5。假设满足定理*5.3*的条件。设 $u \in H^{1\ (-1/2)^-}$ 是方程 $Hu = \lambda_0 u$的一个解。那么，当且仅当 u 是 H 的一个 L^2-特征函数时，

$$\langle TU^*c, u\rangle = 0 \quad \textit{for any } c\in\mathbb{C}^2. \tag{5.12}$$

条件 (5.12) 可以改写为方程组

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_1 I_1 u dx + \langle 1, \check{s}_{12}(T^*u)_2\rangle = 0, \tag{5.13a}$$

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_2 I_2 u dx + \langle 1, \check{s}_{21}(T^*u)_1\rangle = 0. \tag{5.13b}$$

事实上，利用 $u = Sv - R'(\lambda_0)HSv$ with $v = T^*u$ and writing $Sv = \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{X}} \varphi_1 I_1 u dx &= \langle I_1\varphi_1, Sv - R'(\lambda_0)HSv\rangle \\ &= \langle 1, (W_1 + K_{11}(\lambda_0))v_1\rangle + \langle 1, (W_{12} + K_{12}(\lambda_0))v_2\rangle,\end{aligned}$$

通过使用含有 $c = (1, 0)$ 的（5.12），可得

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_1 I_1 u dx + \langle 1, \check{s}_{12} v_2\rangle = \langle 1, (UT^*u)_1\rangle = 0.$$

类似地，（5.13b）由以下计算得出

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_2 I_2 u dx + \langle 1, \check{s}_{21} v_1\rangle = \langle 1, (UT^*u)_2\rangle = 0.$$

通过相同的计算可知，（5.13a）和（5.13b）蕴含（5.12）。

对于 $s \in (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})$，我们令

$$\mathcal{K} = \ker(1 + G_0 U) \subset \mathcal{H}^1_{-s}. \tag{5.14}$$

该空间 $\mathcal{K}$ 与子空间 $\{v \in \mathcal{H}^1{}_{(-1/2)^-} \mid Pv = 0\}$ 重合，且为有限维空间。根据定理5.3，如果零是 P 的共振点，则其重数至多为二。接下来我们引入常函数

$$g_j(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{ for } x_i \in \mathbf{X}_i; \quad i = 1, 2. \tag{5.15a}$$

令 $\mathfrak{g}_1 = (g_1, 0)$ 和 $\mathfrak{g}_2 = (0, g_2)$。对于 $v \in \mathcal{K}$，定义 $c(v) = (c_1(v)\ c_2(v)) \in \mathbb{C}^2$ 如下

$$c_i(v) = \langle \mathfrak{g}_i, Uv\rangle = \langle g_i, U_{i1}v_1 + U_{i2}v_2\rangle; \quad i = 1, 2. \tag{5.15b}$$

定理5.3表明，$v \in \mathcal{K}$ 是 P 的特征函数，当且仅当 $c(v) = 0$。当零是 P 的共振时，我们采用以下共振态的归一化：

- 若零共振是简单的，我们记 $\psi_1 \in \mathcal{K}$ 为一个共振态，使得

$$|c(\psi_1)| = 1. \tag{5.16}$$

- 若零共振是二重的，我们记 ψ_1 和 ψ_2 为 $\mathcal{K}$中的两个共振态，使得

$$c(\psi_1) = (1, 0) \text{ and } c(\psi_2) = (0, 1), \tag{5.17}$$

分别。

若 λ_0 是 H的共振，令 κ 表示其重数。则 $\kappa \in \{1, 2\}$ 以及共振态 $u_j = (1 - R'(\lambda_0)H)S\psi_j$ 的相应归一化条件 $1 \le j \le \kappa$，关于 H 可写为

$$|\langle TU^*\mathfrak{g}_1, u_1\rangle|^2 + |\langle TU^*\mathfrak{g}_2, u_1\rangle|^2 = 1, \qquad \text{if } \kappa = 1, \tag{5.18}$$

$$\langle TU^*\mathfrak{g}_i, u_j\rangle = \delta_{ij} \quad \text{for } 1 \le i, j \le 2, \qquad \text{if } \kappa = 2. \tag{5.19}$$

采用这一组共振函数，我们在第5.1.2节中证明（见定理 5.14）：若 Σ_2 是 H的重数为 κ 的共振，但不是特征值，则

$$R(z) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z-\lambda_0}} \left(\sum_{j=1}^{\kappa} \langle u_j, \cdot \rangle u_j + \mathcal{O}(|z-\lambda_0|^{\epsilon}) \right) \tag{5.20}$$

在 $\mathcal{L}(-1,s;1,-s)$ 中， $s>1$，对于 z在 λ_0附近以及 $z-\lambda_0 \notin [0,\infty)$。

Σ_2 为特征值（也可能同时是共振）的情形也有研究，见 $\rho_0 > 3$时的定理 5.14。对于 $\rho_0 = 3$，这要求相应特征函数满足先验弱衰减性质，见定理 5.16。另一方面，在这一附加假设下，我们实际上得到了预解式的二阶展开。更高阶的展开通常要求势具有强衰减性质，见 [JK、Wa2]。特别是在我们的设定中，这意味着 ρ_0 应当足够大。我们不再探讨这一方向，而主要将研究限制在 $\rho_0 = 3$ 的情形；这一情形确实与物理模型相关，参见第 1.2 节和第 1.3 节的讨论。

5.1.1.2 $\lambda_0 > \Sigma_2$的情形

本小节考虑如下情形

$\lambda_0 > \Sigma_2$ 是按条件 2.4 定义的非重合双簇阈值。 (5.21)

这意味着存在唯一的 $a_0 \in \mathcal{A} \setminus \{a_{\max}\}$，使得 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H^{a_0}) \setminus \{\Sigma_2\}$，且该簇分解是满足条件1.6的双簇分解。与第2.2节一样，我们用 m 表示算子 H^{a_0} 的特征值 λ_0 的重数，并令 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ 为相应特征子空间的一组正交归一基。令 Π 为 $L^2(\mathbf{X})$ 中由下式定义的投影

$$\Pi g = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes \langle \varphi_j, g \rangle_{L^2(\mathbf{X}^{a_0})}, \ g \in L^2(\mathbf{X}). \tag{5.22}$$

Put $\Pi' = 1 - \Pi$， $H' = \Pi' H \Pi'$ 和 $R'(z) = (H'-z)^{-1}\Pi'$。在本小节中令

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbf{X}_{a_0}; \mathbb{C}^m), \quad \mathcal{H}^k_s = H^k_s(\mathbf{X}_{a_0}; \mathbb{C}^m), \quad \mathcal{H}^k_{s-} = \cap_{t<s} \mathcal{H}^k_t; \quad k, s \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{H}$ 中的标量积只涉及x_{a_0}变量，记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$；但我们也将（略有滥用地）用相同记号表示 $L^2(\mathbf{X}_{a_0})$ 上的内积。定义映射 $S : \mathcal{H} \to L^2(\mathbf{X})$，如下：

$$S : f = (f_1, \dots, f_m) \to Sf = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x^{a_0}) f_j(x_{a_0}). \tag{5.23}$$

由第2.2节可得预解式的表示公式，

$$R(z) = E(z) - E_+(z) E_{\mathcal{H}}(z)^{-1} E_-(z) \ \text{ for } \ \operatorname{Im} z \neq 0, \tag{5.24}$$

其中

$$\begin{aligned} E(z) &= R'(z), \\ E_+(z) &= (1 - R'(z)I_0)S, \\ E_-(z) &= S^*\big(1 - I_0R'(z)\big), \\ E_{\mathcal{H}}(z) &= (z - \lambda_0) - (P_0 + S^*I_0S - S^*I_0R'(z)I_0S), \end{aligned}$$

其中 $P_0 = -\Delta_{x_{a_0}}\mathbf{1}_m$ 与 $\mathbf{1}_m$ 是大小为 m 的单位矩阵，且 $I_0 = \sum_{b\not\subset a} V_b(x^b)$。我们假设下文给出的 (5.27a)。于是，对 H'有如下极限吸收原理，

$$\forall s > \tfrac{1}{2}: \quad \|\langle x\rangle^{-s}R'(\lambda \pm \mathrm{i}0)\langle x\rangle^{-s}\| \le C_s \text{ for } \lambda \text{ near } \lambda_0. \tag{5.25}$$

这由 $\breve{R}(z)$的定理3.13推出，回忆 $R'(z) = \breve{R}(z)\Pi'$。将 $P^\pm = -E_{\mathcal{H}}(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)$ 分解为

$$P^\pm = P_0 + U^\pm, \tag{5.26a}$$

其中

$$U^\pm = S^*I_0S - S^*I_0R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)I_0S. \tag{5.26b}$$

除 (5.21) 外，我们还假设

$$\dim \mathbf{X}_{a_0} = 3 \text{ and } \lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(H'), \tag{5.27a}$$

$$\rho \ge 1 \text{ and } S^*I_0S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-\rho_1}, \mathcal{H}^{-1}_{\rho_1}) \text{ with } \rho_1 \ge \tfrac{3}{2}, \tag{5.27b}$$

$$\rho \ge \rho_1 - \tfrac{1}{2}. \tag{5.27c}$$

回忆一下，$\rho > 0$ 是成对势的衰减速率，如 (1.22) 所规定。(5.27c) 中的条件在第5.1.3节中会很方便（尽管并非必要）；本节中不会用到它。（注意，若满足 (5.27c)，则第5.1.3节的算子 $U(z)$ 对于 $s < \rho_1$ 在零附近且 $\mathrm{Im}\ z \neq 0$时一致地满足 $U(z) \in \mathcal{L}(1, -s;\ -1, s)$。）显然，仅施加 (5.27b) 时，性质 (5.27c) 对 $\rho_1 = \frac{3}{2}$ 仍成立。(5.27c) 的这个较弱版本将非常有用。

根据第2.2节中的讨论，（5.25）和条件（5.27b）意味着

$$U^\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-s}, \mathcal{H}^{-1}_s) \text{ for } s < \tfrac{3}{2}. \tag{5.28}$$

自由预解式 $r_0(z) = (P_0 - z)^{-1}$ 可以在适当的加权空间中展开为

$$r_0(z) = G_0 + z^{\frac{1}{2}}G_1 + zG_2 + \cdots, \tag{5.29}$$

见（5.94），并且对于 $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$，$K^\pm = G_0U^\pm$是作用在 $\mathcal{H}^1_{-s}$上的紧算子。利用 G_0的积分核，可以推出 $\ker_{\mathcal{H}^1_{-s}}(1 + K^\pm) \subset \mathcal{H}^{1\ (-1/2)^-}$。对于 $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$，令 $\mathcal{K} = \ker_{\mathcal{H}^1_{-s}}(1 + K^+)$。对任意 $s < \frac{3}{2}$，令

$$\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s} = \{u \in L^2_{-s}(\mathbf{X}) \,|\, (H - \lambda_0)u = 0,\ \Pi' u \in \mathcal{B}^*_{1/2,0}(\mathbf{X})\}.$$

Th定理 5.6。假设条件（*5.21*）、（*5.27a*）和（*5.27b*）成立，并令 $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$。

（a）对于任意 $v \in \mathcal{K}$

$$R'(\lambda_0 + \mathrm{i}0)I_0Sv = R'(\lambda_0 - \mathrm{i}0)I_0Sv \quad \textit{and} \quad U^+v = U^-v \in \mathcal{H}^{-1}_{(2\rho_1 - 1/2)^-}. \tag{5.30}$$

此外

$$\mathcal{K} = \ker_{\mathcal{H}^1_{-s}}(1 + K^-) = \ker_{\mathcal{H}^1_{-s}}(P^+) = \ker_{\mathcal{H}^1_{-s}}(P^-). \tag{5.31}$$

(b) 对于任意 $v = (v_1, \cdots, v_m) \in \mathcal{K}$ 以及 $k = 1, \ldots\ldots m$

$$v_k(x_{a_0}) = -\frac{\langle 1, U^{\pm}_{k1} v_1 + \cdots + U^{\pm}_{km} v_m \rangle_0}{4\pi |x_{a_0}|} + w_k(x_{a_0}) \ for \ |x_{a_0}| \geq 1, \tag{5.32}$$

其中 $w = (w_1, \cdots, w_m) \in \mathcal{H}$。

(c) 令 $v \in \mathcal{K}$。则 $v \in \mathcal{H}$ 当且仅当

$$\forall c \in \mathbb{C}^m : \quad \langle c, U^{\pm} v \rangle_0 = 0. \tag{5.33}$$

这里将 $c \in \mathbb{C}^m$ 视为空间 $\mathcal{H}^1_{-s}$ 的元素， $s > \frac{3}{2}$。

(d) $u \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$ 当且仅当 $u = (S - R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0) I_0 S) v$ 对于某个 $v \in \mathcal{K}$。在此情形下，v 由 $v = S^* u \in \mathcal{K}$唯一确定。

(e) $u \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s} \cap L^2(\mathbf{X})$ *if and only if* $v = S^* u \in \mathcal{K} \cap \mathcal{H}$.

证明。我们基本上可以按照第 4.2.4 节中的方法进行论证，尤其是使用引理 4.10 和引理 4.11，尽管那里的设置有所不同（属于多重双簇情形）。拟逆 G_0 当然比第 4.2.4 节中所用的更一般的构造更易于使用，但由此定义 K^+所得的零空间 $\ker^{\mathcal{H}^1_{-s}}(1 + K^+)$ 与所选拟逆的具体形式无关，参见注 5.4。若绕道参阅第 4.2.4 节，则泛函的识别可按照定理5.3的证明进行；或者，(b) 可由 G_0 的渐近行为推出，参见注 5.4。

□

因此，我们定义以下阈值共振概念的有效版本。

定义 5.7。 (1) λ_0 是 H 的共振，如果方程 $Hu = \lambda_0 u$ 在 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}{}_{(-1/2)^-}$中有一个解: $= \cap_{s>1/2} \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s}$，且该解不属于 H^1。共振 λ_0的重数定义为商空间 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}{}_{(-1/2)^-} \big/ \ker(H - \lambda_0)_{|H^1}$的维数。

(2) 0 是 $P^{\pm}$的共振，如果方程 $P^+ v = 0$（从而 $P^- v = 0$，反之亦然）有一个解 $v \in \mathcal{H}^1{}_{(-1/2)^-} \setminus \mathcal{H}^1$。零共振的重数定义为商空间 $\ker P^+_{|\mathcal{H}^1{}_{(-1/2)_-}} / \ker P^+_{|\mathcal{H}^1}$的维数。

注意定理 5.6 的推论：若零是 $P^{\pm}$ 的共振，则其重数不超过 m。与小节 5.1.1.1 中一样，我们可以根据这些定义引入情形 $0 - 3$；定理 5.6 进而表明， H 在 λ_0 处的阈值谱性质由 $P^{\pm}$ 在零处的阈值谱性质决定。事实上，与最低阈值 Σ_2 的情形完全平行， λ_0 是 H 的正则点（分别地，第一类例外点、第二类例外点、第三类例外点），当且仅当零是 $P^{\pm}$的正则点（分别地，第一类例外点、第二类例外点、第三类例外点）。

设零是 $P^{\pm}$的共振。则商空间 $\mathcal{K}/\mathcal{H} := \mathcal{K}/(\mathcal{K}\cap\mathcal{H})$ 的维数为 $\kappa = \dim \mathcal{K}/\mathcal{H} \geq 1$。我们称 κ 为 $P^{\pm}$的零共振重数。令 $\mu = \dim\ \mathcal{K}$。对于 $\phi = (v_1, \cdots, v_m) \in \mathcal{K}$，定义 $c(\phi) \in \mathbb{C}^m$ 如下

$$c(\phi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\big(\langle 1, U_{11}^{\pm}v_1 + \cdots + U_{1m}^{\pm}v_m\rangle_0, \cdots, \langle 1, U_{m1}^{\pm}v_1 + \cdots + U_{mm}^{\pm}v_m\rangle_0\big). \quad (5.34)$$

定理 5.6 (b) 表明，$\phi \in \mathcal{K}$ 是 $P^{\pm}$ 的共振态，当且仅当$c(\phi) \neq 0$。显然，$c(\cdot)$是 $\mathcal{K}$上的线性作用。因此，$P^{\pm}$的一族共振态 $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ 在线性无关，当且仅当向量族 $\{c(\psi_1) \ldots, c(\psi_k)\}$ 在 $\mathbb{C}^m$中线性无关。

命题 5.8. (a) 假设零是 $P^{\pm}$ 的一个重数为 κ的共振。那么存在 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的一组基 $\{\psi_1, \cdots, \psi_\kappa\}$，使得

$$(c(\psi_i), c(\psi_j)) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, \kappa, \quad (5.35)$$

其中$(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathbb{C}^m$的标量积。

(b) 假设零是 $P^{\pm}$ 的一个共振，但不是特征值（即 $\kappa = \mu$）。那么由下式定义的算子 Q

$$Q = \sum_{j=1}^{\kappa}\langle\psi_j, \cdot\rangle\psi_j : \mathcal{H}_s^{-1} \to \mathcal{H}_{-s}^1, s > \tfrac{1}{2}, \quad (5.36)$$

不依赖于满足 *(5.35)* 的基 $\{\psi_1, \ldots, \psi_\kappa\}$ 的选取：若 $\{\psi_1', \ldots, \psi_\kappa'\}$ 是 $\mathcal{K}$ 的另一个满足 *(5.35)* 的基，则有

$$\sum_{j=1}^{\kappa}\langle\psi_j, \cdot\rangle\psi_j = \sum_{j=1}^{\kappa}\langle\psi_j', \cdot\rangle\psi_j'.$$

证明。(a). 设 $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_\kappa\}$ 是 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的一组基。那么矩阵 $C(\Phi) = (c(\phi_1) \ldots, c(\phi_\kappa)) \in \mathcal{M}_{m\times\kappa}$ 的秩等于 κ，其中 $c(\phi_j)$ 被视为 $C(\Phi)$ 的第 j 列。因此，$C(\Phi)^*C(\Phi)$ 是正定矩阵。令 $M_0 \in \mathcal{M}_{\kappa\times\kappa}(\mathbb{C})$ 为满足 $M_0^2 = (C(\Phi)^*C(\Phi))^{-1}$ 的正定厄米矩阵。设 $M_0 = (m_{ij})_{1\leq i,\ j\leq\kappa}$ 并定义

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{\kappa} m_{ki}\phi_k, \quad i = 1, \cdots, \kappa. \quad (5.37)$$

那么，$\{\psi_1, \ldots, \psi_\kappa\}$ 也是 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$的一个基。

令 $C(\Psi)$ 为以与 $C(\Phi)$ 相同的方式定义的矩阵，其中将 $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_\kappa\}$ 替换为 $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_\kappa\}$。于是

$$c(\psi_j) = \sum_{k=1}^{\kappa} m_{kj}c(\phi_k); \quad j = 1, \cdots, \kappa.$$

这表明 $C(\Psi) = C(\Phi)M_0$ 以及

$$C(\Psi)^* C(\Psi) = M_0 C(\Phi)^* C(\Phi) M_0 = 1 \text{ in } \mathcal{M}_{\kappa\times\kappa}(\mathbb{C}).$$

由此可知， $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_\kappa\}$ 是满足归一化条件 (5.35) 的 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的一个基。

(b). 设 $t_{ij} \in \mathbb{C}$、 $1 \le i$、 $j \le \kappa$ 满足

$$\psi_i' = \sum_{j=1}^{\kappa} t_{ij}\psi_j, \quad i = 1, \cdots, \kappa.$$

于是，在 $\mathbb{C}^m$ 中， $c(\psi_i') = \sum_{j=1}^{\kappa} t_{ij} c(\psi_j)$。条件 $(c(\psi_i')\ c(\psi_j')) = \delta_{ij}$ 变为

$$\begin{aligned}(c(\psi_i'), c(\psi_j')) &= \sum_{l,m=1}^{\kappa} \overline{t_{il}} t_{jm} (c(\psi_l), c(\psi_m)) \\ &= \sum_{l=1}^{\kappa} \overline{t_{il}} t_{jl} = \delta_{ij}\end{aligned}$$

对于 i、 $j = 1$、.....、 κ。这意味着，如果 $\{\psi_1, \dots, \psi_\kappa\}$ 和 $\{\psi_1', \dots, \psi_\kappa'\}$ 都满足 (5.35)，则矩阵 $T = (t_{ij})_{1\le i,\ j\le\kappa}$ 是酉的。我们得到

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \langle\psi_i', \cdot\rangle \psi_i' = \sum_{l,m=1}^{\kappa} \Big(\sum_{i=1}^{\kappa} \overline{t_{il}} t_{im} \Big) \langle\psi_l, \cdot\rangle \psi_m = \sum_{l,m=1}^{\kappa} \delta_{lm} \langle\psi_l, \cdot\rangle \psi_m = \sum_{l=1}^{\kappa} \langle\psi_l, \cdot\rangle \psi_l.$$

□

共振态的归一化条件 (5.35) 将用于计算当 z 接近 λ_0 且 $\operatorname{Im} z \neq 0$ 时，情形 λ_0 是共振态但不是 H 的特征值下的预解式 $R(z) = (H - z)^{-1}$ 的首项。归一化条件 (5.16) 可视为 (5.35) 的特殊情形，而命题 5.8 (b) 对于 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是双重双簇阈值的情形同样成立。

小节 5.1.3 中关于预解式展开的主要结果适用于 λ_0 不是 H 的特征值的情形，参见定理 5.24、情形 0 和情形 1。不过， λ_0 是特征值（并且可能同时还是共振）的情形也得到了研究，参见小节 5.1.1.1。对于物理模型，我们随后还需要相应 L^2-特征函数的一个额外弱衰减性质，参见定理 5.26。另一方面，在这一额外假设下，我们可以得到预解式的二阶展开。

5.1.2 最低阈值附近的预解式渐近

在本小节中，我们沿用小节 5.1.1.1 的条件和记号，特别地， $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是一个双重双簇阈值。我们希望研究预解式 $R(z) = (H - z)^{-1}$ 在 Σ_2附近的渐近行为，并使用公式 (5.2) 表示$R(z)$。令 $P(z) = -E_{\mathcal{H}}(\lambda_0 + z)$，并将 $P(z)$ 分解为

$$P(z) = P_0 + U(z) - z \text{ and } U(z) = U + zU_1 + z^2 U_2(z) \tag{5.38a}$$

其中， P_0 和 U 分别由 (5.5a) 和 (5.5b) 定义，并且

$$U_1 = -\begin{pmatrix} 0 & \langle\varphi_1, \varphi_2 \otimes \cdot\rangle_1, \\ \langle\varphi_2, \varphi_1 \otimes \cdot\rangle_2 & 0 \end{pmatrix} - K_1(\lambda_0), \tag{5.38b}$$

$$U_2(z) = -\sum_{j=2}^{\infty} z^{j-2} K_j(\lambda_0), \tag{5.38c}$$

$$K_j(\lambda_0) = (\langle\varphi_l, I_l(R'(\lambda_0))^{j+1} I_m \varphi_m \cdot\rangle)_{1\le l,m\le 2}; \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5.38d}$$

由于 $K(\lambda_0 + z)$ 关于 z 在零点附近是全纯的，并且从 $\mathcal{H}^1_{-1-\rho}$ 到 $\mathcal{H}^{-1}_{1+\rho}$ 连续，其中 $\rho > 0$ 由 (1.22) 给出，因此上述幂级数例如在空间 $\mathcal{L}(1, -1-\rho; -1, 1+\rho)$ 中收敛。注意到

$$P(z) = P - z(1 - U_1) + z^2 U_2(z); \quad P = P_0 + U. \tag{5.39}$$

与单体薛定谔算子不同，参见 [JK]， $P(z)$ 是一个依赖于谱参数且依赖方式为非线性的算子铅笔。下述结果对于在 0 是 P 的特征值的情形下 $P(z)^{-1}$ 在 $z \to 0$ 时的渐近展开的存在性十分重要。

引理 5.9。 $1 - U_1$ 在 $\mathcal{H}$ 上是正定的。

证明。 首先注意到 $K_1(\lambda_0) \ge 0$。事实上，对于 $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$，由于 $R'(\lambda_0)$ 是有界自伴算子，

$$\langle f, K_1(\lambda_0) f\rangle = \sum_{i,j} \langle\varphi_i \otimes f_i, I_i(R'(\lambda_0))^2 I_j \varphi_j \otimes f_j\rangle = \|R'(\lambda_0)F\|^2 \ge 0,$$

其中 $F = \sum_{j=1}^2 I_j \varphi_j \otimes f_j$。可以验证

$$1 + \begin{pmatrix} 0 & \langle\varphi_1, \varphi_2 \otimes \cdot\rangle_1 \\ \langle\varphi_2, \varphi_1 \otimes \cdot\rangle_2 & 0 \end{pmatrix} \ge 0.$$

事实上，参见命题2.7的证明，其在 f 上的期望值为

$$\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle\varphi_1 \otimes f_1, \varphi_2 \otimes f_2\rangle = \|\varphi_1 \otimes f_1 + \varphi_2 \otimes f_2\|^2.$$

由此可得

$$\langle(1 - U_1) f, f\rangle = \|\varphi_1 \otimes f_1 + \varphi_2 \otimes f_2\|^2 + \|R'(\lambda_0)F\|^2 \ge 0. \tag{5.40}$$

因此， $1 - U_1$ 在 $\mathcal{H}$ 和 $f \in$ 核$(1 - U_1)$上非负，当且仅当

$$\varphi_1 \otimes f_1 + \varphi_2 \otimes f_2 = 0 \text{ and } R'(\lambda_0)F = 0.$$

特别地，由于我们假设（5.7a）， ker$(1 - U_1)$缩减为 $\{0\}$ ，且 $1 - U_1$ 在 $\mathcal{H}$上是正定的。 □

Set

$$r_0(z) = (P_0 - z)^{-1}; \quad z \notin [0, \infty). \tag{5.41}$$

为了得到 $P(z)^{-1}$（对于 $z \notin [0,\infty)$）以及 z在零点附近的渐近展开，我们首先使用预解式方程

$$P(z)^{-1} = W(z)^{-1} r_0(z) \text{ where } W(z) := 1 + r_0(z)U(z). \tag{5.42}$$

接下来，我们将应用Grushin方法来研究因子 $W(z)^{-1}$。

设 $N \in \mathbb{N}$和$s > N + \frac{1}{2}$。由于$\dim \mathsf{X}_j = 3$，自由预解式 $r_0(z)$可在 $\mathcal{L}(-1, s; 1, -s)$中展开为

$$r_0(z) = G_0 + \sqrt{z} G_1 + \cdots + z^{\frac{N}{2}} G_N + \mathcal{O}(|z|^{\frac{N}{2}+\epsilon}), \tag{5.43}$$

对于某个依赖于 N 和 s的 $\epsilon > 0$ ，其中 $G_i = \operatorname{diag}(G_{i,\,1}, G_{i,\,2})$；对于 $i \leq N$，它们是可显式计算的对角矩阵，参见 [JK，引理2.3]。特别地，$G_{i,\,j}$ 的积分核在 $i = 0$,1和 $j = 1$,2时分别为

$$G_{0,j}(x_j, y_j) = \frac{1}{4\pi |x_j - y_j|}, \quad G_{1,j}(x_j, y_j) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}; \quad j = 1, 2. \tag{5.44}$$

我们还回顾一下，参见 [JK，引理2.1–2.3]，，当 $s, s' > 1/2$ 且 $s + s' > 2$ 时， $r_0(z) \in \mathcal{L}(-1, s'; 1, -s)$，并且关于 z 在 $z = 0$ 处具有赫尔德连续依赖。因此

$$r_0(z) - G_0 = \mathcal{O}(|z|^{\epsilon}) \in \mathcal{L}(-1, s'; 1, -s) \text{ for } s, s' > \tfrac{1}{2} \text{ and } s + s' > 2. \tag{5.45}$$

现在我们利用展开式 (5.38a)、(5.43) 和 (5.45) 来展开算子 $W(z)$。

引理 5.10。 在条件 (5.7a)–(5.7c) 下，关于以下量，在 z 中且 $z \notin [0, \infty))$ 成立下列展开式

$$W_0 = 1 + G_0 U, \quad W_1 = G_1 U, \quad W_2 = G_2 U + G_0 U_1,$$

and 对于某个（较小的）正数 ϵ （取决于给定参数 s 和 s'）。

(a) 对于 $s > \frac{1}{2}$、 $s \geq s'$ 和 $\rho_0 - s' >$最大值$\{\frac{1}{2}, 2 - s\}$

$$W(z) = W_0 + \mathcal{O}(|z|^{\epsilon}) \in \mathcal{L}(1, -s'; 1, -s). \tag{5.46a}$$

(b) 对于 $s > \frac{3}{2}$、 $s \geq s'$ 和 $\rho_0 - s' > \frac{3}{2}$

$$W(z) = W_0 + \sqrt{z} W_1 + \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \in \mathcal{L}(1, -s'; 1, -s). \tag{5.46b}$$

(c) 对于 $s > \frac{5}{2}$、 $s \geq s'$ 和 $\rho_0 - s' > \frac{5}{2}$

$$W(z) = W_0 + \sqrt{z} W_1 + z W_2 + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}) \in \mathcal{L}(1, -s'; 1, -s). \tag{5.46c}$$

断言 (a) 由 (5.45) 得出，而 (b) 和 (c) 分别由带有 $N = 1$ 和 $N = 2$ 的界 (5.43) 得出。所有情况下，我们也使用 (5.38a)。

在对有效势施加更强的衰减假设时，也可以建立更高阶的渐近展开。

由恒等式 $\langle -U\cdot,\cdot\rangle = \langle P_0\cdot,\cdot\rangle$ 在 $\mathcal{K} = \ker(1+G_0U)$ 上成立，并结合分部积分（参见（4.13））， 可知 $\langle -U\cdot,\cdot\rangle$ 在 $\mathcal{K}$上是正定二次型。令

$$\mu = \dim \mathcal{K},$$

并令 $\{\phi_1,\dots,\phi_\mu\}$ 为 $\mathcal{K}$ 的一组基，该基关于 $\langle -U\cdot$ 正交归一化， $\cdot \quad \rangle$:

$$\langle -U\phi_i,\phi_j\rangle = \delta_{ij}.$$

这种归一化是来自 [Wa2] 的一种技术工具，通常与 (5.16) 和 (5.17) 不一致。我们约定：若零是 P 的一个重数为 κ 的共振， ϕ_j 对于 $1\le j\le\kappa$ 是共振态，而 ϕ_j 对于 $\kappa < j \le \mu$ （当然，仅当 $\kappa<\mu$ 时）是 P 的本征态。

为了得到 $W(z)^{-1}$ 的展开，考虑以下 Grushin问题

$$\mathcal{W}(z) = \begin{pmatrix} W(z) & \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^* & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}^1_{-s}\times\mathbb{C}^\mu \to \mathcal{H}^1_{-s}\times\mathbb{C}^\mu,$$

其中 $s\in(\frac{1}{2},\rho_0-\frac{1}{2})$， $\mathcal{S}\colon \mathbb{C}^\mu\to\mathcal{H}^1_{-s}$ 定义为

$$\mathcal{S}c = \sum_{j=1}^{\mu} c_j\phi_j,\quad c=(c_1,\dots,c_\mu)\in\mathbb{C}^\mu,$$

and

$$\mathcal{S}^*f = (\langle -U\phi_1,f\rangle\dots,\langle -U\phi_\mu,f\rangle),\quad f\in\mathcal{H}^1_{-s}.$$

注意， $\mathcal{S}^*$ 可视为关于 $\mathcal{H}^1_{-s}$ 上的型式$\langle -U\cdot,\cdot\rangle$ 的 $\mathcal{S}$ 的形式伴随（它不是希尔伯特空间伴随）。对上述 s 定义映射$Q\colon \mathcal{H}^1_{-s}\to\mathcal{H}^1_{-s}$ 如下

$$Qf = \sum_{j=1}^{\mu}\langle -U\phi_j,f\rangle\phi_j.$$

于是，

$$\mathcal{S}\mathcal{S}^* = Q \text{ on } \mathcal{H}^1_{-s} \text{ and } \mathcal{S}^*\mathcal{S} = 1 \text{ on } \mathbb{C}^\mu,$$

特别地， Q是 $\mathcal{H}^1_{-s}$中的投影。

于是可以证明（见 [JK、Wa2]），

$$\mathcal{H}^1_{-s} = \mathcal{K}\oplus \operatorname{ran}(1+G_0U), \tag{5.47}$$

并且相对于直和分解（5.47）， Q 投影到 $\mathcal{K}$ 上，特别地，$\ker Q = \operatorname{ran}(1+G_0U)$。那么当然， $Q' = 1-Q$ 是相对于（5.47）从$\mathcal{H}^1_{-s}$ 投影到$\operatorname{ran}(1+G_0U)$上的投影。由此立即得到，$Q'(1+G_0U)Q'$在$\operatorname{ran}(1+G_0U)$上是双射。由于$\operatorname{ran}(1+G_0U)$是闭的，算子

$$D_0 := (Q'(1+G_0U)Q')^{-1}Q' \tag{5.48}$$

在 $\mathcal{H}^1_{-s}$ 上存在且连续。基于 (5.46a) 的扰动论证可得，当 $|z|$ 足够小时， $Q'W(z)Q'$ 在 $\operatorname{ran}(1+G_0U)$ 上可逆，且具有连续逆算子。令

$$D(z) = (Q'W(z)Q')^{-1}Q'.$$

在指定条件下，以下展开式在 $\mathcal{L}(1,-s;1,-s)$ 中成立，且

$$D_0=(Q'W_0Q')^{-1}Q',\quad D_1=-D_0W_1D_0,\quad D_2=-D_0W_2D_0+D_0W_1D_0W_1D_0.$$

$$D(z)=D_0+\mathcal{O}(|z|^{\epsilon}),\ \text{if } \tfrac{1}{2}<s<\rho_0-\tfrac{1}{2}. \tag{5.49a}$$
$$D(z)=D_0+\sqrt{z}D_1+\mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}),\ \text{if } \tfrac{3}{2}<s<\rho_0-\tfrac{3}{2}. \tag{5.49b}$$
$$D(z)=D_0+\sqrt{z}D_1+zD_2+\mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}),\ \text{if } \tfrac{5}{2}<s<\rho_0-\tfrac{5}{2}. \tag{5.49c}$$

注意，如果满足 $\mathcal{K}=\{0\}$，则有 $Q'=1$ 和 $D(z)=W(z)^{-1}$，而 $W(z)^{-1}$ 的渐近展开由 $D(z)$ 的渐近展开给出。下文讨论情形 $\mathcal{K}\neq\{0\}$。对于我们主要关注的首项展开，无需使用断言 (5.49b) 和 (5.49c)。

利用算子 $D(z)$，我们可以将 $\mathcal{W}(z)$ 的逆算子计算为

$$\mathcal{W}(z)^{-1}=\begin{pmatrix}\mathcal{E}(z) & \mathcal{E}_+(z)\\ \mathcal{E}_-(z) & \mathcal{E}_{-+}(z)\end{pmatrix}, \tag{5.50}$$

其中

$$\mathcal{E}(z)=D(z),\quad \mathcal{E}_+(z)=\mathcal{S}-D(z)W(z)\mathcal{S},$$
$$\mathcal{E}_-(z)=\mathcal{S}^*-\mathcal{S}^*W(z)D(z),\quad \mathcal{E}_{-+}(z)=\mathcal{S}^*(-W(z)+W(z)D(z)W(z))\mathcal{S}.$$

由 (5.50) 可得到 $W(z)$ 的逆算子的表示式，

$$W(z)^{-1}=\mathcal{E}(z)-\mathcal{E}_+(z)\mathcal{E}_{-+}(z)^{-1}\mathcal{E}_-(z). \tag{5.51}$$

$\mathcal{E}_{\pm}(z)$ 和 $\mathcal{E}_{-+}(z)$ 可以类似地展开为 $D(z)$，即

$$\mathcal{E}_{\pm}(z)=\mathcal{E}_{\pm,0}+\sqrt{z}\mathcal{E}_{\pm,1}+z\mathcal{E}_{\pm,2}+\dots$$
$$\mathcal{E}_{-+}(z)=\mathcal{E}_{-+,0}+\sqrt{z}\mathcal{E}_{-+,1}+z\mathcal{E}_{-+,2}+\cdots$$

更准确地说，有如下结果。

引理 5.11. 假设 (5.7a)–(5.7c)。

(a) 在 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mu},\mathcal{H}^1_{-s})$（对于 $+$ 情形）或 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-s},\mathbb{C}^{\mu})$（对于 $-$ 情形）中：

$$\mathcal{E}_{\pm}(z)=\mathcal{E}_{\pm,0}+\mathcal{O}(|z|^{\epsilon}),\ \textit{if } s>\tfrac{1}{2}. \tag{5.52a}$$
$$\mathcal{E}_{\pm}(z)=\mathcal{E}_{\pm,0}+\sqrt{z}\mathcal{E}_{\pm,1}+\mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}),\ \textit{if } s>\tfrac{3}{2}. \tag{5.52b}$$
$$\mathcal{E}_{\pm}(z)=\mathcal{E}_{\pm,0}+\sqrt{z}\mathcal{E}_{\pm,1}+z\mathcal{E}_{\pm,2}+\mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}),\ \textit{if } s>\tfrac{5}{2}\ \textit{and}\ \rho_0>4. \tag{5.52c}$$

Here

$$\mathcal{E}_{+,0}=\mathcal{S},\quad \mathcal{E}_{-,0}=\mathcal{S}^*,$$
$$\mathcal{E}_{+,1}=-D_0W_1\mathcal{S},\quad \mathcal{E}_{-,1}=-\mathcal{S}^*W_1D_0,$$
$$\mathcal{E}_{+,2}=-(D_0W_2+D_1W_1)\mathcal{S},\quad \mathcal{E}_{-,2}=-\mathcal{S}^*(W_2D_0+W_1D_1).$$

(b) 在 $\mathcal{M}_{\mu\times\mu}(\mathbb{C})$中：

$$\mathcal{E}_{-+}(z) = \sqrt{z}\mathcal{E}_{-+,1} + \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.53a}$$
$$\mathcal{E}_{-+}(z) = \sqrt{z}\mathcal{E}_{-+,1} + z\mathcal{E}_{-+,2} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}),\ \textit{if}\ \rho_0 > 3. \tag{5.53b}$$

Here

$$\mathcal{E}_{-+,1} = -\mathcal{S}^* W_1 \mathcal{S},$$
$$\mathcal{E}_{-+,2} = -\mathcal{S}^*(W_2 - W_1 D_0 W_1)\mathcal{S}.$$

证明。(a). 回忆一下，对于任意 $s' > \frac{1}{2}$， $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^\mu, \mathcal{H}^1_{-s'})$。由于 $W_0\mathcal{S} = 0$, 利用 (5.46a)-(5.46c)，以下关于 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^\mu; \mathcal{H}^1_{-s})$ 的展开式成立。

$$\forall s > \tfrac{1}{2}: \quad W(z)\mathcal{S} = \mathcal{O}(|z|^\epsilon)\mathcal{S}. \tag{5.55a}$$
$$\forall s > \tfrac{3}{2}: \quad W(z)\mathcal{S} = \sqrt{z}W_1\mathcal{S} + \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.55b}$$
$$\forall s > \tfrac{5}{2}: \quad W(z)\mathcal{S} = (\sqrt{z}W_1 + zW_2)\mathcal{S} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}), \quad \text{if } \rho_0 > 3. \tag{5.55c}$$

$\mathcal{E}_+(z)$ 的展开式由 (5.49a)、(5.49b) 和 (5.55a)-(5.55c) 得出。 $\mathcal{E}_-(z)$ 的结果可以用类似的方法证明。

(b). 对于 (5.53a)，我们使用 (5.46a)、(5.46b) 和 (5.49a)。注意，事实上，由于 $W_0\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}^* W_0} = 0$ 和 $D(z)$：对于任意 $s \in (\frac{1}{2}, \rho_0 - \frac{1}{2})$， $\mathcal{H}^1_{-s} \to \mathcal{H}^1_{-s}$ 一致有界，因此可得

$$\mathcal{S}^* W(z)\mathcal{S} = \sqrt{z}\mathcal{S}^* W_1 \mathcal{S} + \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}), \tag{5.56a}$$
$$\mathcal{S}^* W(z) D(z) W(z)\mathcal{S} = \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.56b}$$

显然，(5.53a) 由 (5.56a) 和 (5.56b) 推出。

对于 (5.53b)，我们使用 (5.46b)、(5.46c) 和 (5.49a)。注意到

$$\mathcal{S}^* W(z)\mathcal{S} = \sqrt{z}\mathcal{S}^* W_1 \mathcal{S} + z\mathcal{S}^* W_2 \mathcal{S} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}), \tag{5.57a}$$
$$\begin{aligned}\mathcal{S}^* W(z) D(z) W(z)\mathcal{S} &= z\mathcal{S}^* W_1 D(z) W_1 \mathcal{S} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}) \\ &= z\mathcal{S}^* W_1 D_0 W_1 \mathcal{S} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}).\end{aligned} \tag{5.57b}$$

显然，(5.53b) 由 (5.57a) 和 (5.57b) 推出。 □

如果零是一个特征值但不是共振，则对于所有 j， $\phi_j \in L^2$ 和 $\mathcal{S}$ 从 $\mathbb{C}^\mu$ 到 $\mathcal{H}$ 连续，并且根据定理5.3，复合映射 $W_1\mathcal{S} = 0$。

在 $\rho_0 > 3$ 的情形下，渐近行为 (5.53b) 即为以下陈述

$$\mathcal{E}_{-+}(z) = -z\mathcal{S}^* W_2 \mathcal{S} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}). \tag{5.58}$$

对于 $\rho_0 = 3$，(5.53b) 和 (5.58) 的右端是有意义的，因为 $\mathcal{S}$ 映射到 $\mathcal{H}$，然而我们不知道这些渐近行为在这种情况下是否仍然成立。事实上，对于 $\rho_0 = 3$，我们只知道以下较弱（且远不够充分）的断言，

$$\forall \epsilon > 0: \quad \mathcal{E}_{-+}(z) = \mathcal{O}(|z|^{1-\epsilon}). \tag{5.59}$$

为证明 (5.59)，我们将 (5.46c) 应用于 $s' = 0$和 $s \in (\frac{5}{2}, 3]$，并得出

$$\mathcal{S}^* W(z)\mathcal{S} = z\mathcal{S}^* W_2 \mathcal{S} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}) = \mathcal{O}(|z|).$$

接下来，由 (5.46b),

$$W(z)\mathcal{S} = \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

在 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^\mu, \mathcal{H}^1_{-s})$ 中，对任意 $s > \frac{3}{2}$ 且满足 $\epsilon = \epsilon(s) > 0$。我们将 (5.49a) 应用于一个取值接近 $\frac{3}{2}$ 的 s。然后我们论证，对于任意小的 $\delta > 0$

$$\mathcal{S}^* W(z) = \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}-\kappa}) \text{ in } \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-s}.\mathbb{C}^\mu),\ \kappa := (s - \tfrac{3}{2} + \delta)/2, \tag{5.60}$$

由 (5.60) 可得

$$\mathcal{S}^* W(z) D(z) W(z)\mathcal{S} = \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon-\kappa}),$$

这表明

$$\mathcal{E}_{-+}(z) + \mathcal{S}^* W(z)\mathcal{S} = \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon-\kappa}) = \mathcal{O}(|z|^{1-\kappa}).$$

特别地，(5.59) 成立。

界 (5.60) 可通过对以下界进行插值得到

$$\mathcal{S}^* W(z) = \mathcal{O}(|z|^{\epsilon'}) \text{ in } \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-\frac{5}{2}+\delta}, \mathbb{C}^\mu),$$
$$\mathcal{S}^* W(z) = \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon'}) \text{ in } \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-\frac{3}{2}+\delta}, \mathbb{C}^\mu),$$

这些界分别由 (5.46a) 和 (5.46b) 保证成立。（插值只需要带有 $\epsilon' = 0$ 的界。）

计算 $\mathcal{E}_{-+,j}$，$j = 1, 2$。为了显式计算这些主导项，我们根据零阈值的谱性质区分不同情形。

情形 1。设零是一个共振，但不是 P 的特征值。在这种情况下，$\mu = 1$ 或 2 并且

$$\mathcal{E}_{-+,1} = (\langle U\phi_i, G_1 U\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le \mu}.$$

如果 $\mu = 1$，$\mathcal{E}_{-+,1} = \langle U\phi_1, G_1 U\phi_1\rangle_0$。注意，$G_1 = \mathrm{diag}(G_{1,1}, G_{1,2})$，其中 $G_{1,i}$，$i = 1, 2$，由秩一算子给出

$$G_{1,i} = \mathrm{i}\langle g_i, \cdot\rangle g_i, \tag{5.61}$$

其中，g_i 是在 (5.15a) 中引入的 x_i 中的常函数。利用 (5.15b)，我们得到

$$G_1 U\phi_1 = \mathrm{i}(c_1(\phi_1)g_1, c_2(\phi_1)g_2)$$

and

$$\mathcal{E}_{-+,1} = \mathrm{i}(|c_1(\phi_1)|^2 + |c_2(\phi_1)|^2) = \mathrm{i}|c(\phi_1)|^2 \tag{5.62}$$

其中 $c(\phi_1) = (c_1(\phi_1)\ c_2(\phi_1)) \in \mathbb{C}^2$。如果 $\mu = 2$，类似的计算可得

$$G_1 U\phi_j = \mathrm{i}(c_1(\phi_j)g_1, c_2(\phi_j)g_2); \quad j = 1, 2.$$

因此

$$\langle U\phi_i, G_1 U\phi_j\rangle = \mathrm{i}(\overline{c_1(\phi_i)}c_1(\phi_j) + \overline{c_2(\phi_i)}c_2(\phi_j)).$$

由此可得

$$\mathcal{E}_{-+,1} = (\langle U\phi_i, G_1 U\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le 2} = \mathrm{i}B_0 \tag{5.63}$$

其中 $B_0 = C_0^* C_0$ 和

$$C_0 = \begin{pmatrix} c_1(\phi_1) & c_1(\phi_2) \\ c_2(\phi_1) & c_2(\phi_2) \end{pmatrix} \tag{5.64}$$

综上，在情形 1 中可得

$$\mathcal{E}_{-+,1} = \mathrm{i}B_0 \tag{5.65}$$

其中 B_0 是一个由下式给出的 $\mu\times\mu$ 矩阵

$$B_0 = |c(\phi_1)|^2 \quad \text{if } \mu = 1, \text{ and} \quad B_0 = C_0^* C_0 \quad \text{if } \mu = 2. \tag{5.66}$$

在两种情形下，由定理5.3可知 B_0 均可逆。情形 1 中预解式展开的首项无需用到$\mathcal{E}_{-+,2}$ 的显式公式。

情形 2。假设零是 P的一个特征值，但不是共振。在这种情况下，所有的 ϕ_j 都是特征函数；根据关于共振态刻画的定理 5.3，有 $W_1\mathcal{S} = 0$ ，这意味着

$$\mathcal{E}_{-+,1} = -\mathcal{S}^* W_1 \mathcal{S} = 0. \tag{5.67}$$

Ass设 $\rho_0 > 3$，使得 (5.53b) 和 (5.58) 适用。更明确地说，这意味着

$$\mathcal{E}_{-+,2} = (\langle U\phi_i, (G_2 U + G_0 U_1)\phi_j\rangle)_{i,j=1,\dots,\mu}.$$

此外，由于 $\phi_j \in L^2$、$j = 1$、.....、μ，我们可以像在 [JK] 中那样验证

$$\langle U\phi_i, G_2 U\phi_j\rangle = \langle \phi_i, \phi_j\rangle. \tag{5.68}$$

事实上，写作

$$G_2 = z^{-1}(r_0(z) - G_0 - \sqrt{z}G_1) + \mathcal{O}(|z|^\epsilon)$$

对于 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 且 z 接近零的情形，利用第一预解式方程可得

$$G_2 U\phi_j = -r_0(z)\phi_j + \mathcal{O}(|z|^\epsilon)U\phi_j,$$

and

$$\langle U\phi_i, G_2 U\phi_j\rangle = -\langle r_0(\overline{z})U\phi_i, \phi_j\rangle + \mathcal{O}(|z|^\epsilon).$$

类似地，$r_0(\overline{z})U\phi_i = -\phi_i - \overline{z}r_0(\overline{z})\phi_i$，并令 $z = \mathrm{i}\gamma \to 0$ 在 $\gamma\in\mathbb{R}_+$ 的条件下取极限，确实可得 (5.68)。

显然，$\langle U\phi_i、 G_0U_1\phi_j\rangle = -\langle \phi_i、 U_1\phi_j\rangle$。因此在情形 2 中，有

$$\mathcal{E}_{-+,1} = 0, \quad \mathcal{E}_{-+,2} = (\langle \phi_i, (1-U_1)\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le\mu}. \tag{5.69}$$

根据引理 5.9，$(\langle \phi_i，\ (1-U_1)\phi_j\rangle)_{1\le i,\ j\le\mu}$ 是一个正定矩阵。

情形 3。假设零既是共振又是 P 的特征值。令 κ 表示 P的零共振的重数。那么 $\kappa = 1$ 或 2，且 $\kappa < \mu$。对于 $\kappa+1 \le j \le \mu$，ϕ_j 是一个特征函数，因此

$$W_1\phi_j = G_1 U\phi_j = 0, \quad j = \kappa+1, \cdots, \mu. \tag{5.70}$$

$\mathcal{E}_{-+,\text{情形 1}}$ 中的方法可用于计算。在 $\mathcal{M}_{\mu\times\mu}(\mathbb{C})$ 中有

$$\mathcal{E}_{-+,1} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.71}$$

其中，B_0 是由 (5.66) 给出的 $\kappa\times\kappa$ 矩阵，其中 μ 替换为 κ。

采用情形 2 的方法并注意到 (5.70)，可知在条件 $\rho_0 > 3$ 下

$$\mathcal{E}_{-+,2} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}^{(2)}_{11} & \mathcal{E}^{(2)}_{12} \\ \mathcal{E}^{(2)}_{21} & \mathcal{E}^{(2)}_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.72}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(2)}_{11} &= (\langle U\phi_i, (W_2 - W_1D_0W_1)\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le\kappa}, \\ \mathcal{E}^{(2)}_{12} &= (\langle U\phi_i, W_2\phi_j\rangle)_{1\le i\le\kappa,\ \kappa+1\le j\le\mu}, \\ \mathcal{E}^{(2)}_{21} &= (\langle U\phi_i, W_2\phi_j\rangle)_{\kappa+1\le i\le\mu,\ 1\le j\le\kappa}, \\ \mathcal{E}^{(2)}_{22} &= (\langle \phi_i, (1-U_1)\phi_j\rangle)_{\kappa+1\le i,j\le\mu}. \end{aligned}$$

若 0 是 P 的特征值，则令 Π_0 表示 $\mathcal{H}$ 中到该算子的零特征值空间的谱投影。对于下面的情形 2 和情形 3，需用到量 Π_0。

命题 5.12. 当 $z \to 0$ 和 $z \notin [0,\infty)$ 时，下列渐近行为在$\mathcal{L}(1,-s;1,-s)$ 中对 $s > 1$ 成立，且适用于接近1的情形。

情形 1。假设零是第一类例外点。那么

$$W(z)^{-1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}Q_0 + \mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.73}$$

Here

$$Q_0 = \sum_{j=1}^{\kappa} \langle -U\psi_j, \cdot\rangle\psi_j \tag{5.74}$$

其中 $\psi_j \in \mathcal{K}$ 满足：若 $\kappa = 1$，则 ψ_1 满足归一化条件 *(5.16)*；若 $\kappa = 2$，则 ψ_1 和 ψ_2 满足归一化条件 *(5.17)*。

情形 2 和 3。分别设零是第二类或第三类例外点，并设 $\rho_0 > 3$。则

$$W(z)^{-1} = z^{-1}(\Pi_0(1-U_1)\Pi_0)^{-1}\Pi_0 U + \mathcal{O}(|z|^{-1+\epsilon}). \tag{5.75}$$

证明。情形 *1*。对于任意 $s\in(\frac{1}{2},\ \rho_0-\frac{1}{2})$ 以及某个 $\epsilon>0$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(z)&=D_0+\mathcal{O}(|z|^{\epsilon}),\quad \text{in } \mathcal{L}(1,-s;1,-s),\\ \mathcal{E}_{\pm}(z)&=\mathcal{E}_{\pm,0}+\mathcal{O}(|z|^{\epsilon}),\quad \text{in } \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mu},\mathcal{H}^1_{-s}) \text{ or } \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-s},\mathbb{C}^{\mu}),\\ \mathcal{E}_{-+}(z)&=\mathrm{i}\sqrt{z}B_0+\mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon})\end{aligned}$$

其中 B_0 由（5.66）给出。注意，$\mathcal{E}_{+,\,0}=\mathcal{S}$、$\mathcal{E}_{-,\,0}=\mathcal{S}^*$ 和 $\mathcal{S}\mathcal{S}^*=Q$。由（5.51）可得

$$W(z)^{-1}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\mathcal{S}B_0^{-1}\mathcal{S}^*+\mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.76}$$

若 $\kappa=1$，$B_0=|c(\phi_1)|^2$。令

$$\psi_1=\frac{1}{|c(\phi_1)|}\phi_1. \tag{5.77}$$

则 ψ_1 满足（5.16），并且

$$\mathcal{S}B_0^{-1}\mathcal{S}^*=\frac{1}{|c(\phi_1)|^2}\langle -U\phi_1,\cdot\rangle\phi_1=\langle -U\psi_1,\cdot\rangle\psi_1=Q_0.$$

若 $\kappa=2$，则 $B_0=C_0^*C_0$。取 ψ_1、$\psi_2\in\mathcal{K}$ 使得

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}={}^tC_0^{-1}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}. \tag{5.78}$$

对于 $f\in\mathcal{H}^1_{-s}$，令 $(v_1,v_2)=(\langle -U\phi_1,f\rangle,\langle -U\phi_2,f\rangle)\in\mathbb{C}^2$。有

$$\mathcal{S}B_0^{-1}\mathcal{S}^*f=(\phi_1,\phi_2)C_0^{-1}C_0^{*-1}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=u_1\psi_1+u_2\psi_2$$

其中

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=C_0^{*-1}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle -U\psi_1,f\rangle\\ \langle -U\psi_2,f\rangle\end{pmatrix}.$$

由此可得

$$\mathcal{S}B_0^{-1}\mathcal{S}^*f=\langle -U\psi_1,f\rangle\psi_1+\langle -U\psi_2,f\rangle\psi_2=Q_0f.$$

为证明 ψ_1 和 ψ_2 满足归一化条件 (5.17)，令 $C_0=(c_{ij})_{1\le i,\ j\le 2}$，${}^tC_0^{-1}=(d_{ij})_{1\le i,\ j\le 2}$ 以及 $\psi_k=(\psi_{k1},\psi_{k2})$。则

$$c_j(\psi_k)=\langle g_j,U_{j1}\psi_{k1}+U_{j2}\psi_{k2}\rangle=\sum_{m=1}^{2}d_{km}c_{jm}=\delta_{jk};\quad j,k=1,2.$$

因此，ψ_1 和 ψ_2 是满足归一化条件 (5.17) 的共振态，且 (5.73) 得证。

情形 *2*。根据 (5.69) 以及引理5.9和5.11

$$\mathcal{E}_{-+}(z)=zM_1+\mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}),$$

其中矩阵 $M_1=(\langle\phi_i,(1-U_1)\phi_j\rangle)_{1\le i,\ j\le\mu}$ 是正定的。由（5.51）可推出

$$W(z)^{-1}=-z^{-1}\mathcal{S}M_1^{-1}\mathcal{S}^*+\mathcal{O}(|z|^{-1+\epsilon})).$$

设 $\mathcal{S}^{\#}$ 是相对于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 上的 $\mathcal{H}$ 的标量积的 $\mathcal{S}$ 的伴随算子。则$\mathcal{S}^{*}=-\mathcal{S}^{\#}U$和 $M_1=\mathcal{S}^{\#}(1-U_1)\mathcal{S}$。将 $\mathcal{H}$ 投影到 P 的零特征空间上的正交投影 Π_0 可以用 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}^{\#}$ 表示为

$$\Pi_0=\mathcal{S}(\mathcal{S}\mathcal{S}^{\#})^{-1}\mathcal{S}^{\#} \tag{5.79a}$$

并且满足

$$\Pi_0\mathcal{S}=\mathcal{S},\quad \mathcal{S}^{\#}\Pi_0=\mathcal{S}^{\#} \tag{5.79b}$$

令 $T=\mathcal{S}(\mathcal{S}^{\#}(1-U_1)\mathcal{S})^{-1}\mathcal{S}^{\#}$，利用 (5.79a) 和 (5.79b) 计算得

$$\begin{aligned}-\mathcal{S}M_1^{-1}\mathcal{S}^{*}&=TU,\\ (\Pi_0(1-U_1)\Pi_0)T&=\mathcal{S}(\mathcal{S}\mathcal{S}^{\#})^{-1}\mathcal{S}^{\#}=\Pi_0,\\ T(\Pi_0(1-U_1)\Pi_0)&=\mathcal{S}(\mathcal{S}\mathcal{S}^{\#})^{-1}\mathcal{S}^{\#}=\Pi_0.\end{aligned}$$

这得到恒等式 $T=(\Pi_0(1-U_1)\Pi_0)^{-1}\Pi_0$，从而有

$$-\mathcal{S}M_1^{-1}\mathcal{S}^{*}=TU=(\Pi_0(1-U_1)\Pi_0)^{-1}\Pi_0U,$$

这就证明了 (5.75)

情形 *3*。我们再次使用 (5.53b)。我们希望证明 $\mathcal{E}_{-+}(z)^{-1}$ 存在，并计算其在 $z\to 0$ 和 $z\notin[0,\infty)$ 下的首项。为此，令 $M(z)=\sqrt{z}\mathcal{E}_{-+,\,1}+z\mathcal{E}_{-+,\,2}\in\mathcal{M}_{\mu\times\mu}(\mathbb{C})$。将 $M(z)$ 分解为块:

$$M(z)=\begin{pmatrix}\sqrt{z}M_{11}(z) & zM_{12}\\ zM_{21} & zM_{22}\end{pmatrix}$$

with

$$\begin{aligned}M_{11}(z)&=\mathrm{i}B_0+\sqrt{z}\mathcal{E}_{11}^{(2)}\\ M_{ij}&=\mathcal{E}_{ij}^{(2)}\quad \text{for } (ij)\neq(11).\end{aligned}$$

M_{22} 由引理 5.9 可知是正定的。 $M(z)$ 的对角部分是可逆的，并且有

$$M(z)\mathrm{diag}((\sqrt{z}M_{11}(z))^{-1},(zM_{22})^{-1})=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}$$

其中

$$a=M_{12}M_{22}^{-1},\quad b=b(z)=\sqrt{z}M_{21}M_{11}(z)^{-1}.$$

由于 $b=\mathcal{O}(\sqrt{|z|})$，当 $z\notin[0,\infty)$ 和 $|z|$ 足够小时，矩阵 $\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}$ 是可逆的，初等计算可得

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(1-ab)^{-1} & -a(1-ba)^{-1}\\ -b(1-ab)^{-1} & (1-ba)^{-1}\end{pmatrix}.$$

因此，对于 $z\notin[0,\infty)$ 且 $|z|$较小时，我们得到 $M(z)$ 的逆算子公式，并由此可知

$$zM(z)^{-1}=\begin{pmatrix}\sqrt{z}M_{11}(z)^{-1} & -\sqrt{z}M_{11}(z)^{-1}M_{12}M_{22}^{-1}\\ -\sqrt{z}M_{22}^{-1}M_{21}M_{11}(z)^{-1} & M_{22}^{-1}\end{pmatrix}+\mathcal{O}(\sqrt{|z|}).$$

回顾我们在 $\mathcal{K}$ 中对基 $\{\phi_1,\dots,\phi_\mu\}$ 的选择，映射 $\mathcal{S}$ 自然分解为 $\mathcal{S}=\mathcal{S}_r\oplus\mathcal{S}_e$：$\mathbb{C}^\kappa\oplus\mathbb{C}^{\mu-\kappa}\to\mathcal{H}^1_{-s}$，其中 $\mathcal{S}_r$ ($\mathcal{S}_e$，分别) 的值域包含在 P 的零共振空间（分别为零特征值空间）中。类似地，分解$\mathcal{S}^*=\mathcal{S}_r^*\oplus\mathcal{S}_e^*$。于是，

$$\mathcal{S}_r\mathcal{S}_r^*=Q_r,\ \mathcal{S}_r^*\mathcal{S}_r=I_\kappa,\quad \mathcal{S}_e\mathcal{S}_e^*=Q_e,\ \mathcal{S}_e^*\mathcal{S}_e=I_{\mu-\kappa},$$

其中 $Q_r=\sum_{j=1}^{\kappa}\langle -U\phi_j,\cdot\rangle\phi_j$ 和 $Q_e=\sum_{j=\kappa+1}^{\mu}\langle -U\phi_j,\cdot\rangle\phi_j$。由于 $\mathcal{E}_{-+}(z=M(z)+o(|z|)$，我们得到

$$-\mathcal{E}_+(z)\mathcal{E}_{-+}(z)^{-1}\mathcal{E}_-(z)=\frac{1}{z}\big(-\mathcal{S}_eM_{22}^{-1}\mathcal{S}_e^*+\mathcal{O}(|z|^\epsilon)\big).$$

由于 $M_{22}=(\langle(1-U_1)\phi_i,\phi_j\rangle)_{\kappa+1\le i,\ j\le\mu}$，我们可以像情形 2 中那样验证

$$-\mathcal{S}_eM_{22}^{-1}\mathcal{S}_e^*=(\Pi_0(1-U_1)\Pi_0)^{-1}\Pi_0U.$$

由此，情形 3 中的 (5.75) 也得证。 □

回顾一下

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z)^{-1}=-W(z)^{-1}(P_0-z)^{-1},\ \text{and}\ G_0U=-1\ \text{on}\ \mathcal{K}. \tag{5.80}$$

以下结果可由命题 5.12 立即推出。

命题 5.13。对于任意 $s>1$ 和 $z\notin[0,\infty)$，当 $|z|$ 足够小时，$\mathcal{L}(-1,\ s;\ 1,\ -s)$ 中的以下渐近行为成立。

情形 1。设零是第一类例外点。令 κ 为零共振的重数。若 $\kappa=1$，令 ψ_1 为根据 (5.16) 归一化的共振态；若 $\kappa=2$，令 ψ_1 和 ψ_2 为根据 (5.17) 归一化的共振态。则对于某个 $\epsilon>0$

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z)^{-1}=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{\kappa}\langle\psi_j,\cdot\rangle\psi_j+\mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.81a}$$

情形 2 和 3。分别设零是第二类或第三类例外点，并设 $\rho_0>3$。则对于某个 $\epsilon>0$

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z)^{-1}=z^{-1}(\Pi_0(1-U_1)\Pi_0)^{-1}\Pi_0+\mathcal{O}(|z|^{-1+\epsilon}). \tag{5.81b}$$

证明。我们应用命题 5.12、(5.80) 以及首阶展开

$$\forall s>1:\quad (P_0-z)^{-1}=G_0+\mathcal{O}(|z|^\epsilon)\in\mathcal{L}(-1,s;1,-s). \tag{5.82}$$

□

现在我们能够给出 N 体算子 H 在其第一阈值 $\lambda_0=\Sigma_2$ 附近的预解式的渐近行为。令 $R(\lambda_0+z)=(H-\lambda_0-z)^{-1}$。由 (5.2) 可得，

$$R(\lambda_0+z)=R'(\lambda_0+z)-(1-R'(\lambda_0+z)H)SE_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z)^{-1}S^*(1-HR'(\lambda_0+z)). \tag{5.83}$$

这里， $R'(\lambda_0+z)$ 是约化预解式，在条件 (5.7a) 下，它在 z 的零点邻域内是全纯的。引理 5.2 的证明表明，当且仅当 $u=(1-R'(\lambda_0)H)S\psi$ 是 λ_0-共振态时， ψ 是 P 的零共振态；并且可由 u 通过 $\phi=T^*u$ 恢复 ϕ，其中 $T^*=(S^*S)^{-1}S^*$。

若 λ_0 是 H 的共振，其重数记为 κ。若 λ_0 是 H 的特征值，则 H 在相应特征子空间上的谱投影记为 Π_H。定义

$$S_If=I_1\varphi_1f_1+I_2\varphi_2f_2,\quad f=(f_1,f_2)\in\mathcal{H}^1_{-\infty}.$$

定理 5.14. 假设 (5.7a) 和 (5.7b)成立。对于 $R(\lambda_0+z)$，作为从 H_s^{-1}到 H^1_{-s}的算子，当 $z\to 0$ 且 $z\notin[0,\infty)$时，以及当 $\epsilon=\epsilon(s)>0$时，以下渐近行为成立。

情形 0。设 λ_0 是 H的正则点。则有

$$R(\lambda_0+z)=R'(\lambda_0)+(S-R'(\lambda_0)S_I)D_0G_0(S^*-S_I^*R'(\lambda_0))+\mathcal{O}(|z|^\epsilon). \tag{5.84a}$$

情形 1。设 λ_0 是 H的第一类例外点。则

$$R(\lambda_0+z)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{\kappa}\langle u_j,\cdot\rangle u_j+\mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}), \tag{5.84b}$$

其中 $u_j=S\psi_j-R'(\lambda_0)S_I\psi_j$， ψ_j 由命题 *5.13* 给出。量 u_j 是 H 的共振态，分别满足当 $\kappa=1$ 和 $\kappa=2$时的 (5.18) 和 (5.19) 。

情形 2 和 3。分别假设 λ_0 是第二类或第三类例外点，并假设 $\rho_0>3$。那么

$$R(\lambda_0+z)=-z^{-1}\Pi_H+\mathcal{O}(|z|^{-1+\epsilon}). \tag{5.84c}$$

证明。<u>情形 *0*</u>。有

$$(1-R'(\lambda_0+z)H)S=S-R'(\lambda_0)S_I+\mathcal{O}(|z|)=E_+(\lambda_0)+\mathcal{O}(|z|),$$

在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-s},H^1_{-s})$ 中对 $0\le s\le\frac{3}{2}$ 成立。同样， $S^*(1-HR'(\lambda_0+z))=S^*-S_I^*R'(\lambda_0)+\mathcal{O}(z)$ 在 $\mathcal{L}(H_s^{-1},\mathcal{H}_s^{-1})$ 中成立。于是由 (5.80)、(5.49a)、(5.82) 和 (5.83) 可得

$$R(\lambda_0+z)=R'(\lambda_0)+(S-R'(\lambda_0)S_I)D_0G_0(S^*-S_I^*R'(\lambda_0))+\mathcal{O}(|z|^\epsilon) \tag{5.85}$$

在 $\mathcal{L}(-1,s;1,-s)$ 中对 $s>1$ 成立，从而证明 (5.84a)。

<u>情形 *1*</u>. 由 (5.83) 和命题 5.13 可得

$$R(\lambda_0+z)=-E_+(\lambda_0)E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z)^{-1}E_-(\lambda_0)+\mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon})$$

对于 $s>1$，有 $\mathcal{L}(-1,s;1,-s)$。令 $u_j=E_+(\lambda_0)\psi_j$。由于 $E_-(\lambda_0)^*=E_+(\lambda_0)$，由 (5.81a) 可知

$$E_+(\lambda_0)E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z)^{-1}E_-(\lambda_0)=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{\kappa}\langle u_j,\cdot\rangle u_j+(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

证明（5.84b）。

情形2和3。我们可以应用（5.81b）和（5.83）得到

$$R(\lambda_0+z)=-z^{-1}B+\mathcal{O}(|z|^{-1+\epsilon}),$$

其中，根据对应于特征值零的 P 的谱投影 Π_0

$$B=E_+(\lambda_0)(\Pi_0(1-U_1)^{-1}\Pi_0)^{-1}\Pi_0E_-(\lambda_0).$$

还需验证 B 等于谱投影 Π_H，参见 [Wa2]。引入 $\tau=E_+$（λ_0）Π_0 后可得 $\tau^*=\Pi_0E_-$（λ_0），利用性质R'（λ_0）$S=S^*R'$（λ_0）$=0$ 和（5.40），我们计算得到

$$\tau^*\tau=\Pi_0(S^*(1-HR'(\lambda_0))(1-R'(\lambda_0)H)S\Pi_0=\Pi_0(1-U_1)\Pi_0.$$

因此，B 可以写成

$$B=\tau(\tau^*\tau)^{-1}\tau^*.$$

由此可知，B是一个正交投影，其值域为 $B\subset$ran τ，核为 $B=$ker τ^*，因此实际上 $B=$ ran τ。由于 τran λ_0等于 H的特征值对应的特征子空间，我们得出 $B=\Pi_H$，正如所要求的那样。□

对于 $\rho_0=3$ 且 λ_0 是 H 的一个特征值的情形，定理 5.14 中没有提供任何信息。此外，我们只提取出了首项渐近行为。假设 H 在 λ_0 处的所有特征函数都具有某种（弱）幂衰减，我们也可以针对该情形得到一个预解式展开，而且无需额外条件，该展开将达到二阶，见下文陈述的定理 5.16。

备注 5.15。对于可能的高阶展开，需要条件 (5.7c)，而且该条件会带来限制。例如，对于库仑系统（其中 $\rho=1$），在某些情形下 (5.7b) 可能在某个较大的 ρ_0 下成立，但此时条件 (5.7c) 将变为 $\rho_0\leq 4$，而我们看不出如何避免这一限制。更准确地说，例如，对于这类系统，我们无法将 (5.6) 改进为对任意 $\rho_0>4$ 均成立（即使仅带有 $s=\rho_0/2$ 也不行）。其根源在于，对于 $\rho=1$，我们不知道如何将矩阵 $K(\lambda_0)$ 的对角部分估计得比 $\mathcal{O}(\langle x_j\rangle^{-4})$ 更好。之所以不研究高阶预解式展开，主要是因为相关条件会过强，以至于对于库仑系统而言不再具有研究意义。

定理 5.16。假设 (5.7a)、(5.7b) 成立，且 $\rho_0=3$。设 λ_0 是H 的特征值，并且对某个 $t>3/2$，有 $\operatorname{ran}\Pi_H\subset L^2_t$。那么，以下渐近行为对

$R(\lambda_0+z)$ 作为从 H_s^{-1}到 H^1_{-s}, $s>1$的算子，对于 $z\to 0$ 和 $z\notin[0,\infty)$，以及$\epsilon=\epsilon(s)$ >0 成立。

$$R(\lambda_0+z)=-z^{-1}\Pi_H+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{\kappa}\langle u_j,\cdot\rangle u_j+\mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.86}$$

这里，右侧的第二项仅在 $\kappa\geq 1$ 时出现，也就是说，仅当 λ_0 是 H 的共振时才出现；在这种情况下，态 u_j 构成 H 的共振态基（回顾一下，或者 $\kappa=1$，或者 $\kappa=2$）。另一方面，如果 λ_0 不是 H 的共振，那么 $R(\lambda_0+z)+z^{-1}\Pi_H$ 在 $z\to 0$ 时具有范数意义下的极限。

通过仿照定理 5.14 中关于情形 1 的论断的证明，并将 H 替换为 H_σ，可以证明定理 5.16：$=H-\sigma\Pi_H$, $\sigma>0$。注意，λ_0 不是 H_σ 的特征值。令 $R_\sigma(\zeta)=(H_\sigma-\zeta)^{-1}$，我们分解

$$R(\lambda_0+z)=R_\sigma(\lambda_0+z)-z^{-1}\Pi_H+(z+\sigma)^{-1}\Pi_H, \tag{5.87}$$

并得出结论：只需证明对于固定的小 $\sigma>0$

$$R_\sigma(\lambda_0+z)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{\kappa}\langle u_j,\cdot\rangle u_j+\mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.88}$$

这基本上可以像之前一样证明，因为（5.7a）中的最后一个假设在用 H'_σ 替换 H' 后仍然成立：对于 $\sigma>0$ 足够小，有$=\Pi' H_\sigma\Pi'$（依据一个扰动论证）。我们基本上可以仿照之前的步骤，不过现在是针对 H_σ 而不是 H，参见注 3.21 2)，这一点对于下一节中的类似构造尤其重要。不过，我们需要论证（5.88）中的共振态 u_j 虽然先验地是 H_σ 的共振态，但实际上也是 H 的共振态。为此，只需进一步注意到 $\Pi_H u_j=0$，这源于以下事实：$-\sigma\Pi_H u_j=\Pi_H(H_\sigma-\lambda_0)u_j=0$。若 κ_σ 表示 H_σ的共振态空间的维数，则我们得到 $\kappa_\sigma\leq\kappa$。反向结论 $\kappa_\sigma\geq\kappa$ 可通过如下方式得到：对 H 的任意给定共振态基进行修改，投影去除其在 ran Π_H 中的相应分量，从而得到 H_σ 的共振态基。因此，我们在（5.88）中使用记号 κ，而不是最初正确的量 κ_σ，是有充分理由的。

另一条评论涉及 (5.8)。所添加的项 $-\sigma\Pi_H$ 不是局部的；如果我们用记号 U_σ 和 P_σ 表示相应的约化量，那么，除非对于某个 $t>2$有 ran $\Pi_H\subset L^2_t$，否则 (5.8) 的相应版本不会以同样的方式成立。（但我们只对某个 $t>3/2$作此假设，因此，如果 $t\in(3/2,2]$ 则需要采用不同的论证。）不过，对于任意$v=(v_1,v_2)$ $\in\mathcal{H}^{1\ (-1/2)^-}$ 和 $P_\sigma v=0$，我们有以下版本的 (5.9)：

$$v=0\Longleftrightarrow\langle 1,U_{\sigma,j1}v_1+U_{\sigma,j2}v_2\rangle=0;\quad j=1,2. \tag{5.89}$$

这是因为注意到，如果右侧的泛函在 v上消失，那么(5.8)的证明表明 $v\in\mathcal{H}^{1\ (-1/2)^+}$。相应的 $u\in H^{1\ (-1/2)^+}$（由逆特征变换给出），而这不可能成立，除非 $u\in L^2$，因为根据上述讨论 $(H-\lambda_0)u=(H_\sigma-\lambda_0)u=0$，因此利用定理 4.7，我们可以得出 $u\in L^2$。由于 λ_0 不是 H_σ 的特征值，因此可知 $u=0$，进而 $v=0$。有了(5.89)，我们可以仿照定理 5.14 中关于情形 1的论断的证明，将 H 替换为 $H_\sigma=H-\sigma\Pi_H$，从而得到(5.88)。

注记5.17。 1）除其他条件外，我们使用了条件 $\lambda_0 = \Sigma_2 \notin \sigma_{\rm pp}$（$H'$）和 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$。情形 $\lambda_0 \in \sigma_{\rm pp}$（$H'$）可以按照 [Wa2] 处理，其中$\Sigma_2$ 是一个非重合双簇阈值。定理 5.14中的陈述仍然成立，但其证明需要更复杂的 Grushin 约化，参见第 2.4 节和第 4.3 节。如果 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \{0\}$，仍然可以将 H 在 λ_0 处的谱分析约化为一个单体问题，参见第 2.5 节和第 4.3 节。(5.7a)和(5.7b)中的条件 $\dim \mathrm{X}_j = 3$ 和 $\rho_0 \geq 3$ ，以及(5.7c)，简化了阈值 λ_0 处的预解式展开，并且与第 1.2 节和第 1.3 节中的物理模型相契合。

2) 定理 5.16 的最后一项断言只需要对某个 $t > 1$ 有 $\operatorname{ran} \Pi_H \subset L^2_t$ （而非定理 5.16 所要求的、对某个 $t > 3/2$ 满足这种衰减），这是因为在给定假设下， λ_0 既不是 H_σ 的特征值，也不是共振。

3) 第4章研究了 $\dim \mathrm{X}_j \neq 3$ 或有效势缓慢衰减或含有临界衰减部分的情形，并得到了 H 的一些阈值谱性质。对于这些情形，可以尝试结合已有的单体问题结果和第2章中的约化，来建立 H 在 λ_0 附近的预解式渐近行为。尽管我们将这一问题部分留作开放问题，供感兴趣的读者探究（不过请参见第 5.3 节），但要指出的是，与小节 4.1.2、4.1.3、4.2.2 和 4.2.3 对应的有效缓慢衰减势情形相对容易处理，因为阈值不是共振，且特征函数（如果存在）具有任意阶多项式衰减（参见物理模型背景下的定理 4.17 1)）。我们在第6章利用了这一简便性，参见注 6.1。这里讨论的是满足小节 4.1.2、4.1.3、4.2.2 和 4.2.3 条件的潜在更高双簇阈值情形。不过，我们确实处理了有效势含有临界衰减部分的一个特殊情形，参见小节 6.3.2。利用本章的理论，我们在第6.3.3和6.3.4小节中处理了物理模型的快速衰减情形，其中潜在的更高双簇阈值处会出现共振。

5.1.3 更高双簇阈值附近的预解式渐近

假设条件 (5.21) 和 (5.27a)–(5.27c) 与第5.1.1.2小节中的相同。我们将默认使用该小节中的记号。设 $P(z) = -E_{\mathcal{H}}(\lambda_0 + z)$ 对于 z 靠近零且 $\operatorname{Im} z \neq 0$ 时成立。则 $P(z)$ 可写为

$$P(z) = P_0 + U(z) - z, \tag{5.90}$$

其中 $P_0 = -\Delta_{x_{a_0}} \mathbf{1}_m$ 和 $U(z) = S^* I_0 S - S^* I_0 R'(\lambda_0 + z) I_0 S$。这里， $\mathbf{1}_m$ 表示 $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ 中的单位矩阵。根据定理3.18，对于 $\pm\operatorname{Im} z > 0$ 和 $j \in \mathbb{N}_0$ ，有 $j < \rho_1$

$$U(z) = U^{\pm} + zU_1^{\pm} + \cdots + z^j U_j^{\pm} + \mathcal{O}(|z|^{j+\epsilon}), \tag{5.91}$$

对于任意 $s < \rho_1 - j$ 以及某个取决于 s和 ρ的 $\epsilon > 0$，它们是从 $\mathcal{H}^1_{-s}$ 到 $\mathcal{H}^{-1}_s$的有界算子。此外

$$U^{\pm} = S^* I_0 S - S^* I_0 R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0) I_0 S,$$
$$U_j^{\pm} = -S^* I_0 (R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0))^{j+1} I_0 S; \quad j \geq 1.$$

相关情形的详细说明见引理5.19的证明（我们只需对 $j = 0$ 和 $j = 1$使用 (5.91)）。

回顾一下，对于 $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$，有 $\mathcal{K} = \ker_{\mathcal{H}^1_{-s}}(\mathbb{1} + G_0 U^{\pm})$，但该空间也与此类 s 以及符号 $\pm$ 无关。

引理 5.18。 定义在 $\mathcal{K} \cap \mathcal{H}$ 上的二次型 $q(\cdot) = \langle (1 - U_1^{\pm})\cdot, \cdot \rangle_0$ 是正定的，并且与符号 $\pm$ 无关。

证明。对于 $v \in \mathcal{K} \cap \mathcal{H}$，有 $\Pi' I_0 S v \in \mathcal{H}^{-1}_{(3/2)^+}$，因此我们可以得出 $R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)^2 I_0 S v \in \mathcal{H}^1_{(-3/2)^-}$。因此 q 是良定义的。现在，$R'(\lambda_0 + \mathrm{i}0) I_0 S v = R'(\lambda_0 - \mathrm{i}0) I_0 S v$ 以及 $R'(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0) I_0 S v \in L^2_{(\mathrm{X})}$（参见定理 4.15、定理 5.6 (a)，以及定理 5.6 的证明中基于微局部预解式估计的部分）。利用这些事实，我们可以计算

$$\begin{aligned} q(v) &= \langle (1 + S^* I_0 R' \lambda_0 + \mathrm{i}0)^2 I_0 S v, v \rangle \\ &= \|v\|^2 + \langle R'(\lambda_0 + \mathrm{i}0) I_0 S v, R'(\lambda_0 - \mathrm{i}0) I_0 S v \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|R'(\lambda_0 + \mathrm{i}0) I_0 S v\|^2 \geq \|v\|^2, \end{aligned}$$

证明 $q(\cdot)$ 在 $\mathcal{K} \cap \mathcal{H}$ 上是正定的。 □

我们将研究预解式 $R(\lambda_0 + z) = (H - \lambda_0 - z)^{-1}$ 当$z \to 0$ 且 $\pm \mathrm{Im}\ z > 0$ 时的渐近行为。令

$$r_0(z) = (P_0 - z)^{-1}; \quad z \notin [0, \infty). \tag{5.92}$$

为了得到 $P(z)^{-1}$ 在 $z \notin \mathbb{R}$ 且 z 趋近于零时的渐近展开，我们与第5.1.2节一样，使用预解式方程

$$P(z)^{-1} = (1 + r_0(z) U(z))^{-1} r_0(z) \tag{5.93}$$

并应用 Grushin方法研究 $(1 + r_0(z)U(z))^{-1}$。为简便起见，我们主要只考虑 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 的情形。

设 $N \geq 1$ 和 $s > N + \frac{1}{2}$。与第5.1.2节研究的（部分为标量的）情形类似，自由预解式 $r_0(z)$ 可在 $\mathcal{L}(-1, s; 1, -s)$ 中展开为

$$r_0(z) = G_0 + \sqrt{z} G_1 + \cdots + z^{\frac{N}{2}} G_N + \mathcal{O}(|z|^{\frac{N}{2} + \epsilon}), \tag{5.94}$$

对于某个取决于 N 和 s 的 $\epsilon > 0$，其中 G_j 是 $m \times m$ 对角矩阵（其元素为算子值），其积分核由下式给出

$$\tfrac{\mathrm{i}^j}{4\pi} |x_{a_0} - y_{a_0}|^{j-1} \mathbf{1}_m; \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{5.95}$$

除高阶展开（5.94）外，我们还记录零阶展开（5.45）（解释方式作显然的改变）。

由于 $U^+ = U^-$在 $\mathcal{K}$上，因此 $\langle -U^+\cdot,\cdot\rangle$是 $\mathcal{K}$上的二次型。由恒等式 $\langle -U^+\cdot,\cdot\rangle = \langle P_0\cdot,\cdot\rangle$以及分部积分可知，$\langle -U^+\cdot,\cdot\rangle$是正定二次型。因此，存在 $\mathcal{K}$ 的一个基 $\{\phi_1,\dots,\phi_\mu\}$，它关于 $\langle -U^+\cdot,\cdot\rangle$是正交归一的。如果零是 P^+的共振，我们记其重数为κ。我们约定，对于 $1 \le j \le \kappa$，函数 ϕ_j 是 P^+的共振态，而其他 ϕ_j则是 P^+的特征函数。

采用上述记号，我们可以应用 Grushin方法，得到 $W(z)^{-1}$在 $z \to 0$、$\operatorname{Im} z > 0$ 时的渐近展开，其中

$$W(z) := 1 + r_0(z)U(z).$$

$W(z)$的首阶展开为

$$W(z) = 1 + G_0U^+ + \mathcal{O}(|z|^\epsilon) \in \mathcal{L}(1,-s';1,-s), \tag{5.96}$$

当 $\operatorname{Im} z > 0$ 且 $\frac{1}{2} < s$、$s' < \rho_1$，并且对于某个 $\epsilon = \epsilon(s,s') > 0$ 时成立。特别地，在最小条件 $\rho = 1$ 和 $\rho_1 = \frac{3}{2}$ 下该结论成立，见下文引理 5.19 (a) 及其概述性证明。

$W(z)$的高阶展开需要比 $\rho_1 = \frac{3}{2}$ 更强的条件，因此也需要 $\rho > 1$。在此条件下，我们可以将定理3.18应用于约化预解式的更高次幂，从而得到 (5.96) 的以下延拓。断言 (b) 和 (c) 显然排除了有趣的情形 $\rho = 1$。尽管如此，稍后我们将证明，当 $W(z)\phi$ 作用于向量 $\phi \in \mathcal{K}$时，即使 $\rho = 1$，仍可得到其高阶展开，见引理5.21的证明。事实上，当 $\rho = 1$时，这将给出第一类例外情形下的非平凡预解式展开。

引理5.19。 设(5.21) 和(5.27a)–(5.27c)成立。用以下量表示

$$W_0 = 1 + G_0U^+, \quad W_1 = G_1U^+, \quad W_2 = G_2U^+ + G_0U_1^+, \tag{5.97}$$

以下展开式在 z （满足$\operatorname{Im} z > 0$）中对某个 $\epsilon = \epsilon(s,s') > 0$成立。

(a) 对于 $s, s' \in (\frac{1}{2}, \rho_1)$，$s \ge s'$，

$$W(z) = W_0 + \mathcal{O}(|z|^\epsilon) \in \mathcal{L}(1,-s';1,-s). \tag{5.98a}$$

(b) 若 $\rho_1 > \frac{3}{2}$，则对于 $s, s' \in (\frac{3}{2}, \rho_1)$，满足 $s \ge s'$，

$$W(z) = W_0 + \sqrt{z}W_1 + \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \in \mathcal{L}(1,-s';1,-s). \tag{5.98b}$$

(c) 若$\rho_1 > \frac{5}{2}$，则对于 $s \in (\frac{5}{2}, \rho_1)$，$s \ge s'$和 $s' \in (\frac{3}{2}, \rho_1 - 1)$

$$W(z) = W_0 + \sqrt{z}W_1 + zW_2 + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}) \in \mathcal{L}(1,-s';1,-s). \tag{5.98c}$$

证明。 根据定理3.18，对于任意 $j \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\|\langle x\rangle^{\frac{1}{2}-j-\epsilon} R'(\lambda_0 + z)^j \langle x\rangle^{\frac{1}{2}-j-\epsilon}\| \le C,$$

因此

$$\|\langle x\rangle^{-\frac{3}{2}-\epsilon}\big(R'(\lambda_0 + z) - R'(\lambda_0 + \mathrm{i}0)\big)\langle x\rangle^{-\frac{3}{2}-\epsilon}\| \le C|z|$$

当 z 在零附近且 $\operatorname{Im} z > 0$ 时。利用复插值，我们进而得到 $0 < r' < r \leq 1$ 的约化预解式满足以下赫尔德估计，

$$\|\langle x\rangle^{-\frac{1}{2}-r}\big(R'(\lambda_0+z)-R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)\big)\langle x\rangle^{-\frac{1}{2}-r}\| \leq C_{r,r'}|z|^{r'}, \quad \operatorname{Im} z>0. \tag{5.99a}$$

特别地，这个界给出了带有 $j=0$ 的展开式 (5.91)。

通过类似的论证可知，对于 $0 < r' < r \leq 1$ 且 $\operatorname{Im} z > 0$,

$$\|\langle x\rangle^{-\frac{3}{2}-r}\big(R'(\lambda_0+z)-R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)-zR'(\lambda_0+\mathrm{i}0)^2\big)\langle x\rangle^{-\frac{3}{2}-r}\| \leq C_{r,r'}|z|^{1+r'}, \tag{5.99b}$$

从而得到带有 $j=1$ 的展开式 (5.91)。

我们只证明 (c)，因为 (5.98a) 和 (5.98c) 的证明模式相同。设 $\rho_1 > \frac{5}{2}$。应用 (5.94)（其中 $N=2$），我们首先得到

$$W(z) = 1 + (G_0 + \sqrt{z}G_1 + zG_2)U(z) + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon})$$

在 $\mathcal{L}(1,-s';1,-s)$ 中，其中 $s, s' \in (\frac{5}{2}, \rho_1)$。注意，此处 $U(z) \in \mathcal{L}(1,-s';-1,s')$ 具有一致的界，参见定理 3.13 和 3.18。再次利用 G_2 的有界性以及带有 $j=0$ 的展开式 (5.91)，我们得到

$$G_2U(z) = G_2U^+ + \mathcal{O}(|z|^{\epsilon}) \text{ in } \mathcal{L}(1,-s';1,-s).$$

由 (5.99a) 可知，对于 $s \in (\frac{5}{2}, \rho_1)$ 和 $s' \in (2, \rho_1 - \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned}
&\|\langle x_{a_0}\rangle^{-s}G_1(U(z)-U^+)\langle x_{a_0}\rangle^{s'}\| \\
&\leq C\|\langle x_{a_0}\rangle^{s-1}S^*I_0(R'(\lambda_0+z)-R'(\lambda_0+\mathrm{i}0))I_0S\langle x_{a_0}\rangle^{s'}\| \\
&\leq C'\|\langle x\rangle^{-\rho_1-\frac{1}{2}+s-1}(R'(\lambda_0+z)-R'(\lambda_0+\mathrm{i}0))\langle x\rangle^{-\rho_1-\frac{1}{2}+s'}\| \\
&\leq C''|z|^{\frac{1}{2}+\delta};
\end{aligned} \tag{5.100}$$

这对某个 $\delta > 0$ 成立。

还需证明

$$G_0U(z) = G_0U^+ + zG_0U_1^+ + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}) \text{ in } \mathcal{L}(1,-s';1,-s).$$

对于 $s \in (\frac{5}{2}, \rho_1)$ 和 $s' \in (\frac{3}{2}, \rho_1 - 1)$，该展开由 (5.91) 得出，其中 $j=1$（由 (5.99b) 可证）。因此得到 (c)。 □

定义 $\mathcal{S}\colon \mathbb{C}^\mu \to \mathcal{H}^1_{-s}$, $s \in (-\frac{1}{2}, \rho_1)$ 为

$$\mathcal{S}c = \sum_{j=1}^{\mu} c_j\phi_j, \quad c=(c_1,\dots,c_\mu) \in \mathbb{C}^\mu,$$

并定义 $\mathcal{S}^*\colon \mathcal{H}^1_{-s} \to \mathbb{C}^\mu$ 为

$$\mathcal{S}^*f = (\langle -U^+\phi_1, f\rangle \dots, \langle -U^+\phi_\mu, f\rangle), \quad f \in \mathcal{H}^1_{-s}.$$

令 $Q : \mathcal{H}^1_{-s} \to \mathcal{H}^1_{-s}$ 为给定对象

$$Qf = \sum_{j=1}^{\mu} \langle -U^+\phi_j, f\rangle\phi_j.$$

随后可以证明（参见第5.1.2节），Q是从 $\mathcal{H}^1_{-s}$ 到 $\mathcal{K}$的投影，$Q'=1-Q$ 是从 $\mathcal{H}^1_{-s}$ 到 ran$(1+G_0U^+)$的投影，并且

$$D_0^+=(Q'(1+G_0U^+)Q')^{-1}Q' \tag{5.101}$$

在 $\mathcal{H}^1_{-s}$、 $s\in(\,_12$、 $\rho_1)$ 上存在且连续。通过扰动论证可知，当 $|z|$ 足够小时，Im $z>0$、 $Q'W(z)Q'$ 在 ran$(1+G_0U^+)$ 上可逆，且其逆算子连续。令

$$D(z)=(Q'W(z)Q')^{-1}Q'.$$

然后，根据引理5.19中关于 ρ_1 的不同条件，在 $\mathcal{L}(1、-s;\ 1、-s)$ 中有以下展开式：

$$D(z)=D_0+\mathcal{O}(|z|^{\epsilon}),\ \text{if } s\in(\tfrac{1}{2},\rho_1). \tag{5.102a}$$
$$D(z)=D_0+\sqrt{z}D_1+\mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon_1}),\ \text{if } \rho_1>\tfrac{3}{2} \text{ and } s\in(\tfrac{3}{2},\rho_1). \tag{5.102b}$$

Here

$$D_0=D_0^+ \text{ and } D_1=-D_0W_1D_0.$$

利用算子 $D(z)$，我们可以建立以下关于 $W(z)^{-1}$（Im $z>0$）的表示公式：

$$W(z)^{-1}=\mathcal{E}(z)-\mathcal{E}_+(z)\mathcal{E}_{-+}(z)^{-1}\mathcal{E}_-(z), \tag{5.103}$$

其中

$$\mathcal{E}(z)=D(z),\quad \mathcal{E}_+(z)=\mathcal{S}-D(z)W(z)\mathcal{S},$$
$$\mathcal{E}_-(z)=\mathcal{S}^*-\mathcal{S}^*W(z)D(z),\quad \mathcal{E}_{-+}(z)=\mathcal{S}^*(-W(z)+W(z)D(z)W(z))\mathcal{S}.$$

算子 $\mathcal{E}_{\pm}(z)$ 和 $\mathcal{E}_{-+}(z)$ 可以类似地展开为 $D(z)$,

$$\mathcal{E}_{\pm}(z)=\mathcal{E}_{\pm,0}+\sqrt{z}\mathcal{E}_{\pm,1}+z\mathcal{E}_{\pm,2}+\dots$$
$$\mathcal{E}_{-+}(z)=\mathcal{E}_{-+,0}+\sqrt{z}\mathcal{E}_{-+,1}+z\mathcal{E}_{-+,2}+\cdots$$

更准确地说，关于这些展开式，有以下两个引理。

引理 5.20。 假设 (5.21) 和 (5.27a)–(5.27c)成立。对于 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^\mu,\ \mathcal{H}^1_{-s})$ （+ 情形）或 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-s},\ \mathbb{C}^\mu)$ （ − 情形），有：

$$\mathcal{E}_{\pm}(z)=\mathcal{E}_{\pm,0}+\mathcal{O}(|z|^{\epsilon}),\ \textit{if } s\in(\tfrac{1}{2},\rho_1). \tag{5.104a}$$
$$\mathcal{E}_{\pm}(z)=\mathcal{E}_{\pm,0}+\sqrt{z}\mathcal{E}_{\pm,1}+\mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}),\ \textit{if } \rho_1>\tfrac{3}{2} \textit{ and } s\in(\tfrac{3}{2},\rho_1). \tag{5.104b}$$

Here

$$\mathcal{E}_{+,0}=\mathcal{S},\quad \mathcal{E}_{-,0}=\mathcal{S}^*,$$
$$\mathcal{E}_{+,1}=-D_0W_1\mathcal{S},\quad \mathcal{E}_{-,1}=-\mathcal{S}^*W_1D_0.$$

引理 5.20 的证明与引理 5.11 中相应断言的证明相同，故此处不再重复。对于预解式的主导阶展开，仅需（5.104a）。

形式上，可以展开矩阵

$$\mathcal{E}_{-+}(z) = \mathcal{S}^*(-W(z) + W(z)D(z)W(z))\mathcal{S} \in \mathcal{M}_{\mu\times\mu}(\mathbb{C})$$

as

$$\mathcal{E}_{-+}(z) = \sqrt{z}\mathcal{E}_{-+,1}(z) + z\mathcal{E}_{-+,2} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}), \tag{5.105a}$$

其中

$$\mathcal{E}_{-+,1} = -\mathcal{S}^* W_1 \mathcal{S}, \tag{5.105b}$$
$$\mathcal{E}_{-+,2} = -\mathcal{S}^*(W_2 - W_1 D_0 W_1)\mathcal{S}. \tag{5.105c}$$

以下引理给出了这一展开的精确定义。注意，并未施加 (5.27c)。此外，没有用到断言 (5.98c) 或 (5.102b)；在处理引理的第一种情形时，也未用到 (5.98b)（因此，所述结果适用于 $\rho = 1$ 和 $\rho_1 = \frac{3}{2}$）。还要注意，由此可见，(5.98c) 中的强条件 $\rho_1 > \frac{5}{2}$ 与该引理无关，尽管乍看之下，为了证明 (5.105a)–(5.105c)，这一条件似乎是必要的；实际上，不需要 (5.98c)。

引理 5.21。 假设 (5.21)、(5.27a)和 (5.27b)。

情形 1。如果零是 P^+ 的第一类例外点，那么

$$\mathcal{E}_{-+}(z) = \sqrt{z}\mathcal{E}_{-+,1} + \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \tag{5.106a}$$

当 z 趋近于零且 $\operatorname{Im} z > 0$ 时，其中矩阵 $\mathcal{E}_{-+,1}$ 由下式给出

$$\mathcal{E}_{-+,1} = \mathrm{i}C_0^* C_0 \tag{5.106b}$$

其中 $C_0 \in \mathcal{M}_{m\times\mu}(\mathbb{C})$的第 j 列 $1 \le j \le \mu$ 指定为

$$c(\phi_j) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\langle 1, \sum_{k=1}^{m} U_{1k}^+ \phi_{j,k}\rangle_0, \cdots, \langle 1, \sum_{k=1}^{m} U_{mk}^+ \phi_{j,k}\rangle_0) \in \mathbb{C}^m. \tag{5.106c}$$

这里， $\phi_j = (\phi_{j,1}, \cdots, \phi_{j,m}) \in \mathcal{K}$ 记作 ϕ_j。

情形 2。假设零点是 P^+、 $\rho > 1$ 和 $\rho_1 > \frac{3}{2}$ 的第二类异常点。则

$$\mathcal{E}_{-+}(z) = z\mathcal{E}_{-+,2} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}) \tag{5.107a}$$

当 z 趋近于零且 $\operatorname{Im} z > 0$ 时，其中

$$\mathcal{E}_{-+,2} = (\langle (1 - U_1^+)\phi_i, \phi_j\rangle_0)_{1\le i,j\le\mu}. \tag{5.107b}$$

情形 3。假设零是 P^+、 $\rho > 1$ 和$\rho_1 > \frac{3}{2}$的第三类异常点。令 $1 \le \kappa < \mu$表示 P^+的零共振的重数。那么

$$\mathcal{E}_{-+}(z) = \sqrt{z}\mathcal{E}_{-+,1} + z\mathcal{E}_{-+,2} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}) \tag{5.108a}$$

对于接近零的 z 和 虚部 $z>0$，其中 $\mathcal{E}_{-+,\,1}$ 和 $\mathcal{E}_{-+,\,2}$ 可写成分块矩阵

$$\mathcal{E}_{-+,1}=\begin{pmatrix} \mathrm{i}C_0^*C_0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad and\quad \mathcal{E}_{-+,2}=\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}^{(2)} & \mathcal{E}_{12}^{(2)}\\ \mathcal{E}_{21}^{(2)} & \mathcal{E}_{22}^{(2)}\end{pmatrix} \tag{5.108b}$$

与 $C_0\in\mathcal{M}_{m\times\kappa}(\mathbb{C})$ 的第 j 列相等，其中 $1\le j\le\kappa$ 等于 $c(\phi_j)$，并且 $\mathcal{E}_{22}^{(2)}=(\langle(1-U_1^+)\phi_i,\phi_j\rangle_0)_{\kappa+1\le i,j\le\mu}$。

证明。情形 *1*。我们首先估计表示式中第二项的贡献

$$\mathcal{E}_{-+}(z)=(\langle U^+\phi_i,W(z)\phi_j-W(z)D(z)W(z)\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le\mu}.$$

利用恒等式 $\phi_j=-G_0U^+\phi_j$, $j\le\mu$，对于任意 $s\in(1,\rho_1)$，可以将 $\|W(z)\phi_j\|_{\mathcal{H}^1_{-s}}$ 估计为

$$\|W(z)\phi_j\|_{\mathcal{H}^1_{-s}}\le\|(r_0(z)-G_0)U(z)\phi_j\|_{\mathcal{H}^1_{-s}}+\|G_0(U(z)-U^+)\phi_j\|_{\mathcal{H}^1_{-s}}.$$

由 $U(z)\phi_j\in\mathcal{H}^{-1}_{(3/2)^-}$ 的（一致）界以及自由预解式界，并可通过对（5.45）和（5.94）进行插值（取 $N=1$）得到，

$$\|(r_0(z)-G_0)U(z)\phi_j\|_{\mathcal{H}^1_{-s}}\le C|z|^{\frac14+\epsilon}.$$

从这里开始，我们固定任意 $s\in(1,\frac54)$。于是 $1+\rho-s>\frac34$，并且根据（5.99a）

$$\begin{aligned}\|G_0(U(z)-U^+)\phi_j\|_{\mathcal{H}^1_{-s}}&\le C_1\|\langle x\rangle^{-1-\rho+s}(R'(\lambda_0+z)-R'(\lambda_0+\mathrm{i}0))\langle x\rangle^{-1-\rho+s}\|\\&\le C_2|z|^{\frac14+\epsilon}.\end{aligned}$$

这证明了

$$\|W(z)\phi_j\|_{\mathcal{H}^1_{-s}}\le C|z|^{\frac14+\epsilon}. \tag{5.109a}$$

同理，我们可以证明

$$\|W(z)^*U^+\phi_i\|_{\mathcal{H}^{-1}_s}\le C|z|^{\frac14+\epsilon}. \tag{5.109b}$$

由于 (5.102a)，算子 $D(z)$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-s},\mathcal{H}^1_{-s})$ 中一致有界，结合 (5.109a) 和 (5.109b) 可得

$$\mathcal{E}_{-+}(z)=(\langle U^+\phi_i,W(z)\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le\mu}+\mathcal{O}(|z|^{\frac12+2\epsilon}).$$

接下来我们简化右侧的第一项。通过类似的论证可得，它可展开为

$$\langle U^+\phi_i,W(z)\phi_j\rangle_0=(\langle U^+\phi_i,\phi_j+r_0(z)U^+\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le\mu}+\mathcal{O}(|z|^{\frac12+\epsilon}),$$

由于 $U^+=U^-$ 在 $\mathcal{K}$ 上，根据推论3.19可得 $U^+\phi_i,U^+\phi_j\in\mathcal{H}^{-1}_{(3/2)^+}$。于是，由（5.94）（其中 $N=1$）可得

$$\langle U^+\phi_i,W(z)\phi_j\rangle_0=(\langle U^+\phi_i,\sqrt{z}G_1U^+\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le\mu}+\mathcal{O}(|z|^{\frac12+\epsilon}),$$

利用 G_1的积分核的显式公式，可得

$$\langle U^+\phi_i, G_1U^+\phi_j\rangle_0 = \mathrm{i}(c(\phi_i), c(\phi_j))$$

其中 $c(\phi_j) \in \mathbb{C}^m$ 由（5.106c）给出。这表明 $\mathcal{E}_{-+,\,1} = \mathrm{i}C_0^*C_0$，并且我们已经证明了情形 1 的断言。

情形 2。如果零是第二类异常点，那么 $\phi_j \in \mathcal{H}$，且定理 5.6 表明对于 $1 \le j \le \mu$有 $W_1\phi_j = G_1U^+\phi_j = 0$。因此 $\mathcal{E}_{-+,\,1} = -\mathcal{S}^*W_1\mathcal{S} = 0$。

通过适当减小 ρ_1，我们可以假设（5.27c）成立，从而（5.102a）对某个 $s > \frac{3}{2}$ 有效。我们利用 $D(z) \in \mathcal{L}(1,-s;1,-s)$ 对此类 s所具有的均匀有界性，两次应用（5.98b），得到

$$\mathcal{S}^*W(z)D(z)W(z)\mathcal{S} = \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}).$$

还需证明

$$(\langle U^+\phi_i, W(z)\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le\mu} = z(\langle(1-U_1^+)\phi_i,\phi_j\rangle_0)_{1\le i,j\le\mu} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}). \tag{5.110}$$

为此，我们首先利用 (5.91) 和 $j = 1$，并写成

$$(\langle U^+\phi_i, W(z)\phi_j\rangle)_{1\le i,j\le\mu} = -\mathcal{S}^*(1 + r_0(z)(U^+ + zU_1^+))\mathcal{S} + \mathcal{O}(|z|^{1+\epsilon}).$$

接下来注意到 $U^+\phi_j \in \mathcal{H}^{-1}_{(5/2)+}$（参见推论3.19），因此我们可以利用 $N = 2$ 的展开式 (5.94)。最后，我们按照 (5.69) 的证明过程改写由此得到的首项，从而得出 (5.110)。

情形 3。若零是第三类异常点，我们可以结合情形 1 和情形 2 中使用的方法，证明 (5.108a) 和 (5.108b)。细节从略。

□

我们指出，对于情形 1，rank $C_0 = \kappa = \mu$和 $C_0^*C_0$是正定的。此外，引理 5.18 保证引理 5.21 中情形 2 的矩阵 $(\langle(1-U_1^+)\phi_i,\phi_j\rangle_0)_{1\le i,\ j\le\mu}$ 以及情形 3 的矩阵 $(\langle(1-U_1^+)\phi_i,\phi_j\rangle_0)_{\kappa+1\le i,\ j\le\mu}$均可逆。在以下计算 $W(z)$ 逆算子的首项时会用到这些性质。该命题的证明基本沿用命题 5.12 的证明思路。

如果 0 是 P^+ 的特征值（与下文的情形 2 和 3 相关），我们令 Π_0 表示 $\mathcal{H}$ 中投影到该算子的零特征值空间上的谱投影。

命题 5.22。假设满足条件 *(5.21)*、*(5.27a)* 和 *(5.27b)*。对于 $\mathcal{L}(1,\ -s;\ 1,\ -s)$ 中充分接近 1 的 $s > 1$ 以及满足 $\operatorname{Im} z > 0$ 且足够小的 $|z|$，以下渐近行为成立。

情形 1。假设零是第一类例外点。那么

$$W(z)^{-1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}Q_0 + \mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.111a}$$

Here

$$Q_0 = \sum_{j=1}^{\kappa} \langle -U^+\psi_j, \cdot\rangle_0 \psi_j \tag{5.111b}$$

其中向量 $\psi_j \in \mathcal{K}$ 满足

$$(c(\psi_j), c(\psi_k)) = \delta_{jk} \quad for\ j,k = 1,\cdots,\kappa. \tag{5.111c}$$

这里将 c定义为ψ_j。 $\in \mathbb{C}^m$ 在引理 *5.21* 中，将 c定义为ϕ_j，其中用 ψ_j 替换了 ϕ_j，而 $(\cdot,\ \cdot)$ 表示 $\mathbb{C}^m$的标量积。

情形 2 和 3。设零分别是第二类或第三类例外点， $\rho > 1$ 以及 $\rho_1 > \frac{3}{2}$。则

$$W(z)^{-1} = z^{-1}(\Pi_0(1-U_1^+)\Pi_0)^{-1}\Pi_0 U^+ + \mathcal{O}(|z|^{-1+\epsilon}). \tag{5.112}$$

证明。 结论由引理 5.20、引理 5.21 以及公式 (5.103) 得出。我们只研究情形 1。对于 $s \in (1,\rho_1)$，对某个 $\epsilon > 0$有

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(z) &= D_0 + \mathcal{O}(|z|^{\epsilon}) \text{ in } \mathcal{L}(1,-s;1,-s),\\
\mathcal{E}_{\pm}(z) &= \mathcal{E}_{\pm,0} + \mathcal{O}(|z|^{\epsilon}) \text{ in } \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mu},\mathcal{H}^1_{-s}) \text{ or in } \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-s},\mathbb{C}^{\mu}),\\
\mathcal{E}_{-+}(z) &= \mathrm{i}\sqrt{z}B_0 + \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}+\epsilon}),
\end{aligned}$$

其中 $B_0 = C_0^* C_0$ 是正定的。因此

$$W(z)^{-1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\mathcal{S}B_0^{-1}\mathcal{S}^* + \mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.113}$$

将 B_0^{-1}分解为 $B_0^{-1} = M_0^2$，其中 $M_0 \in \mathcal{M}_{\kappa\times\kappa}(\mathbb{C})$ 是正定厄米矩阵。令 $M_0 = (m_{ij})_{1\le i,\ j\le\kappa}$ 并且

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{\mu} m_{ki}\phi_k, \quad i = 1,\cdots,\kappa. \tag{5.114}$$

那么， $\{\psi_1,\cdots,\psi_\kappa\}$ 是 P^+的共振函数基。与命题 5.8 (a) 的证明类似，我们可以验证 $\{\psi_1,\cdots,\psi_\kappa\}$ 满足归一化条件

$$(c(\psi_i), c(\psi_j)) = \delta_{ij}; \quad i,j \le \kappa.$$

因此，展开式 (5.111a) 及其规定 (5.111b)-(5.111c) 得证。

□

由于 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z)^{-1} = -W(z)^{-1}(P_0-z)^{-1}$ 以及 $G_0U = -1$ 在 $\mathcal{K}$上，以下结果可由命题 5.22 立即推出（参见 (5.45)）。

命题 5.23。 假设 *(5.21)*、*(5.27a)* 和 *(5.27b)* 成立。对于 $s > 1$，以及满足$\mathrm{Im}\, z > 0$且足够小的 $|z|$，以下渐近行为在 $\mathcal{L}(-1,\ s;\ 1,\ -s)$ 中成立。

情形 1。设零是 P^+ 的第一类例外点。令 κ 为零共振的重数。则对于某个 $\epsilon > 0$

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z)^{-1} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{\kappa}\langle\psi_j,\cdot\rangle\psi_j + \mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}), \tag{5.115a}$$

其中 ψ_j、 $j=1$、 $\cdots$、 κ 是满足（*5.111c*）的共振态。

情形 2 和 3。分别假设零是第二类或第三类例外点， $\rho>1$ 和$\rho_1>\frac{3}{2}$。那么对于某个 $\epsilon>0$

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z)^{-1}=z^{-1}(\Pi_0(1-U_1^+)\Pi_0)^{-1}\Pi_0+\mathcal{O}(|z|^{-1+\epsilon}). \tag{5.115b}$$

本节的一个主要结果如下。沿用先前的记法，若 λ_0 是 H 的共振，则其重数记为 κ；若 λ_0 是H 的特征值，则 H 在相应特征子空间上的谱投影记为 Π_H。

定理 5.24。 假设 *(5.21)*、*(5.27a)* 和 *(5.27b)* 成立。对于任意 $s>1$，当 $z\to 0$且 $\pm$虚部 $z>0$时，以下渐近行为作为从 H_s^{-1}到 H_{-s}^1 的有界算子成立： $R(\lambda_0+z)$ 以及 $\epsilon=\epsilon(s)>0$。

情形 0。假设 λ_0 是 H的正则点。那么

$$\begin{aligned}R(\lambda_0+z)&=R'(\lambda_0\pm\ \mathrm{i}0)\\&\quad+(S-R'(\lambda_0\pm\mathrm{i}0)I_0S)D_0G_0(S^*-S^*I_0R'(\lambda_0\pm\mathrm{i}0))+\mathcal{O}(|z|^{\epsilon}).\end{aligned} \tag{5.116}$$

这里，当$\mathrm{Im}\ z>0$ （分别地， $-\mathrm{Im}\ z>0$）时，使用预解式 $R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)$ （分别地， $R'(\lambda_0-\mathrm{i}0)$ ）的边界值。

情形 1。假设 λ_0 是 H的第一类例外点。那么

$$R(\lambda_0+z)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{\kappa}\langle u_j,\cdot\rangle u_j+\mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}) \tag{5.117a}$$

其中 u_j是 H 的共振态，由下式给出

$$u_j=(1-R'(\lambda_0\pm\mathrm{i}0)I_0)S\psi_j,\quad 1\le j\le\kappa, \tag{5.117b}$$

其中 ψ_j是命题 *5.22* 中给出的 $P^{\pm}$ 的共振态。

情形 2 和 3。假设 λ_0 分别是 H的第二类或第三类例外点， $\rho>1$ 和 $\rho_1>\frac{3}{2}$。那么

$$R(\lambda_0+z)=-z^{-1}\Pi_H+\mathcal{O}(|z|^{-1+\epsilon}). \tag{5.118}$$

仿照定理 5.14 的证明，我们看到，$\mathrm{Im}\,z>0$ 对应的定理 5.24 是命题 5.23 和公式 (5.24) 的推论。$\mathrm{Im}\,z<0$ 对应的情形可用同样的方法证明，只需将 P^+ 替换为 P^-。注意，由于定理 5.6 (a)，由 (5.117b) 给出的共振态 u_j 与符号 $\pm$ 的选择无关。

备注 5.25。 对于定理 5.24 的情形 1，预解式 $R(\lambda_0+z)$ 的首项用 H 的一个特定共振态基 $\{u_1,\dots,u_\kappa\}$ 表示，其中 $\psi_j = S^*u_j$、 $j=1$、.....、 κ 如命题 5.22 中所给出。用 u_j 表示的归一化条件 (5.111c) 写成

$$(c(S^*u_j), c(S^*u_k)) = \delta_{jk}, \quad j,k = 1,\dots,\kappa. \tag{5.119}$$

根据命题 5.8 (b)，(5.117a) 对于任意满足 (5.119) 的共振态基$\{u_1,\dots,u_\kappa\}$ H仍然成立。另请注意公式

$$c(S^*u_j) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big(\int_{\mathbf{x}} \varphi_1 I_0 u_j \mathrm{d}x, \dots, \int_{\mathbf{x}} \varphi_m I_0 u_j \mathrm{d}x\Big), \quad j = 1,\dots,\kappa. \tag{5.120}$$

对于情形 0 和 1， $\rho = 1$ 是合理的。然而，定理 5.24 的情形 2 和 3 具有更强的条件 $\rho > 1$ ，因此排除了会对第 6.3 节中的应用造成限制的物理模型，参见注 6.29 1)。不过，如果相应的 L^2- 特征函数具有先验弱衰减性质，并且 λ_0 是 H 的特征值（如情形 2 和 3），我们几乎可以逐字仿照定理 5.16 的证明，从而也得到关于 $\rho = 1$ 的预解式展开。但请注意，对于较小的 σ ，性质 $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(H'_\sigma)$ 是基于对命题 3.3 的扰动，参见 [AHS], ，另请注意注 3.21 2) 的相关性。该展开达到二阶（至少对于情形 3 是如此）。

定理 5.26. 假设 *(5.21)* 和 *(5.27a)* 成立，且 *(5.27b)* 对 $\rho = 1$ 和$\rho_1 = 3/2$成立。设 λ_0 是 H 的特征值，并且对于某个$t > 3/2$，有值域$\Pi_H \subset L^2_t$ 。那么，对于 $R(\lambda_0 + z)$ ，作为从H^{-1}_s到 H^1_{-s}, $s > 1$的算子，当 $z \to 0$且 $\pm$虚部 $z > 0$时，以及 $\epsilon = \epsilon(s) > 0$，以下渐近行为成立。

$$R(\lambda_0 + z) = -z^{-1}\Pi_H + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\sum_{j=1}^{\kappa}\langle u_j, \cdot\rangle u_j + \mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.121}$$

右端的第二项仅在 $\kappa \geq 1$时出现，也就是说，当 λ_0 是 H的共振时才出现；在这种情况下，$\{u_1,\dots,u_\kappa\}$ 是H 的共振态基，且与符号 $\pm$的选择无关。另一方面，如果 λ_0 不是 H的共振，那么当 $z \to 0$, $\pm$虚部 $z > 0$时， $R(\lambda_0 + z) + z^{-1}\Pi_H$ 在范数意义下有极限。

注 5.27。 如注 5.17 2) 所述，条件 $\operatorname{ran}\Pi_H \subset L^2_t$ 对某个 $t > 1$ 成立即足以推出定理 5.26 的最后一个断言。

5.2 正的缓慢衰减有效势

在 [Na、Ya1、Ya2]中，研究了具有正的、缓慢衰减势的单体薛定谔算子的低能散射。 [Wa6] 证明，这类算子在阈值处满足 Gevrey 型预解算子估计，并且可利用这些估计建立量子动力学的大时间渐近行为，同时对余项给出亚指数时间衰减估计 [AW、Wa6]。本节旨在证明，在假设有效势在某个紧集之外为正且在无穷远处缓慢衰减的条件下，N体薛定谔算子在最低阈值 $\lambda_0 = \Sigma_2$处也有类似结果。

首先回顾 [Wa6]中关于单体算子的若干结果。在这一框架下，模型算子H_0 是一个具有如下形式的闭二阶椭圆算子

$$H_0 = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i} a^{ij}(x)\partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_{x_j} + v(x), \tag{5.122}$$

其中， $a^{ij}(x)$、 $b_j(x)$和 $v(x)$是 $\mathbb{R}^n$、 $n \geq 1$中的复值函数。我们假设 a^{ij}、 b_j 是有界函数，且其导数有界，并且存在 $c > 0$使得

$$\mathrm{Re}(a^{ij}(x)) \geq cI_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.123a}$$

还假设 v 相对于 $-\Delta$ 相对有界，且相对界为零，并且存在一些常数 $0 < \mu < 1$ 和 $c_0 > 0$ 使得

$$|\langle H_0 u, u\rangle| \geq c_0(\|\nabla u\|^2 + \|\langle x\rangle^{-\mu} u\|^2), \quad \text{for all } u \in H^2, \tag{5.123b}$$

$$\sup_x |\langle x\rangle^{\mu} b_j(x)| < \infty, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{5.123c}$$

界 (5.123b) 称为加权强制条件，这对于预解式在零阈值处的 Gevrey 估计至关重要。

在假设 (5.123b) 和 (5.123c) 下， H_0 是从 $D(H_0)$到$R(H_0)$的双射。令 $R_0(0)$: $R(H_0) \to D(H_0)$为其代数逆算子。 $R_0(0)$是稠密定义的闭算子，从 L^2_s 到 $L^2_{s-2\mu}$ 连续，并且对任意 $s \in \mathbb{R}$([Wa6, Ya2])，从 L^2_s 到$L^2_{s-2\mu-\epsilon}$紧的， $\epsilon > 0$。因此， $R_0(0)^N$： $L^2_s \to L^2_{s-2\mu N}$ 有界。若 $\mathrm{Re}\, H \geq 0$，则可以验证强极限

$$\underset{z\in\Omega(\delta), z\to 0}{\text{s-lim}} \langle x\rangle^{-2N\mu}(R_0(z)^N - R_0(0)^N) = 0,$$

其中 $\Omega(\delta) = \{z : |\arg z| > \frac{\pi}{2} + \delta\}$，且 $\delta > 0$ 较小。对于零阈值处的预解式，以下Gevrey型估计成立。

定理 5.28 ([Wa6，定理2。1])。 假设条件*(5.123a)*、*(5.123b)*和*(5.123c)*成立。对于任意 $a > 0$，存在 $C_a > 0$，使得

$$\|\mathrm{e}^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}} R_0(0)^N\| + \|R_0(0)^N \mathrm{e}^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}\| \leq C_a^{N+1} N^{\gamma N},$$

关于 $N \geq 1$一致。其中 $\gamma = \frac{2\mu}{1-\mu}$。

由定理5.28可推出以下结果。

推论5.29 ([Wa6，推论4。2])。 设 $H_0 = -\Delta + v(x)$ 为自伴且正的，并满足定理*5.28*的假设。那么对于任意 $a > 0$，存在 $C_a > 0$，使得

$$\|\mathrm{e}^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}} R_0(z)^N\| + \|R_0(z)^N \mathrm{e}^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}\| \leq C_a^{N+1} N^{\gamma N}, \quad \forall N \geq 1,$$

关于 $N \geq 1$和 $z \in \Omega = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta| > \delta\}$一致，且 $\delta > 0$。

由于 $R_0^{(N)}(z) = N! R_0(z)^{N+1}$，推论5.29意味着 $\mathrm{e}^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}} R_0(z)$ 属于 Gevrey 类 $\mathcal{G}^{(1+\gamma)}(\Omega)$，其中

$$\mathcal{G}^{(1+\gamma)}(\Omega) = \{F : \Omega \to \mathcal{L}(L^2) \mid \exists C > 0 \text{ s.t. } \|F^{(N)}(z)\| \leq C^{N+1} N! N^{\gamma N},\ \forall z \in \Omega, N \in \mathbb{N}\}$$

对于 $n=3$，斥库仑哈密顿量 $-\Delta+\frac{c}{|x|}, c>0$ 满足推论5.29的所有条件，其中 $\mu=\frac{1}{2}$，因此其预解式在指数加权空间中属于 $\mathcal{G}^{(3)}(\Omega)$。在 [AW 中，Wa6], 研究了非自伴扰动 H of H_0，并得到了量子动力学 e^{-itH} 和 e^{-tH}在 $t\to+\infty$ 时的大时间展开式。

为研究 N体薛定谔算子 H 在其最低阈值 $\lambda_0=\Sigma_2$处的性质，我们假设

$\lambda_0=\Sigma_2$ 是条件 2.4 意义下的非重合双簇阈值。 (5.124)

这意味着存在唯一的 $a_0\in\mathcal{A}\setminus\{a_{\max}\}$，使得 $\Sigma_2\in\sigma_{\rm pp}(H^{a_0})$，且该簇分解是满足条件1.6的双簇分解。我们沿用第2.2节的记号（在当前情形下，$m=1$，φ_1 是算子 H^{a_0}对应特征值 Σ_2的归一化特征函数，且 $\mathcal{H}=L^2(\mathrm{X}_{a_0})$）。记 $x_0=x_{a_0}\in\mathrm{X}_{a_0}$。由第2.2节可得预解式的表示公式：

$$R(z)=E(z)-E_+(z)E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}E_-(z)\ \text{ for }\ \operatorname{Im}z\neq0,$$

其中

$$\begin{aligned}E(z)&=R'(z)=(H'-z)^{-1}\Pi',\\ E_+(z)&=(1-R'(z)I_0)S,\\ E_-(z)&=S^*\big(1-I_0R'(z)\big),\\ E_{\mathcal{H}}(z)&=(z-\lambda_0)-(-\Delta_0+S^*I_0S-S^*I_0R'(z)I_0S),\end{aligned}$$

并且 $\Delta_0=\Delta_{x_0}$、$I_0(x)=\sum_{b\not\subset a}V_b(x^b)$ 以及 $Sf(x)(x)=\varphi_1(x^{a_0})f(x_0)$。此处的有效势为

$$S^*I_0S(x_0)=\langle I_0\varphi_1,\varphi_1\rangle_0,$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ 是 $L^2(\mathrm{X}^{a_0})$的标量积。

除 (5.124) 外，我们还假设

$$\lambda_0\notin\sigma_{\rm pp}(H'),\quad \rho\in(0,2), \tag{5.125a}$$

$$\exists c,R>0\ \text{such that}\ S^*I_0S\geq\frac{c}{|x_0|^\rho}\ \text{for}\ |x_0|>R. \tag{5.125b}$$

条件 (5.124) 和 (5.125a) 表明，$R'(z)$ 在 z 附近是全纯的。条件 (5.125b) 意味着，在某种意义下，λ_0 不可能是 H 的共振（参见引理 5.32）。因此，我们只需区分 λ_0 是否为 H 的特征值。在 λ_0 不是 H 的特征值的情形下，我们证明以下结果。

定理 5.30。 除条件 *(5.124)*、*(5.125a)* 和 *(5.125b)* 外，我们还假设 $\lambda_0=\Sigma_2\notin\sigma_{\rm pp}(H)$。那么，对于任意 $a>0$，$\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}R(z)$ 属于 *Gevrey* 类 $\mathcal{G}^{(\frac{1+\mu}{1-\mu})}(\Omega_{\lambda_0}(\delta))$，其中 $\mu=\frac{\rho}{2}$，且 $\Omega_{\lambda_0}(\delta)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-\lambda_0|<\delta,\ |\arg(z-\lambda_0)|>\delta\}$，$\delta>0$ 足够小。

定理 5.30 的证明分为几个步骤。主要任务是证明：如果 λ_0 不是 H 的特征值，则 $E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}\in\mathcal{G}^{(\frac{1+\mu}{1-\mu})}(\Omega_{\lambda_0}(\delta))$。令

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+\lambda)=\lambda-(-\Delta_0+S^*I_0S-S^*I_0R'(\lambda_0+\lambda)I_0S):=\lambda-(-\Delta_0+U(\lambda))$$

and

$$W(\lambda) = -S^* I_0 R'(\lambda_0+\lambda) I_0 S = -\langle \varphi_1, I_0 R'(\lambda+\lambda_0) I_0(\varphi_1 \otimes \cdot)\rangle_0. \tag{5.126}$$

$W(\lambda)$ 在 λ 取 0 附近时是全纯的，并且满足

$$\|\langle x\rangle^{1+2\mu} W(\lambda)\langle x\rangle^{1+2\mu}\| \le C$$

在 $|\lambda| < 2\delta$ 中对某个 $\delta > 0$ 足够小时一致成立，因为 $\Pi I_0 \Pi' = \mathcal{O}(\langle x_0\rangle^{-1-2\mu})$。在假设 (5.125b) 下，可以将 [Wa6] 的结果应用于 $-\Delta_0 + S^* I_0 S$。然而，在 Gevrey 情形下，非局部项 $W(\lambda)$ 不能作为扰动处理。为证明定理 5.30，我们从一开始就遵循 [Wa6] 的方法，并利用 $W(\lambda)$ 关于 λ 的全纯性来证明一些一致的能量估计。

对于 $s \in \mathbb{R}$，令 φ_s 为如下定义的权函数

$$\varphi_s(x_0) = \left(1 + \frac{|x_0|^2}{R_s^2}\right)^{s/2} \text{ with } R_s = M\langle s\rangle^{\frac{1}{1-\mu}},$$

其中 $M > 1$ 取充分大，并且与 s 无关。

引理 5.31。 存在常数 M， δ， $C > 0$ 使得

$$\|\langle x_0\rangle^r \varphi_s W(\lambda) \varphi_{-s} \langle x_0\rangle^{r'}\| \le C$$

对于 r， $r' \in \mathbb{R}$ 满足 r， $r' \le 1 + 2\mu$，对于 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $|\lambda| < \delta$，以及对于 $s \in \mathbb{R}$。

证明。 由于 $[\varphi_s, \Pi] = 0$ 和 $\Pi I_0 \Pi' = \mathcal{O}(\langle x_0\rangle^{-1-2\mu})$，有

$$\|\langle x_0\rangle^r \varphi_s W(\lambda) \varphi_{-s} \langle x_0\rangle^{r'}\| \le C\|\varphi_s R'(\lambda_0+\lambda)\varphi_{-s}\|.$$

计算交换子 $[-\Delta_0, \varphi_s]$ 可得

$$\varphi_s H' \varphi_{-s} = H' + \mathcal{O}\Big(\frac{s}{M\langle s\rangle^{\frac{1}{1-\mu}}}\Big) = H' + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{M}\Big),$$

其中项 $\mathcal{O}\big(\frac{1}{M}\big)$ 满足界

$$\|\mathcal{O}\Big(\frac{1}{M}\Big)(H'+i)^{-1}\| \le \frac{C}{M}$$

关于 $s \in \mathbb{R}$一致。由于 λ_0 属于 H'的预解集，存在 $\delta > 0$，使得 $R'(\lambda_0+\lambda)$ 对于 $|\lambda| < 2\delta$ 是定义良好的全纯函数，并且我们可以取 $M > 1$ 充分大，使得

$$\|\mathcal{O}\Big(\frac{1}{M}\Big) R'(\lambda_0+\lambda)\| \le \frac{1}{2}$$

对于 $|\lambda| < \delta$。由方程

$$\varphi_s R'(\lambda_0+\lambda)\varphi_{-s} = R'(\lambda_0+\lambda)\left(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{M}\Big) R'(\lambda_0+\lambda)\right)^{-1} \Pi',$$

由此可知， $\varphi_s R'(\lambda_0+\lambda)\varphi_{-s}$ 对 $s \in \mathbb{R}$ 和 $|\lambda| < \delta$ 一致有界。因此，引理 5.31 得证。

□

令 $\chi_R(x_0) = \chi_1(\frac{x_0}{R})$， $R \geq 1$，其中 $\chi_1 \in C^\infty$ 是一个截断函数，满足：若 $|x_0| \leq 1$，则 $0 \leq \chi_1 \leq 1, \chi_1(x_0) = 0$；若 $|x_0| \geq 2$，则 $\chi_1(x_0) = 1$。置

$$F(\lambda) = -\Delta_0 + 1 - \chi_R + \chi_R U(\lambda)\chi_R$$
$$\widetilde{U}(\lambda) = U(\lambda) - (1 - \chi_R + \chi_R U(\lambda)\chi_R)$$
$$h_0 = -\Delta_0 + 1 - \chi_R + \chi_R^2 S^* I_0 S.$$

然后， $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0 + \lambda)$可以分解为

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{H}}(\lambda_0 + \lambda) &= \lambda - (F(\lambda) + \widetilde{U}(\lambda)) \\ &= \lambda - (h_0 + (1 - \chi_R)((1 + \chi_R)S^* I_0 S - 1) + W(\lambda)) \end{aligned} \tag{5.127}$$

对于充分大的 $R > 1$， h_0 是一个带有处处为正且缓慢衰减的势 $v_0 = 1 - \chi_R + \chi_R^2 S^* I_0 S$的单体薛定谔算子：

$$v_0(x_0) \geq \frac{c}{\langle x_0 \rangle^{2\mu}}, \quad x_0 \in \mathbf{X}_0,$$

对于某个 $c > 0$。算子 $F(0) = h_0 + \chi_R W(0)\chi_R$是 h_0 的非局部扰动，而 $F(0) \geq 0$。注意，

$$\widetilde{U}(\lambda) = (1 - \chi_R)(U(\lambda) - 1) + \chi_R U(\lambda)(1 - \chi_R).$$

由于 $1 - \chi_R$ 具有紧支集且 λ_0 属于 H'的预解集，利用关系式

$$\mathrm{e}^{a\langle x_0 \rangle} H' \mathrm{e}^{-a\langle x_0 \rangle} = H' + \mathcal{O}(a)$$

~对于较小的 $a > 0$，可以看出 $U(\lambda)$是指数衰减的，其意义是

$$\|\mathrm{e}^{a\langle x_0 \rangle} \widetilde{U}(\lambda) \mathrm{e}^{a\langle x_0 \rangle}\| \leq C \tag{5.128}$$

当 λ 趋近于 0 且 $|a| \leq \delta$、 $\delta > 0$ 较小时一致成立。

引理 5.32。 假设 *(5.125b)*，并令 $\mu = \frac{\rho}{2} \in (0,1)$。则有

$$\|\langle x_0 \rangle^{-\mu} \varphi_s u\| + \|\nabla(\varphi_s u)\| \leq C\|\langle x_0 \rangle^{\mu} \varphi_s (F(\lambda) - \lambda)u\| \tag{5.129}$$

u对 $s \in \mathbb{R}$、 $u \in \mathcal{S}$以及 $\lambda \in \Omega_0(\delta) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \delta, \ |\arg \zeta| > \delta\} \cup \{0\}$一致成立 .

证明。 根据构造， $h_0 = -\Delta_0 + v_0(x_0)$ 满足加权强制条件 (5.123b)。此外，对于 $\lambda = \tau e^{i\phi} \in \mathbb{C}$，当 $\tau > 0$且 $\phi \neq 0$、 $|\phi| \geq \delta > 0$、 $e^{-i\phi}(h_0 - \lambda)$ 也满足 (5.123b)，其下界独立于 λ，只要 $|\phi| \geq \delta$且 $|\tau| < \delta$对于 $\delta > 0$足够小。将 [Wa6、引理 3.1] 应用于 h_0和 $e^{-i\phi}(h_0 - \lambda)$，我们得到

$$\|\langle x_0 \rangle^{-\mu} \varphi_s u\| + \|\nabla(\varphi_s u)\| \leq C\|\langle x_0 \rangle^{\mu} \varphi_s (h_0 - \lambda)u\| \tag{5.130}$$

对 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda \in \Omega_0(\delta)$一致成立。

由于 $F(\lambda) = h_0 + \chi_R W(\lambda)\chi_R$，引理 5.31 表明

$$\|\langle x_0 \rangle^{\mu} \varphi_s (h_0 - \lambda)u\| \leq \|\langle x_0 \rangle^{\mu} \varphi_s (F(\lambda) - \lambda)u\| + CR^{-2-2\mu}\|\langle x_0 \rangle^{-\mu} \varphi_s u\|$$

关于 $s \in \mathbb{R}$ 和 $|\lambda|$ 足够小是一致的。现在，只要适当地取足够大的 $R > 1$，引理 5.32 即得。 □

引理 5.32 表明，$G(\lambda) = (F(\lambda) - \lambda)^{-1}$ 满足估计式

$$\|\langle x_0\rangle^{-\mu}\varphi_s G(\lambda)\varphi_{-s}\langle x_0\rangle^{-\mu}\| + \|\nabla\varphi_s G(\lambda)\varphi_{-s}\langle x_0\rangle^{-\mu}\| \leq C$$

在 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda \in \Omega_0(\delta)$ 中一致成立。因此

$$\|\langle x_0\rangle^{-2\mu}\varphi_s G(\lambda)\varphi_{-s}\| \leq C'\langle s\rangle^{\gamma}, \quad \gamma = \tfrac{2\mu}{1-\mu}, \tag{5.131}$$

在 s 和 λ 中一致成立。以下技术估计是证明 $G(\lambda)$ 的 Gevrey估计的主要步骤，参见 [Wa6，定理 3.4]。

命题 5.33。存在常数 C，$\delta > 0$ 使得对于任意 $r \in \mathbb{R}$、$N \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in \Omega_0(\delta)$

$$\|\langle x_0\rangle^{-2\mu}\langle x_{N,r}\rangle^{-(2N+r)\mu}G^{(N)}(\lambda)\langle x_{N,r}\rangle^{r\mu}\| \leq C^{N+1}N!\langle(2N+r)\mu\rangle^{\gamma(N+1)}. \tag{5.132}$$

Here

$$x_{N,r} = \frac{x_0}{R_{N,r}} \text{ with } R_{N,r} = M\langle(2N+r)\mu\rangle^{\frac{1}{1-\mu}}$$

以及 $\langle x_{N,\ r}\rangle = (1 + |x_{N,\ r}|^2)^{\frac{1}{2}}$。

证明。情形 $N = 0$ 和 $r \geq 0$ 可由带有 $s = r\mu$ 的 (5.131) 得出。对于一般情形 $N \geq 1$ 和 $r \geq 0$，我们写成

$$G^{(N)}(\lambda) = (G(\lambda)^2 - G(\lambda)\chi_R W'(\lambda)\chi_R G(\lambda))^{(N-1)},$$

并通过对 N 进行归纳证明

$$\begin{aligned}&\|\langle x\rangle^{-2\mu}\langle x_{N,r}\rangle^{-(2N+r)\mu}G^{(N)}(\lambda)\langle x_{N,r}\rangle^{r\mu}\|\\ &\leq C_N^{N+1}N!\langle(2N+r)\mu\rangle^{\gamma(N+1)}\end{aligned}$$

其中 $C_{N+1} \leq C_N(1 + \frac{c}{N^{1+\gamma}})$，对于某个与 N 无关的 $c > 0$。细节与 [Wa6，定理 3.4] 的证明相同，故此处略去。□

为了将依赖于 N 的多项式权重转换为与 N 无关的指数权重，我们使用以下估计。

$$\forall a > 0\, \exists A_a > 0: \quad \|\langle x_{N,r}\rangle^{(2N+r)\mu}\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}\|_{L^\infty} \leq A_a^{\max\{2N+r,1\}}, \tag{5.133}$$

关于 $N \in \mathbb{N}$ 和 $r \in \mathbb{R}$ 一致成立。事实上，若 $2N + r \leq C$ 对某个常数 $C > 0$ 成立，则 (5.133) 的左侧被某个常数 C_1 一致有界。对于 $2N + r > C$ 且 $C > 1$ 较大但固定的情形，考虑函数

$$f(\tau) = \langle\frac{\tau}{R_{N,r}}\rangle^{(2N+r)\mu}e^{-a\tau^{1-\mu}}, \quad \tau = |x_0|.$$

有

$$f'(\tau) = \frac{f(\tau)}{\tau^\mu(R_{N,r}^2 + \tau^2)}\left((2N+r)\mu\tau^{1+\mu} - (1-\mu)a(R_{N,r}^2 + \tau^2)\right).$$

由于对于每个 $a > 0$都有 $\mu \in]0、1[$，，因此可以找到某个常数 $A > 0$ 使得

$$f'(\tau) < 0, \quad \text{for } \tau > AR_{N,r}.$$

因此，对于 $2N+r>C$,

$$\|\langle x_{N,r}\rangle^{(2N+r)\mu}e^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}\|_{L^\infty}\le\sup_{0\le\tau\le AR_{N,r}}f(\tau)\le\langle A\rangle^{(2N+r)\mu}$$

这就证明了对于某个适当的常数 $A_a>0$，(5.133) 成立。

命题 5.33 蕴含了关于 $G(\lambda)=(F(\lambda)-\lambda)^{-1}$ 的以下 Gevrey估计：

$$\|\langle x_0\rangle^{-\tau}\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}G^{(N)}(\lambda)\langle x_0\rangle^{\tau}\|\le C_a^{N+1+\tau}N!\langle N+\tau\rangle^{\gamma(N+1)+\frac{\tau}{1-\mu}}\tag{5.134}$$

关于 $\tau\ge0$、$N\in\mathbb{N}$ 和 $\lambda\in\Omega_0(\delta)$ 一致。

引理5.34。假设 *(5.124)*、*(5.125a)* 和 *(5.125b)* 成立。令 u 为方程 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)u=0$ 的一个解，并且 $u\in\mathcal{H}_\tau$ 对某个 $\tau\in\mathbb{R}$ 成立。那么存在某个正常数 b_0，使得 $\mathrm{e}^{b_0\langle x_0\rangle^{1-\mu}}u\in\mathcal{H}$。这里 $\mathcal{H}=L^2(\mathbf{X}_0)$ 和 $\mathcal{H}_\tau=L^2(\mathbf{X}_0,\langle x_0\rangle^{2\tau}\mathrm{d}x_0)$。

证明。 u 满足方程 $u=G(0)(1-\chi_R)(1-U(0))u$。由于 $U(0)$ 关于 $\mathcal{H}_s$ 连续，对任意 $s\in\mathbb{R}$，$u\in\mathcal{H}_\tau$ 和 $1-\chi_R$ 都具有紧支集，因此 $(1-\chi_R)(1-U(0))u\in\mathcal{H}_s$ 对任意 $s>0$ 成立。命题 5.33 结合 $N=0$ 和 $r<0$ 表明 $u\in\mathcal{H}_\infty$。另见第4.1.3小节。为证明 u 的次指数衰减，我们写成

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)=-(h_0+(1-\chi_R)(S^*I_0S-1)+W(\lambda_0)).$$

由于$h_0\ge-\Delta_0+\frac{c}{\langle x_0\rangle^{2\mu}}$对某个 $c>0$成立，以下Agmon能量估计成立：$\exists b,C>0$ 使得

$$\|\langle x_0\rangle^{-\mu}\mathrm{e}^{b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}f\|^2+\|\nabla_{x_0}(\mathrm{e}^{b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}f)\|^2\le C(|\langle\mathrm{e}^{2b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}h_0f,f\rangle|+\|f\|^2)\tag{5.135}$$

对于 $f\in D(h_0)$，其中 $\mathrm{e}^{2b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}h_0f\in\mathcal{H}$ （参见 [Wa6, （5.37）]）。$R'(z)$在 λ_0附近的 z 处全纯，因此对足够小的 $b>0$

$$\begin{aligned}|\langle\mathrm{e}^{2b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}W(\lambda_0)f,f\rangle|&\le C_1(\|\langle x_0\rangle^{-1-2\mu}\mathrm{e}^{b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}f\|^2+\|f\|^2)\\&\le\epsilon\|\langle x_0\rangle^{-\mu}\mathrm{e}^{b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}f\|^2+C_\epsilon\|f\|^2\end{aligned}$$

对任意 $\epsilon>0$。由（5.135）可推得

$$\|\langle x_0\rangle^{-\mu}\mathrm{e}^{b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}f\|^2+\|\nabla_{x_0}(\mathrm{e}^{b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}f)\|^2\le C(|\langle\mathrm{e}^{2b\langle x_0\rangle^{1-\mu}}E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)f,f\rangle|+\|f\|^2)\tag{5.136}$$

其中可能还涉及另一个常数 C。由于 $u\in\mathcal{H}_\infty$ 且 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)u=0$，将上述不等式应用于 u 可知，对 $0<b_0<b$有 $\mathrm{e}^{b_0\langle x_0\rangle^{1-\mu}}u\in\mathcal{H}$。□

定理 5.30 的证明。由于 λ_0 不是 H的特征值，引理5.34表明，$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$对任意 s在 $\mathcal{H}_s$ 中都是单射。写作

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+\lambda)=-(F(\lambda)-\lambda)(1+G(\lambda)\widetilde{U}(\lambda))\tag{5.137}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$对于 $\lambda\in\Omega_0(\delta)$，可以看出 $1+G(0)U(0)$ 是单射。映射 $\lambda\to G(\lambda)U(\lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_s)$ 是连续的紧算子值映射。因此，$1+G(0)U(0)\widetilde{\ }$是可逆的，并且 $(1+G(0)U(0))^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_s)$，由连续性可知，$(1+\widetilde{\ }G(\lambda)U(\lambda))^{-1}$ 存在且

$$\|(1+G(\lambda)\widetilde{U}(\lambda))^{-1}\|\le C$$

对于 $\lambda \in \Omega_0(\delta)$, $\delta > 0$ 较小。这证明 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+\lambda)$ 是可逆的，其逆算子为

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+\lambda)^{-1} = -(1+G(\lambda)\widetilde{U}(\lambda))^{-1}G(\lambda) = -G(\lambda)(1+\widetilde{U}(\lambda)G(\lambda)))^{-1}. \quad (5.138)$$

作为从 $\mathcal{H}_s$ 到 $\mathcal{H}_{s-2\mu}$的算子， $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+\lambda)^{-1}$ 对 $\lambda \in \Omega_0(\delta)$一致有界。因此，公式

$$R(z) = E(z) - E_+(z)E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}E_-(z)$$

最初对 Im $z \neq 0$ 成立，可以延拓至 $z \in \Omega_{\lambda_0}(\delta)$。我们得出， H 在 $(\lambda_0-\delta, \lambda_0)$ 中没有特征值，因此 $\sigma_d(H)$ 是有限的。

$E(z)$ 和 $E_\pm(z)$ 在 λ_0附近关于 z 是全纯的。由于

$$\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}H'\mathrm{e}^{a\langle x_0\rangle^{1-\mu}} = H' + O(a),$$

$\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}R'(z)\mathrm{e}^{a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}$在 $|z-\lambda_0|$充分小时是全纯且一致有界的，条件是 $a>0$ 充分小。由此可知，$\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}E_+(z)\mathrm{e}^{a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}$对 $z \in \Omega_{\lambda_0}(\delta)$是全纯且一致有界的。因此，要证明定理 5.30，只需证明 $\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}E_{\mathcal{H}}(z)^{-1}$属于 $\mathcal{G}^{(\frac{1+\mu}{1-\mu})}(\Omega_{\lambda_0}(\delta))$.

当 $a>0$ 足够小时， $\widetilde{U}(\lambda)e^{a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}$ 是全纯的，并且在 $\lambda \in \Omega_0(\delta)$ 上一致有界。由 (5.134)（取 $\tau = 0$）可得 $\widetilde{U}(\lambda)G(\lambda) \in \mathcal{G}^{(\frac{1+\mu}{1-\mu})}(\Omega_0(\delta))$，结合一致有界性

$$\|(1+\widetilde{U}(\lambda)G(\lambda))^{-1}\| \leq C,$$

可知 $(1+\widetilde{U}(\lambda)G(\lambda))^{-1} \in \mathcal{G}^{(\frac{1+\mu}{1-\mu})}(\Omega_0(\delta))$。对于 $z=\lambda_0+\lambda$，由 (5.134) 可得

$$\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}E_{\mathcal{H}}(z)^{-1} = -\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}G(z-\lambda_0)(1+\widetilde{U}(z-\lambda_0)G(z-\lambda_0))^{-1}$$

属于 $\mathcal{G}^{(\frac{1+\mu}{1-\mu})}(\Omega_{\lambda_0}(\delta))$。定理 5.30 的证明至此完成。 □

注5.35。 1) 利用 (5.131) 并重复定理 5.30 的证明，可以证明，对于任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$，均有

$$\|\langle x_0\rangle^{-2(N+1)\mu-\tau}R^{(N)}(z)\langle x_0\rangle^{\tau}\| \leq C_{N,\tau} \quad (5.139)$$

对 $\lambda \in \Omega_{\lambda_0}(\delta))$ 一致成立。这特别意味着极限

$$R(\lambda_0) = \lim_{\lambda \in \Omega_{\lambda_0}(\delta)), \lambda \to \lambda_0} R(\lambda) \quad (5.140)$$

在任意 $\epsilon > 0$ 下存在于 $\mathcal{L}(L^2_\tau, L^2_{\tau-2\mu-\epsilon})$ 中，并且对任意 $\tau \in \mathbb{R}$， $R(\lambda_0) \in \mathcal{L}(L^2_\tau, L^2_{\tau-2\mu})$。在本节余下部分， $L^2_r = L^2(\mathbf{X}\ \langle x_0\rangle^{2r}\mathrm{d}x)$。

2）利用（5.134），可以证明定理 5.30 的如下改进：对于任意 $a>0$ 和 $\tau \geq 0$, 存在某个常数 C，使得

$$\|\langle x_0\rangle^{-\tau}\mathrm{e}^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}R^{(N)}(z)\langle x_0\rangle^{\tau}\| \leq C^{N+1}N!\langle N+1\rangle^{\gamma(N+1)} \quad (5.141)$$

关于 $N \in \mathbb{N}$ 和 $z \in \Omega_{\lambda_0}(\delta)$ 一致。

命题5.36。 假设满足定理 *5.30* 的条件，并设 $s > \frac{1+\mu}{2}$。那么预解式的边界值

$$R(\lambda \pm \mathrm{i}0) = \lim_{\epsilon \to 0_+} R(\lambda \pm \mathrm{i}\epsilon)$$

存在于 $\mathcal{L}(L^2_s, L^2_{-s})$ 中，对于 $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$、$\delta > 0$ 且

$$\|\langle x_0\rangle^{-s} R(\lambda \pm \mathrm{i}0) \langle x_0\rangle^{-s}\| \leq C \tag{5.142}$$

在 $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ 中一致成立。

证明。 我们沿用之前使用的记号。已知 [Na] 式 (5.142) 对于 $r_0(z) = (h_0 - z)^{-1}$成立。因此

$$\forall s > \tfrac{1+\mu}{2}\ \exists C > 0 : \quad \|\langle x_0\rangle^{-s} r_0(\lambda \pm \mathrm{i}0) \langle x_0\rangle^{-s}\| \leq C \tag{5.143}$$

在 $\lambda \in [0, \delta]$ 中一致成立。对于 $F(z) = h_0 + \chi_R W(z) \chi_R$，记

$$F(z) - z = (h_0 - z)(1 + r_0(z)\chi_R W(z)\chi_R), \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

当 $\lambda \geq 0$ 足够小时，$r_0(\lambda + i0)\chi_R W(\lambda)\chi_R$ 在 $\mathcal{H}_{-s}$ 中是紧的，并且对于 $\lambda \in [0, \delta]$、$\delta > 0$ 连续。当 $R > 1$ 足够大时，$F(0) \geq -\Delta_0 + \frac{c}{\langle x_0\rangle^{2\mu}}$、$c > 0$，这里的等式在自伴算子的意义下成立，并且如果用 $F(0)$ 替换 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$，引理 5.32 仍然成立。因此，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，$F(0)$ 在 $\mathcal{H}_t$ 中是单射的，因为 0 不是 $F(0)$ 的特征值。这意味着 $1 + r_0(0)\chi_R W(0)\chi_R$ 在 $\mathcal{H}_{-s}$ 中是单射的，从而 $1 + r_0(0)\chi_R W(0)\chi_R$ 是可逆的。由关于 λ 的连续性，我们得出 $(1 + r_0(\lambda \pm \mathrm{i}0)\chi_R W(\lambda)\chi_R)$ 对于 $\lambda > 0$ 足够小时在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{-s})$ 中是可逆的，且其逆算子关于 $\lambda \in [0, \delta]$ 连续。因此，$G(z) = (F(z) - z)^{-1}$ 的边界值存在于 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{-s})$ 中，并且

$$G(\lambda \pm \mathrm{i}0) = \big(1 + r_0(\lambda \pm \mathrm{i}0)\chi_R W(\lambda)\chi_R\big)^{-1} r_0(\lambda \pm \mathrm{i}0)$$

对于 $\lambda \in [0, \delta]$ 连续。类似的论证表明，边界值

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0 + \lambda \pm \mathrm{i}0)^{-1} = -\big(1 + G(\lambda \pm \mathrm{i}0)\widetilde{U}(\lambda)\big)^{-1} G(\lambda \pm \mathrm{i}0)$$

存在于 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{-s})$ 中，并且关于 $\lambda \in [0, \delta]$ 连续。最后我们得到

$$R(\mu \pm \mathrm{i}0) = E(\mu) - E_+(\mu) E_{\mathcal{H}}(\mu \pm \mathrm{i}0)^{-1} E_-(\mu)$$

存在于 $\mathcal{L}(L^2_s, L^2_{-s})$ 中，并且关于 $\mu \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ 连续。 □

推论5.37。 令 $e(\lambda)$ 表示 H 在 $]-\infty, \lambda]$ 上的谱投影。假设满足定理 *5.30* 的条件。则对于任意 $a > 0$ 和 $s > \frac{1+\mu}{2}$，存在一些常数 b，$B > 0$ 使得

$$\|\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}} e'(\lambda) \langle x_0\rangle^{-s}\| \leq B e^{-b|\lambda - \lambda_0|^{-\frac{1}{\gamma}}}, \quad \lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta). \tag{5.144}$$

证明。 由于 $e'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}(R(\lambda + \mathrm{i}0) - R(\lambda - \mathrm{i}0))$，$\|\langle x_0\rangle^{-s} e'(\lambda) \langle x_0\rangle^{-s}\|$ 对于 $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$ 一致有界。迭代第一个预解式方程，对于任意 $N \in \mathbb{N}$

$$e'(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^N R(\lambda_0)^N e'(\lambda). \tag{5.145}$$

应用 (5.141) 于 $\tau = s$，可推出对于任意 $a > 0$，存在某些常数 c、$C > 0$，使得

$$\|\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}} e'(\lambda)\langle x_0\rangle^{-s}\| \leq C c^N N^{\gamma N} (\lambda - \lambda_0)^N \tag{5.146}$$

对于所有 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$。接下来，通过选取关于 $\lambda - \lambda_0$ 的 N，使得当 $\lambda \to \lambda_0$ 时 $N \approx A|\lambda - \lambda_0|^{-\frac{1}{\gamma}}$，其中 $A > 0$为某个适当的常数，从而使右端达到最小。于是

$$\begin{aligned} c^N N^{\gamma N} |\lambda - \lambda_0|^N &\approx e^{A|\lambda-\lambda_0|^{-\frac{1}{\gamma}}(\gamma \ln A + \ln c)} \\ &\leq B e^{-b|\lambda-\lambda_0|^{-\frac{1}{\gamma}}}, \quad \lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta), \end{aligned}$$

对于某些常数 $b, B > 0$，如果 $A > 0$ 满足 $\gamma \ln A + \ln c < 0$。这就证明了（5.144）。 □

当 λ_0 是 H 的特征值时，我们证明以下类似于定理 5.30 的结果。

定理5.38。 假设条件（*5.124*）、（*5.125a*）和（*5.125b*）成立。令 λ_0 为 H 的特征值，令 Π_{λ_0} 为与 λ_0相关的 H 的特征投影。则有

$$R(z) = -\frac{\Pi_{\lambda_0}}{z - \lambda_0} + R_1(z) \tag{5.147}$$

$_w$此处，对于任意 $a > 0$，$e^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}} R_1(z)$ 属于 *Gevrey* 类 $\mathcal{G}^{(\frac{1+\mu}{1-\mu})}(\Omega_{\lambda_0}(\delta)$).

证明。 与定理 5.30 的证明类似，我们需要研究 $E_{\mathcal{H}}(z)$，其中 $z \in \Omega_{\lambda_0}(\delta)$。我们使用公式 (5.137) 和另一个 Grushin 约化来研究 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0 + \lambda)^{-1}$.~由 $G(\lambda)$ 和 $U(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处的光滑性可知，它们可以在适当的空间中按 λ 的幂展开，其中 λ 接近 0。令

$$G(\lambda) = G_0 + \lambda G_1 + o(\lambda), \tag{5.148}$$

$$\widetilde{U}(\lambda) = \widetilde{U}_0 + \lambda \widetilde{U}_1 + o(\lambda). \tag{5.149}$$

~对任意 $s \in \mathbb{R}$，均有 $G_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s-(j+1)\rho})$ 和 $U_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_\infty)$。

令 k 表示 H 的特征值 λ_0 的重数。那么，0 是 ~ ~$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 的特征值，重数为 k。令 $K(z) = G(z)U(z)$ 和 $K_0 = G_0U_0$。那么 K_0 是 $\mathcal{H}$ 中的一个紧算子，并且 ker($1 + G_0U_0$) =ker $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$。与第5.1.2节类似，我们可以选取 ker $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0)$ 的一组基 $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$，使其满足

$$\langle -\widetilde{U}_0 \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k$$

并为 $1 + K(\lambda)$ 构造一个 Grushin问题。令

$$\mathcal{S} : \mathbb{C}^k \to \mathcal{H}, c = (c_1, \cdots, c_k) \to \mathcal{S}c = \sum_{j=1}^{k} c_j \phi.$$

于是，$Q = \mathcal{S}\mathcal{S}^*$ 是到 ker$(1 + K_0)$ 上的投影。令 $Q' = 1 - Q$。有$Q'(1 + K_0)Q'$ 在 ra n Q' 上是可逆的，并且由连续性，$Q'(1 + K(\lambda))Q'$ 在 ran Q' 上是可逆的；当 $\lambda \in \Omega_0(\delta)$、$\delta > 0$ 足够小时，其逆算子一致有界。令

$$D(\lambda) = (Q'(1 + K(z)Q')^{-1}Q'$$

由于 $(1+K(\lambda)) \in \mathcal{G}^{(1+\gamma)}(\Omega_0(\delta))$ 且 $\gamma = \frac{2\mu}{1-\mu}$，有 $D(\lambda) \in \mathcal{G}^{(1+\gamma)}(\Omega_0(\delta))$。利用上文定义的 $\mathcal{S}$ 研究 $1+K(z)$ 的 Grushin问题，我们得到

$$(1+K(\lambda))^{-1} = \mathcal{E}(\lambda) - \mathcal{E}_+(\lambda)\mathcal{E}_{-+}(\lambda)^{-1}\mathcal{E}_-(\lambda) \tag{5.150}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\lambda) &= D(\lambda), \\
\mathcal{E}_+(\lambda) &= \mathcal{S} - D(\lambda)(1+K(\lambda))\mathcal{S} \\
\mathcal{E}_-(\lambda) &= \mathcal{S}^* - \mathcal{S}^*(1+K(\lambda))D(\lambda) \\
\mathcal{E}_{-+}(\lambda) &= \mathcal{S}^*(-(1+K(\lambda)) + (1+K(\lambda))D(\lambda)(1+K(\lambda))\mathcal{S}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_\pm(\lambda)$ 和 $\mathcal{E}_{-+}(\lambda)$ 都属于阶为 $1+\gamma$ 的 Gevrey 类。正如第5.2.1小节情形2中一样，我们可以计算 $k \times k$ 矩阵 $\mathcal{E}_{-+}(\lambda)$ 并得到

$$\mathcal{E}_{-+}(\lambda) = \lambda M_0 + \lambda^2 r_1(\lambda) \tag{5.151}$$

其中 M_0 是可逆的，且 $r_1(\lambda) \in \mathcal{G}^{(1+\gamma)}(\Omega_0(\delta))$。这就得到

$$\mathcal{E}_{-+}(\lambda)^{-1} = \lambda^{-1}M_0^{-1} + r_2(\lambda)$$

其中 $r_2(\lambda) \in \mathcal{G}^{(1+\gamma)}(\Omega_0(\delta))$。由（5.138）和（5.150），我们得到

$$E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+\lambda)^{-1} = -G(\lambda)(1+K(\lambda))^{-1} = \frac{C_0}{\lambda} + \widetilde{R}_1(\lambda) \tag{5.152}$$

在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s-2\mu-\epsilon})$ 中，其中 $C_0 = G_0\mathcal{E}_+(0)M_0^{-1}\mathcal{E}_-(0)$，并且对于 $a>0$，$e^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}\widetilde{R}_1(\lambda) \in \mathcal{G}^{(1+\gamma)}(\Omega_0(\delta))$。因此，$R(z)$ 满足展开式

$$R(z) = -\frac{B_0}{z-\lambda_0} + R_1(z), \quad B_0 = E_+(\lambda_0)C_0E_-(\lambda_0)$$

按照定理 5.30 的证明，可以证明

$$\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}R_1(z) \in \mathcal{G}^{(1+\gamma)}(\Omega_{\lambda_0}(\delta)).$$

根据 H 的谱定理，必有 $B_0 = \Pi_{\lambda_0}$。 □

利用柯西积分公式以预解式表示 e^{-tH}，由定理5.38可得热半群 e^{-tH} 的大时间展开（参见[Wa6，定理 2.3]）。

推论 5.39. 假设满足定理 *5.30* 的条件。对于任意 $a>0$，存在一些常数 $C, c>0$，使得

$$\|\mathrm{e}^{-a\langle x_0\rangle^{1-\mu}}\big(\mathrm{e}^{-tH} - \sum_{\lambda\in\sigma_d(H)}\mathrm{e}^{-t\lambda}\Pi_\lambda - \mathrm{e}^{-t\lambda_0}\Pi_{\lambda_0}\big)\| \le C\mathrm{e}^{-t\lambda_0 - ct^{\frac{1-\mu}{1+\mu}}}. \tag{5.153}$$

这里，Π_λ 是与特征值 λ对应的 H 的特征投影。

注 5.40. 1）对于单体算子， [AW、Wa6] 证明，在某些附加条件下，量子动力学 e^{-itH} 作为从 L^2_{comp} 到 L^2_{loc} 的算子，可以展开为 $|t| \to \infty$ ，且余项具有与推论 5.39 中相同的次指数估计。该处使用的条件排除了量子共振可能向零阈值聚集的情形。对于 N 体问题中的 e^{-itH} ，是否也有类似结果，是一个有趣且非平凡的开放问题。

2）如果 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是多重双簇阈值，则可以应用第 2.3 节的 Grushin 约化来证明定理 5.30 和 5.38 仍然成立。由于定理 5.30 和 5.38 的证明严重依赖于 $R'(z)$ 在指数加权空间中的连续性，而这一连续性是由 $R'(z)$ 对于 z 在 λ_0 附近的全纯性推导出来的，因此不能期待这些结果对更高阈值 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 也成立。

例 5.41。 定理 5.30 和 5.38 可应用于由 (1.13) 给出的具有库仑相互作用的物理模型。假设最低阈值 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是非重双簇阈值，并且等于具有 $a = (C_1, C_2)$ 的双簇哈密顿量 H^a 的最低特征值。设 $Q_j = \sum_{k \in C_j} q_k$ 为团簇 C_j, $j = 1$ 中粒子的总电荷，2。假设

$$Q_1 Q_2 > 0.$$

因此，有效势为正，并且在某个紧集之外缓慢递减；式（5.125b）在 $\rho = 1$ （见（1.14））下成立。在这种情形下，定理 5.30 和 5.38 在 Gevrey 类 $\mathcal{G}^{(3)}(\Omega_{\lambda_0}(\delta))$ 中成立。

5.3 双簇阈值附近物理模型的预解式渐近行为

我们将使用第4.3节中的相同记号，讨论第 1.2 节和第 1.3 节中的物理模型（分别取 $N \geq 3$ 和 $N \geq 2$）对第 5.1 节的一些延拓。与本章前面几节一样，单粒子空间的维数固定为 $n = 3$。按照第4.3节的设定，我们不区分 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 和 $\lambda_0 > \Sigma_2$这两种情形。

回顾一下，对于第 1.2 节和第 1.3 节模型的给定双簇阈值 λ_0 ，我们将满足 $\lambda_0 \in \sigma_{pp}(H^a)$ 的双簇分解集合 a 分为 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 以及满足以下条件的 $\mathcal{A}_3$

$\mathcal{A}_1$**：** 有效簇间相互作用在主导阶上是吸引型库仑，

$\mathcal{A}_2$**：** 有效簇间相互作用在主导阶上是库仑排斥，

$\mathcal{A}_3$**：** 有效簇间相互作用是 $\mathcal{O}(|x_a|^{-2})$。

这种区别不取决于相应子哈密顿量束缚态 φ^a （即通道）的选择；它仅由电荷决定（参见分别在第 1.2 节和第 1.3 节中独立引入的情形 1）。

~设对于 $a \in \mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ 算子 P^a 是在 $L^2(\mathbf{X}^a)$ 中到 $\ker(H^a - \lambda_0)$ 上的相应正交投影，并设 m_a 是该空间的维数。显然， $\Pi^a := P^a \otimes 1$ 投影到形如 $\varphi^a \otimes f_a$、$\varphi^a \in \ker(H^a - \lambda_0)$ 的函数所张成的空间上，该空间位于 $L^2(\mathbf{X})$ 中。我们将 $\operatorname{ran} P^a$（设其由正交归一基 φ^a_1、$\dots \varphi^a_{m_a}$ 张成）与 $\mathbb{C}^{m_a}$（使用该基）等同起来，同样地

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_a := L^2(\mathbf{X}_a, \mathbb{C}^{m_a}) \simeq \oplus_{m \le m_a} L^2(\mathbf{X}_a) \ni \oplus_{m \le m_a} f_{a,m} = f_a \\ \simeq S_a f_a := \sum_{m \le m_a} \varphi^a_m \otimes f_{a,m} \in \operatorname{ran} \Pi^a.\end{aligned}$$

$a \in \mathcal{A}_3$ 的有效势满足 $W_a := S_a^* I_a S_a = Q_a |x_a|^{-2} + B_a$，其中$Q_a$是一个仅依赖于 $\theta = \hat{x}_a = |x_a|^{-1} x_a$ 的 $m_a \times m_a$ 矩阵值函数，而$B_a = B_a(x_a) = \mathcal{O}(|x_a|^{-3})$。这里我们只研究 $Q_a = 0$ 的情形，也就是说，有效势是快速衰减的。对情形$m_a > 1$ 进行“恰当推广”，即将主要针对 $m_a = 1$ 在第 1.2 节和第 1.3 节中讨论的情形 2) 与情形 3) 之间的区分推广至此：分别令情形 2) 对应于 $Q_a \neq 0$，情形 3) 对应于 $Q_a = 0$。这意味着我们不考虑第4.3节中定义的情形 2)。因此，令 $\mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}} = \{a \in \mathcal{A}_3 | \, Q_a = 0\}$，我们假设

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}. \tag{5.154}$$

为简便起见，我们还假设 (4.68a) 和 (4.68b)，于是需要研究 Grushin预解式表示 (2.6)，其中（如第4.3节中） $\mathcal{H} = \sum_{a \in \widetilde{\mathcal{A}}} \oplus \mathcal{H}_a$、$\mathcal{H}_a = L^2(\mathbf{X}_a, \mathbb{C}^{m_a}) = \oplus_{m \le m_a} L^2(\mathbf{X}_a)$，且 $S = (S_a) : \mathcal{H} \to \mathcal{F} \subset \mathcal{G} = L^2(\mathbf{X})$ 定义为

$$f = \oplus_{a \in \widetilde{\mathcal{A}}} f_a \to Sf = \sum_{a \in \widetilde{\mathcal{A}}} S_a f_a; \quad f_a = \sum_{m \le m_a} \oplus f_{a,m}, \quad S_a f_a = \sum_{m \le m_a} \varphi^a_m \otimes f_{a,m}.$$

令（按通常记号） $T = (SS^*)^{-1} S$。这些算子 S 和 T 将自由地作用于加权空间中，我们还采用定理 5.14 的如下记号。

$$S_I f := \sum_{a \in \widetilde{\mathcal{A}}} I_a S_a f_a; \quad f = \oplus_{a \in \widetilde{\mathcal{A}}} f_a.$$

我们记 $-E_{\mathcal{H}}(\lambda_0 + z) = P(z) = P_0 + U(z) - z$，其中 $P_0 = \oplus_{a \in \widetilde{\mathcal{A}}} h_a$ 及 h_a 如下指定：若 $a \in \mathcal{A}_1$ 或 $a \in \mathcal{A}_2$，则取 $h_a = p_a^2 + w_a$（当 $m_a > 1$ 时作为对角算子作用），其中 w_a 分别按照第4.1.2小节或第4.1.3小节中的方式构造。若 $a \in \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}} = \mathcal{A}_3$，则取 $h_a = p_a^2$。对于任意 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，我们定义 $r_0(z) = (P_0 - z)^{-1} = \oplus_{a \in \widetilde{\mathcal{A}}} r_a(z)$。接下来我们记

$$P(z)^{-1} = \big(1 + r_0(z) U(z)\big)^{-1} r_0(z) = W(z)^{-1} r_0(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{5.155}$$

如前几节所述。

如果 λ_0 是正则的，也就是说，λ_0 既不是 H 的特征值也不是共振（或者更准确地说，定理 4.17 中的集合 $\mathcal{E}$ 是零集），那么核 $W^{\pm}(0) = 0$其中

$$W^{\pm}(0) = \lim_{\epsilon \to 0} W^{\pm}(\pm \mathrm{i}\epsilon) = 1 + \lim_{\epsilon \to 0} r_0(\pm \mathrm{i}\epsilon) \lim_{\epsilon \to 0} U(\pm \mathrm{i}\epsilon) = 1 + r_0^{\pm} U_0^{\pm} \tag{5.156}$$

极限取于适当的空间中。根据弗雷德霍姆理论，我们随后可以得到极限 $\lim_{\epsilon\to 0}(P \mp \mathrm{i}\epsilon)^{-1}$，进而由于 (5.2) 得到极限 $\lim_{\epsilon\to 0} R(\lambda_0 \pm \mathrm{i}\epsilon)$。实际上，当 λ_0 为正则时，我们可以在象限 $z \to 0$ 中取极限

$$\mathcal{Z}_\pm = \{\mathrm{Re}\, z \geq 0,\, \pm \mathrm{Im}\, z > 0\}.$$

为了更精确地说明这些断言，我们先考察三类（对角的）基本块 $r_a(z) = (h_a - z)^{-1}$。回顾第4.3节中的概念，

$$\mathcal{H}^k_{a,s} = H^k_s(\mathbf{X}_a, \mathbb{C}^{m_a}) \quad \text{for} \quad a \in \widetilde{\mathcal{A}},\, k \in \mathbb{R} \text{ and } s \in \mathbb{R}.$$

如果 $a \in \mathcal{A}_1$ 存在极限

$$r_a(0 \pm \mathrm{i}0) = \lim_{z\to 0, z\in\mathcal{Z}_\pm} r_a(z) \text{ in } \mathcal{L}\big(\mathcal{H}^{-1}_{a,s}, \mathcal{H}^1_{a,-s}\big), \quad s > 3/4,$$

参见第4.1.2小节。类似地，如果 $a \in \mathcal{A}_2$ 存在极限

$$r_a(0 \pm \mathrm{i}0) = \lim_{z\to 0, z\in\mathcal{Z}_\pm} r_a(z) \text{ in } \mathcal{L}\big(\mathcal{H}^{-1}_{a,s}, \mathcal{H}^1_{a,-s}\big), \quad s > 3/4,$$

不过在此情形下，$r_a(0+\mathrm{i}0) = r_a(0-\mathrm{i}0)$，且共同极限与引理 4.4 中的量 h_a^{-1}一致，参见 [Na] 和 [Ya2]。最后，对于 $a \in \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}$，我们从前几节可知

$$r_a(0 \pm \mathrm{i}0) = \lim_{z\to 0, z\in\mathcal{Z}_\pm} r_a(z) \text{ in } \mathcal{L}\big(\mathcal{H}^{-1}_{a,s}, \mathcal{H}^1_{a,-s}\big), \quad s > 1,$$

同样有 $r_a(0+\mathrm{i}0) = r_a(0-\mathrm{i}0)$，且此时共同极限 G_0 有明确表达式（每个对角项的核为 $(4\pi)^{-1}|x_a - y_a|^{-1}$）。

我们需要考虑对于 $k \in \mathbb{R}$、r、$s < -3/4$ 和 $t < -1$ 的空间

$$\mathcal{H}^k_{r,s,t} = \oplus_{b\in\mathcal{A}_1} \mathcal{H}^k_{b,r} \bigoplus \oplus_{b\in\mathcal{A}_2} \mathcal{H}^k_{b,s} \bigoplus \oplus_{b\in\mathcal{A}_3} \mathcal{H}^k_{b,t}.$$

例如，我们可以固定 $(r,s,t) = \bar{t} := -(1,1,4/3)$，然后通过考虑 $r_0(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{-1}_{-\bar{t}}, \mathcal{H}^1_{\bar{t}})$、$U(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{\bar{t}}, \mathcal{H}^{-1}_{-\bar{t}})$，进而考虑 $W(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{\bar{t}})$；$z \in \mathcal{Z}_\pm$，从而使用相应的空间 $\mathcal{H}^k_{\bar{t}}$。根据这些解释，我们可以验证 (5.156) 中的极限存在。由于 λ_0 对于 H 是正则的，因此 $\ker W^\pm(0) = 0$。由于 $W^\pm(0) \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^1_{\bar{t}})$，这也使我们能够取得 (5.155) 中的 $z \to 0$ 极限。

我们对参数作了一个不必要的简化假设，利用空间 $\mathcal{H}^k_{r,s,t}$，可以类似地推出以下结果。

命题 5.42。设定理 *4.17* 的条件以及此外的 (5.154)、(4.68a) 和(4.68b)成立。设 λ_0 为正则的。那么对于所有充分大的 r、$s < -3/4$和 $t < -1$，存在一个 $\epsilon > 0$，使得下列渐近行为在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{r,s,t})$ 中对 $z \to 0$ 属于 $\mathcal{Z}_\pm$成立。

$$W(z)^{-1} = W^\pm(0)^{-1} + \mathcal{O}(|z|^\epsilon). \tag{5.157a}$$

同样，在空间 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{-1}_{-r,-s,-t}, \mathcal{H}^1_{r,s,t})$

$$P(z)^{-1} = (P^\pm)^{-1} + \mathcal{O}(|z|^\epsilon); \quad (P^\pm)^{-1} := W^\pm(0)^{-1} r_0^\pm. \tag{5.157b}$$

定理 5.43 （正则情形）。 在命题 *5.42* 的条件下，对于 $R(\lambda_0+z)$，以下渐近行为成立，其中该算子从 H_t^{-1} 到 H^1_{-t}, $t>1$，当$z\to 0$ 属于 $\mathcal{Z}_\pm$ 且对于某个 $\epsilon=\epsilon(t)>0$时。

$$\begin{aligned} R(\lambda_0+z) &= R'(\lambda_0\pm \mathrm{i}0) \\ &\quad + (S-R'(\lambda_0\pm \mathrm{i}0)S_I)(P^\pm)^{-1}(S^*-S_I^*R'(\lambda_0\pm \mathrm{i}0))+\mathcal{O}(|z|^\epsilon). \end{aligned} \tag{5.158}$$

该结果可直接由 (2.6) 和命题 5.42 得出，然而后者实际上提供了关于预解式（各向异性）行为的更详细信息。例如， $R(\lambda_0+z)$ 的“最奇异部分”由项$S(P-z)^{-1}S^*\in\mathcal{L}(H_t^{-1},H^1_{-t})$给出，但 $S(P-z)^{-1}S^*\approx Sr_0(z)S^*\approx\Sigma_{a\in\mathcal{A}}P^a\otimes r_a(z)$仅需 $t>1$ 用于 $a\in\mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}$；对于 $a\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$， $r_a(z)$则更“小”。

如果 λ_0 是第二类异常点，即定理 4.17 中的集合 $\mathcal{E}$ 满足 $0\neq\mathcal{E}\subset L^2$，我们也可以推导出一个结果。为此，我们需要附加条件

$$\operatorname{ran}\Pi_H\subset L^2_t \text{ for some } t>1, \tag{5.159}$$

其中， Π_H 是对应于 H 的特征值 λ_0 的特征投影（注意 $\Pi_H L^2=\mathcal{E}$）。对于定理 5.16 的最后一个断言，我们可以采用同样的论证，另见注 5.17 2)。更确切地说，这意味着我们对H_σ采用上述过程：$=H-\sigma\Pi_H$、 $\sigma>0$较小。在给定假设下，λ_0既不是 H_σ的特征值，也不是其共振，因此对于 H_σ存在与（5.158）类似的版本；于是，我们便可以（如前几节所述）调用（5.87）。因此得到以下结果，其中依赖于“势” $-\sigma\Pi_H$ 的量均以下标 σ标记。

定理 5.44 (第二类例外点)。 设满足定理 *4.17* 的条件，并且还满足（5.154）、（4.68a）、（4.68b） 以及（5.159）。设 λ_0 是 H的特征值，但不是其共振。则对于 $R(\lambda_0+z)$ 作为从 H_s^{-1}到 H^1_{-s}的算子，在 $s>1$下，以及对于 $z\to 0$ 属于 $\mathcal{Z}_\pm$ 且某个 $\epsilon=\epsilon(s)>0$时，以下渐近行为成立。

$$\begin{aligned} R(\lambda_0+z) &= -z^{-1}\Pi_H+\sigma^{-1}\Pi_H+R'_\sigma(\lambda_0\pm \mathrm{i}0) \\ &\quad + (S-R'_\sigma(\lambda_0\pm \mathrm{i}0)S_{I_\sigma})(P_\sigma^\pm)^{-1}(S^*-S^*_{I_\sigma}R'_\sigma(\lambda_0\pm \mathrm{i}0))+\mathcal{O}(|z|^\epsilon). \end{aligned} \tag{5.160}$$

请注意，(5.160) 中缺少 $z^{-\frac12}$ 项。这看起来似乎与 [JK、Wa2] 中给出的已知结果不一致，因为在这些结果中，第二类异常点的预解式展开中含有 $z^{-\frac12}$ 项。然而，实际情况并非如此，因为在定理 5.44 所采用的关于阈值本征态的衰减假设下，通过显式计算可以验证， [JK、Wa2] 中的 $z^{-\frac12}$ 项也会消失。

接下来还需考察 λ_0 为第一类或第三类异常点的情形，也就是说（将这两种情形统一处理），定理 4.17 中的集合 $\mathcal{E}$ 并非严格包含于 L^2。为此，我们需要附加条件

$$\operatorname{ran}\Pi_H\subset L^2_t \text{ for some } t>3/2, \tag{5.161}$$

其中， Π_H 是到 $\ker(H-\lambda_0)$上的正交投影（即，当λ_0 是 H的特征值时，它就是特征投影）。根据定理 4.17，我们知道，条件 $\mathcal{E}\not\subset L^2$需要满足 $\mathcal{A}_3\neq\emptyset$。如果 $\mathcal{A}_1\neq\emptyset$ 和 $\mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}\neq\emptyset$，那么在确定某些算子的特征值 -1 的几何重数和代数重数时存在技术问题

$K^{\pm}$，参见（5.47）。前几节所使用的相同方法在此处不起作用（事实上，我们也不知道这些重数是否相等）。另一方面，在附加条件下

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}, \tag{5.162}$$

通过相同的证明（另见注 3.21 2)），(5.47) 的类似结论对 H_σ 成立。在此情况下，我们可以仿照定理 5.16 的证明，得到以下结果；该结果与定理 5.16 和 5.26 非常相似。

定理 5.45 (一阶或三阶例外点）。假设定理 *4.17* 的条件成立，并且还满足 (4.68a)、(4.68b)、(5.161) 和(5.162)。假设 λ_0 是 H 的共振。那么，对于 $z \to 0$ 属于 $\mathcal{Z}_\pm$ 且某个 $\epsilon = \epsilon(s) > 0$，以下渐近行为对 $R(\lambda_0 + z)$ 作为从 H_s^{-1} 到 H^1_{-s}、 $s > 1$ 的算子成立。

$$R(\lambda_0 + z) = -z^{-1}\Pi_H + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}} \sum_{j=1}^{\kappa} \langle u_j, \cdot \rangle u_j + \mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{5.163}$$

这里 $\{u_1, \ldots, u_\kappa\} \subset H^1_{(-1/2)^-}$ 是 H 的共振态基，且与 $\mathcal{Z}_\pm$的符号选择无关。

注记 5.46。 共振态基可以采用类似于定理 5.14 和备注 5.25 中归一化过程的方式来确定，参见 (5.13a) 和 (5.13b)（以及后续的计算）。

我们认为所施加的条件 (4.68a) 和 (4.68b) 在技术上很方便，但并非关键。读者若有兴趣，可以追踪定理 4.17 的证明概要，考察不施加这些条件的一般情形，并了解上述理论如何相应地修改。

我们已经讨论过需要 (5.162) 的原因，不过要指出的是，(5.154) 并非严格必要。事实上，对于 $\mathcal{A}_3 \setminus \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}} \neq \emptyset$ 的情形，已有一些结果（这对物理模型而言是一个有趣的情形）。此时，球对称势 Q_a 不应当“过于负”，更准确地说，我们需要对该集合中的所有 a 都有 $\sigma(-\Delta_\theta + Q_a) \subset (-1/4, \infty)$。在这一延拓下，对于 λ_0 处的预解式展开应当也有类似的结果；这里不再详述，参见 [Wa5]。不过，稍后我们将在一个确实满足 $\mathcal{A}_3 \setminus \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}} \neq \emptyset$的特殊情形下给出定理 5.43 的一个版本，参见小节 6.3.2。如果关于 $a \in \mathcal{A}_3 \setminus \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}$的上述谱条件不满足，则预期预解式渐近会呈现振荡性，参见 [SW] ，其中在一个单体“玩具模型”中检测到了振荡行为。我们不研究这一情形；它似乎并不是一个“容易的问题”。

第6章

应用

我们将把前面各章的内容应用于散射理论。我们主要研究满足条件1.5和2.4的非重数情形。通过额外的努力，重根情形也可以采用某种类似的方法处理；关于重根情形的实际论述，参见小节6.1.3和6.4.3。非重数情形本身已经相当复杂，我们认为只处理这一情形可以被视为“问题的核心”。在第6.2、6.3和6.4节中，我们只考虑小节 1.2.1 和 1.3.1中的物理模型，其粒子维数为 $n = 3$ （在第 6.4 节中还会进一步专门化）。

虽然本章所 प्रस्तुत的大部分 सामग्री都是新的，但显然依赖于已有文献，其中最重要的例如是 [DS1、JKW]。由于散射理论是一门历史悠久且研究充分的学科，相关文献十分丰富；这里提及相关工作 [Bo、Do、CT、De1、De2、De3、DG、Is2、Is3、Is4、IT、Ne、Sk2、Sk4、Sk5、Sk6、Sk7、SW、Wa6、Ya1、Ya3、Ya4、Ya5]。显然，这份列表并不完整。

6.1 负的缓慢衰减有效势

对于条件 2.4 中给出的簇分解 $a = a_0$，我们施加吸引性条件 (4.6)。更准确地说，假设 $\rho < 2$ ，并且簇间势 $I_a(x_a) = I_{a_0}(x_a) = I_0(x_a)$ 满足条件

$$\begin{aligned} &\exists R \geq 0 \quad \exists \epsilon > 0 \quad \forall y \in \mathbf{X}_a \text{ with } |y| \geq R : \\ &\qquad I_a(y) \leq -\epsilon \langle y \rangle^{-\rho} \text{ and } -2I_a(y) - y \cdot \nabla I_a(y) \geq \epsilon \langle y \rangle^{-\rho}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

我们假设

$$\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(H'), \tag{6.2}$$

或者等价地， $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(\breve{H})$。如果 (6.2) 不成立，我们可以按照小节2.4中的约定修改将要讨论的理论，参见注4.18。

由第3章可知，边界值 $\breve{R}(\lambda \pm \mathrm{i}0)$ 在实邻域 $I \ni \lambda_0$ 中（在加权空间中）是光滑的。我们完全按照小节3.3.2中的做法取 I、 $R = R_0 \geq 1$ 和算子 $\breve{\cdot}: B$ （这里的 B 不应与同一章中的算子 $B_\kappa = B_{\kappa,R} = B(\kappa^2 B^2 + 1)^{-1}$ 混淆）。

此外，我们假设

$$\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(H). \tag{6.3}$$

如果 (6.3) 不满足，且 Π_H 是相应的特征投影，那么对于 $\sigma>0$，$\lambda_0\notin\sigma_{\rm pp}(H-\sigma\Pi_H)$，并且我们可以考虑针对 $H_\sigma=H-\sigma\Pi_H$ 的 H' 构造，记作 H'_σ。由于特征函数呈多项式衰减，这与第3章的框架非常契合，参见定理 4.2、4.12 和 4.17 1)。事实上，如果 $\sigma>0$ 取得足够小，则条件 $\lambda_0\notin\sigma_{\rm pp}(H')$ 意味着将 H' 替换为 H'_σ 后仍具有相同的性质，参见定理 5.26 之前的讨论。这将导出一个类似于 (5.160) 的预解公式。为简单起见，我们施加 (6.2) 以及 (6.3)，从而得到物理模型预解公式 (5.158) 的如下类似式 (6.4)。

在这些条件下，根据第3章和第4章（另见注 5.17 3）），我们知道，在形如 $I_\delta^+=[\lambda_0,\lambda_0+\delta]\subset I$ 且 $\delta>0$ 很小的区间内，存在连续边界值 $R(\lambda\pm{\rm i}0)$（属于适当的空间）。事实上，我们有如下公式

$$R(\lambda\pm{\rm i}0)=E^\pm(\lambda)-E_+^\pm(\lambda)E_{\mathcal H}^\pm(\lambda)^{-1}E_-^\pm(\lambda),\tag{6.4}$$

其中，简写 $I_0=I_{a_0}$ 和 $p_0=p_{a_0}$ 为，

$$\begin{aligned}
E^\pm(\lambda)&=R'(\lambda\pm{\rm i}0),\\
E_+^\pm(\lambda)&=(1-R'(\lambda\pm{\rm i}0)I_0)S,\\
E_-^\pm(\lambda)&=S^*(1-I_0R'(\lambda\pm{\rm i}0)),\\
E_{\mathcal H}^\pm(\lambda)&=(\lambda-\lambda_0)-(p_0^2+S^*I_0S-S^*I_0R'(\lambda\pm{\rm i}0)I_0S).
\end{aligned}$$

我们还有

$$R'(\lambda\pm{\rm i}0)=\breve R(\lambda\pm{\rm i}0)-(p_0^2-\lambda)^{-1}\Pi=\breve R(\lambda\pm{\rm i}0)\Pi'.$$

矩阵值算子 $W=S^*I_0S$ 可以很好地由一个满足全局维里条件的对角算子近似；事实上，可以由恒等式的一个倍数近似，记为 $w\mathbf{1}$，参见第4.1.2小节开头的讨论。与同一小节中一样，我们相应地修改势 $V(z)$，并将所得结果记为 $v(z)$。令 $h=(p_0^2+w)\mathbf{1}$, $r(z)=(h-z)^{-1}$，并且

$$r_\lambda^\pm=r(\lambda-\lambda_0\pm{\rm i}0)\text{ and }v_\lambda^\pm=v(\lambda\pm{\rm i}0),$$

并注意到

$$\begin{aligned}
-E_{\mathcal H}^\pm(\lambda)&=h+v_\lambda^\pm-(\lambda-\lambda_0),\\
-E_{\mathcal H}^\pm(\lambda)^{-1}&=r_\lambda^\pm(\lambda)\big(\mathbf{1}+v_\lambda^\pm r_\lambda^\pm(\lambda)\big)^{-1};\\
v_\lambda^\pm&=-S^*I_0R'(\lambda\pm{\rm i}0)I_0S+\mathcal O(r^{-1-\rho}).
\end{aligned}\tag{6.5}$$

如果 $m_a:=$ 维核$(H^a-\lambda_0)=1$, $a=a_0$，我们可以在这里用 $\mathcal O(r^{-\infty})$ 替换 $\mathcal O(r^{-1-\rho})$，后者表示一个多项式衰减项。无论如何，该项都是与 λ 无关的局部势（即一个函数）。将上述表达式代入 (6.4)，即可得到待研究的 $R(\lambda\pm{\rm i}0)$ 的公式。

注意

$$\big(\mathbf{1}+v_\lambda^\pm r_\lambda^\pm\big)^{-1}\in\mathcal L(L^2_s)\cap\mathcal L(\mathcal B_{s_0});\quad s\in(s_0,1/2+\rho3/4),\ s_0=1/2+\rho/4.\tag{6.6}$$

当 $m_a > 1$ 时，这是我们所能做到的最好结果。若 $\lambda_0 > \Sigma_2$ 且 $m_a = 1$，则任意 $s \in (s_0, 1/2+\rho)$均适用。另一方面，若 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 且 $m_a = 1$，则对任意 $s \in (s_0, 2\rho + 2 - s_0)$，这个逆算子存在于 $\mathcal{L}(L^2_s)$ 中，参见 (4.12)。特别地，对任意 $\psi \in \mathcal{B}_{s_0}$，我们有如下公式（本节中我们始终将 $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{1/2}$,$\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*_{1/2}$ 和 $\mathcal{B}^*_0 := \mathcal{B}^*_{1/2,0}$ 简写为），

$$\begin{aligned} R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\psi &= S\phi^\pm_a(\lambda) + \breve{R}(\lambda \pm \mathrm{i}0)\psi^\pm_a(\lambda); \\ \phi^\pm_a(\lambda) &= r^\pm_\lambda f^\pm_a(\lambda) \in \mathcal{B}^*_{s_0}(\mathbf{X}_a), \\ f^\pm_a(\lambda) &= \big(\mathbf{1} + v^\pm_\lambda r^\pm_\lambda\big)^{-1} S^* \big(1 - I_0 \breve{R}(\lambda \pm \mathrm{i}0)\Pi'\big)\psi \in \mathcal{B}_{s_0}(\mathbf{X}_a), \\ \psi^\pm_a(\lambda) &= \Pi'\big(\psi - I_0 S\phi^\pm_a(\lambda)\big) \in \mathcal{B}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

由此可知，对于任意 $s > s_0$，$\mathcal{L}(L^2_s, L^2_{-s})$值函数 $R(\cdot \pm \mathrm{i}0)$ 在 I^+_δ 上是连续的。对于每个 $\lambda \in I^+_\delta$，算子 $R(\lambda \pm \mathrm{i}0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{s_0}, \mathcal{B}^*_{s_0})$。将（6.7）的“主要部分”单独列出，写成下式会很方便:

$$R(\lambda \pm \mathrm{i}0) = S r^\pm_\lambda S^* + \breve{R}(\lambda \pm \mathrm{i}0)\Pi' + \breve{\breve{R}}(\lambda \pm \mathrm{i}0). \tag{6.8}$$

这里，$R(\lambda \pm \mathrm{i}0)$ 表示为若干项之和。例如注意到，对于任意 $\psi \in \mathcal{B}_{s_0}$（如上所述），$f^\pm_a(\lambda) - S^*\psi \in L^2_s$ 对于任意 $s \in (s_0, 1/2 + \rho 3/4)$。

注 6.1。特别要注意，（6.4）以及（6.7）和（6.8）对 $\lambda = \lambda_0$均成立。这是所施加的正则性条件（6.3）的结果。对于将在第 6.3 节中讨论的其他模型，也有类似于（6.7）和（6.8）的公式。同样，这要求满足正则性，即在阈值处不存在束缚态和共振态。还要注意，在情形（6.3）不满足时，将 H 替换为 $H_\sigma = H - \sigma\Pi_H$ 的技巧并不限于吸引性慢衰减有效势的情形，即条件（6.1），也可用于满足以下版本（4.15）的排斥性慢衰减有效势:

$$\exists R \geq 0\, \exists \epsilon > 0\, \exists \bar\rho \in [\rho, \tfrac{2}{3}(1+\rho))\, \forall y \in \mathbf{X}_a \text{ with } |y| \geq R: \quad I_a(y) \geq \epsilon \langle y \rangle^{-\bar\rho}.$$

这显然已经在定理 5.44 的证明中完成了，并且和之前一样，得益于特征函数的多项式衰减，这也是可行的。对于具有非缓慢衰减有效势的可能阈值特征函数（参见渐近条件 (4.20)），多项式衰减并不存在，因此在此类情况下，(6.3) 成为一个非平凡的假设，但请参见定理 5.44。

6.1.1 索末菲定理

我们对阈值 λ_0 施加上述条件 (6.1)–(6.3)。首先，我们回顾关于上述 λ_0 的索末菲定理的以下版本，参见 [AIIS，第 1.10]号推论，该版本扩展了开创性工作 [Is4]。

定理 6.2. 对于任意 $\lambda \in I^+_\delta \setminus \{\lambda_0\}$，存在 $R = R_0 \geq 1$ 和 $\sigma > 0$，使得对于任意实函数 $\chi(\cdot < \sigma) \in C^\infty(\mathbb{R})$，若其支撑于$(-\infty, \sigma)$ 且其导数具有紧支集，并且对于任意 $\psi \in \mathcal{B}$

$$\chi(\pm\breve{B} < \sigma) R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\psi \in \mathcal{B}^*_0;\ \breve{B} = B_R. \tag{6.9}$$

此外（对每个符号） $\phi = R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\psi (\in \mathcal{B}^*)$ 是$(H-\lambda)\phi = \psi$的解。

反之，如果对于给定的 $\psi \in \mathcal{B}$， $\phi \in L^2_{-\infty}$ 满足 （$H-\lambda$）$\phi = \psi$，并且（对于˘“加号”或“减号”中的任一个） χ（$\pm B < \sigma$）$\phi \in \mathcal{B}^*_0$ 对于某个 $\sigma > 0$ 以及所有此类函数 χ（$\cdot < \sigma$）</style}都成立，那么 （$\lambda \pm$ i0）ψ （符号相同）。

这里（很可能） $R = R(\lambda) \to \infty$ 且 $\sigma = \sigma(\lambda) \to 0$ 对于 $\lambda \downarrow \lambda_0$成立。我们陈述索末菲定理的一个新版本，此时针对 $\lambda = \lambda_0$，但除此之外仍满足相同的条件。（定理在零能量处的单体版本见 [Sk4]。）作为比较，回顾引理 4.10 中的量 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s_0,\ 0}$，

$$\mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s_0,0} = \{u \in \mathcal{B}^*_{s_0,0} \mid (H-\lambda_0)u = 0, \quad \Pi' u \in \mathcal{B}^*_0\}.$$

Let

$$\breve{B}_\rho = r^{\rho/4}\, \breve{B}\, r^{\rho/4}; \quad r = r_R,\, \breve{B} = B_R,\, R = R_0,$$

回顾一下， $R_0 \geq 1$ 的选取与我们版本的Mourre估计在 λ_0 处一致（如小节3.3.2中所做）。

定理6.3 (阈值处的索末菲定理)。 存在 $\sigma > 0$，使得对于任意实函数 $\chi(\cdot < \sigma)$ $\in C^\infty(\mathbb{R}) \in C^\infty$，该函数支撑于$(-\infty, \sigma)$，且其导数具有紧支集；并且对于任意 $\psi \in \mathcal{B}_{s_0}$，函数 $\phi = \phi^{\pm} = R(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)\psi \in \mathcal{B}^*_{s_0}$ 满足

$$\begin{gathered} \Pi'\phi \in \mathcal{B}^*, \\ \chi(\pm\breve{B} < \sigma)\Pi'\phi \in \mathcal{B}^*_0, \\ \chi(\pm\breve{B}_\rho < \sigma)\Pi\phi \in \mathcal{B}^*_{s_0,0}, \\ (H-\lambda_0)\phi = \psi. \end{gathered} \tag{6.10}$$

反过来，假设（对于“加号”或“减号”中的任一种） $\phi \in \mathcal{B}^*_{s_0}$ 对于某个 $\sigma > 0$、所有此类函数 $\chi(\cdot < \sigma)$ 以及给定的 $\psi \in \mathcal{B}_{s_0}$满足(6.10)，那么$\phi = R(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)\psi$ （取相同的符号）。

证明。 我们只考虑“+”的情形。根据命题 3.16，对于某个 $\sigma > 0$

$$\chi(\breve{B} < \sigma)\breve{R}(\lambda_0 + \mathrm{i}0)\Pi'\psi \in \mathcal{B}^*_0. \tag{6.11}$$

（这是针对 $\lambda_0 > \Sigma_2$的；如果 $\lambda_0 = \Sigma_2$，则该陈述显然成立。）注意到 $\Pi'\psi \in \mathcal{B}$，并且（6.11）在将 $\breve{B}$ 替换为 $B_\kappa = \breve{B}(\kappa^2\breve{B}^2 + 1)^{-1}$ ($\kappa > 0$ 较小)后仍成立。然后使用另一个同类型的函数，例如 $\tilde{\chi}(\cdot < \sigma)$，即可得到（6.11），使得

$$\chi(b < \sigma) = \chi(b < \sigma)\tilde{\chi}(b/(\kappa^2 b^2 + 1) < \sigma).$$

利用 [FS，可以证明定理4.1和4.2] （此处省略参数）对所有足够小的 $\sigma > 0$均成立

$$\begin{gathered} \langle x_a\rangle^{t-s_0}\chi\big(\breve{B}_\rho < \sigma\big) S r^+_{\lambda_0} \langle x_a\rangle^{-t-s_0-\epsilon} f \in L^2; \\ f \in L^2,\, t, \epsilon > 0. \end{gathered} \tag{6.12}$$

我们使用（6.7）可得

$$\phi^+ = R(\lambda_0 + \mathrm{i}0)\psi = S\phi^+_a(\lambda_0) + \breve{R}(\lambda_0 + \mathrm{i}0)\psi^+_a(\lambda_0). \tag{6.13}$$

现在，利用（6.11）和（6.12）分别处理（6.13）的第二项和第一项，即可得到（6.10）。

为证明第二个断言（唯一性部分），注意到 $\phi^+ = R(\lambda_0 + \mathrm{i}0)\psi$是该问题的一个特解。因此，我们可以假设 $\psi = 0$。由定理 4.2 和 4.12，只需证明 $\phi \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}_{-s_0,\,0}$（这里若 $\lambda_0 = \Sigma_2$，我们使用相同的记号），从而只需证明

$$\phi \in \mathcal{B}^*_{s_0,0}, \quad \Pi'\phi \in \mathcal{B}^*_0. \tag{6.14}$$

引入一个光滑二次单位分解 $1 = \chi(\cdot < \sigma)^2 + \chi(\cdot > \sigma)^2$，使得 $\chi(b < \sigma) = 1$ 对 $b < \sigma/2$成立。对于 $R \geq 1$，令函数 $\chi_R = \chi_R(r)$由式 (1.29) 给出。简记 $\theta_R = \sqrt{-\chi_R'}$ 后，我们便可估计

$$\begin{aligned}
&-\langle \chi_R'(r)\rangle_{\Pi'\phi} - \langle r^{-\rho/2}\chi_R'(r)\rangle_{\Pi\phi} \\
&\quad \leq \tfrac{2}{\sigma}\big(s_R + t_R\big) + v_R; \\
&s_R = \langle \check{B}\rangle_{\chi(\check{B}>\sigma)\theta_R\Pi'\phi}, \\
&t_R = \langle \check{B}_\rho\rangle_{\chi(\check{B}_\rho>\sigma)r^{-\rho/4}\theta_R\Pi\phi},
\end{aligned}$$

其中 $v_R \to 0$ 对 $R \to \infty$成立。接下来我们写出

$$\begin{aligned}
t_R &= \tilde{t}_R + \tilde{v}_R; \\
\tilde{t}_R &= \langle \check{B}\rangle_{\chi(\check{B}_\rho>\sigma)\theta_R\Pi\phi},
\end{aligned}$$

并注意到 $\tilde{v}_R = \mathcal{O}(R^{\rho/2-1}) \to 0$ 对 $R \to \infty$成立。进一步进行交换后，我们（应当）得到

$$\begin{aligned}
&-\langle \chi_R'(r)\rangle_{\Pi'\phi} - \langle r^{-\rho/2}\chi_R'(r)\rangle_{\Pi\phi} \\
&\quad \leq \tfrac{2}{\sigma}\big(\langle \check{B}\rangle_{\theta_R\Pi'\phi} + \langle \check{B}\rangle_{\theta_R\Pi\phi}\big) + o(R^0) \\
&\quad = -\sigma^{-1}\langle \mathrm{i}[H, \chi_R]\rangle_\phi + o(R^0), \\
&\quad = 0 + o(R^0),
\end{aligned}$$

从而得到（6.14），因此也得到唯一性部分。不过，我们还需要论证上述估计的有效性。在第二步中，我们使用了

$$\operatorname{Re}\Pi\theta_R\check{B}\theta_R\Pi' = \mathcal{O}(R^{-2}),$$

参见（4.46）。在第一步中，我们使用了

$$\begin{aligned}
s_R - \langle \check{B}\rangle_{\theta_R\Pi'\phi} &= -\langle \check{B}\rangle_{\chi(\check{B}<\sigma)\theta_R\Pi'\phi} = o(R^0), \\
\tilde{t}_R - \langle \check{B}\rangle_{\theta_R\Pi\phi} &= o(R^0).
\end{aligned}$$

第一个界很容易得到，因为 $\check{B}\Pi'\phi \in \mathcal{B}^*$（后者可通过能量界看出 d).

要得到第二个界，首先注意到，同样假设 $\chi(B < \sigma)\Pi'\check{\phi} \in \mathcal{B}^*_0$ 我们可以逐字使用引理 4.10 证明中的步骤 V，从而得到$E^+_{\mathcal{H}}(\lambda_0)\, f = 0, \quad f = T^*\phi \in \mathcal{B}^*_{s_0}$（X$_a$）。接下来我们分解

$$\begin{aligned}
&\check{B}_\rho\Pi\phi = \check{B}_\rho S T^*\phi = S\check{B}_{a,\rho}f + \hat{\phi}, \\
&\qquad \check{B}_{a,\rho} = r_a^{\rho/4-1/2}\operatorname{Re}\big(x_a\cdot p_a\big)r_a^{\rho/4-1/2}; \quad r_a = r(x_a).
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$\check{}$ 根据引理3.4的证明中的论证，确实有 $\phi \in \mathcal{B}^*_{s_0}$，因此只需证明$B_{a,\ \rho} f \in \mathcal{B}^*_{s_0}$（X$_a$）。注意到算子$B_{a,\ \rho}$的符号为

$$\check{b}_{a,\rho} \in S\big(s, g\big); \quad s = \langle \xi/g_a \rangle^2, \quad g_a = \sqrt{-w}, \quad g = \langle x \rangle^{-2} \mathrm{d}x^2 + g_a^{-2} \mathrm{d}\xi^2, \tag{6.16a}$$

依次只需证明 $g_a^{-1}\mathrm{Op^w}(s) g_a f \in \mathcal{B}^*_{s_0}$(X$_a$)。如 [DS1, (4.15)] 所示

$$\mathrm{Op^w}(s) - g_a^{-1} h g_a^{-1} - 2 \in S(\langle x \rangle^{\rho-2}, g) \subset S(1, g). \tag{6.16b}$$

通过写成 $h = (h + v^+_{\lambda_0}) - v^+_{\lambda_0}$，我们最终得到对 $-g_a^{-2} v^+_{\lambda_0} f$ 的界，这显然$\check{}$属于 $\mathcal{B}^*_{s_0}$(X$_a$)。因此，$B_{a,\ \rho} f \in \mathcal{B}^*_{s_0}$(X$_a$) 得证。 □

推论6.4。 对于任意 $\psi \in \mathcal{B}$，函数 $\phi = R(\lambda_0 \pm \mathrm{i}0)\psi$ 满足以下界

$$\check{B}_\rho \Pi \phi,\ g_a^{-1} \check{B}_\rho g_a \Pi \phi \in \mathcal{B}^*_{s_0}. \tag{6.17}$$

证明。 代入 (6.8)，并使用 (6.15) 和 (6.16b)。于是注意到 $g_a^{-2} h T^* \phi \in \mathcal{B}^*_{s_0}$，因为 $2s_0 > \rho$。 □

6.1.2 散射矩阵在 λ_0 处的弹性部分

我们将在很大程度上使用 [DS1]。回顾(2.17)， S 由簇束缚态 $\varphi_1, \dots, \varphi_{m_a}$, $m_a = \dim \ker(H^a - \lambda_0)$, $a = a_0$给出。量$\alpha = \alpha_j = (a, \lambda_0, \varphi_j)$, $j \le m_a$称为一个通道。

为方便起见，我们在此假设 $m_a = 1$，并将 φ_1 记为 φ_α（有关 $m_a = 2$的示例，见6.1.3小节）。为联系到 [DS1]，采用另一种记号更为方便：回顾一下，除一个多项式衰减势 $w(x_a)$外， $\approx \langle I_a^{(1)}(\cdot + x_a) \rangle_{\varphi^a}$。现在假设

$$w = V_1 + V_2, \tag{6.18}$$

其中 V_1 和 V_2 满足 [DS1]的以下条件。（对于库仑系统，可取 $V_1(x) = -\gamma r^{-1}$，当 $r := |x| \ge 1$ 且 $V_2 = \mathcal{O}(r^{-2})$时。）

设 $n =$ 维 X$_a$。

条件 6.5。 函数 w 可以写成两个实值可测函数 $w = V_1 + V_2$之和，使得：存在某个 $\rho \in (0, 2)$，满足

(1) V_1 是一个光滑的负函数，在区域 $r \ge 1$ 中仅依赖于径向变量 r（即对于 $r = |x_a| \ge 1$, $V_1(x) = V_1(r)$）。存在 $\epsilon_1 > 0$使得

$$V_1(r) \le -\epsilon_1 r^{-\rho},\ r \ge 1.$$

(2) 对所有 $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$，都存在 $C_\gamma > 0$ 使得

$$\langle x \rangle^{\rho + |\gamma|} |\partial^\gamma V_1(x)| \le C_\gamma.$$

(3) 存在 $\tilde{\epsilon}_1 > 0$，使得

$$r V_1'(r) \le -(2 - \tilde{\epsilon}_1) V_1(r),\ r \ge 1. \tag{6.19}$$

(4) $V_2 = V_2(x)$ 是光滑的，并且存在 $\epsilon_2 > 0$，使得对所有 $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$

$$\langle x\rangle^{\rho+\epsilon_2+|\gamma|}|\partial^\gamma V_2(x)| \le C_\gamma.$$

以下条件仅在情形 $V_2 \neq 0$ 下需要（并将被）施加。

条件 6.6。设 V_1 如条件 6.5 中所述，且 $\alpha := \frac{2}{2+\rho}$。存在$\bar\epsilon_1 > \max(0, 1-\alpha(\rho+2\epsilon_2))$ 使得

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-1}V_1'(r)\Big(\int_1^r (-V_1(s))^{-\frac12}\mathrm{d}s\Big)^2 < 2^{-1}(1-\bar\epsilon_1^2),$$
$$\limsup_{r\to\infty} V_1''(r)\Big(\int_1^r (-V_1(s))^{-\frac12}\mathrm{d}s\Big)^2 < 2^{-1}(1-\bar\epsilon_1^2).$$

6.1.2.1 零能量下单体问题的散射， [DS1]

我们回顾 [DS1] 中在条件 6.5 和 6.6 下成立的一些结果。（关于一体散射理论的另一种处理方法，参见 [Is1]。）回想一下，对于任意$\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$， $\lambda \in [0,\infty)$ 以及来自适当的出射/入射区域的 x，方程组存在一个解

$$\begin{aligned} \ddot y(t) &= -2\nabla w(y(t)),\\ \lambda &= \tfrac14 \dot y(t)^2 + w(y(t)),\\ y(\pm1) &= x,\\ \omega &= \pm\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/|y(t)|. \end{aligned} \tag{6.20}$$

可以得到一个解的族 $y^\pm(t,x,\omega,\lambda)$，它正则地（至少连续地）依赖于参数。此外，所有“散射轨道”都具有这种形式。利用这些解，可以构造程函方程的一个解 $\phi^\pm(x,\omega,\lambda)$

$$\big(\nabla_x\phi^\pm(x,\omega,\lambda)\big)^2 + w(x) = \lambda \tag{6.21}$$

满足 $\nabla_x\phi^\pm(x,\omega,\lambda) = \frac12 \dot y(\pm1,x,\omega,\lambda)$。

对于 $R \ge 1$ 和 $\sigma \in (0,2)$

$$\begin{aligned} \Gamma^+_{R,\sigma}(\omega) &:= \{y\in\mathbb{R}^n \mid y\cdot\omega \ge (1-\sigma)|y|,\ |y|\ge R\};\ \omega\in\mathbb{S}^{n-1},\\ \Gamma^+_{R,\sigma} &:= \{(y,\omega)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^{n-1} \mid y\in\Gamma^+_{R,\sigma}(\omega)\}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

引理 6.7. 存在 $R_0 \ge 1$ 和 $\sigma_0 \in (0,2)$，使得对于所有 $R \ge R_0$ 以及所有正的 $\sigma \le \sigma_0$，系统 (6.20) 对所有数据 $(x,\omega)\in\Gamma^+_R$、σ 和 $\lambda \ge 0$都有唯一函数 $y^+(t,x,\omega,\lambda)$ $t \ge 1$作为解，满足 $y^+(t,x,\omega,\lambda)\in\Gamma^+_R$、$\sigma(\omega)$，对于所有$t \ge 1$均成立。在 $\Gamma^+_{R_0}$、$\sigma_0(\omega)$ 上定义向量场 $F^+(x,\omega,\lambda)$，其定义为

$$F^+(x,\omega,\lambda) = \tfrac12 \dot y^+(t=1,x,\omega,\lambda). \tag{6.23}$$

Then

$$\mathrm{rot}_x\, F^+(x,\omega,\lambda) = 0.$$

我们在 $(x,\omega,\lambda)\in\Gamma^+_{R_0,\sigma_0}\times[0,\infty[$ 处定义 $\phi^+(x,\omega,\lambda)$，要求 $\nabla_x\phi^+=F^+$ 且 $\phi^+(R_0\omega,\omega,\lambda)=\sqrt{\lambda}R_0$。令

$$\phi^-(x,\omega,\lambda):=-\phi^+(x,-\omega,\lambda)\text{ for }x\in\Gamma^-_{R_0,\sigma_0}(\omega):=\Gamma^+_{R_0,\sigma_0}(-\omega).$$

对于 $\xi\neq 0$，我们记 $\xi=\sqrt{\lambda}\omega$、$\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$，于是

$$\phi^\pm(x,\xi)=\phi^\pm(x,\omega,\lambda);\quad(x,\omega)\in\Gamma^\pm_{R_0,\sigma_0}.$$

为方便起见，我们稍微滥用记号，将 $(x,\xi)\in\Gamma^\pm_{R_0,\sigma_0}$ 写作 $(x,\omega,\lambda)\in\Gamma^\pm_{R_0,\sigma_0}\times(0,\infty)$（事实上，即使对于情形 $\xi=0$ 也是如此）。

固定 $0<\sigma<\sigma'<\sigma_0$ 后，我们引入一个光滑化的特征函数

$$\chi_{\sigma,\sigma'}(t)=\begin{cases}1, & \text{for } t\geq 1-\sigma,\\ 0, & \text{for } t\leq 1-\sigma'.\end{cases}\tag{6.24a}$$

接下来，根据 (6.24a) 以及 (1.29) 中的函数 $\bar{\chi}_R=1-\chi_R$，定义

$$a_0^\pm(x,\xi):=\chi_{\sigma,\sigma'}(\pm\hat{x}\cdot\hat{\xi})\bar{\chi}_{R_0}(|x|);\quad\hat{z}=z/|z|.$$

于是，我们在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上引入一个傅里叶积分算子 J_0^+，其定义为

$$(J_0^\pm f)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\pm(x,\xi)}a_0^\pm(x,\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi,\tag{6.24b}$$

其中

$$\hat{f}(\xi):=(2\pi)^{-n/2}\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x$$

表示 f 的傅里叶变换。

WKB方法建议用傅里叶积分算子 J^+ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上近似波动算子，其型式为

$$(J^+f)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^+(x,\xi)}a^+(x,\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi,\tag{6.25a}$$

其中，符号 $a^+(x,\xi)$ 支撑于 $\Gamma^+_{R_0,\sigma_0}$ 并通过迭代过程构造（该过程部分回顾于第 6.1.2.4 小节），旨在使差值 $T^+:=\mathrm{i}(hJ^+-J^+p^2)$ 在 $\Gamma^+_{R_0,\sigma}$ 中变小。我们有

$$(T^+f)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^+(x,\xi)}t^+(x,\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi,\tag{6.25b}$$

其中

$$t^+(x,\xi)=\big((2\nabla_x\phi^+(x,\xi))\cdot\nabla_x+(\triangle_x\phi^+(x,\xi))\big)\,a^+(x,\xi)-\mathrm{i}\triangle_x a^+(x,\xi).\tag{6.25c}$$

符号 $a^+(x,\xi)$ 和 $a_0^+(x,\xi)$ 在远离 $\xi=0$ 时具有相同的主导阶，更准确地说

$$a^+(x,\xi)\approx\big(\det\nabla_\xi\nabla_x\phi^+(x,\xi)\big)^{1/2}a_0^+(x,\xi)=\mathrm{e}^{\zeta^+(x,\xi)}a_0^+(x,\xi),\tag{6.25d}$$

而应将 $a^+(x,\xi)$ 视为右侧的“改进形式”。有关构造的详细信息，请参见 [DS1，第 5] 节。不过，由于我们将在第 6.1.2.4 小节中部分仿照这一构造，因此这里先回顾一下该方程

$$\big((2\nabla_x\phi^+(x,\xi))\cdot\nabla_x+(\triangle_x\phi^+(x,\xi))\big)\,\mathrm{e}^{\zeta^+(x,\xi)}=0, \tag{6.25e}$$

将 (6.25c) 变为如下形式

$$\begin{aligned} t^+&=\mathrm{e}^{\zeta^+}\big((2\nabla_x\phi^+)\cdot\nabla_x-\mathrm{i}A^+\big)b^+,\quad b^+=\mathrm{e}^{-\zeta^+}a^+,\\ A^+&=\Delta+2(\nabla\zeta^+)\cdot\nabla+(\Delta\zeta^+)+(\nabla\zeta^+)^2. \end{aligned} \tag{6.25f}$$

类似于 (6.25a)–(6.25c)，我们引入傅里叶积分算子 J^- 和 T^-，如下所示

$$\begin{aligned} (J^-f)(x)&=(2\pi)^{-n/2}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^-(x,\xi)}a^-(x,\xi)\hat f(\xi)\mathrm{d}\xi,\\ (T^-f)(x)&=(2\pi)^{-n/2}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^-(x,\xi)}t^-(x,\xi)\hat f(\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{6.26}$$

对于所有 $\tau\in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$，我们引入

$$\begin{aligned} (J^\pm(\lambda)\tau)(x)&=(2\pi)^{-n/2}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\pm(x,\omega,\lambda)}\tilde a^\pm(x,\omega,\lambda)\tau(\omega)\mathrm{d}\omega,\\ (T^\pm(\lambda)\tau)(x)&=(2\pi)^{-n/2}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\pm(x,\omega,\lambda)}\tilde t^\pm(x,\omega,\lambda)\tau(\omega)\mathrm{d}\omega, \end{aligned} \tag{6.27}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde a^\pm(x,\omega,\lambda)&=\tfrac{\lambda^{(n-2)/4}}{\sqrt{2}}a^\pm(x,\sqrt{\lambda}\omega),\\ \tilde t^\pm(x,\omega,\lambda)&=\tfrac{\lambda^{(n-2)/4}}{\sqrt{2}}t^\pm(x,\sqrt{\lambda}\omega). \end{aligned}$$

函数 $\tilde a^\pm$ 和 $\tilde t^\pm$ 在 $(x,\omega,\lambda)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{n-1}\times[0,\infty)$ 中连续，因此我们可以通过表达式 (6.27) 在 $\lambda=0$ 处定义 $J^\pm(\lambda)$ 和 $T^\pm(\lambda)$。这些性质依赖于 [DS1 的命题 5.3]，该命题陈述了函数的性质

$$\tilde\zeta^+(x,\omega,\lambda)=\zeta^+(x,\sqrt{\lambda}\omega)-\ln\lambda^{(2-n)/4};\quad \lambda>0.$$

In p特别地，可以得出存在局部一致极限（以及导数 ）

$$\tilde\zeta^+(x,\omega,0)=\lim_{\lambda\to0_+}\tilde\zeta^+(x,\omega,\lambda). \tag{6.28}$$

使用分解 $T^\pm(\lambda)=T^\pm{}_{\mathrm{bd}}(\lambda)+T^\pm{}_{\mathrm{pr}}(\lambda)$ 会很方便，这与 $\tilde t^\pm(x,\sqrt{\lambda}\omega)$ 的某种分解相一致，参见引理6.8及引理之前给出的参考文献。存在波动算子

$$W^\pm f=\lim_{t\to\pm\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}th}J_0^\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2}f=\lim_{t\to\pm\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}th}J^\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2}f;\ \hat f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}). \tag{6.29}$$

这两个算子 $W^\pm$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上等距地延拓，且延拓满足$hW^\pm=W^\pm p^2$。此外，

$$0=\lim_{t\to\mp\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}th}J_0^\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2}f=\lim_{t\to\mp\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}th}J^\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2}f;\ \hat f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}). \tag{6.30}$$

对于 $\rho \in (1/2, 2)$，我们可以将 $W^{\pm} = W^{\pm}{}_{\mathrm{dol}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi^{\pm}{}_{\mathrm{dol}}(p)}$ 表示为熟知的多拉尔波算子 [Do]（参见第 6.4 节中的（6.122））以及显式的依赖于实动量的相位因子$\psi^{\pm}{}_{\mathrm{dol}}$，见 [DS1, 定理 6.15]。

令 Δ_ω 表示球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。对于 $k \in \mathbb{R}$，我们定义球面 $H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = (1-\Delta_\omega)^{-k/2} L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 上的 Sobolev 空间。令 $\mathcal{L}^k_s = \mathcal{L}^k_s(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(H^k(\mathbb{S}^{n-1}),\ L^2_s(\mathbb{R}^n))$，并且对于任意 k、$s \in \mathbb{R}$，有 $\mathcal{L}^k = \mathcal{L}^k_0$。

对于 $\lambda > 0$，我们将限制 Fourier 变换 $\mathcal{F}_0(\lambda)$ 引入为

$$\mathcal{F}_0(\lambda) f(\omega) = \tfrac{\lambda^{(n-2)/4}}{\sqrt{2}} \hat{f}(\sqrt{\lambda}\omega). \tag{6.31}$$

令 $s > \frac{1}{2}$ 和 $k \geq 0$。注意，$\mathcal{F}_0(\lambda) \in \mathcal{L}(L^2_{s+k}(\mathbb{R}^n),\ H^k(\mathbb{S}^{n-1}))$ 连续依赖于 $\lambda > 0$。同样，$\mathcal{F}_0(\lambda)^* \in \mathcal{L}^{-k}_{-s-k}$ 连续依赖于 $\lambda > 0$。还要注意，算子

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} \mathcal{F}_0(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda : L^2(\mathbb{R}^n) \to \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} L^2(\mathbb{S}^{n-1})\, \mathrm{d}\lambda \tag{6.32}$$

是酉的，因此它将算子 p^2 对角化。形式上，我们有 $J^{\pm}(\lambda) = J^{\pm}\mathcal{F}_0(\lambda)^*$ 以及 $T^{\pm}(\lambda) = T^{\pm}\mathcal{F}_0(\lambda)^*$。形式恒等式 $W^{\pm}(\lambda) = W^{\pm}\mathcal{F}_0(\lambda)^* = (J^{\pm} + \mathrm{i}r(\lambda \mp \mathrm{i}0)T^{\pm})\mathcal{F}_0(\lambda)^*$ 使我们进而考虑波矩阵

$$W^{\pm}(\lambda) := J^{\pm}(\lambda) + \mathrm{i}r(\lambda \mp \mathrm{i}0)T^{\pm}(\lambda), \tag{6.33}$$

事实上，对于任意 $k \geq 0$，它们都属于 $\mathcal{L}^{-k}_{-s}$，其中 $s = s(k) > s_0$ 是适当的。在此空间中，$W^{\pm}(\lambda)$ 对 $\lambda \geq 0$（包括 $\lambda = 0$！）具有连续依赖性。

散射算子与 p^2 对易，而后者通过直积分映射（6.32）被对角化。因此，一般的可分解算子理论给出一个可测族 $\mathbb{R}_+ \ni \lambda \mapsto S(\lambda)$，其中散射矩阵 $S(\lambda)$ 对于几乎所有 λ 都是 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 上的酉算子，并且用映射（6.32）表示为

$$S \simeq \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} S(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. \tag{6.34}$$

[DS1] 的一个主要结果表明，对于 $\lambda \geq 0$ 散射矩阵

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= -2\pi J^+(\lambda)^* T^-(\lambda) + 2\pi \mathrm{i} T^+(\lambda)^* r(\lambda + \mathrm{i}0) T^-(\lambda) \\ &= -2\pi W^+(\lambda)^* T^-(\lambda) \end{aligned}, \tag{6.35}$$

定义一个酉算子 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$，其关于$\lambda \geq 0$强连续依赖。此外，(6.34)成立，并且

$$\forall k \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0 : \quad S(\lambda) \in \mathcal{L}(H^k(\mathbb{S}^{n-1}), H^{k-\epsilon}(\mathbb{S}^{n-1})), \tag{6.36}$$

关于 $\lambda \geq 0$范数连续依赖。因此，特别地，$S(\lambda)$将 $C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$映射到其自身。

DS [1] 的另一个适用于此处所讨论情形的主要结果（特别是不包括某个奇异项 V_3）如下：

除条件 6.5 和 6.6 外，假设 $V_1(r) = -\gamma r^{-\rho}$ 对 $r \geq 1$成立。那么，核 $S(0)(\omega, \omega')$ 在集合 $\{(\omega, \omega') \mid \omega \cdot \omega' = \cos \frac{\rho}{2-\rho}\pi\}$之外是光滑的。

6.1.2.2 自然数集体问题在 λ_0 处的弹性散射

利用前一小节中关于势 $w = V_1 + V_2$在变量 x_a 中的构造，并回顾 $-E_{\mathcal{H}}(\lambda \pm \mathrm{i}0) = h + v_\lambda^\pm + \lambda_0 - \lambda$, $h = p^2 + w$，我们引入波动算子

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\big(1\otimes J_0^\pm\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_a}Sf = \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\big(1\otimes J_0^\pm\big)S\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p_a^2+\lambda_0)}f;\\ \hat f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbf{X}_a\setminus\{0\})^{m_a}.\end{gathered} \tag{6.37}$$

我们考虑一个通道 $\alpha = (a, \lambda_0, \varphi_\alpha)$（回忆一下，这意味着 $H^a\varphi_\alpha = \lambda_0\varphi_\alpha$，其中 $\|\varphi_\alpha\| = 1$），为简便起见，从此处起假设

$$m_a = \dim\ker(H^a - \lambda_0) = 1 \tag{6.38}$$

（使 φ_α 本质上唯一）。在此假设下，上述极限不过就是通道波算子

$$\begin{aligned}W_\alpha^\pm f &= \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\big(1\otimes J_0^\pm\big)\varphi_\alpha\otimes\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p_a^2+\lambda_0)}f\\ &= \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\big(\varphi_\alpha\otimes J_0^\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p_a^2+\lambda_0)}f\big);\quad \hat f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbf{X}_a\setminus\{0\}).\end{aligned} \tag{6.39}$$

这促使我们定义

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)f(\omega) &= \tfrac{(\lambda-\lambda_0)^{(n-2)/4}}{\sqrt{2}}\hat f\big(\sqrt{\lambda-\lambda_0}\,\omega\big),\\ (J_N^\pm(\lambda)\tau)(x) &= (2\pi)^{-n/2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\pm(x,\omega,\lambda-\lambda_0)}\tilde a^\pm(x,\omega,\lambda-\lambda_0)\tau(\omega)\mathrm{d}\omega,\\ (T_N^\pm(\lambda)\tau)(x) &= (2\pi)^{-n/2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\pm(x,\omega,\lambda-\lambda_0)}\tilde t^\pm(x,\omega,\lambda-\lambda_0)\tau(\omega)\mathrm{d}\omega,\\ J_\alpha^\pm f &= \varphi_\alpha\otimes J^\pm f;\quad f = f(x_a),\\ T_\alpha^\pm &= \mathrm{i}\big(HJ_\alpha^\pm - J_\alpha^\pm(p_a^2+\lambda_0)\big),\\ J_\alpha^\pm(\lambda)\tau &= \varphi_\alpha\otimes J_N^\pm(\lambda)\tau,\\ T_\alpha^\pm(\lambda)\tau &= \varphi_\alpha\otimes T_N^\pm(\lambda)\tau + \breve T_\alpha^\pm(\lambda)\tau;\\ \breve T_\alpha^\pm(\lambda) &= \mathrm{i}I_a^{(2)}J_\alpha^\pm(\lambda) + \mathrm{i}\big(I_a^{(1)} - w\big)J_\alpha^\pm(\lambda),\\ W_\alpha^\pm(\lambda) &= J_\alpha^\pm(\lambda) + \mathrm{i}R(\lambda\mp\mathrm{i}0)T_\alpha^\pm(\lambda),\\ S_{\alpha\alpha}(\lambda) &= -2\pi J_\alpha^+(\lambda)^*T_\alpha^-(\lambda) + 2\pi\mathrm{i}T_\alpha^+(\lambda)^*R(\lambda+\mathrm{i}0)T_\alpha^-(\lambda).\end{aligned}$$

这里形式上

$$J_N^\pm(\lambda) = J^\pm(\lambda-\lambda_0) = J^\pm\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)^* \text{ and } T_N^\pm(\lambda) = T^\pm(\lambda-\lambda_0) = T^\pm\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)^*,$$

其中，$J^\pm$是按照（6.25a）–（6.25c）和（6.26）所定义的 $J_0^\pm$和 $T^\pm = \mathrm{i}(hJ^\pm - J^\pm p_a^2)$ 的“改进形式”。

$\breve T_\alpha^\pm(\lambda)$ 的第一项具有任意阶的多项式衰减，例如可精确表述为：对于任意 k、$s\in\mathbb{R}$，$\breve T_\alpha^\pm(\lambda)\in\mathcal{L}_s^k = \mathcal{L}_s^k(\mathbf{X}) := \mathcal{L}(H^k(\mathbb{S}^{n-1})\,L_s^2(\mathbf{X}))$，$\Pi\big(I_a^{(1)}-w\big)J_\alpha^\pm(\lambda)$ 也具有同样的情形。但 $\Pi'\big(I_a^{(1)}-w\big)J_\alpha^\pm(\lambda) = \Pi' I_a^{(1)}\Pi J_\alpha^\pm(\lambda)$ 仅比 w 高一个幂次，更准确地说，其型式为 $\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-1-\rho})J_\alpha^\pm(\lambda)$。因此我们可以记为

$$\Pi\breve T_\alpha^\pm(\lambda) = \mathcal{O}\big(\langle x\rangle^{-\infty}\big),\quad \Pi'\breve T_\alpha^\pm(\lambda) = \mathcal{O}\big(\langle x\rangle^{-1-\rho}\big)J_\alpha^\pm(\lambda). \tag{6.40}$$

对于公式中的“非限制”量 $\check{T}_\alpha^\pm$，同样的说明也适用

$$T_\alpha^\pm = \varphi_\alpha \otimes T^\pm + \check{T}_\alpha^\pm; \quad \check{T}_\alpha^\pm = I_a^{(2)} J_\alpha^\pm + \big(I_a^{(1)} - w\big) J_\alpha^\pm.$$

此外，由于对于任意 f with $\hat{}\ f \in C_c^\infty(\mathrm{X}_a \setminus \{0\})$，量 $\|T_\alpha^\pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p_a^2+\lambda_0)} f\|$ 在 $\pm\infty$ 处可积，Cook论证给出了波动算子$W_\alpha^\pm$存在。注意，可以通过驻相位论证证明这种可积性（例如使用（6.43）和引理6.8 3) 的一个版本）。

利用 [DS1、附录A]，由（6.39）定义的散射矩阵的弹性部分可证明由上文引入的表达式 $S_{\alpha\alpha}(\lambda)$、 $\lambda > \lambda_0$ 给出。我们将研究这个算子的一些性质。该算子作用于$\mathcal{L}(\mathbb{S}^{n-1})$上，且范数至多为一。

我们陈述 $J^\pm(\lambda)$ 和 $T^\pm(\lambda) = T^\pm{}_{\mathrm{bd}}(\lambda) + T^\pm{}_{\mathrm{pr}}(\lambda)$ 的一些基本性质，参见 [DS1、（5.8）、（5.16）、（5.19）以及引理6.8和6.9]，并参见 [DS1、定理6.11]的证明（我们将其调整到当前问题中）。首先回顾一些记号。最基本的记号是函数

$$g(r) = g_\lambda = \sqrt{\lambda - \lambda_0 - V_1(r)}, \quad \lambda \geq \lambda_0,$$

其大致控制动量。接下来我们引入符号

$$a(x,\xi) = \frac{\xi^2}{g_\lambda(|x|)^2}, \quad b(x,\xi) = \frac{\xi}{g_\lambda(|x|)} \cdot F(x), \tag{6.41}$$

其中， F 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的任意（今后固定的）向量场，延拓 $F(x) = \hat{}x = x/r$ 至 $r = |x| \geq 1$。当然，符号 a 和 b 也依赖于 λ，但为方便起见，此处以及下文的记号中均省略这一依赖。设 $\tilde{\chi}_-$、 $\tilde{\chi}_+ \in C^\infty$为满足 $\tilde{\chi}_- + \tilde{\chi}_+ = 1$ 且非负的函数，并且

$$\operatorname{supp} \tilde{\chi}_- \subseteq (-\infty, 1 - \bar{\sigma}], \tag{6.42a}$$
$$\operatorname{supp} \tilde{\chi}_+ \subseteq [1 - 2\bar{\sigma}, \infty), \tag{6.42b}$$

其中，数 $\bar{\sigma} > 0$ 需要取得足够小，其大小取决于前一小节中使用的参数 σ （见（6.24a））以及相位 $\phi^\pm(x,\xi)$的性质。设 χ_-、 $\chi_+ \in C^\infty$ 为满足 $\chi_- + \chi_+ = 1$且非负的函数，并且

$$\operatorname{supp} \chi_- \subseteq (-\infty, 2), \tag{6.42c}$$
$$\operatorname{supp} \chi_+ \subseteq (1, \infty). \tag{6.42d}$$

于是引入符号

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \chi_+(a), \\ \chi_2^\pm &= \chi_-(a)\tilde{\chi}_-(\pm b), \\ \chi_3^\pm &= \chi_-(a)\tilde{\chi}_+(\pm b). \end{aligned} \tag{6.42e}$$

这些符号属于 [FS, DS1]中研究的一类（依赖于参数的）伪微分算子。该类算子的“普朗克常数”为 $\langle x\rangle^{-1} g_\lambda(|x|)^{-1}$，特别地不超过 $\langle x\rangle^{\rho/2-1}$。注意，相应的（右量子化）算子满足单位分解

$$1 = \mathrm{Op}^{\mathrm{r}}(\chi_1) + \mathrm{Op}^{\mathrm{r}}(\chi_2^\pm) + \mathrm{Op}^{\mathrm{r}}(\chi_3^\pm). \tag{6.43}$$

回顾 $\mathcal{L}^k := \mathcal{L}(H^k(\mathbb{S}^{n-1}),\ L^2(\mathbb{R}^n))$， $k \in \mathbb{R}$。

引理6.8。 设 χ_1、 $\chi_2^{\pm}$ 和 $\chi_3^{\pm}$ 由(6.42e)给出。

1) 对于所有 $k \in [0,\infty)$ 和 $\epsilon > 0$,

$$(\langle x\rangle g_\lambda)^{-k}\langle x\rangle^{-1/2-\epsilon} g_\lambda^{1/2} J_N^{\pm}(\lambda) \tag{6.44a}$$

是关于 $\lambda \in [\lambda_0,\infty)$ 的连续 $\mathcal{L}^{-k}$ 值函数。其界常数与 $\lambda \geq \lambda_0$ 无关,

$$g_\lambda^{1/2} J_N^{\pm}(\lambda) \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathbb{S}^{n-1}), \mathcal{B}^*_{1/2}(\mathbb{R}^n)\big).$$

2) 对于所有 $k \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$,

$$(\langle x\rangle g_\lambda)^{-k}\langle x\rangle^{1/2-\epsilon} g_\lambda^{-1/2} \mathrm{Op}^{\mathrm{r}}(\chi_2^{\pm}) T_{\mathrm{bd}}^{\pm}(\lambda-\lambda_0) \tag{6.44b}$$

是关于 $\lambda \in [\lambda_0,\infty)$ 的连续 $\mathcal{L}^{-k}$ 值函数。

3) 对于所有 $k, m \in \mathbb{R}$,

$$\langle x\rangle^m \mathrm{Op}^{\mathrm{r}}(\chi_1+\chi_3^{\pm}) T_{\mathrm{bd}}^{\pm}(\lambda-\lambda_0),\ \langle x\rangle^m T_{\mathrm{pr}}^{\pm}(\lambda-\lambda_0)\ \textit{and}\ \langle x\rangle^m \mathrm{Op}^{\mathrm{r}}(\chi_1) J_N^{\pm}(\lambda) \tag{6.44c}$$

是连续的 $\mathcal{L}^{-k}$ 值函数 $\lambda \in [\lambda_0,\infty)$。

本引理将与 [DS1 命题 4.1] （针对当前问题调整）中的以下摘录结合使用。注意，$\mathrm{Op}^{\mathrm{l}}(\chi_2^{\pm}) = \mathrm{Op}^{\mathrm{r}}(\chi_2^{\pm})^*$由左量子化给出。

引理6.9。 令 Λ 表示任意形如 $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_0']$ 的区间，并令 $r_\lambda^{\pm} = r(\lambda - \lambda_0 \pm \mathrm{i}0)$ 适用于 $\lambda \in \Lambda$。那么以下界对 $\lambda \in \Lambda$ 一致成立，且相应的 $\mathcal{L}\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big)$ 值函数是连续的。

1) 对所有 $\epsilon > 0$ ，存在 $C > 0$ 使得

$$\|\langle x\rangle^{-\epsilon-1/2} g_\lambda^{1/2} r_\lambda^{\pm} g_\lambda^{1/2} \langle x\rangle^{-\epsilon-1/2}\| \leq C. \tag{6.45a}$$

2) 对所有 $s \geq 0$ 和 $0 \leq \epsilon < \epsilon'$ ，存在 $C > 0$

$$\|(\langle x\rangle g_\lambda)^s \langle x\rangle^{\epsilon-1/2} g_\lambda^{1/2} \mathrm{Op}^{\mathrm{l}}(\chi_2^{\pm}) r_\lambda^{\pm} g_\lambda^{1/2} \langle x\rangle^{-\epsilon'-1/2} (\langle x\rangle g_\lambda)^{-s}\| \leq C. \tag{6.45b}$$

现在取足够大的 $\tau \in H^k(\mathbb{S}^{n-1})$（实际上任意 $k > 0$ 都足够），我们将通过结合（6.7）与引理 6.8 和引理 6.9，证明 $S_{\alpha\alpha}(\lambda)\tau$ 是 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 中定义良好的元素，事实上还对 $\lambda \in I_\delta^+$ 具有连续依赖。

将（6.7）代入公式

$$S_{\alpha\alpha}(\lambda)\tau = -2\pi J_\alpha^+(\lambda)^* T_\alpha^-(\lambda)\tau + 2\pi\mathrm{i} T_\alpha^+(\lambda)^* R(\lambda+\mathrm{i}0) T_\alpha^-(\lambda)\tau. \tag{6.46}$$

忽略来自 $T_\alpha^-(\lambda)$ 的贡献（如定理 6.10 证明开头所示，它的贡献是一个“部分平滑算子”），利用引理6.8，我们得到第一项 $-2\pi J_\alpha^+(\lambda)^* T_\alpha^-(\lambda)\tau \approx -2\pi J_N^+(\lambda)^* T_N^-(\lambda)\tau \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$。

对于式 (6.46) 中的第二项，我们（再次）忽略包含 $\check{T}^{\pm}_{\alpha}(\lambda)$ 的项，只考虑 $\varphi_\alpha \otimes T^{\pm}_N(\lambda)$，并利用式 (6.43) 写出

$$T^{\pm}_N(\lambda) = \mathrm{Op}^{\mathrm{r}}(\chi_1 + \chi^{\pm}_3)T^{\pm}_N(\lambda) + \mathrm{Op}^{\mathrm{r}}(\chi^{\pm}_2)T^{\pm}_N(\lambda) = T^{\pm}_{1,3}(\lambda) + T^{\pm}_2(\lambda).$$

根据引理6.8 3)，第一项具有强衰减，因此我们来考虑看似较差的这一项，其值（相差一个常数因子）：

$$\begin{aligned}\Big(\varphi_\alpha \otimes T^{+}_2(\lambda)\Big)^{*} R(\lambda + \mathrm{i}0)\varphi_\alpha \otimes T^{-}_2(\lambda)\\ = T^{+}_2(\lambda)^{*} S^{*} R(\lambda + \mathrm{i}0) S T^{-}_2(\lambda).\end{aligned}$$

“主导项”的贡献，参见（6.8），分别为

$$T^{+}_2(\lambda)^{*} r^{+}_{\lambda} T^{-}_2(\lambda) \text{ and } T^{+}_2(\lambda)^{*} S^{*} \check{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\Pi' S T^{-}_2(\lambda),$$

分别如此。第二项为零。对于第一项，我们在“$+$”的情形下使用引理6.9 2)，并可知，确实 $T^{+}_2(\lambda)^{*} r^{+}_{\lambda} T^{-}_2(\lambda)\tau \approx T^{+}_N(\lambda)^{*} r^{+}_{\lambda} T^{-}_N(\lambda)\tau$ 是 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$中的一个定义良好的元素。

当然，还有其他项需要考虑，其中有些项也需要用到引理6.9 1)。我们可以检查所有其他项（参见定理 6.10 的证明），并发现它们均定义良好，且连续依赖于 λ。此外，我们可以将 $S_{\alpha\alpha}(\lambda)$ 的作用公式写为

$$S_{\alpha\alpha}(\lambda)\tau = -2\pi W^{+}_{\alpha}(\lambda)^{*} T^{-}_{\alpha}(\lambda)\tau, \tag{6.47}$$

并且这是一个关于 $\lambda \in I^{+}_{\delta}$ 对于 $\tau \in H^{k}(\mathbb{S}^{n-1})$、$k > 0$的连续 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$–值函数。

接下来，我们将考察 τ所需的正则性程度，该程度由 k的大小衡量。令

$$S_w(\lambda - \lambda_0) = -2\pi J^{+}_N(\lambda)^{*} T^{-}_N(\lambda) + 2\pi \mathrm{i} T^{+}_N(\lambda)^{*} r(\lambda + \mathrm{i}0) T^{-}_N(\lambda); \quad \lambda \geq \lambda_0.$$

注意，$S_w(\cdot)$是由（6.35）给出的单体问题的散射矩阵。我们将考察以下量

$$\check{S}_{\alpha\alpha}(\lambda)\tau = S_{\alpha\alpha}(\lambda)\tau - S_w(\lambda - \lambda_0)\tau.$$

通过上述初步研究，项 $S_w(\cdot)$是“首项”，并且我们知道 $k = 0$ 对该项有效，尽管为了算子连续性，需要对任意 $\epsilon > 0$ 满足 $k = \epsilon$，参见（6.36）及其相关讨论。因此，我们预计 $S_{\alpha\alpha}(\lambda)\tau$ 的良定义性，以及 λ 的连续依赖性，而对 τ施加的正则性要求更低。事实上，对于一个可计算的 $\epsilon > 0$，我们可以证明 $k = -\epsilon$ 对该项有效，甚至对于算子连续性也是如此。更一般地，对于满足以下任一选项的任意 $k \geq 0$，我们有如下结果

$$\begin{cases} k + 1/2 + (1/2 - k)\rho/2 < 1/2 + \rho/2, & k \in [0, 1/2], \\ k + 1/2 < 1/2 + \rho/2, & k > 1/2, \end{cases} \tag{6.48}$$

或者等价地表述为，其中一个选项

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq 1/2 \quad \text{and} \quad k < \rho(4 - 2\rho)^{-1}, \\ 1/2 < k < \rho/2, \quad \rho > 1. \end{cases} \tag{6.49}$$

定理 6.10。 设 (6.38)，即 $m_a = 1$。对于任何满足 (6.49) 的 $k \geq 0$ ，算子

$$\breve{S}_{\alpha\alpha}(\lambda) = S_{\alpha\alpha}(\lambda) - S_w(\lambda - \lambda_0) \in \mathcal{L}\big(H^{-k}(\mathbb{S}^{n-1}), H^k(\mathbb{S}^{n-1})\big)$$

并且连续依赖于$\lambda \in I_\delta^+$ 。

注记 6.11。 1）(6.48)右端的数 $s = 1/2 + \rho/2$ 就是(6.54)中出现的数。左端来自对因子$\langle x\rangle^{k+1/2} g^{k-\frac{1}{2}}$的估计；它由幂 $C\langle x\rangle^c$一致有界，其中 c是(6.48)左侧所示的表达式。如果在定理 6.10中将 I_δ^+ 替换为$I_\delta^+ \setminus \{\lambda_0\}$ ，则任意 $k < \rho/2$ 都足够。

2）我们假设了 $m_a = 1$。不过，感兴趣的读者可以验证，如果 $m_a > 1$，则定理 6.10 仍然成立。此外，散射矩阵的非对角元素记为 $S_{\beta\alpha}(\lambda)$，其中 $\alpha \neq \beta$；它们满足与定理 6.10中 $S_{\alpha\alpha}(\lambda)$的$\breve{}$相同的断言。

$\breve{}$3）在附加条件 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 下，可以证明 $S_{\alpha\alpha}(\lambda)$ 在空间 $H^l(\mathbb{S}^{n-1})$、 $l \in \mathbb{R}$ 中任意一个空间上都是有界的，并且对 $\lambda \in I_\delta^+$ 连续依赖；事实上，它还具有部分光滑性。更确切地说，在这种情况下，可以证明对于所有 $l \in \mathbb{R}$ ，算子 $\breve{S}_{\alpha\alpha}(\lambda)$ $\in \mathcal{L}\big(H^{l-k},\ H^{l+k}\big)$ ，并且对 $\lambda \in I_\delta^+$ 连续依赖。这里的 $k \geq 0$ 满足（6.49）；事实上，对于更大的、可计算的 k，利用下文针对 $s = 1 + \rho$ 的（6.54）也可得到这一结论（回顾（6.5）之后的讨论，后一个有界性条件对 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 成立）。证明结合了第 6.1.2.4 小节中的思想与 [DS1、命题 4.1], ，但我们不再展开。特别地，由于 $S_w(\lambda - \lambda_0)$ 具有类似的性质，但要损失一个“ϵ-光滑性”，参见 [DS1、定理 7.2], ，我们得出（更准确地说），对于所有 $l \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$，算子 $S_{\alpha\alpha}(\lambda) \in \mathcal{L}\big(H^l,$ $H^{l-\epsilon}\big)$ ，并且对 $\lambda \in I_\delta^+$ 连续依赖。注意，这意味着对于 $\lambda \in I_\delta^+$ 和 $\tau \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$, $S_{\alpha\alpha}(\lambda)\tau \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$。

$\breve{}$定理 *6.10* 的证明。我们需要处理上文讨论 $-2\pi J_\alpha^+(\lambda)^* T_\alpha^-(\lambda)$ 时遗漏的项 $-2\pi J_\alpha^+(\lambda)^* T_\alpha^-(\lambda)$。（注意， $-2\pi J_\alpha^+(\lambda)^*\big(\varphi_\alpha \otimes T_N^\pm(\lambda)\big)$ 已经在 $\breve{S}_{\alpha\alpha}(\lambda)$ 的定义中$\breve{}$减去了。）令 $J_\alpha^+(\lambda)^* T_\alpha^-(\lambda) = J_\alpha^+(\lambda)^* \Pi T_\alpha^-(\lambda)$，即可应用 (6.40)。

$\breve{}$ $S_{\alpha\alpha}(\lambda)$ 的其余项分为三组互不相交的项，具体取决于是否依赖于：

a) $\breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0))$，且不依赖于 $r_\lambda^+\big(1 + v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1}$。 **b)** $r_\lambda^+\big(1 + v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1}$，且不依赖于 $\breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0))$。 **c)** $\breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0))$，并且依赖于 $r_\lambda^+\big(1 + v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1}$。

a). 我们需要处理

$$T_\alpha^+(\lambda)^* \breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\Pi' T_\alpha^-(\lambda) = \breve{T}_\alpha^+(\lambda)^* \Pi' \breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\Pi' \breve{T}_\alpha^-(\lambda).$$

根据 (6.40)，我们需要给出界

$$\langle x\rangle^{-1/2-\rho+\epsilon} J_\alpha^\pm(\lambda) \in \mathcal{L}^{-k} = \mathcal{L}^{-k}(\mathbf{X}) \quad \text{for some } \epsilon > 0. \tag{6.50}$$

根据引理6.8 1)，这要求

$$\begin{cases} k + (1/2-k)\rho/2 < \rho, & k \in (0, 1/2], \\ k < \rho, & k > 1/2, \end{cases} \tag{6.51}$$

这比 (6.49) 弱。

b)。我们需要处理

$$\begin{aligned} & T_\alpha^+(\lambda)^* S r_\lambda^+ \big(1 + v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1} S^* T_\alpha^-(\lambda) - T_N^+(\lambda)^* r_\lambda^+ T_N^-(\lambda) \\ & = \Big(T_\alpha^+(\lambda)^* S r_\lambda^+ S^* T_\alpha^-(\lambda) - T_N^+(\lambda)^* r_\lambda^+ T_N^-(\lambda)\Big) \\ & - T_\alpha^+(\lambda)^* S r_\lambda^+ \big(1 + v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1} v_\lambda^+ r_\lambda^+ S^* T_\alpha^-(\lambda) \end{aligned}$$

由于 (6.40)，第一项是一个平滑算子，即属于 $\mathcal{L}(H^{-l}(\mathbb{S}^{n-1})\ H^l(\mathbb{S}^{n-1}))$，对任意 $l \in \mathbb{R}$ 均成立。在证明余下部分中，我们将频繁使用

$$1 = \langle x\rangle^{-s}\langle x\rangle^s; \quad s = 1/2 + \rho/2. \tag{6.52}$$

对于第二项，由于 (6.6) 和 (6.52)，只需给出其界

$$\langle x\rangle^{-s} r_\lambda^\mp S^* T_\alpha^\pm(\lambda) \in \mathcal{L}^{-k}. \tag{6.53}$$

这里我们使用了

$$v_\lambda^+ \in \mathcal{L}(L^2_{-s}, L^2_s). \tag{6.54}$$

（使用(6.38)我们可以做得更好，参见(6.5)之后的讨论，但我们更倾向于采用一种在推广到 $m_a > 1$的情形时也或多或少显然适用的方法，参见注6.11 2)。由于(6.40)和引理6.8 3)，要证明(6.53)，只需对下式给出界

$$\langle x\rangle^{-s} r_\lambda^\mp T_2^\pm(\lambda) \in \mathcal{L}^{-k}, \tag{6.55}$$

或者等价地

$$T_N^\pm(\lambda)^* \mathrm{Op}^{\mathrm{l}}(\chi_2^\pm) r_\lambda^\pm \in \mathcal{L}\big(L^2_s, H^k(\mathbb{S}^{n-1})\big). \tag{6.56}$$

根据引理6.8，反过来只需证明

$$(\langle x\rangle g_\lambda)^k \langle x\rangle^{\epsilon-1/2} g_\lambda^{1/2} \mathrm{Op}^{\mathrm{l}}(\chi_2^\pm) r_\lambda^\pm \in \mathcal{L}\big(L^2_s, L^2\big) \text{ for some } \epsilon > 0. \tag{6.57}$$

我们需要给出界

$$\begin{aligned} & (\langle x\rangle g_\lambda)^k \langle x\rangle^{\epsilon-1/2} g_\lambda^{1/2} \mathrm{Op}^{\mathrm{l}}(\chi_2^\pm) r_\lambda^\pm g_\lambda^{1/2} \langle x\rangle^{-1/2-2\epsilon} (\langle x\rangle g_\lambda)^{-k} \\ & \qquad \Big(g_\lambda^{-1/2} \langle x\rangle^{1/2+2\epsilon} (\langle x\rangle g_\lambda)^k \langle x\rangle^{-s}\Big) \in \mathcal{L}(L^2). \end{aligned}$$

利用 (6.45b)，我们需要检验最后一个因子是否有界。这相当于

$$\begin{cases} k+1/2+2\epsilon+(1/2-k)\rho/2\le s, & k\in(0,1/2],\\ k+1/2+2\epsilon\le s, & k>1/2, \end{cases} \tag{6.58}$$

根据 (6.48)，当 $\epsilon>0$ 足够小时，这确实成立。

c)。由 $2\pi\mathrm{i}$ 这一公因子提取后，需要考虑四项：

$$\begin{aligned} S_1&=-T_\alpha^+(\lambda)^* S r_\lambda^+\big(1+v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1} S^* I_a \breve R(\lambda+\mathrm{i}0)\Pi' T_\alpha^-(\lambda),\\ S_2&=T_\alpha^+(\lambda)^* \breve R(\lambda+\mathrm{i}0)\Pi' I_a S r_\lambda^+\big(1+v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1} S^* I_a \breve R(\lambda+\mathrm{i}0)\Pi' T_\alpha^-(\lambda),\\ S_3&=-T_\alpha^+(\lambda)^* \breve R(\lambda+\mathrm{i}0)\Pi' I_a S r_\lambda^+ S^* T_\alpha^-(\lambda),\\ S_4&=T_\alpha^+(\lambda)^* \breve R(\lambda+\mathrm{i}0)\Pi' I_a S r_\lambda^+\big(1+v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1} v_\lambda^+ r_\lambda^+ S^* T_\alpha^-(\lambda). \end{aligned}$$

对于 S_1，我们将分解式 (6.52) 插入因子 r_λ^+ （左侧的那个因子）的右侧。假设我们能够证明

$$\langle x\rangle^s S^* I_a \breve R(\lambda\pm\mathrm{i}0)\Pi' T_\alpha^{\mp}(\lambda)\in\mathcal{L}^{-k},$$

那么利用 (6.53) 和 (6.58) 即可得证。但根据 (6.40)，这一项具有如下型式

$$\mathcal{O}(\langle x\rangle^{s-1-\rho})\breve R(\lambda\pm\mathrm{i}0)\Pi'\breve T_\alpha^{\mp}(\lambda)=\mathcal{O}(\langle x\rangle^{s-1-\rho})\breve R(\lambda\pm\mathrm{i}0)\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-1-\rho})J_\alpha^{\mp}(\lambda), \tag{6.59}$$

对此我们可以应用 (6.50)。对于 S_3 的论证相同。

我们通过在因子 r_λ^+ （左侧因子）的右侧和左侧分别插入(6.52)来处理 S_2，然后使用(6.59)和引理6.9 1)（以界定 $\langle x\rangle^{-s} r_\lambda^+ \langle x\rangle^{-s}$）。

我们通过在最左侧因子 r_λ^+ 的右侧和最右侧因子r_λ^+ 的左侧插入(6.52)来处理 S_4。然后我们调用(6.53)和(6.54)。

□

6.1.2.3 λ_0处的弹性散射：一种“几何”方法

按照 [DS1第 8] 节的思路，我们将对小节6.1.2.2中研究的算子$S_{\alpha\alpha}(\lambda)$给出一种“几何”描述。为使讨论简洁，我们将仅考虑极限情形 $\lambda=\lambda_0$。关于一般 N体情形下（几乎所有）非阈值能量的类似结果，请参见 [Sk6]。

我们回顾单体问题的以下构造，参见 [DS1，命题 5.6], 这也可以作为讨论 $\lambda>\lambda_0$ 的基础。

引理 *6.12.* 存在 $R\ge R_0$ 和 $\tilde\sigma\in(0,\sigma_0]$，使得对于所有满足 $|x|\ge R$ 和 $\lambda\ge\lambda_0$ 的 $x=|x|\hat x\in\mathbb{R}^n$，都存在唯一的 $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$，满足 $\omega\cdot\hat x\ge 1-\tilde\sigma$（等价地，$x\in\Gamma_{R,\tilde\sigma}^+(\omega)$），且 $\partial_\omega\phi^+(x,\omega,\lambda-\lambda_0)=0$。我们用记号$\omega_{\mathrm{crt}}^+=\omega_{\mathrm{crt}}^+(x,\lambda)$表示这个向量。它关于 x 光滑，并且对于某个 $\check\epsilon=\check\epsilon(\rho,\bar\epsilon_1,\epsilon_2)$，有 >0

$$\partial_x^\gamma(\omega_{\mathrm{crt}}^+-\hat x)=\mathcal{O}(|x|^{-\check\epsilon-|\gamma|}).$$

Let

$$\phi(x,\lambda)=\phi^+(x,\omega_{\mathrm{crt}}^+(x,\lambda),\lambda-\lambda_0). \tag{6.60}$$

这个函数满足程函方程

$$(\partial_x\phi(x,\lambda))^2 + w(x) = \lambda - \lambda_0; \quad |x| \geq R \ and \ \lambda \geq \lambda_0.$$

在球对称情形下（即 $V_2(x) = V_2(r)$），我们有 $\omega^+_{\rm crt} = \hat{}x$ 并且

$$\phi(x,\lambda) = \phi_{\rm sph}(x,\lambda) := \int_{R_0}^{|x|} \sqrt{\lambda - \lambda_0 - w(r)}\mathrm{d}r + \sqrt{\lambda-\lambda_0}R_0. \tag{6.61}$$

参照定理6.3，令 $\chi(\cdot < \sigma)$ 为其中所述的函数之一（其中 $\sigma > 0$ 足够小），但附加满足性质 $\breve{}\chi(\cdot < \sigma) = 1$ 在 $(-\infty, \sigma/2)$ 上。令 B 和 B_ρ 如定理6.3中所给，并令

$$\mathcal{V}^+_{-s_0,\sigma}(\lambda_0) = \{u \in \mathcal{B}^*_{s_0}(\mathbf{X}) \mid \Pi' u \in \mathcal{B}^*, \quad \chi(\breve{B} < \sigma)\Pi' u \in \mathcal{B}^*_0, \quad (H-\lambda_0)u = 0\},$$
$$\mathcal{R}^+_\sigma = \{u \in \mathcal{B}^*_{s_0,0}(\mathbf{X}) \mid \Pi' u \in \mathcal{B}^*, \quad \chi(\breve{B} < \sigma)\Pi' u \in \mathcal{B}^*_0\}.$$

我们用记号 $\hat{}y = y/|y|$ 表示（非零）向量 $y \in \mathbf{X}_a$，以及

$$u^+_a(y) = c_n\, g^{-1/2}_{\lambda_0}(|y|)\,|y|^{-\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(y,\lambda_0)}, \quad u^-_a(y) = \overline{u^+_a(y)}; \quad c_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{1-n}{4}}(4\pi)^{-1/2},$$
$$v^\pm_a(y) = \pm\langle y\rangle^{\rho/2} g_{\lambda_0}(|y|)u^\pm_a(y).$$

定理 6.13。 1) 通道波矩阵

$$W^-_\alpha(\lambda_0) : \ L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathcal{V}^+_{-s_0,\sigma}(\lambda_0) \subset \mathcal{B}^*_{s_0}$$

是定义良好的双连续同构。（特别地，空间$\mathcal{V}^+_{-s_0,\sigma}(\lambda_0)$ 不依赖于较小的 $\sigma > 0$。）

2）对于所有 $\tau \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$，向量 $\tau^+ = S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)\tau$和 $\phi^+_\tau = W^-_\alpha(\lambda_0)\tau$分别是 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 和 $\mathcal{V}^+_{-s_0,\sigma}(\lambda_0)$中的唯一向量，并满足

$$\phi^+_\tau(x) - \varphi_\alpha(x^a)\Big(u^-_a(x_a)\tau(-\widehat{x_a}) + u^+_a(x^a)\tau^+(\widehat{x_a})\Big) \in \mathcal{R}^+_\sigma. \tag{6.62a}$$

3）对于所有 $\tau \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$，并且令 $\tau^+ = S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)\tau$和 $\phi^+_\tau = W^-_\alpha(\lambda_0)\tau$如上所述，

$$\big(\breve{B}_\rho \Pi\phi^+_\tau\big)(x) - \varphi_\alpha(x^a)\Big(v^-_a(x_a)\tau(-\widehat{x_a}) + v^+_a(x^a)\tau^+(\widehat{x_a})\Big) \in \mathcal{B}^*_{s_0,0}. \tag{6.62b}$$

证明。我们将 (6.7) 代入定义

$$W^-_\alpha(\lambda) = J^-_\alpha(\lambda) + \mathrm{i}R(\lambda{+}\mathrm{i}0)T^-_\alpha(\lambda),$$

从而引出对.....的研究

$$\breve{W}^-_\alpha(\lambda) := W^-_\alpha(\lambda) - \varphi_\alpha \otimes W^-_w(\lambda - \lambda_0), \tag{6.63a}$$

其中， $W^-_w(\cdot)$ 是小节 6.1.2.1 中所讨论的单体问题的入射波矩阵。取 $\lambda = \lambda_0$。按照定理

6.10 的证明（即利用引理 6.8 和引理 6.9），并利用命题 3.16，可以验证，对于满足（6.49）的任意$k \geq 0$

$$\begin{aligned} &\widetilde{W}_\alpha^-(\lambda_0)H^{-k} \subset \mathcal{B}_{s_0}^*, \quad \Pi'\widetilde{W}_\alpha^-(\lambda_0)H^{-k} \subset \mathcal{B}^*, \\ &\chi(\check{B} < \sigma)\Pi'\widetilde{W}_\alpha^-(\lambda_0)H^{-k} \subset \mathcal{B}_0^*, \quad \chi(\check{B}_\rho < \sigma)\Pi\widetilde{W}_\alpha^-(\lambda_0)H^{-k} \subset \mathcal{B}_{s_0,0}^*. \end{aligned} \tag{6.63b}$$

（对于最后一个性质，我们可以使用下文给出的论证 (6.64)。）特别地，(6.63b) 对 $k = 0$ 成立。结合 (6.63b) 的前三个断言与 [DS1、定理 8.2] （其中包含关于 W_w^-(0) 的信息），我们得出 $W_\alpha^-(\lambda_0)$ 的值域是 $\mathcal{V}_{-s_0,\ \sigma}^+(\lambda_0)$ 的子集，也就是说，1) 中的映射是定义良好的映射。用同样的论证可知，该映射是连续的。

II. 任取一个 $\tau \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$。利用分解 (6.63a)、命题 3.16、[DS1、定理 8.2] 和 [Sk5] ，我们推得 (6.62a) 在 $\phi_\tau^+ = W_\alpha^-(\lambda_0)\tau$ 且某个 $\tau^+ \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 的条件下成立。

利用公式

$$S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)^* = 2\pi W_\alpha^-(\lambda_0)^* T_\alpha^+(\lambda_0) = 2\pi \mathrm{i}\, W_\alpha^-(\lambda_0)^*(H - \lambda_0)J_\alpha^+(\lambda_0)$$

以及 [DS1 和定理 5.7] ，我们对任意 $\tilde{\tau} \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 计算

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\tau}, S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)\tau\rangle &= -2\pi\mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \langle J_\alpha^+(\lambda_0)\tilde{\tau}, [H, \chi_n(r)]W_\alpha^-(\lambda_0)\tau\rangle \\ &= -4\pi \lim_{n\to\infty} \langle J_\alpha^+(\lambda_0)\tilde{\tau}, g_{\lambda_0}\chi_n' W_\alpha^-(\lambda_0)\tau\rangle \\ &= \langle \tilde{\tau}, \tau^+\rangle. \end{aligned}$$

我们得出 $\tau^+ = S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)\tau$。（注意，按照我们的归一化， $1/\sqrt{2}$ 中多了一个因子： [DS1，(3.13) 和定理 5.7]。）

III。为证明唯一性，假设对于给定的 $\tau \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$，公式 (6.62a) 对 $\tau^+ = \tau_1$ 和 $\phi_\tau^+ = \phi_1^+$ 成立，也对 $\tau^+ = \tau_2$ 和 $\phi_\tau^+ = \phi_2^+$ 成立，那么由定理6.3（取 $\psi = 0$ 应用）可得 $\phi_1^+ = \phi_2^+$，进而推出 $\tau_1 = \tau_2$。断言 1) 中关于单射性的部分可类似证明。

IV. 我们证明 1) 中的映射是满射（由此，利用开映射定理即可完成 1)）。因此，设给定 $u \in \mathcal{V}_{-s_0,\sigma}^+(\lambda_0)$，那么我们需要找到 $\tau \in L^2 = L^2(\mathbb{S}^{n-1})$，使得 $u = W_\alpha^-(\lambda_0)\tau$。由于假设 $\chi(B < \sigma)\Pi' u \in \mathcal{B}_0^*$，我们可以照搬引理

$$T^* u \in \mathcal{B}_{s_0}^* = \mathcal{B}_{s_0}^* \quad {}_a \qquad \tilde{f} = 1 + r_{\lambda_0}^+ v_{\lambda_0}^+ \ f \in \mathcal{B}_{s_0}^* \qquad E_{\mathcal{H}}^+ f = 0 \ \ f = h\tilde{f} = 0$$

的证明中的步骤 V，从而得出，((X))。向量 : ( ) 满足 。现在 根据 [DS1，定理 8.2] ，我们知道映射 $W_w^- : L^2($ $\mathbb{S}^{n-1}) \to \{f \in \mathcal{B}_{s_0}^* \mid h\tilde{f} = 0\}$ 是双射。因此，对于某个 $\tau \in L^2$，有 $\tilde{f} = W_w^-(0)\tau$。我们要证明 $u := u - W_\alpha^-(\lambda_0)\tau = 0$。为此，我们检验定理6.3的条件（其中 $\psi = 0$）。由于 $u \in \mathcal{V}_{-s_0,\sigma}^+(\lambda_0)$，且 $u \in \mathcal{V}_{-s_0,\sigma}^+(\lambda_0)$，只需检验 $\chi(B_\rho < \sigma)\Pi u \in \mathcal{B}_{s_0,0}^*$。利用 (6.63a) 和 (6.63b)，我们模 $\mathcal{B}_{s_0,0}^*$ 计算

$$\begin{aligned} \chi(\check{B}_\rho < \sigma)\Pi\check{u} &\approx \chi(\check{B}_\rho < \sigma)Sf - \chi(\check{B}_\rho < \sigma)\Pi\varphi_\alpha \otimes W_w^-(0)\tau \\ &= \chi(\check{B}_\rho < \sigma)S\tilde{f} - \chi(\check{B}_\rho < \sigma)SW_w^-(0)\tau + \chi(\check{B}_\rho < \sigma)S(f - \tilde{f}) \\ &= \chi(\check{B}_\rho < \sigma)S(f - \tilde{f}). \end{aligned}$$

˘我们令 $B_{a,\ \rho}$ 如 (6.15) 中所给，然后写出、代入并估计

$$\chi(\breve{B}_\rho<\sigma)S-S\chi(\breve{B}_{a,\rho}<\sigma)=-\int_{\mathbb{C}}\breve{R}_\rho(z)[\breve{B}_\rho S-S\breve{B}_{a,\rho}]\breve{R}_{a,\rho}(z)\mathrm{d}\mu_\chi(z)$$

根据引理3.4的证明中的论证，估计

$$\chi(\breve{B}_\rho<\sigma)S(f-\tilde{f})\approx-S\chi(\breve{B}_{a,\rho}<\sigma)r^+_{\lambda_0}v^+_{\lambda_0}f\approx 0; \tag{6.64}$$

在最后一步中，我们使用了引理6.9。因此 ˇ$u=0$，证毕。

__ V。还需证明3）。首先注意到 ˇ $B_\rho\Pi W^-_\alpha(\lambda_0)\tau\in\mathcal{B}^*_{s_0}$，参见定理6.3和推论6.4的证明（以及（6.64））。记 $u=W^-_\alpha(\lambda_0)\tau$和 $f=T^*u\in\mathcal{B}^*_{s_0}$，我们知道 $E^+_{\mathcal{H}}f=0$ 和 ˇ$B_{a,\ \rho}f\in\mathcal{B}^*_{s_0}$，并且需要证明

$$\breve{B}_{a,\rho}f-f_2\in\mathcal{B}^*_{s_0,0};\quad f_2=v^-_a(x_a)\tau(-\widehat{x_a})+v^+_a(x^a)\tau^+(\widehat{x_a}). \tag{6.65}$$

由（6.62a）可知

$$f-f_1\in\mathcal{B}^*_{s_0,0};\quad f_1=u^-_a(x_a)\tau(-\widehat{x_a})+u^+_a(x^a)\tau^+(\widehat{x_a}). \tag{6.66}$$

给定符号 s 和 g_a 如（6.16a）所示，我们可以利用（6.16b）写成

$$\tilde{f}:=f-Af\in\mathcal{B}^*_{s_0,0};\quad A=2g_a^{-1}\mathrm{Op^w}(s^{-1})g_a.$$

由定理6.3的证明可知 $\breve{B}^2_{a,\ \rho}f\in\mathcal{B}^*_{s_0}$ 因此我们知道 $\breve{B}^2_{a,\ \rho}\tilde{f}\in\mathcal{B}^*_{s_0}$，利用这一事实还可以证明 $\breve{B}_{a,\ \rho}\tilde{f}\in\mathcal{B}^*_{s_0,\ 0}$。估计

$$R^{-2s_0}\|\chi_R\breve{B}_{a,\rho}\tilde{f}\|^2\le R^{-2s_0}\|\chi_R\tilde{f}\|\,\|\chi_R\breve{B}^2_{a,\rho}\tilde{f}\|+o(R^0)=o(R^0),$$

即可得到该断言。

˜接下来将 $f=Af+f$ 代入（6.65），并利用（6.66）模 $\mathcal{B}^*_{s_0,\ 0}$ 进行计算

$$\breve{B}_{a,\rho}f\approx\breve{B}_{a,\rho}Af\approx\breve{B}_{a,\rho}Af_1\approx A\breve{B}_{a,\rho}f_1\approx Af_2=f_2-\tilde{f}_2;\quad \tilde{f}_2=f_2-Af_2.$$

利用（6.16b）进行计算

$$\tilde{f}_2\approx\tfrac{1}{2}A\Big(g_a^{-1}\mathrm{Op^w}(s)g_af_2-2f_2\Big)\approx\tfrac{1}{2}Ag_a^{-2}hf_2$$

还需证明 $Ag_a^{-2}hf_2\in\mathcal{B}^*_{s_0,\ 0}$。我们用 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 中的光滑函数序列分别逼近 τ和 τ^+，从而由于 $Ag_a^{-2}h\in\mathcal{L}(\mathcal{B}^*_{s_0})$ 在 $\mathcal{B}^*_{s_0}$ 中得到收敛。因此可以假设 τ、$\tau^+\in C^\infty$，于是能够计算 $g_a^{-2}hf_2\in\mathcal{B}^*_{s_0,\ 0}$，证毕。

□

以下界是波动算子的定义和定理 6.10 的推论，但为使论述完备，我们给出一个独立的定态证明。

推论 6.14。 在与上述相同的条件下 $\|S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)\|\le 1$。

证明。 按照定理6.3的证明，我们进行计算，并将 $\phi = W_\alpha^-(\lambda_0)\tau$ 简记为任意给定的 $\tau \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\begin{aligned} 0 = -\tfrac{1}{2}\langle \mathrm{i}[H,\chi_R]\rangle_\phi &= \langle \breve{B}\rangle_{\theta_R \Pi'\phi} + \langle \breve{B}\rangle_{\theta_R \Pi\phi} + o(R^0) \\ &\geq -\operatorname{Re}\langle \chi_R' \langle x\rangle^{-\rho/2}\Pi\phi, \breve{B}_\rho \Pi\phi\rangle + o(R^0) \end{aligned}$$

由 (6.62a)

$$\Pi\phi - \varphi_\alpha(x^a)\Big(u_a^-(x_a)\tau(-\widehat{x_a}) + u_a^+(x^a)\tau^+(\widehat{x_a})\Big) \in \mathcal{B}^*_{s_0,0}.$$

代入此式和 (6.62b)，并令 $R\to\infty$，得到 $0 \geq -\|\tau\|^2 + \|S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)\tau\|^2$。 □

对于任意 $\tau \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$，利用 (6.7) 和 (6.13)，记

$$\begin{aligned} &R(\lambda_0+\mathrm{i}0)\psi = S\phi_a^+(\lambda_0) + R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)\psi_a^+(\lambda_0) \text{ with input } \psi := T_\alpha^-(\lambda_0)\tau \in \mathcal{B}_{s_0}, \\ &\delta(H'-\lambda_0) = \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\big(R'(\lambda_0+\mathrm{i}0) - R'(\lambda_0-\mathrm{i}0)\big) \in \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{B}^*). \end{aligned}$$

推论 6.15. 在上述条件下，且令 $\psi_a^+(\lambda_0)$ 由(6.7) 定义，其中$\psi = T_\alpha^-(\lambda_0)\tau$ 对应任意给定的 $\tau \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$；或者也可以定义为

$$\begin{aligned} \psi_a^+(\lambda_0) &= \Pi'(H-\lambda_0)\Pi' R(\lambda_0+\mathrm{i}0)T_\alpha^-(\lambda_0)\tau, \\ T_\alpha^-(\lambda_0)\tau &= \mathrm{i}(H-\lambda_0)J_\alpha^-(\lambda_0)\tau \ \ and\ \ \tau \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1}), \end{aligned}$$

以下公式成立：

$$\|\tau\|^2 - \|S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)\tau\|^2 = \pi\langle \delta(H'-\lambda_0)\rangle_{\psi_a^+(\lambda_0)}. \tag{6.67}$$

证明。回顾

$$\phi := W_\alpha^-(\lambda_0)\tau = J_\alpha^-(\lambda_0)\tau + \mathrm{i}R(\lambda_0+\mathrm{i}0)\psi.$$

我们在推论 6.14 的证明中使用了 $\langle B\rangle_{\theta_R\Pi'\phi}$ 渐近地为非负这一事实。更确切地说，我们可以计算

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty}\langle \breve{B}\rangle_{\theta_R\Pi'\phi} &= \lim_{R\to\infty}\langle -\tfrac{1}{2}\mathrm{i}[H',\chi_R]\rangle_\phi \\ &= \lim_{R\to\infty}\langle -\tfrac{1}{2}\mathrm{i}[H',\chi_R]\rangle_{R'(\lambda_0+\mathrm{i}0)\psi_a^+(\lambda_0)} = \pi\langle \delta(H'-\lambda_0)\rangle_{\psi_a^+(\lambda_0)}. \end{aligned}$$

□

注 6.16。 如果 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 式（6.67）的右端对所有 $\tau \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 都为零。然而，对于上述非重数情形 Σ_2，我们看不出有任何理由认为情况会是这样。因此，“透射”这一选项对于 $\lambda_0 > \Sigma_2$ （包括第6.1.3小节的重根情形）仍只是一个猜想。我们将在第 6.3 节中详细研究物理模型在双簇阈值处的“非透射”问题。

6.1.2.4 Σ_2处的弹性散射

我们将在附加条件 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 以及 $V_1(r) = -\gamma r^{-\rho}$ （对 $r \geq 1$）下补充定理 6.10，具体方法是证明 $S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)$ 的核在 $\{\omega \cdot \omega' = \cos\frac{\rho}{2-\rho}\pi\}$ 之外是光滑的。在对 λ_0 施加新的、更严格的条件后，

$$\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{d}}(H^a). \tag{6.68}$$

利用（6.68），通过更仔细地求解输运方程，可以“改善”算子 $T_\alpha^{\pm}(\lambda_0)$的性质，参见 [Bo、Sk2]。仅依靠（6.68），无需 λ_0 是最低阈值。不过，我们还需要以下附加性质

$$\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(H'), \tag{6.69a}$$

见引理6.21，对于 $\lambda_0 = \Sigma_2$，该条件确实成立。尽管该条件可以弱化为 $\lambda_0 < \Sigma_3$（参见注2.11），但在本小节中我们将假设$\lambda_0 = \Sigma_2$。

回顾一下，本节中我们施加了（6.2），因此（6.69a）可以等价地表述为

$$\lambda_0 \notin \sigma(H'). \tag{6.69b}$$

我们将证明以下关于 [DS1、定理9.3]的类似结论。

定理 6.17. 除定理 *6.10* 的条件外，假设 $\lambda_0 = \Sigma_2$且 $V_1(r) = -\gamma r^{-\rho}$ 对于 $r \geq 1$成立。那么，核 $S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)(\omega, \omega')$ 在集合 $\{(\omega, \omega') \mid \omega \cdot \omega' = \text{余弦}\frac{\rho}{2-\rho}\pi\}$之外是光滑的。

为证明这一结果，我们需要做一些准备，部分内容与 [DS1 第 9] 节类似。首先陈述的结果是引理 6.20，它只用到定理 6.10 的条件和 (6.68)。

为了说明 (6.68) 如何让我们“改进” $T_\alpha^{\pm}(\lambda_0) = (H - \lambda_0)J_\alpha^{\pm}(\lambda_0)$，我们来看这一项

$$\big(I_a^{(1)} - w\big)J_\alpha^{\pm}(\lambda_0) = \Pi\big(I_a^{(1)} - w\big)J_\alpha^{\pm}(\lambda_0) + \Pi' I_a^{(1)}\Pi J_\alpha^{\pm}(\lambda_0).$$

第一项具有多项式衰减，即对于任意 $k, s \in \mathbb{R}$，它属于 $\mathcal{L}_s^k = \mathcal{L}(H^k(\mathbb{S}^{n-1}) \; L_s^2(X))$；第二项为 $\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-1-\rho})J_\alpha^{\pm}(\lambda)$，参见 (6.40)。对泰勒展开后的首项进行考察

$$\Pi' I_a^{(1)}\Pi J_\alpha^{\pm}(\lambda_0) \approx \big(\Pi' x^a \varphi_\alpha\big) \otimes \big(\nabla I_a^{(1)}(x_a) J_N^{\pm}(\lambda_0)\big).$$

设 $\tilde{r}_\alpha(\lambda_0)$ 是 H^a 在 λ_0 处的约化预解式。然后我们加上该项

$$J_\alpha^{1\pm}(\lambda_0) := -\big(\tilde{r}_\alpha(\lambda_0)\Pi' x^a \varphi_\alpha\big) \otimes \big(\nabla I_a^{(1)}(x_a) J_N^{\pm}(\lambda_0)\big)$$

对 $J_\alpha^{\pm}(\lambda_0)$ 进行计算，并计算所得算子 $\breve{J}_\alpha^{1\pm}(\lambda_0) = J_\alpha^{\pm}(\lambda_0) + J_\alpha^{1\pm}(\lambda_0)$，注意到一个消去，

$$\begin{aligned}
&(H - \lambda_0)\breve{J}_\alpha^{1\pm}(\lambda_0) \\
&= (p_a^2 + I_a)J_\alpha^{\pm}(\lambda_0) - \big(\Pi' x^a \varphi_\alpha\big) \otimes \big(\nabla I_a^{(1)}(x_a) J_N^{\pm}(\lambda_0)\big) \\
&- (p_a^2 + I_a)\big(\tilde{r}_\alpha(\lambda_0)\Pi' x^a \varphi_\alpha\big) \otimes \big(\nabla I_a^{(1)}(x_a) J_N^{\pm}(\lambda_0)\big) \\
&= \varphi_\alpha \otimes T_N^{\pm}(\lambda_0)\tau + \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-2-\rho})J_\alpha^{\pm}(\lambda_0) \\
&- \big(\tilde{r}_\alpha(\lambda_0)\Pi' x^a \varphi_\alpha\big) \otimes \big(h\nabla I_a^{(1)}(x_a) J_N^{\pm}(\lambda_0)\big) + \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-2-2\rho})J_\alpha^{\pm}(\lambda_0).
\end{aligned} \tag{6.70a}$$

第二项和第四项比我们最初得到的项 $\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-1-\rho})J_\alpha^\pm(\lambda)$ 具有更快衰减。第三项具有不同的型式，需要进行考察。我们使用记号（6.28）进行计算，并为简便起见仅考虑正号情形，

$$\begin{aligned}
&h\nabla I_a^{(1)}(x_a)\big(J_N^+(\lambda_0)\tau\big)(x_a)\\
&=\Big(\mathcal{O}(\langle x_a\rangle^{-1-\rho})h+\mathcal{O}(\langle x_a\rangle^{-2-\rho})p_a+\mathcal{O}(\langle x_a\rangle^{-3-\rho})\Big)J_N^+(\lambda_0)\tau\\
&=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^+(x_a,\omega,0)}\mathrm{e}^{\tilde\zeta^+(x_a,\omega,0)}\mathcal{O}(\langle x_a\rangle^{-2-\rho 3/2})\tau(\omega)\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}\tag{6.70b}$$

由此，第三项比我们起初得到的结果高出 $\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-1-\rho/2})$ 次幂。基于上述考虑，我们部分地受到启发，引入以下空间

$$\begin{aligned}
&L_s^{2,a}=L_s^{2,a}(\mathbf{X})=\{u\in L_s^2(\mathbf{X})\mid \forall m\in\mathbb{N}:\langle x^a\rangle^m u\in L_s^2(\mathbf{X})\};\quad s\in\mathbb{R},\\
&L_{-\infty}^{2,a}=\cup_{s\in\mathbb{R}}L_s^{2,a},\\
&\mathcal{L}_s^{k,a}=\mathcal{L}(H^k(\mathbb{S}^{n-1}),L_s^{2,a});\quad k,s\in\mathbb{R}.
\end{aligned}\tag{6.71}$$

我们还需要以下子类 $\mathcal{C}_s^+$, $s\in\mathbb{R}$；它们之间的关系见 (6.73)。

定义 6.18. 令 $\mathcal{F}^a$ 为 $L_\infty^2(\mathrm{X}^a)$ 中由以下型式构成的函数集合： $f^a=T\varphi_\alpha$，其中 T 是由 Π'、 $\tilde r_\alpha(\lambda_0)$ 的因子以及与 x^a 的分量相乘所得的任意乘积。设 $R\geq R_0$ 和 $\sigma'\in(0,\sigma_0)$ 给定。我们考虑张量积型算子

$$f^a\otimes J_g^+;\quad (J_g^+\tau)(x_a)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^+(y,\omega,0)}\mathrm{e}^{\tilde\zeta^+(y,\omega,0)}g(y,\omega)\tau(\omega)\mathrm{d}\omega,\quad y=x_a,$$

其中 $f^a\in\mathcal{F}^a$，而符号 $g\in\mathcal{S}_s^+$ 的含义是（参照 (6.22)）：

$$|\partial_\omega^\delta\partial_y^\gamma g(y,\omega)|\leq C_{\delta,\gamma}\langle y\rangle^{-s-|\gamma|}\ \text{and}\ \operatorname{supp} g\subseteq\Gamma_{R,\sigma'}^+.\tag{6.72}$$

类 $\mathcal{C}_s^+$, $s\in\mathbb{R}$ 是由这类乘积的有限和构成的算子集合，其中每一项的符号为 $g\in\mathcal{S}_s^+$。

~由于 ϕ^+ 和 ζ^+ 的性质，根据 [DS1，第 6.5] 定理的证明可知

$$\mathcal{C}_s^+\subset\mathcal{L}_{s-(1-\rho/2)k-s_0-\epsilon}^{-k,a};\quad k\geq 0,\ \epsilon>0.\tag{6.73}$$

我们还注意到， $J^+(0)$ 具有 J_g^+的型式，其中 $g\in\mathcal{S}_0^+$是某个符号，参见 (6.25a) 和 (6.27)，因此 $J_\alpha^+(\lambda_0)\in\mathcal{C}_0^+$。

理想情况下，我们希望求解 $\breve J_\alpha^+(\lambda_0)=0$ 和 $(H-\lambda_0)\breve J_\alpha^+(\lambda_0)\in\mathcal{L}^k$，对于任意给定的 $k\geq 0$，通过修改构造 $J_\alpha^\pm(\lambda_0)$，记作 $\breve J_\alpha^\pm(\lambda_0)\approx J_\alpha^\pm(\lambda_0)$。当然，正如单体问题一样，我们无法做到这一点，但可以在一个（小的）前向锥中求解输运方程（参见单体问题中的分解，$T_N^\pm(\lambda)=T^\pm{}_{\mathrm{bd}}(\lambda-\lambda_0)+T_{\mathrm{pr}}^\pm(\lambda-\lambda_0)$，对应于将$t^\pm(x,\omega,\lambda)=t^\pm(x,\sqrt{\lambda}\omega)$ 分解为 [DS1中的(5.8)和(5.16)]）。我们将使用约化预解式 $\tilde r_\alpha(\lambda_0)$作为附加工具来仿照这一过程。事实上，我们在上文已经计算了 $\breve J_\alpha^{1+}(\lambda_0):=J_\alpha^+(\lambda_0)+J_\alpha^{1+}(\lambda_0)$

$$(H-\lambda_0)\breve J_\alpha^{1+}(\lambda_0)=\varphi_\alpha\otimes T_N^+(\lambda_0)+T_\alpha^{1+}(\lambda_0)+T_{\alpha,\mathrm{r}}^{1+}(\lambda_0),$$

其中 $T_\alpha^{1+}(\lambda_0)\in\mathcal{C}^+_{2+\rho 3/2}$ 以及（例如）

$$T^{1+}_{\alpha,\mathrm{r}}(\lambda_0)\in\mathcal{L}^{-l,a}_{2+\rho-(1-\rho/2)l-s_0-\epsilon};\quad l\geq 0,\,\epsilon>0.$$

论证只用到了泰勒展开的首项，不过我们可以将 $\Pi' I_a^{(1)}\Pi$ 展开到任意阶，此时每一项都会通过 $\mathcal{C}^+_{2+\rho}$ 中的一项作出贡献，除了（可能存在的）一个“余项”，它可以取在所关注的固定空间 $\mathcal{L}^{k,}{}_s{}^a$ 中。对于（6.70a）的第四项 $\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-2-2\rho})J_\alpha^{\pm}(\lambda_0)$，我们也可以用同样的方法论证。由此得出 $(H-\lambda_0)\breve{J}_\alpha^{1+}(\lambda_0)-\varphi_\alpha\otimes T_N^+(\lambda_0)+T\in\mathcal{L}^{k,}{}_s{}^a$ 其中某个 $T\in\mathcal{C}^+_{2+\rho}$。

为了进一步改进，对于这个 $T\in\mathcal{C}^+_{2+\rho}$，理想情况下我们希望“求解”方程 $(H-\lambda_0)J_\alpha^{2+}(\lambda_0)\approx T$。这样，只需加上 $J_\alpha^{2+}(\lambda_0)$，即可得到更好的近似；也就是说，考虑 $\breve{J}_\alpha^{2+}(\lambda_0):=J_\alpha^+(\lambda_0)+J_\alpha^{1+}(\lambda_0)+J_\alpha^{2+}(\lambda_0)$。因此我们来考虑以下迭代方案。假设对于给定的 $m\in\mathbb{N}$，我们已经构造出 $\breve{J}_\alpha^{m+}(\lambda_0):=J_\alpha^+(\lambda_0)+J_\alpha^{1+}(\lambda_0)+\cdots+J_\alpha^{m+}(\lambda_0)$，使得

$$\begin{aligned}&(H-\lambda_0)\breve{J}_\alpha^{m+}(\lambda_0)-\varphi_\alpha\otimes T_N^+(\lambda_0)+T_{\mathrm{pr}}^{m+}(\lambda_0)-T_{\mathrm{bd}}^{m+}(\lambda_0)\in\mathcal{L}_s^{k,a}\\&\qquad T_{\mathrm{pr}}^{m+}(\lambda_0)\in\mathcal{C}^+_{s_m};\quad s_m=(m-1)\min\{1-\rho/2,\rho/2\}+2+\rho,\\&\qquad T_{\mathrm{bd}}^{m+}(\lambda_0)\in\mathcal{C}^+_{\mathrm{bd},\,s_1},\end{aligned}\tag{6.74}$$

其中 $\mathcal{C}^+{}_{\mathrm{bd}\ s}$ 如下给出。记号 M° 通常指拓扑空间的子集 M 的内部（下文取为 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^{n-1}$）。

定义 6.19。设 $R\geq R_0$ 和 $\sigma'\in(0,\sigma_0)$ 已给定，参见定义 6.18，并设 $\sigma\in(0,\sigma')$。则 $\mathcal{C}^+{}_{\mathrm{bd}\ s}$ 是满足以下条件的算子 $\varphi_\alpha\otimes J_g^+\in\mathcal{C}_s^+$ 的子类：其符号 $g=g^+{}_{\mathrm{bd}}\in\mathcal{S}_s^+$ 满足定义 6.18 的要求，此外还具有支撑性质

$$\operatorname{supp} g^+_{\mathrm{bd}}\subseteq\Gamma^+_{R,\sigma'}\setminus\big(\Gamma^+_{2R,\sigma}\big)^\circ.\tag{6.75}$$

到目前为止，我们仅对 $m=1$ 验证了 (6.74)（其中 $T^{1+}{}_{\mathrm{bd}}(\lambda_0)=0$）。现在，设 (6.74) 对给定的 $m\geq 1$ 成立。于是我们拆分

$$T=T_{\mathrm{pr}}^{m+}(\lambda_0)=\Pi T_{\mathrm{pr}}^{m+}(\lambda_0)+\Pi' T_{\mathrm{pr}}^{m+}(\lambda_0),$$

右侧的两项都分别参与了 $J_\alpha^{(m+1)+}(\lambda_0)$ 的构造，具体如下：对于第一项，我们仿照 [DS1、命题 5.4 和 5.5]，并相应地添加一项，记作 $J_{\alpha\,1}^{(m+1)+}{}_,(\lambda_0)$。通过泰勒展开（如上文所用），我们看到

$$(H-\lambda_0)J_{\alpha,1}^{(m+1)+}(\lambda_0)-\Pi T_{\mathrm{pr}}^{m+}(\lambda_0)\in\mathcal{C}^+_{s_{m+1}}+\mathcal{C}^+_{\mathrm{bd},\,s_1}+\mathcal{L}_s^{k,a};\tag{6.76}$$

详情如下。令

$$J_{\alpha,2}^{(m+1)+}(\lambda_0)=\tilde{r}_\alpha(\lambda_0)\Pi' T_{\mathrm{pr}}^{m+}(\lambda_0)$$

于是我们确实得到，(6.74)成立，其中用 $m+1$ 替换了 m，并且

$$\breve{J}_\alpha^{(m+1)+}(\lambda_0)=\breve{J}_\alpha^{m+}(\lambda_0)+J_\alpha^{(m+1)+}(\lambda_0);\quad J_\alpha^{(m+1)+}(\lambda_0)=J_{\alpha,1}^{(m+1)+}(\lambda_0)+J_{\alpha,2}^{(m+1)+}(\lambda_0).$$

注意到显然有 $(H-\lambda_0)J^{(m+1)+}_{\alpha\,2}(\lambda_0) - \Pi' T^{m+}_{\mathrm{pr}}(\lambda_0) \in \mathcal{C}^+_{s_{m+1}} + \mathcal{L}^{k,\,a}_{\,s}$, (6.70a)
参见和 (6.70b)。

为了完成递归构造，还需证明（6.76）：我们使用（6.24a）中的函数，更确切地说，考虑‘截断函数’ $\bar\chi_R(r)$ 和 $\chi_{\sigma,\,\sigma'}(\hat x\cdot\omega)$。根据（6.28）中的函数 $\zeta^+ = \zeta^+(x_a,\ \omega,\ 0)$ 定义，我们令 A^+为（关于 $x = x_a$的）微分算子

$$A^+ = \Delta + 2(\nabla\zeta^+)\cdot\nabla + (\Delta\zeta^+) + (\nabla\zeta^+)^2,$$

参见（6.25f），相应地，对于 $\Pi T^{m+}_{\mathrm{pr}}(\lambda_0) = \varphi_\alpha\otimes J^+_{g_m}$，我们定义 $J^{(m+1)+}_{\alpha\,1}(\lambda_0)$ $\varphi_\alpha\otimes J^+_{g_{m+1}}\in\mathcal{C}^+_{s_m-1-\rho/2}$ $x=x_a$，其中（取）

$$g_{m+1} := -\mathrm{i}\chi_{\sigma,\sigma'}(\hat x\cdot\omega)\bar\chi_R(r)\int_1^\infty g_m(y(t,x,\omega,0),\omega)\,\mathrm{d}t;$$

这里，$y(\cdot,\ x,\ \omega,\ 0)$ 是从 x 出发、对于 $t=1$ 而言的经典零能轨道，并具有渐近归一化速度 $\omega = \lim_{t\to+\infty} y/|y|$，参见（6.20）。令

$$\breve g_{m+1} = \mathrm{i}\chi_{\sigma,\sigma'}(\hat x\cdot\omega)\bar\chi_R(r)\int_1^\infty A^+ g_m(y(t,x,\omega,0),\omega)\,\mathrm{d}t$$

我们计算

$$\begin{aligned}&(H-\lambda_0)\varphi_\alpha\otimes J^+_{g_{m+1}} + \Pi T^{m+}_{\mathrm{pr}}(\lambda_0) + \varphi_\alpha\otimes J^+_{\breve g_{m+1}}\\ &= \varphi_\alpha\otimes hJ^+_{g_{m+1}} + (I_a - w)\varphi_\alpha\otimes J^+_{g_{m+1}} + \Pi T^{m+}_{\mathrm{pr}}(\lambda_0) + \varphi_\alpha\otimes J^+_{\breve g_{m+1}}\\ &\in \mathcal{C}^+_{s_{m+1}} + \mathcal{C}^+_{\mathrm{bd},\,s_1} + \mathcal{L}^{k,a}_s;\end{aligned}$$

这里我们使用泰勒展开处理第二项（与在 (6.70a) 中所做的一样），并利用另外三项相互抵消这一事实，直到因子 $\chi_1(r/R)\chi_2(\hat x\omega)$ 的导数项为止，参见 (6.25f)。接下来利用 $\breve g_{m+1}\in\mathcal{S}^+_{s_{m+1}}$，即可得到 (6.76)。

接下来，为求简便，我们不再像单体问题那样进行 Borel 求和，而是在 $m=M$ 足够大，使得 $\mathcal{C}^+_{s_{m+1}}\subset\mathcal{L}^{k,\,a}_{\,s}$ 时“终止”递归构造，参见 (6.73)。此前，为方便起见，我们只处理了正号情形。负号情形下定义 6.18 和 6.19 应如何表述，以及上述过程相应地如何修改，就留给读者推想；下文我们将考虑“改进的”算子 $J^\pm_{\alpha,\,M}(\lambda_0) := \breve J^{M\pm}_\alpha(\lambda_0)$ 和

$$T^\pm_{\alpha,M}(\lambda_0) := (H-\lambda_0)J^\pm_{\alpha,M}(\lambda_0) \in \varphi_\alpha\otimes T^\pm_N(\lambda_0) + \mathcal{C}^\pm_{\mathrm{bd},\,s_1} + \mathcal{L}^{k,a}_s.$$

接下来我们考察相应的波矩阵 $W^\pm_{\alpha,\,M}(\lambda_0)$ 和散射算子 $S_{\alpha,\,M}(\lambda_0)$；见下文中的（6.82）。与单体问题类似，后者是典范的（更精确地说，这一点表述为下述结论中的最后一项断言）。

引理 6.20. 设 $k\le 0$, $s\ge 0$, $R\ge R_0$ 和 $0<\sigma<\sigma'<\sigma_0$。那么，上述递归过程在任意充分大的 $M\in\mathbb{N}$ 处终止时，可得存在 $J^\pm_{\alpha\,,M}(\lambda_0)\in J^\pm_\alpha(\lambda_0)+\mathcal{C}^\pm_{2s_0}$，$g^\pm{}_{\mathrm{bd}\,M}\in\mathcal{S}^\pm_{2s_0}$，满足 支集 $g^\pm{}_{\mathrm{bd}\,M}\subseteq\Gamma^\pm_{R,\sigma'}\setminus\big(\Gamma^\pm_{2R,\sigma}\big)^\circ$ 和 $R^{k,s}{}^{a\pm}_{\,,M}\in\mathcal{L}^{k}_{\,,s}{}^{a}$，使得

$$T^\pm_{\alpha,M}(\lambda_0) = (H-\lambda_0)J^\pm_{\alpha,M}(\lambda_0) = (2\pi)^{-n/2}\varphi_\alpha\otimes J^\pm_g + R^{k,a\pm}_{s,M};\quad g = g^\pm_{\mathrm{bd},M}.$$

(特别是 $T^{\pm}_{\alpha,M}(\lambda_0) \in \mathcal{C}^{\pm}{}_{\mathrm{bd}\ 2s_0} + \mathcal{L}^{k}{}_{,s}{}^{a}$*。)*

由算子 $J^{\pm}_{\alpha,\ M}$（λ_0） 和 $T^{\pm}_{\alpha,\ M}$（λ_0） 定义的波矩阵 $W^{\pm}_{\alpha,\ M}$（λ_0） 和散射算子 $S_{\alpha,\ M}$（λ_0） 分别与 $W^{\pm}_{\alpha}$（λ_0） 和 S_{α}（λ_0） 重合。

注意，引理中的参数 R、σ 和 σ' 用于定义类 $\mathcal{C}^{\pm}{}_{\mathrm{bd}\ s}$。引理的第一部分显然是所述构造的结果。对于第二部分，注意在 $W^{-}_{\alpha,\ M}$（λ_0）和 $S_{\alpha,\ M}$ 的情形下，该陈述是定理 6.13 2) 的唯一性部分的结果。识别式 $W^{+}_{\alpha,\ M}$（λ_0） $= W^{+}_{\alpha}$（λ_0）源于关于 W^{+}_{α}（λ_0）的一个类似陈述，该陈述用 S_{α}（λ_0）* 表述（在我们的 प्रस्तentation 中未给出）。

如同（6.41）中一样，记号 g 表示 $g_{\lambda_0} = \sqrt{-V_1}$。我们引入符号 b 和 $\bar{c}$，将归一化动量 $\eta := \xi/g \in \mathrm{X}'_a$ 分解为

$$\eta = b\hat{x} + \bar{c},\ b := \hat{x}\cdot\eta \text{ and } \bar{c} := \big(I - \big|\hat{x}\big\rangle\big\langle\hat{x}\big|\big)\eta. \tag{6.77}$$

当然，这种分解要求 $x \neq 0$，因为对于这样的 x，$\hat{x} = x/|x|$ 才有意义。（在下面的波前集定义中，这个问题通过截断函数 $\bar{\chi}_1$来处理，参见（1.29）。在（6.41）中，一个略有不同的 b “修复”了这个问题。）

在能量层 $\xi^2 = \gamma r^{-\rho}$ 上，量 $a := b^2 + \bar{c}^2 = \xi^2/g^2 = 1$，而哈密顿轨道在“约化相空间” $\mathbb{T}^*$上满足常微分方程，该空间由点 $(\hat{x}, \bar{c}, b)$ 组成，

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\hat{x} = \bar{c}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{c} = -(1-\frac{\rho}{2})b\bar{c} - \bar{c}^2\hat{x}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}b = (1-\frac{\rho}{2})\bar{c}^2. \end{cases} \tag{6.78}$$

这是在由 $\frac{\tau}{\mathrm{d}t} = 2g/r_{\mathrm{d}}$ 给出的“新时间” τ 下进行的。

经过 $z = (\hat{x}, b, \bar{c}) \in \mathbb{T}^*$ 的 $\tau = 0$ 处的 (6.78) 的极大解记为 $\gamma(\tau, z)$。量 a 在流下保持不变，而方程 $\bar{c} = 0$ 定义了不动点。远离这些点时

$$b(\tau) = \sqrt{a}\tanh\sqrt{a}(1-\tfrac{\rho}{2})(\tau - \tau_0),$$

进一步表明，b 从 $-\sqrt{a}$ 到 $\sqrt{a}$ 随 τ 单调递增（远离不动点）。我们用变量 (6.77) 引入分布 $u \in L^2{}_{\text{的}\ -\infty}^{a}$ 的“波前集”$WF^a_s(u)$，它是 $\mathbb{T}^*$ 中满足以下条件的子集

$$\begin{aligned} & z_1 = (\omega_1, \bar{c}_1, b_1) = (\omega_1, b_1\omega_1 + \bar{c}_1) = (\omega_1, \eta_1) \notin WF^a_s(u) \\ & \Leftrightarrow \\ & \exists\ neighbourhoods\ \mathcal{N}_{\omega_1} \ni \omega_1,\ \mathcal{N}_{\eta_1} \ni \eta_1\ \ \forall \chi_{\omega_1} \in C^\infty_c(\mathcal{N}_{\omega_1}),\ \chi_{\eta_1} \in C^\infty_c(\mathcal{N}_{\eta_1}): \\ & \mathrm{Op}^{\mathrm{w}}\big(\chi_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)u \in L^{2,a}_s\ where\ \chi_{z_1} = \chi_{z_1}(x,\xi) = \chi_{\omega_1}(\hat{x})\chi_{\eta_1}\big(\xi/g(r)\big). \end{aligned} \tag{6.79}$$

显然，这里的波前集概念是分布 $v \in L^2_{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ 在 [DS1 第 4.2]小节中定义的“散射波前集” $WF^s_{\mathrm{sc}}(v)$ 概念针对当前问题的（纤维化）改造。

由（6.69b）可知，算子$(H' - \lambda_0)^{-1}$ 和 $\breve{R}(\lambda_0)$符合上述“纤维化散射波前集”的定义。

引理6.21。 对于任意 $s \in \mathbb{R}$ 和 $u \in L^{2,\ a}_{-\infty}$ 以下性质成立。

$$\Pi I_a \Pi' L^{2,a}_s \subset L^{2,a}_{s+1+\rho}, \quad \Pi' I_a \Pi L^{2,a}_s \subset L^{2,a}_{s+1+\rho}, \tag{6.80a}$$

$$WF^a_{s+1+\rho}(\Pi I_a \Pi' u) \subset WF^a_s(u), \quad WF^a_{s+1+\rho}(\Pi' I_a \Pi u) \subset WF^a_s(u), \tag{6.80b}$$

$$\breve{R}(\lambda_0)\Pi' L^{2,\ a}_{s} \subset L^{2,\ a}_{s}, \tag{6.80c}$$

$$WF^a_s(\ \breve{R}(\lambda_0)\Pi' u)\ \subset WF^a_s(u)。 \tag{6.80d}$$

证明。 对于（6.80a）和（6.80b），我们可以使用（2.23）的一个简化版本。结论几乎是显然的，因为 Π 和 Π' 是作用于 x^a 坐标的算子，而波前设置是根据在 X_a 上的量子化来定义的。

（2.51）的论证适用于（6.80c），因此只需考虑（6.80d），实际上可以不带因子 Π'。因此，对于任意 $z_1 \notin WF^a_s(u)$，我们需要估计 $\mathrm{Op^w}\big(\chi_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)\breve{R}(\lambda_0)$ $u \in L^{2,\ a}_{\ s}$，其中可以假设局部化函数 χ_{z_1} 的支集充分接近 z_1。特别地，存在一个稍大的局部化函数，记为 $\tilde{\chi}_{z_1}$，即在 $\mathrm{supp}\ \chi_{z_1}$ 上有 $\tilde{\chi}_{z_1} = 1$，使得 $\mathrm{Op}^{\mathrm{w}}\big(\tilde{\chi}_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)u \in L^{2,\ a}_{\ s}$。因此，只需证明

$$\mathrm{Op^w}\big(\chi_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)\breve{R}(\lambda_0)\Big(1 - \mathrm{Op^w}\big(\tilde{\chi}_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)\Big)u \in L^{2,a}_s.$$

为此，只需证明

$$\forall s,t \in \mathbb{R}\ \exists r \geq 0: \quad \mathrm{Op^w}\big(\chi_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)\breve{R}(\lambda_0)\Big(1 - \mathrm{Op^w}\big(\tilde{\chi}_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)\Big)\langle x^a\rangle^{-r} \in \mathcal{L}\big(L^2_s, L^2_t\big).$$

显然，我们可以假设 $s < t$。回想一下，符号 $\chi_{z_1}\bar{\chi}_1(r)$、$\tilde{\chi}_{z_1}\bar{\chi}_1(r)$ 以及 ξ^2 都属于一类相应“普朗克常数”为$\langle x\rangle^{\rho/2-1}$的符号。利用这一事实，现在我们可以反复将局部化符号的量子化与因子 $\breve{R}(\lambda_0)$ 交换，从而得到所需的衰减。第一步是注意到 $\mathrm{Op^w}\big(\chi_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)\Big(1 - \mathrm{Op^w}\big(\tilde{\chi}_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)\Big)$ 具有任意阶衰减，并写成

$$[\mathrm{Op^w}\big(\chi_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big), \breve{R}(\lambda_0)] = \breve{R}(\lambda_0)[\breve{H}, \mathrm{Op^w}\big(\chi_{z_1}\bar{\chi}_1(r)\big)]\breve{R}(\lambda_0)$$

并计算右侧的交换子，从而至少获得一个因子 $\langle x_a\rangle^{\rho/2-1}$。下一步，我们对类似局部化算子中最右侧的因子 $\breve{R}(\lambda_0)$ 进行类似的交换，由此再得到一个因子 $\langle x_a\rangle^{\rho/2-1}$。重复这一论证，就能有效地产生任意次幂的 $\langle x_a\rangle^{\rho/2-1}$；取$r$ 足够大（依赖于给定的 s、$t \in \mathbb{R}$），即可有效地产生任意次幂$\langle x\rangle^{-m}$，特别是所需的一个 $m \geq t - s$。

□

我们还需要以下引理，该引理基于对[DS1、命题 4.1 和 4.8]的部分内容的延拓（参见下文为得到（4.9b）而进行的延拓以及注 6.23），以及 [DS1、命题 9.1] 中的奇异性传播结果（事实上，（6.81c）可由（6.81b）和 [DS1、命题 9.1]推出）。其基础的对易子方法相当稳健。特别是，尽管该引理的表述具有较强的定性特征，但可以为所述嵌入给出具体的界，并利用这些界的稳定性来控制参数依赖，参见 [DS1、注 9.2]。在下文的应用中，散射矩阵的核所依赖的角度对（ω，ω'）将发挥此类参数的作用。

引理 6.22。 设 $u \in L^{2,\ s}_{\ s}{}^{a} = L^{2,\ s}{}^{a}$（**X**）对某个 $s < s_0$成立，并设对某个 $t > s_0$ 和 $\kappa \in$ （-1，**1**）

$$WF^a_t(u) \cap \{b < \kappa, a = 1\} = \emptyset. \tag{6.81a}$$

则以下断言成立：

1) 极限存在

$$r^+_{\lambda_0} u := \lim_{R\to\infty} \big(1 \otimes r^+_{\lambda_0}\big)\big(\chi_R(r)u\big) \ \textit{exists in}\ L^{2,a}_{s-2s_0}.$$

2) 交集

$$WF^a_{t-2s_0}(r^+_{\lambda_0} u) \cap \{b < \kappa, a = 1\} = \emptyset, \tag{6.81b}$$

以及（更一般地）

$$\begin{aligned} WF^a_{t-2s_0}(r^+_{\lambda_0} u) \cap \{a = 1\} \\ \subset \{\gamma(\tau, z\} \mid \tau \geq 0,\ z \in WF^a_t(u)\} \cup \{b = 1\}. \end{aligned} \tag{6.81c}$$

注 6.23。 我们注意到，(6.81b) 可按 [DS1, 命题 4.8 (iii)], 的证明来证明， [但 48] DS1, (4.48] 事实上成立，其中 $\epsilon = 0$ （这一推广[DS1, 命题 4.1], 源自 [FS], , 此前已有注意，参见 (4.9b)）。另一个推广来自如下观察： χ_+ 在 [DS1, 命题 4.1 (v)] 中的条件过强。事实上，相关性质并不是对某个“较大的” $C_0 \geq 1$有 inf supp(χ_+) $> C_0$，而是 $\chi_+(a) = 0$ 在 $a = 1$的某个邻域内成立。利用 [Sk4] 的拟参数构造（参见 [Sk4, (3.2)]），替代 [FS]中的正性论证，即可证明这一推广。注意，由于同样的原因，对于 [DS1, 命题 4.1]的其他部分，我们也不需要常数 C_0。

现在，为了分析 $S_{\alpha,\ M}(\lambda_0)(\omega, \omega')$，我们形式上写作

$$\begin{aligned} S_{\alpha,M}(\lambda_0)(\omega,\omega') = &-2\pi\langle j^+_{\alpha,M}(\cdot,\omega), t^-_{\alpha,M}(\cdot,\omega')\rangle \\ &+ 2\pi\mathrm{i}\langle t^+_{\alpha,M}(\cdot,\omega), R(\lambda_0 + \mathrm{i}0) t^-_{\alpha,M}(\cdot,\omega')\rangle, \end{aligned} \tag{6.82}$$

其中对于 $x \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned} j^\pm_{\alpha,M}(x,\omega) &= (2\pi)^{-n/2}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\pm}\mathrm{e}^{\tilde\zeta^\pm} a^\pm_{\alpha,M}\big)(x,\omega,0), \\ t^\pm_{\alpha,M}(x,\omega) &= t^{1\pm}_{\alpha,M}(x,\omega) + \big(R^{k,a\pm}_{s,M}\delta_\omega\big)(x), \\ t^{1\pm}_{\alpha,M}(x,\omega) &:= (2\pi)^{-n/2}\varphi_\alpha(x^a)\,\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\pm}\mathrm{e}^{\tilde\zeta^\pm} g^\pm_{\mathrm{bd},M}\big)(x_a,\omega,0); \end{aligned} \tag{6.83}$$

此处，根据引理 6.20，将“符号”$a^\pm_{\alpha\ ,M}$ 视为关于 $y = x_a$ 和 ω 的向量值函数，而 $\phi^\pm$、$\tilde\zeta^\pm$ 以及函数 $g^{\pm}{}_{\mathrm{bd}\ M}$ （如引理 6.20 中所引入）仅依赖于 x_a 的分量 x 和 ω （即不依赖于 x^a）。因此，我们将 $J^\pm_{\alpha\ ,M}(\lambda_0) \in J^\pm_\alpha(\lambda_0) + \mathcal{C}^\pm_{2s_0}$写作

$$\begin{aligned} \big(J^\pm_{\alpha,M}(\lambda_0)\tau\big)(x^a, x_a) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} j^\pm_{\alpha,M}(x,\omega)\tau(\omega)\,\mathrm{d}\omega \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^+(y,\omega,0)}\mathrm{e}^{\tilde\zeta^+(y,\omega,0)} a^\pm_{\alpha,M}(x^a,y,\omega)\tau(\omega)\,\mathrm{d}\omega, \end{aligned}$$

事实上，这也适用于狄拉克δ函数 $\tau = \delta_\omega \in \cap_{k<-(n-1)/2} H^k(\mathbb{S}^{n-1})$，从而定义了“核”$j^{\pm}_{\alpha,M}$。类似地，$t^{\pm}_{\alpha,M}$ 是核

$$t^{\pm}_{\alpha,M}(x,\omega) = \big((2\pi)^{-n/2}\varphi_\alpha \otimes J^{\pm}_g \delta_\omega + R^{k,a\pm}_{s,M}\delta_\omega\big)(x); \quad g = g^{\pm}_{\mathrm{bd},M}.$$

我们注意到以下界，参见 [DS1，定理 6.5]。

$$\partial^\delta_\omega j^{\pm}_{\alpha,M}(\cdot,\omega) \in L^{2,a}_t \text{ for all } t < -(|\delta|+n/2)(1-\rho/2) - \rho/2, \tag{6.84a}$$
$$\partial^\delta_\omega t^{1\pm}_{\alpha,M}(\cdot,\omega) \in L^{2,a}_t \text{ for all } t < -(|\delta|+n/2)(1-\rho/2) + 1 + \rho/2, \tag{6.84b}$$
$$R^{k,a\pm}_{s,M}\partial^\delta_\omega\delta_\omega \in L^{2,a}_s \text{ provided } k < -|\delta| - (n-1)/2. \tag{6.84c}$$

令 ϕ^+_{sph} 表示势 V_1 在零能量下的程函方程的解，参见 (6.21)。它由下式给出

$$\phi^+_{\mathrm{sph}}(x_a,\omega) = \frac{\sqrt{\gamma}}{1-\rho/2}\left(|x_a|^{1-\rho/2}\cos(1-\rho/2)\theta - R_0^{1-\rho/2}\right), \tag{6.85}$$

其中 $\cos\theta = \widehat{x_a}\cdot\omega$。下文（包括以下引理）中，我们省略下标 a，写作 x而非 x_a。利用 $x^\perp = {}^{\omega-}\!\hat{x}\cos\theta\sin\theta$和 $\nabla_x\theta = -\frac{x^\perp}{r}$，我们还可以计算

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{sph}}(x,\omega) = F^+_{\mathrm{sph}}(x,\omega) &:= \nabla_x\phi^+_{\mathrm{sph}}(x,\omega) \\ &= \sqrt{\gamma}r^{-\rho/2}\left(\hat{x}\cos(1-\rho/2)\theta + x^\perp\sin(1-\rho/2)\theta\right). \end{aligned}$$

下文给出的引理是对 [DS1，引理 9.4], 的直接推广；与 [DS1] 中一样，它可由分部积分得到。注意，由于 (6.84c)，在 (6.83) 中只有 $t^{\pm}_{\alpha,M}$ 的项 $t^{1\pm}_{\alpha,M}$ 的贡献是重要的。另请注意，(6.84a) 和 (6.84b) 为量 $\partial^\delta_\omega j^{\pm}_{\alpha,M}(\cdot,\omega)$ 和 $\partial^\delta_\omega t^{1\pm}_{\alpha,M}(\cdot,\omega)$ 提供了先验的“大小”估计。

引理 6.24. 令 $k < -(n-1)/2$, $s \geq 0$, $R \geq R_0$ 和 $0 < \sigma < \sigma' < \sigma_0$ （参见引理 *6.20*）。那么，对于足够大的任意 $M \in \mathbb{N}$，以及满足 $|\delta| < -k - (n-1)/2$ 的任意 $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ 和多重指标 δ，(6.83) 中的量满足

$$\begin{aligned} WF^a_s(\partial^\delta_\omega j^{\pm}_{\alpha,M}(\cdot,\omega)) \subset \Big\{ & z = (\hat{x},\bar{c},b) \in \mathbb{T}^* \mid \\ & 1-\sigma' \leq \pm\hat{x}\cdot\omega, \quad b\hat{x} + \bar{c} = \pm F_{\mathrm{sph}}(\hat{x},\pm\omega)/\sqrt{\gamma}\Big\}, \end{aligned} \tag{6.86a}$$

$$\begin{aligned} WF^a_s(\partial^\delta_\omega t^{\pm}_{\alpha,M}(\cdot,\omega)) \subset \Big\{ & z = (\hat{x},\bar{c},b) \in \mathbb{T}^* \mid \\ & 1-\sigma' \leq \pm\hat{x}\cdot\omega \leq 1-\sigma, \quad b\hat{x} + \bar{c} = \pm F_{\mathrm{sph}}(\hat{x},\pm\omega)/\sqrt{\gamma}\Big\}. \end{aligned} \tag{6.86b}$$

假设 $\chi_+ \in C^\infty(\mathbb{R})$、$\chi'_+ \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ 且 支集 $\chi_+ \subset (1,\infty)$。在与上文相同的条件下，以下界关于 $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$一致成立：

$$\mathrm{Op^w}(\chi_+(a))\partial^\delta_\omega j^{\pm}_{\alpha,M}(\cdot,\omega),\ \mathrm{Op^w}(\chi_+(a))\partial^\delta_\omega t^{\pm}_{\alpha,M}(\cdot,\omega) \in L^{2,a}_s. \tag{6.86c}$$

现在我们固定一个（足够大的） $k \in \mathbb{N}$，并希望在附加条件下应用引理 6.24

$$\breve{k} < -k - (n-1)/2 \quad \text{and} \quad s \geq s_{\breve{k}} := (\breve{k} + \tfrac{n}{2})(1-\tfrac{\rho}{2}) + 1; \tag{6.87}$$

这要求将 $M = M(k,s)$ 取为足够大。我们考虑 $\chi_R = \chi_R(|x_a|)$ 和 $|\delta|, |\delta'| \le k$

$$\begin{aligned}&\partial_\omega^\delta \partial_{\omega'}^{\delta'} S_{\alpha,M}(\lambda_0)(\omega,\omega') \\ &= -2\pi \lim_{R\to\infty} \langle \partial_\omega^\delta j^+_{\alpha,M}(\cdot,\omega), \chi_R\, \partial_{\omega'}^{\delta'} t^-_{\alpha,M}(\cdot,\omega')\rangle \\ &+ 2\pi \mathrm{i} \lim_{R\to\infty} \langle \partial_\omega^\delta t^+_{\alpha,M}(\cdot,\omega), \chi_R R(\lambda_0+\mathrm{i}0)\chi_R\, \partial_{\omega'}^{\delta'} t^-_{\alpha,M}(\cdot,\omega')\rangle\end{aligned} \tag{6.88}$$

这仍然是形式上的，但假设我们能够证明右侧的两个极限在集合 $\{\omega\cdot\omega' \neq \cos\frac{\rho}{2-\rho}\pi\}$ 上对所有满足 $|\delta|, |\delta'| \le k$ 的多重指标 $\breve{}$ 局部一致地存在，那么定理 6.17 便得以成立。

定理 *6.17* 的证明。*I*。对于任意 $\breve{k} \in \mathbb{N}$ （以下固定），我们需要验证 $\partial_\omega^\delta \partial_{\omega'}^{\delta'} S_{\alpha,\,M}(\lambda_0)(\omega,\omega')$ 在 $\{\omega\cdot\omega' \neq \cos\frac{\rho}{2-\rho}\pi\}$ 中对 $|\delta|, |\delta'| \le \breve{k}$ 的存在性和连续性。我们施加引理 6.24 的条件以及 (6.87)。我们还假设 σ' 很小（以便在下文不加说明地用于 (6.89)）。

我们考察 (6.88) 右侧的第一项（取极限之前），并声称该项在 $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}$ 上可处理（即对 (ω,ω') 不加限制）。通过直接分部积分即可看出这一点，但我们更倾向于给出一种与处理第二项的方式一致的论述（见 (6.90)）。在上述条件下，由引理 6.24 和 [DS1, (3.5c)] 可知，对于 $|\delta|, |\delta'| \le \breve{k}$,

$$WF^a_{s_{\breve{k}}}(\partial_\omega^\delta j^+_{\alpha,M}(\cdot,\omega)) \cap WF^a_{s_{\breve{k}}}(\partial_{\omega'}^{\delta'} t^-_{\alpha,M}(\cdot,\omega')) = \emptyset. \tag{6.89}$$

还要注意，由于 (6.84a)– (6.84c)，函数 $\partial_\omega^\delta j^+_{\alpha,\,M}(\cdot,\omega)$ 和 $\partial_{\omega'}^{\delta'} t^-_{\alpha,\,M}(\cdot,\omega')$ 属于 $L^2_{,\,{}^a_{-s_{\breve{k}}}}$。接下来，我们在表达式中插入一个与 (6.89) 相符的适当相空间单位分解

$$\langle \partial_\omega^\delta j^+_{\alpha,M}(\cdot,\omega), \chi_R\, \partial_{\omega'}^{\delta'} t^-_{\alpha,M}(\cdot,\omega')\rangle,$$

然后我们去掉因子 χ_R （令 $R\to\infty$）。通过应用单个分割函数$\chi_+(a)$，“较大的 a-部分”由 (6.86c) 控制（这里只使用 $s\ge 0$）。如上所述处理的“较小的 a-部分”需要使用许多分割函数，并结合 (6.89) 以及分割的局部化具有足够的“尖锐性”，以确保对于每一项，分割算子至少将上述两个函数之一带到 $L^2_{,\,{}^a_{s_{\breve{k}}}}$。由于另一个函数整体属于 $L^2_{,\,{}^a_{-s_{\breve{k}}}}$，因此可以应用柯西-施瓦茨不等式。首先在用因子 χ_R 替代的位置使用这一论证。与该因子的任何交换子至少会产生一个额外因子 $R^{\rho/2-1}$，因此取极限时，我们得到（通过控制收敛）不含 χ_R 的相应表达式；根据相同的论证，该表达式确实是良定义的。最后，收敛关于 $(\omega,\omega') \in \mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}$ 是一致的，因为所有涉及的界都可以一致地建立。这一性质依赖于经典构造的正则性以及基础的分部积分论证（该性质仅在引理 6.24 中作了部分陈述）。

II。我们考察（6.88）右侧的第二项，声称在 $\{\omega\cdot\omega' \neq \cos\frac{\rho}{2-\rho}\pi\}$ 中取极限时，该项是良定义的，并且极限是局部一致地取得的。在取极限之前，我们代入表达式（6.7）（对于正号情形），得到应用于右侧函数，$\frac{\rho}{2-\rho}\pi\}(,)$ 时需要处理的各种项（可能还需进一步展开）

进一步展开后），用于处理将其作用于右侧函数 $\partial_{\omega'}^{\delta'} t^-_{\alpha,M}(\cdot,\omega')$ 的情形。

引入以下记号很方便。

$$
\begin{aligned}
u^+_\omega &= \partial^\delta_\omega t^+_{\alpha,M}(\cdot,\omega),\\
u^-_{\omega'} &= \partial^{\delta'}_{\omega'} t^-_{\alpha,M}(\cdot,\omega'),\\
\mathcal{M}^+_\omega &= \Big\{ z=(\hat{x},\bar{c},b)\in\mathbb{T}^* \mid 1-\sigma'\le \hat{x}\cdot\omega\le 1-\sigma,\ b\hat{x}+\bar{c}=F_{\mathrm{sph}}(\hat{x},\omega)/\sqrt{\gamma}\Big\},\\
\mathcal{M}^-_{\omega'} &= \Big\{ z=(\hat{x},\bar{c},b)\in\mathbb{T}^* \mid 1-\sigma'\le -\hat{x}\cdot\omega'\le 1-\sigma,\ b\hat{x}+\bar{c}=-F_{\mathrm{sph}}(\hat{x},-\omega')/\sqrt{\gamma}\Big\},\\
\mathcal{M}^-_{\omega'+} &= \big\{\gamma(\tau,z)\in\mathbb{T}^* \mid \tau\ge 0,\ z\in\mathcal{M}^-_{\omega'}\big\}\cup\{a,b=1\}.
\end{aligned}
$$

ˆ 我们遵循所示方案，因此设 R 是 $R(\lambda_0+\mathrm{i}0)$ 展开式中的一项。那么我们需要处理

$$\lim_{R\to\infty}\langle u^+_\omega, \chi_R\hat{R}\chi_R\, u^-_{\omega'}\rangle.$$

我们首先研究不含因子 χ_R 的表达式 $\langle u^+_\omega, \chi_R \hat{R}\chi_R\, u^-_{\omega'}\rangle$。令 $t_1=s_{\check{k}}$，并准备寻找满足以下条件的 $t_2\in\mathbb{R}$

$$
\begin{gathered}
WF^a_{t_1}(u^+_\omega)\cap WF^a_{t_2}(\hat{R}u^-_{\omega'})=\emptyset,\\
u^+_\omega\in L^{2,a}_{-t_2},\quad \hat{R}u^-_{\omega'}\in L^{2,a}_{-t_1}.
\end{gathered}
\tag{6.90}
$$

ˆ 更准确地说，对于除某个以不同方式处理的“余项”之外的所有此类项 R，我们将使用 (6.90)（见证明末尾）。

给定 (6.90)，我们插入适当的相空间单位分解。“大 a 部分”通过使用 (6.86c) 对 u^+_ω 进行处理（注意 $s\ge t_1$，因此柯西-施瓦茨不等式成立）。“小 a 部分”的分割函数选择为：对于每一项，分割算子要么将 u^+_ω 变为 $L^{2,\,a}_{t_1}$，要么将 ˆ $Ru^-_{\omega'}$ 变为 $L^{2,\,a}_{t_2}$。在这两种情况下，柯西-施瓦茨不等式都能使该表达式有意义。也可以用因子 χ_R 替代，并且还可以控制角度方面的一致性（参见步骤 I 中的讨论以及引理 6.22 前的一个注释）。

证明（6.90）的方法如下。由于 $t_1=s_{\check{k}}\le s$ 由（6.86b）可知

$$WF^a_{t_1}(u^+_\omega)\subset\mathcal{M}^+_\omega. \tag{6.91}$$

假设

$$\hat{R}u^-_{\omega'}\in L^{2,a}_{-t_1}, \tag{6.92a}$$

并且选择 t_2 使得

$$WF^a_{t_2}(\hat{R}u^-_{\omega'})\cap\{a=1\}\subset\mathcal{M}^-_{\omega'+}, \tag{6.92b}$$

$$u^+_\omega\in L^{2,a}_{-t_2}. \tag{6.92c}$$

Then

$$WF^a_{t_1}(u^+_\omega)\cap WF^a_{t_2}(\hat{R}u^-_{\omega'})\subset\mathcal{M}^+_\omega\cap\mathcal{M}^-_{\omega'+},$$

因此，为完成 (6.90) 的证明，我们只需验证右侧为空。由 [DS1、(3.5d)] 可知 $\mathcal{M}^+_\omega \cap \{a, b = 1\} = \emptyset$。为了完成证明，我们注意到

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{M}^+_\omega : \quad & \hat{x}(\tau, z) \to \omega \text{ for } \tau \to +\infty, \\ \forall z \in \mathcal{M}^-_{\omega'+} \setminus \{a, b = 1\} : \quad & \hat{x}(\tau, z) \to -\omega' \text{ for } \tau \to -\infty. \end{aligned}$$

但是，如果 $\omega \cdot \omega' \neq \cos \frac{\rho}{2-\rho}\pi$，我们无法找到满足这些渐近行为的 $z \in \mathbb{T}^*$。因此确实有$\mathcal{M}^+_\omega \cap \mathcal{M}^-_{\omega'+} = \emptyset$，从而可得（6.90）。

III。接下来需要检查展开 $R(\lambda_0 + \mathrm{i}0)$ 中各项 R 的（6.92a）–（6.92c）。注意，参数 t_2 可能取决于我们所考虑的具体项 R。

$R = Sr^+_{\lambda_0}S^*$。我们将 $R = (1 \otimes r^+_{\lambda_0})\Pi = r^+_{\lambda_0}\Pi$ 写成这样，以便应用引理6.22和6.24。取 $t_2 = s_{\check{k}} - 2s_0$（回忆 $s_0 = 1/2 + \rho/4$）。由（6.84b）可知 $u^+_\omega \in L^{2,\ a}_{-t}$ 对于 $t > t_2 - 1$ 成立，因此特别地，（6.92c）得证。为证明（6.92b），注意到 $WF^a_{s_{\check{k}}}(u^-_{\omega'}) \subset \mathcal{M}^-_{\omega'}$，参见（6.86b），因此对于 $u = \Pi u^-_{\omega'}$，取 $t = s_{\check{k}}$ 和 $\kappa = \kappa_\sigma$，条件（6.81a）得到满足，其中

$$\kappa_\sigma = -\cos\big((1 - \rho/2)\cos^{-1}(1 - \sigma)\big).$$

由此我们从 (6.81c) 得到

$$WF^a_{t_2}(\hat{R}u^-_{\omega'}) \cap \{a = 1\} \subset \mathcal{M}^-_{\omega'+},$$

从而得到 (6.92b)。由 (6.84b) 和引理 6.22 1) 可知 $Ru^-_{\omega'} \in L^{2,\ a}_{-t_1}$，从而得到 (6.92a)。

$\breve{R}(\lambda_0)\Pi'$。取 $t_2 = t_1 = s_{\check{k}}$。由 (6.80c) 可得 $u^-_{\omega'}, \breve{R}(\lambda_0)\Pi' u^-_{\omega'} \in L^{2,\ a}_{-t_1}$。由前一种情形我们知道 $u^+_\omega \in L^{2,\ a}_{-t_2}$ 以及 $WF^a_{t_1}(u^-_{\omega'}) \subset \mathcal{M}^-_{\omega'}$。因此由 (6.80d) 可得

$$WF^a_{t_2}(\breve{R}(\lambda_0)\Pi' u^-_{\omega'}) \cap \{a = 1\} \subset WF^a_{t_2}(u^-_{\omega'}) \subset \mathcal{M}^-_{\omega'} \subset \mathcal{M}^-_{\omega'+}.$$

在此情形下，我们已经证明了 (6.92a)–(6.92c)。

$\breve{R}(\lambda_0 + \mathrm{i}0)$，参见 (6.8)。如上文处理 $R = Sr^+_{\lambda_0}S^*$ 时那样取 $t_2 = s_{\check{k}} - 2s_0$，于是 (6.92c) 已知。我们还知道，对于 $u = u^-_{\omega'}$，条件 (6.81a) 在 $t = s_{\check{k}}$ 和 $\kappa = \kappa_\sigma$ 下得到满足，即

$$WF^a_{s_{\check{k}}}(u^-_{\omega'}) \cap \{b < \kappa, a = 1\} = \emptyset. \tag{6.93}$$

我们还注意到，对于任意 $L \in \mathbb{N}$（最终取足够大）并且

$$K = v_{\lambda_0} r^+_{\lambda_0} = \big(- S^* I_a \breve{R}(\lambda_0)\Pi' I_a S + \mathcal{O}(r^{-1-\rho})\big) r^+_{\lambda_0},$$

$$\begin{aligned} Sr^+_{\lambda_0}\big(1 + v_\lambda r^+_\lambda\big)^{-1} S^* = & \sum_{l=0}^{2L-1} Sr^+_{\lambda_0}(-K)^l S^* \\ & + Sr^+_{\lambda_0}(-K)^L\big(1 + K\big)^{-1}(-K)^L S^*. \end{aligned}$$

注意，当前公式 $v_\lambda^+ = v_\lambda^-$ 自然地引出了明确无歧义的记号 v_{λ_0}。此外，项 $\mathcal{O}(r^{-1-\rho})$ 实际上是 $\mathcal{O}(r^{-\infty})$，因为 $m_a = 1$ 使得$v_{\lambda_0} = \mathcal{O}(r^{-2-2\rho})$（如 (6.5) 后所述），不过下文只使用衰减 $v_{\lambda_0} = \mathcal{O}(r^{-1-\rho})$。

我们基本上将使用上述方法处理求和项中的各项，而最后一项将采用不同的方法处理。首先考察求和项中对 $R(\lambda + \mathrm{i}0)$的贡献$\check{}$。

$\underline{l = 0}$。我们考虑

$$\widehat{R}_0 := -Sr^+_{\lambda_0} S^* I_a \check{R}(\lambda_0)\Pi' - \check{R}(\lambda_0)\Pi' I_a Sr^+_{\lambda_0} S^*(1 - I_a \check{R}(\lambda_0)\Pi').$$

根据引理 6.22、(6.93) 和 (6.80a)–(6.80d)，可得 $\widehat{R}_0 u^-_{\omega'} \in L^{2,\ a}_{\ -t_1}$，即对于该贡献，(6.92a) 成立。（由于多出的因子 I_a，这是一个较粗略的界。）

同样，由 (6.81c)（参见 (6.93)）可知

$$WF^a_{t_2}(\widehat{R}_0 u^-_{\omega'}) \cap \{a = 1\} \subset \mathcal{M}^-_{\omega'+},$$

这就证明了 (6.92b)。

$\underline{l \geq 1}$。我们考虑

$$\widehat{R}_l := \big(1 - \check{R}(\lambda_0)\Pi' I_a\big) Sr^+_{\lambda_0} (-K)^l S^* \big(1 - I_a \check{R}(\lambda_0)\Pi'\big).$$

回顾 $WF^a_{t_1}(u^-_{\omega'}) \subset \mathcal{M}^-_{\omega'}$，我们需要研究 $Sr^+_{\lambda_0}(-K)^l S^*$ 作用于向量 $u \in L^{2,\ a}_{\ -\infty}$且满足 $WF^a_{t_1}(u) \subset \mathcal{M}^-_{\omega'}$。$K$的每个因子都会将权重提高 $\langle x\rangle^{2s_0-1-\rho} = \langle x\rangle^{-q}$ $q := \rho/2$，更准确地说，由引理 6.22 可得

$$WF^a_{t_1+lq}(S(-K)^l S^* u) \cap \{a = 1\} \subset \mathcal{M}^-_{\omega'+} \subset \{b \geq \kappa_\sigma, a = 1\},$$
$$WF^a_{t_2+lq}(Sr^+_{\lambda_0}(-K)^l S^* u) \cap \{a = 1\} \subset \mathcal{M}^-_{\omega'+}.$$

因此我们得到

$$WF^a_{t_2+lq}(\widehat{R}_l u^-_{\omega'}) \cap \{a = 1\} \subset \mathcal{M}^-_{\omega'+}, \tag{6.94}$$

特别地，(6.92b) 成立。

根据引理 6.22 的 1)，只要该引理的条件 $s' < -s_0$ 得到满足，全局权重就会因每次 K 的作用而提高一个因子 $\langle x\rangle^{-q}$（注意，$L^{2,\ a}_{\ -s_0}$ 无法通过 $r^+_{\lambda_0}$ 的作用达到）。由于 $l \geq 1$ 且 $u^-_{\omega'} \in L^2_{-t_2}$，于是我们得出 $\widehat{R}_l u^-_{\omega'} \in L^2_{-t_1}$，因此 (6.92a) 也得证。

$\underline{\text{余项。最后，我}}$们需要检查

$$\widehat{R} := \big(1 - \check{R}(\lambda_0)\Pi' I_a\big) Sr^+_{\lambda_0} (-K)^L \big(1 + K\big)^{-1} (-K)^L S^* \big(1 - I_a \check{R}(\lambda_0)\Pi'\big).$$

算子 $\big(1+K\big)^{-1} = 1 \otimes \big(1+K\big)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2_s(\mathrm{X}))$，$s \in (s_0, s_0 + q)$，但我们不知道它的微局部性质。因此，我们改用另一种方法，引入向量

$$v^-_{\omega'} = S(-K)^L S^* \big(1 - I_a \check{R}(\lambda_0)\Pi'\big) u^-_{\omega'},$$
$$v^+_{\omega} = S\Big(\big(1 - \check{R}(\lambda_0)\Pi' I_a\big) Sr^+_{\lambda_0} (-K)^L\Big)^* u^+_{\omega}$$

并写作

$$\langle u_\omega^+, \widehat{R} u_{\omega'}^- \rangle = \langle v_\omega^+, \big(1+K\big)^{-1} v_{\omega'}^- \rangle.$$

只需证明，对于某个 $s \in (s_0, s_0+q)$，当 L 足够大时

$$v_{\omega'}^- \in L_s^{2,a}, \quad v_\omega^+ \in L_{-s}^{2,a}. \tag{6.95}$$

为得到 $v_{\omega'}^- \in L^{2,}{}_s{}^a$ 的结果，我们按照上文所述反复使用引理 6.22；每次由 K 作用时，全局权重都会提高一个因子 $\langle x \rangle^{-q}$。由此可知，对于任意足够大的 L，$v_{\omega'}^- \in L^{2,}{}_s{}^a$ 对任何 $s \in (s_0, s_0+q)$ 都成立。对于断言 $v_\omega^+ \in L^{2,}{}_{-s}^{a}$，我们对 $r_{\lambda_0}^-$ 使用引理 6.22 的对应“入射”版本（为简便起见，此处不予陈述）。注意，展开伴随算子以处理 v_ω^+ 时，会出现 $r_{\lambda_0}^-$ 的幂。由于 u_ω^+ 和 $u_{\omega'}^-$ 的构造显然是对称的，引理 6.22 的入射版本也以相同方式适用于 u_ω^+，正如我们已经看到该引理适用于 $u_{\omega'}^-$。

□

6.1.3 在双簇阈值处物理模型的散射，情形 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$

在前面的小节中，在有效吸引性慢衰减簇间势这一条件下，我们作了若干简化假设。作出这些假设，部分是为了便于阐述。这里我们不打算在尽可能弱的条件下全面说明如何去除这些假设，而是着重讨论我们在第4.3节研究的物理模型（实际上，下面也不详述证明）。这意味着此处的有效簇间势是吸引型库仑势，因此，按照第4.3节，我们考虑情形 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$。（注意，这一条件既包括整体中性系统，也包括整体非中性系统。）我们将着重处理多重双簇情形，但仅限于定理 4.17 证明第一部分所研究的“典型”情形。因此，我们在此主要关注物理模型在 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ 最简单的多重情形下的散射。

我们考虑满足 4.1 的势 V，其中 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$，并假定条件 (4.68a) 和 (4.68b)。为简单起见，我们还假设 $\#\mathcal{A}_1 = 2$，即 $\mathcal{A}_1 = \{a_1, a_2\}$，如命题 2.12 中所述；并且与该结果一样，为方便起见，我们假设 λ_0 是 H^{a_j} 的单特征值；$j = 1, 2$。为简化表述，我们再次施加条件 (6.3)。

我们关注由 (6.39) 定义的散射算子 $S_{\beta\alpha} = \big(W_\beta^+\big)^* W_\alpha^-$ 的四个部分，其中 $\alpha, \beta \in \{(a_j, \lambda_0, \varphi_j) \mid j = 1, 2\}$，尤其是散射算子相应的部分

$$S_{\beta\alpha}(\lambda) = -2\pi W_\beta^+(\lambda)^* T_\alpha^-(\lambda), \quad \lambda \in I_\delta^+ = [\lambda_0, \lambda_0 + \delta],$$

参见 (6.47)。

我们可以证明定理 6.10 的完全类似项。注意，对于每个通道，都有一个与之关联的有效单体势，记为 w_j（或 w_α），其本质上是吸引型库仑势。相应地，我们将 $S_{\alpha\alpha}(\lambda)$ 定义为减去单体散射矩阵后的余项，正如定理

˘6.10 中所做的那样。类似地，我们可以为 $\alpha \neq \beta$ 定义 $S_{\beta\alpha}(\lambda) = S_{\beta\alpha}$（$\lambda$）。按照这些约定，对于 $S_{\beta\alpha}$（λ）的四个˘项中的每一项，我们都得到定理 6.10 的断言（k取相同的值）。证明基本相同。特别地，散射矩阵的非对角部分是紧的，而对角部分只有在减去一个酉算子后才是紧的，并且这包括阈值能量。

推论 6.25。 在上述条件下，对角部分 $S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)$ 除相差一个紧算子项外是酉的。特别地，在较小的团簇间能量区域内，弹性双团簇散射存在。

即使在上述简化假设下，目前也不知道 $S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)$是否为一个严格的酉算子（事实上我们无法排除 $\ker S_{\alpha\alpha}(\lambda_0) \neq \{0\}$ 的可能性），参见推论 6.15 以及第 6.3 节中的简短讨论。特别是，对于 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 且该阈值为重阈值的情形，目前尚不清楚这一点（注意，在此情形下，该阈值自动是所涉及子哈密顿量的单特征值）。另一方面，显然，定理 6.10 中的散射矩阵 $S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)$（其中 λ_0 为非重阈值）对于 $\lambda_0 = \Sigma_2$是严格的酉算子，参见注 6.16。

至于第二个主要结果定理 6.17，我们需要一个类似于定理 6.13 的结果，以便首先按照引理 6.20 的思路“改进” $S_{\beta\alpha}(\lambda_0)$ 的构造，此处不再详述。然后，通过仿照第 6.1.2.4 小节，我们得到以下结果。

定理 6.26。 在上述条件下，并且有 $\lambda_0 = \Sigma_2$

$$\operatorname{sing\,supp} S_{\beta\alpha}(\lambda_0) \quad \begin{cases} \subset \{(\omega, \omega') \mid \omega \cdot \omega' = -1\} & for \quad \alpha = \beta, \\ = \emptyset \quad for & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

6.2 有效 r^{-2} 势，原子-离子情形

如前所述，可以考虑非慢衰减情形下的弹性散射，即略高于给定的双簇阈值 λ_0 时的情形。$S_{\alpha\alpha}(\lambda)$ 如何随 $\lambda \to \lambda_0$变化?

设 $n = 3$，并考虑动力学原子核模型，见第 1.2.1 小节。考虑由 N 个带电粒子组成的双簇分解 $a = a_0 = (C_1, C_2)$。设 (6.68)，即

$$\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{d}}(H^a),$$

且团簇 C_1 的总电荷为零:

$$Q_1 = \sum_{j \in C_1} q_j = 0.$$

设 $\alpha = (a, \lambda_0, \varphi_\alpha)$ 为一个通道； $\varphi_\alpha = \varphi^{C_1} \otimes \varphi^{C_2} = \varphi^1 \otimes \varphi^2$。回顾第 1.2.1 小节中的簇电荷矩

$$\langle \varphi^1, \widetilde{Q}_1 \varphi^1 \rangle_2 = \Big\langle \varphi^1, \sum_{j \in C_1} q_j (x_j - R_1) \varphi^1 \Big\rangle.$$

现在我们可以陈述 [Sk2] 中的一个结果（见 [Sk2，定理 2.6 (3)]）：

定理6.27 （远离阈值的弹性双簇散射）。 *1)* 存在

$$W_\alpha^\pm f = \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_a}\big(\varphi_\alpha \otimes f\big).$$

2) 令 $S_{\alpha\alpha} = (W_\alpha^+)^* W_\alpha^-$和 $I_c = (\lambda_0, \infty) \setminus \mathcal{T}$。令 θ表示 $\omega - \omega' \in \mathbf{X}_a$的坐标向量。那么对于任意 $\epsilon > 0$

$$\begin{gathered} S_{\alpha\alpha} \simeq \int_{I_c}^{\oplus} S_{\alpha\alpha}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \\ S_{\alpha\alpha}(\lambda,\cdot) \in C^\infty(I_c, \big(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2\big)\setminus\{\theta=0\}), \\ S_{\alpha\alpha}(\lambda,\omega,\omega') - \delta(\theta) + \pi^{-1}\tfrac{M_1M_2}{M_1+M_2} Q_2\langle\varphi^1, \widetilde{Q}_1\varphi^1\rangle_2 \cdot \tfrac{\theta}{|\theta|^2} = \mathcal{O}_\lambda(|\theta|^{-\epsilon}). \end{gathered}$$

后一个界依赖于 λ，且这种依赖是局部一致的。一个自然的问题是，在（满足条件的情况下），区间（$\lambda_0, \lambda_0+\delta$）上是否存在一致的界$\delta > 0$? 这个问题取决于 λ_0处的预解算子行为，而第5章为这类问题提供了一些相关信息。一个相关问题是，低能弹性散射是否存在，参见推论 6.25。在下一节中，我们将讨论后一个问题，不仅针对上述情形（其中 $I_a(x^a = 0) = 0$），也针对有效排斥库仑情形。

6.3 阈值处的非透射，物理模型

我们考虑第 1.2 节和第 1.3 节物理模型的一个非透射问题，其中包含 $n = 3$。尽管该问题的陈述在更一般的情况下也有意义，但我们将注意力限制在这些模型上。

仿照 (6.39)，对于给定的通道 $\alpha = (a, \lambda_0, \varphi_\alpha)$（在给定的双簇阈值 λ_0 处），我们引入通道波算子

$$\begin{aligned} W_\alpha^\pm f &= \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\big(1\otimes J_0^\pm\big)\varphi_\alpha \otimes \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p_a^2+\lambda_0)} f \\ &= \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\big(\varphi_\alpha \otimes J_0^\pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p_a^2+\lambda_0)} f\big); \quad \hat{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbf{X}_a \setminus \{0\}). \end{aligned} \tag{6.96}$$

在有效库仑情形中，出现的定常修正算子 $J_0^\pm$按照 (6.24b) 和 (6.39) 进行选取（即对于排斥情形也采用这种方式）；而在有效非库仑情形中（如定理6.27），我们取 $J_0^\pm = 1$。令 $\Pi^\alpha = |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha| \otimes 1$并

$$\Pi_\pm^\alpha = \operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\Pi^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} 1_{\mathbb{R}\setminus\sigma_{\mathrm{pp}}(H)}(H).$$

我们关注“透射”（例如“交换”，参见 [CT]），或者更确切地说，关注在能量约束为局域化能量略高于 λ_0 的情况下通道之间缺乏透射。这种缺乏透射可以用数学方式表述为

$$\big\|\big(1-\Pi_+^\alpha\big)\Pi_-^\alpha F_\delta(H-\lambda_0)\big\| \to 0 \text{ for } \delta\to 0_+. \tag{6.97}$$

这里， F_δ 表示 $\mathbb{R}$ 上的特征函数 $F([0,\delta])$。

注意，态 $\psi = 1_{\mathbb{R}\setminus\sigma_{\rm pp}(H)}(H)\psi$ 属于投影 $\Pi_\pm^\alpha$ 的值域，当且仅当 $(1-\Pi^\alpha)\psi(t) \to 0$ 对于 $t \to \pm\infty$成立； $\psi(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}\psi$。直观地说，（6.97）的一个推论是：如果一个在能量上略高于 λ_0 处局域化的态 ψ 实际上满足$\psi(t) \approx \Pi^\alpha\psi(t)$ 对于 $t \to -\infty$，那么同样有 $\psi(t) \approx \Pi^\alpha\psi(t)$ 对于 $t \to +\infty$。因此，在低能区的渐近意义下，只发生弹性散射，并且不会透射到除（入射的） α 之外的其他通道。

显然 $\Pi_\pm^\alpha W_\alpha^\pm = W_\alpha^\pm$，并且根据渐近完备性（参见 [De3]） $\Pi_\pm^\alpha \subset W_\alpha^\pm \big(W_\alpha^\pm\big)^*$。因此

$$\Pi_\pm^\alpha = W_\alpha^\pm \big(W_\alpha^\pm\big)^*.$$

因此我们可以计算

$$\big(1-\Pi_+^\alpha\big)\Pi_-^\alpha F_\delta(H-\lambda_0) = \big(W_\alpha^- - W_\alpha^+ S_{\alpha\alpha}\big)F_\delta(p_a^2)\big(W_\alpha^-\big)^*.$$

Now

$$\|\big(W_\alpha^- - W_\alpha^+ S_{\alpha\alpha}\big)f\|^2 = \|f\|^2 - \|S_{\alpha\alpha}f\|^2,$$

由上面的恒等式可知，(6.97) 成立的充要条件是 $S_{\alpha\alpha}(\lambda)$ 渐近等距，即

$$\|1 - S_{\alpha\alpha}(\lambda)^* S_{\alpha\alpha}(\lambda)\| \to 0 \text{ for } \lambda \to (\lambda_0)_+. \tag{6.98}$$

注意，在推论 6.25 的语境中，根据该断言可知极限对角部分 $S_{\alpha\alpha}(\lambda_0) \neq 0$，然而其中并未指出 $S_{\alpha\alpha}(\lambda_0)$ 是等距的，而且我们无法证明这一点。关于吸引型库仑情形的透射猜想，参见注 6.16。

我们考虑满足 $n = 3$ 的物理模型。为方便起见，我们施加条件 2.4，并令 $a_0 = a$，也就是说，我们只考虑非重数情形。此时有三种情形可以证明 (6.98)（或等价地，(6.97)）：

I) 有效排斥库仑情形。

II) $I_a(x^a = 0) = 0$，“高于 Hardy 极限”，且 λ_0 为“正则”。

III) $I_a(x^a = 0) = 0$，“快速衰减情形”，且 λ_0 为“第一类极大例外”。

注意，I）对应于第 1.2 节和第 1.3 节中的情形 1（对电荷还附加了一个符号条件）。II）对应于同两节中的情形 2 和情形 3，而 III）仅对应于情形 3，并包括共振态的出现（但不包括束缚态）。“高于 Hardy 极限”这一术语在小节 6.3.2 的单重情形 $m_a = 1$ 中有解释，见（6.106）；而第 5.1.1 节中的“正则”是指 λ_0 既不是特征值也不是共振。在一般情况下，“高于 Hardy 极限”这一条件是关于 $m_a \times m_a$ 矩阵值有效势 $S_a^* I_a S_a = Q_a|x_a|^{-2} + B_a$，更确切地说，是关于其首项 $Q_a(\hat{x}_a)$ 的谱条件。根据定义，这意味着 $-\Delta_\theta + Q_a(\theta)$ 的特征值都严格大于 $-1/4$，参见第4.3节；当然，对于情形 3（其中 $Q_a = 0$），这一条件是满足的，但在情形 2 中未必满足。“第一类例外”这一条件是指 λ_0 是共振而非特征值，参见第 5.1.1 节。“最大”一词是指共振

态空间的最大重数，即 $n_{\mathrm{res}} = m_a$。注意，快速衰减的正则情形包含在情形 II）中。

我们将结果总结如下。

定理 6.28. 对于满足条件 *2.4* 的物理模型，在 λ_0 处，对于 $a_0 = a$，若 $n = 3$，则不存在透射，假设条件为 I)、II) 或 III)。因此，对于上述每种情形，在小团簇间能量区域内，从任意给定的（入射）通道 $\alpha = (a, \lambda_0, \varphi_\alpha)$ 到任何不同的（出射）通道都不存在透射，即 (6.97) 和 (6.98)成立。

我们的结果将在后续小节中，在以下额外的（便于处理但非必要的）简化条件下证明：

a) $m_a = 1$。 b) $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}$
$(H) \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$。

注 6.29. 1) 我们不知道，对于快速衰减情形且 λ_0 为第二类或第三条例外点时，(6.98) 是否在完全一般的情况下成立，尽管对于后两种情形，我们已在某个衰减条件下得到结果（此时 $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H)$）。III) 的证明基于定理 5.45，该定理适用于某个 $t > 3/2$ 下的衰减条件 $\mathrm{ran}\,\Pi_H \subset L^2_t$，其中 Π_H 表示到 $\ker(H - \lambda_0)$ 上的正交投影。因此，在这一附加条件下，III) 可以推广到涵盖“第三类最大例外情形”。请注意，H 与 $H_\sigma := H - \sigma\Pi_H$, $\sigma > 0$ 的（局部）散射理论完全相同，并且在这种情况下，λ_0 是 H_σ的“第一类最大例外点”。

2) 类似地，对于临界衰减率情形，我们并不完全知道 II) 中的正则性条件是否必要。然而，对于“第二类例外情形”，我们可以使用定理 5.44，此时需要衰减条件 $\mathrm{ran}\,\Pi_H \subset L^2_t$for some $t > 1$。注意，在此情形下，λ_0 是 H_σ 的正则点。

3) 如果删去 $m_a > 1$ 以及情形 III) 中的“maximally”一词，即 $n_{\mathrm{res}} \in \{1, \ldots, m_a - 1\}$，我们在第 6.3.4 小节中证明 确实发生透射。

4) 我们证明定理 6.28 的一个关键要素，是关于单体谱密度算子的各种低能量估计。这些估计在有效吸引库仑情形下并不存在。

6.3.1 (6.98) 的证明，情形 I)

我们考虑情形 I)，即排斥库仑情形。我们使用第 4.1.3 小节$\widehat{\ }$和第 4.2.3 小节，并按照 (4.16) 引入一个全局正函数 W，满足 $\rho = \bar{\rho} = 1$。更准确地说，这里我们考虑注 6.1 中讨论的非重数情形，并施加上述条件 a) 和 b)。如第 4.1.3 小节中一样，我们取$w = \widehat{W}$。我们定义 $r^{\pm}_\lambda = (h_a + \lambda_0 - \lambda \mp \mathrm{i}0)^{-1}$、$h_a = p_a^2 + w$ 和 $\lambda \geq \lambda_0$，并回顾估计

$$\|\langle x\rangle^{-s} r^{\pm}_\lambda \langle x\rangle^{-s}\| \leq C, \quad s > s_0 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\rho}{4}, \tag{6.99}$$

参见 [Na] 和 [Ya2]。另请回忆 $r^+_{\lambda_0} = r^-_{\lambda_0}$。

接下来我们引入相对波算子

$$\Omega_\alpha^\pm f = \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(H_a+w)}\big(\varphi_\alpha\otimes f\big)$$

以及相应的散射算子 $(\Omega_\alpha^+)^*\Omega_\alpha^-$。

利用单体 Isozaki-Kitada 散射理论，我们可以写出

$$\delta(h_a-\lambda+\lambda_0) = W_1^\pm(\lambda-\lambda_0)W_1^\pm(\lambda-\lambda_0)^*, \tag{6.100}$$

参见 [DS1]。这里，$W_1^\pm(\cdot)$ 表示对应于 Isozaki-Kitada 波算子 $W_1^\pm$ 的对 (p_a^2, h_a) 的波矩阵，参见 [DS1]。显然，波算子 $W_\alpha^\pm = \Omega_\alpha^\pm W_1^\pm$。令我们用 W_1^- 将 h_a 对角化。因此，我们引入“识别算子” $J_\alpha = \varphi_\alpha\otimes(W_1^-\cdot)$ 以及相应的相对波算子

$$\widetilde{W}_\alpha^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}J_\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p_a^2+\lambda_0)}.$$

注意，$\widetilde{W}_\alpha^- = W_\alpha^-$，而 $\widetilde{W}_\alpha^+ = W_\alpha^+ S_1$，其中 S_1 是对 (p_a^2, h_a) 的散射算子。因此

$$S_{\alpha\alpha} = \big(W_\alpha^+\big)^* W_\alpha^- = S_1\big(\widetilde{W}_\alpha^+\big)^*\widetilde{W}_\alpha^- = S_1\widetilde{S}_{\alpha\alpha},$$

通过傅里叶变换将 $p_a^2+\lambda_0$ 对角化后，得到

$$S_{\alpha\alpha}(\lambda) = S_1(\lambda-\lambda_0)\widetilde{S}_{\alpha\alpha}(\lambda).$$

（单体问题中也会出现类似的因式分解公式，见 [Ba]。）我们可以表示为，参见 [DS1，附录A] 或 [Ya3，第7节3],

$$\widetilde{S}_{\alpha\alpha}(\lambda) = 1 - 2\pi J_\alpha(\lambda)^* T_\alpha(\lambda) + 2\pi\mathrm{i}T_\alpha(\lambda)^* R(\lambda+\mathrm{i}0)T_\alpha(\lambda), \tag{6.101}$$

其中 $J_\alpha(\lambda) = \varphi_\alpha\otimes W_1^-(\lambda-\lambda_0)$以及 $T_\alpha(\lambda) = \mathrm{i}(H-\lambda_0)J_\alpha(\lambda) = \mathrm{i}(I_a-w)J_\alpha(\lambda)$。注意，形式上 $J_\alpha(\lambda) = J_\alpha\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)^*$，其中 $\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda) = \mathcal{F}_0(\lambda-\lambda_0)$，而 $\mathcal{F}_0(\cdot)$由（6.31）规定。还要注意，泰勒展开得到 $T_\alpha(\lambda) \approx \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-2}\langle x^a\rangle^3)J_\alpha(\lambda) \approx\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-2})J_\alpha(\lambda)$。

现在我们可以验证（6.98）。将（6.101）代入（6.98）后，只需证明

$$\|J_\alpha(\lambda)^* T_\alpha(\lambda)\| \to 0, \tag{6.102a}$$
$$\|T_\alpha(\lambda)^* R(\lambda+\mathrm{i}0)T_\alpha(\lambda)\| \to 0. \tag{6.102b}$$

为证明（6.102a），我们注意到以下界

$$\|\delta(h_a-\lambda+\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(L^2_s,L^2_{-s})} = o((\lambda-\lambda_0)^0) \text{ for } s>s_0, \tag{6.103}$$

参见 [Na]。我们将其与 $s=1$ 结合使用，再结合（6.100），即可证明（6.102a）.

要推导（6.102b），根据同样的论证，只需证明以下界

$$\sup_{\lambda\in I_\delta^+} \|\langle x\rangle^{-1}R(\lambda+\mathrm{i}0)\langle x\rangle^{-1}\| < \infty,$$

而这又由 (6.7)、(6.8)（参见注 6.1）和 (6.99) 得出。

6.3.2 证明(6.98)，情形 II)

对于情形 II)，波算子由带有 $J_0^{\pm} = 1$ 的 (6.96) 定义。注意，对于略高于 λ_0 的 λ，散射矩阵满足以下公式：

$$S_{\alpha\alpha}(\lambda) = 1 - 2\pi J_\alpha^+(\lambda)^* T_\alpha^-(\lambda) + 2\pi \mathrm{i} T_\alpha^+(\lambda)^* R(\lambda + \mathrm{i}0) T_\alpha^-(\lambda), \tag{6.104}$$

其中 $J_\alpha^+(\lambda) = J_\alpha^-(\lambda) = \varphi_\alpha \otimes \mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)^* =: J_\alpha(\lambda)$、$\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda) = \mathcal{F}_0(\lambda - \lambda_0)$，类似地$T_\alpha^+(\lambda) = T_\alpha^-(\lambda) = \mathrm{i} I_a J_\alpha(\lambda) =: T_\alpha(\lambda)$。

与定理 6.10 中一样，我们通过引入一个单体散射矩阵来减去

$$\check{S}_{\alpha\alpha}(\lambda) = S_{\alpha\alpha}(\lambda) - S_w(\lambda - \lambda_0);$$

这里 w 是待确定的实有效单体势。由于我们知道$S_w(\lambda - \lambda_0)$是酉的，因此我们旨在证明

$$\|\check{S}_{\alpha\alpha}(\lambda)\| \to 0 \text{ for } \lambda \to (\lambda_0)_+. \tag{6.105}$$

为考察这一问题，我们需要一个关于 $R(\lambda + \mathrm{i}0)$ 的公式，就像我们在定理 6.10 的证明中所使用的公式一样。根据情形 II) 的条件，λ_0 既不是 H 的共振，也不是其特征值，并且“高于 Hardy 极限”的条件

$$\nu_0 := \min_{\nu \in \sigma} \operatorname{Re} \nu > 0 \tag{6.106}$$

得到施加。这里，集合 σ 如重根情形中的类似公式 (4.25) 所给出，即由扰动后的拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $-\Delta_\theta + q(\theta)$ 的特征值按照 (4.21) 计算得到。换言之

$$\inf \sigma\big(-\Delta_\theta + q(\theta)\big) > -1/4.$$

我们假设 $m_a = 1$，并且 $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(H')$，参见定理 6.28 之后所述的条件 a) 和 b)。

在条件 (6.106) 下，可以希望算子 $(p_a^2 + W + \lambda_0 - \lambda \mp \mathrm{i}0)^{-1}$，其中 $W := \langle \varphi_\alpha, I_a \varphi_\alpha \otimes \cdot \rangle$，能够作为研究 $\lambda \to (\lambda_0)_+$ 时渐近行为的良好辅助算子，参见第 4.1.4 和 4.2.4 小节。然而，对于 $p_a^2 + W$，零可能是一个特征值或共振，从而使这一设想无法实现。为避免这一问题，我们需要通过适当的衰减更强的项来修改 $W(x_a)$（该扰动的阶将为 $\mathcal{O}(|x_a|^{-3})$），以确保零对于辅助算子而言是正则的。更确切地说，我们使用与 (4.24) 中相同的二次单位分解，引入

$$\begin{aligned} h_a &= \chi_1(r) p_a^2 \chi_1(r) + \chi_2(r)\big(p_a^2 + \tfrac{q(\theta)}{r^2}\big)\chi_2(r) = p_a^2 + w, \\ w &= |\nabla \chi_1|^2 + |\nabla \chi_1|^2 + \tfrac{q(\theta)}{r^2}\chi_2^2 = W + \mathcal{O}(r^{-3}), \\ r_\lambda^{\pm} &= (h_a - k^2 \mp \mathrm{i}0)^{-1}, \quad k \in (0,1], \quad \lambda = \lambda_0 + k^2. \end{aligned}$$

Du由此得到（6.106） $h_a \geq 0$，事实上 h_a 是严格正的（即 $h_a \geq 0$ 和 $0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}$（$h_a$） ）.

我们将通过分部积分论证证明 h_a 在零能量处没有共振，参见 [Ji], ；并将通过拟参数构造证明 $r_\lambda^{\pm}$ 的一些性质。此外，我们还需要傅里叶变换 $\mathcal{F}_0(k^2)$ 的限制的性质。

1. 类比零能量公式 (4.24)，令

$$G_k^{\pm} = \chi_1(r)(h_a \mp \mathrm{i})^{-1}\chi_1(r) + \sum_{\nu\in\sigma} \chi_2(r) r^{-1} R_{\nu,k}^{\pm} r\chi_2(r) \otimes P_\nu;$$

$$R_{\nu,k}^{\pm} = (p^2 + \tfrac{\nu^2-1/4}{r^2} - k^2 \mp \mathrm{i}0)^{-1}, \quad p = -\mathrm{i}\partial_r,\ k > 0.$$

这里 $R_{\nu,k}^{\pm} \in \mathcal{L}_{s',-s} := \mathcal{L}\big(L^2_{s'}(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}r)\, L^2_{-s}(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}r)\big)$ 对于 $s, s' > 1$，实际上存在一个与 $\nu \geq \nu_0$ 和 $k \in (0,1)$ 无关的界。为简便起见，我们在此处及下文均假设 $\nu_0 \in (0,1)$。参见 Ca 的证明 [命题 4.1]，，并且注意，该证明还表明，加权空间算子范数关于 k 一致趋于零，当 $\nu \to \infty$ 时。我们定义伴随算子 $\big(K_k^{\pm}\big)^* = \big(h_a - k^2\big)\big(G_k^{\pm}\big)^* - 1$，并得出结论：对于任意充分小的 $\epsilon > 0$，$K_0^{\pm} := \lim_{k\to 0_+} K_k^{\pm} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{H}^1_{-1-\epsilon}\big)$。

2. 我们推导算子 R_{ν}^{+}，$_k$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上作用于函数时的界，这里假设$\nu > 1$。令 $\epsilon \in (0, \nu_0)$。其核的显式表达式为

$$R^+_{\nu,k}(r,r') = -2^{-1}\sqrt{rr'}\int_0^\infty \exp\big(\mathrm{i}\rho t + \mathrm{i}k^2 rr'/(2t) - \mathrm{i}\pi\nu/2\big)\, J_\nu(t) t^{-1}\,\mathrm{d}t; \quad \rho = \tfrac{r^2+r'^2}{2rr'}.$$

（例如参见 [Ca]。）记 $1 = \chi_{2kr'}(t) + \bar\chi_{2kr'}(t)$，参见记号 (1.29)，并且

$$\exp(\cdot) = \big(1 + \rho^2(1-y)^2\big)^{-1}\big(1 - \mathrm{i}\rho(1-y)\partial_t\big)\exp(\cdot); \quad y = \tfrac{k^2(rr')^2}{(r^2+r'^2)t^2}.$$

我们将上述积分 $\int_0^\infty = \int_0^\infty \cdot\chi_{2kr'}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \cdot\bar\chi_{2kr'}(t)\,\mathrm{d}t$ 拆开，并注意到，对于 $\nu \geq \nu_0$ 贝塞尔函数界，参见 [Ca 的证明，命题 4.1], 给出

$$\Big|\int_0^\infty \cdot\chi_{2kr'}(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leq o(\nu^0)\min\{(kr')^{\nu_0}, 1\} \leq o(\nu^0)(kr')^{\epsilon},$$

由此借助希尔伯特-施密特判据得到算子界

$$\Big\|\sqrt{rr'}\int_0^\infty \cdot\chi_{2kr'}(t)\,\mathrm{d}t\Big\|_{\mathcal{L}_{s',-s}} \leq o(\nu^0)k^{\epsilon}; \quad s > 1,\ s' > 1+\epsilon. \tag{6.107a}$$

另一方面，假设（对于 (6.107b)） $\nu > 1$,

$$\bar\chi_{2kr'}(t) y \leq 1/4,$$

由此通过分部积分和贝塞尔函数界得到

$$\Big|\int_0^\infty \cdot\bar\chi_{2kr'}(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leq o(\nu^0)\rho^{-1}, \tag{6.107b}$$

$$\Big\|\sqrt{rr'}\int_0^\infty \cdot\bar\chi_{2kr'}(t)\,\mathrm{d}t\Big\|_{\mathcal{L}_{s',-s}} \leq o(\nu^0); \quad s + s' > 2,\ s, s' > 0. \tag{6.107c}$$

注意，在（6.107c）中，我们使用了（6.107b）、希尔伯特-施密特判据以及界

$$r^\kappa \rho^{-1} r'^{-\kappa} \leq 2; \quad \kappa \in [-1, 1],$$

以及恒等式

$$2J'_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) - J_{\nu-1}(t);$$

参见 [Ta1, （3.6.17）]。现在结合（6.107a）和（6.107c），可写成

$$\begin{aligned} R^+_{\nu,k} &= R^+_{\nu,k,1} + R^+_{\nu,k,2};\\ R^+_{\nu,k,1} &\in \mathcal{L}_{s',-s}; \quad s>1,\, s'>1+\epsilon,\\ \|R^+_{\nu,k,1}\|_{\mathcal{L}_{s',-s}} &\le o(\nu^0)k^\epsilon. \\ R^+_{\nu,k,2} &\in \mathcal{L}_{s',-s}; \quad s=1-\epsilon,\, s'>1+\epsilon,\\ \|R^+_{\nu,k,2}\|_{\mathcal{L}_{s',-s}} &\le o(\nu^0). \end{aligned} \tag{6.108a}$$

3. 我们给出情形 $\nu \le 1$ 下 $R^+_{\nu,k}$ 的界。仍令 $\epsilon \in (0,\nu_0)$。注意以下表示式，参见 [Ta1，第228–230],页

$$R^+_{\nu,k}(r,r') = \tfrac{\pi \mathrm{i}}{2k}(kr_<)^{1/2}J_\nu(kr_<)(kr_>)^{1/2}H^{(1)}_\nu(kr_>),$$

以及经典的逐点界

$$\begin{aligned} |t^{1/2}J_\nu(t)| &\le C_\nu\big(\tfrac{t}{\langle t\rangle}\big)^{\nu+1/2},\\ |t^{1/2}H^{(1)}_\nu(t)| &\le C_\nu\big(\tfrac{t}{\langle t\rangle}\big)^{-\nu+1/2}. \end{aligned}$$

因此

$$\forall \nu\in(0,1/2]: \quad |(kr_<)^{1/2}J_\nu(kr_<)(kr_>)^{1/2}H^{(1)}_\nu(kr_>)| \le C^2_\nu k\, r_<^{\nu+1/2}\, r_>^{-\nu+1/2},$$

$$\forall \nu\in(1/2,\infty): \quad |(kr_<)^{1/2}J_\nu(kr_<)(kr_>)^{1/2}H^{(1)}_\nu(kr_>)| \le C^2_\nu k\, r_<.$$

利用希尔伯特-施密特判据，我们由这些界得到：

$$\begin{aligned} \forall \nu\in(0,1/2]: \quad R^+_{\nu,k} = R^+_{\nu,k,2} &\in \mathcal{L}_{s',-s}; \quad s=1-\epsilon,\, s'>1+\epsilon,\\ \|R^+_{\nu,k,2}\|_{\mathcal{L}_{s',-s}} &\le C_{\nu,s,s'}. \end{aligned} \tag{6.108b}$$

$$\begin{aligned} \forall \nu\in(1/2,1]: \quad R^+_{\nu,k} = R^+_{\nu,k,2} &\in \mathcal{L}_{s',-s}; \quad s,s'>1/2,\, s+s'>2,\\ \|R^+_{\nu,k,2}\|_{\mathcal{L}_{s',-s}} &\le C_{\nu,s,s'}. \end{aligned} \tag{6.108c}$$

显然，在 (6.108b) 和 (6.108c) 中，$R^+_{\nu\,k,,1}=0$；自然会问，在 (6.108a) 中是否也可以取 $R^+_{\nu\,k,,1}=0$？我们并不清楚。注意，已知上述贝塞尔函数逐点界中的常数 $C_\nu\to\infty$ 对于 $\nu\to\infty$，参见 [La]。因此，我们在步骤 *2* 中采用了不同的方法来处理区域 $\nu>1$。

4. 参照步骤*1*，我们断言

$$-1 \notin \sigma(K^+_0). \tag{6.109a}$$

这等价于断言 $r^\pm_\lambda$ 在 $k=0$处是正则的，因此还需证明对于 h_a而言，0 不是“共振”。如果存在$0\neq f\in\mathcal{H}^1_{-s_0}\setminus\mathcal{H}^1$、 $s_0=1+\nu_0$，使得 $h_af=0$，则称 0 是一个共振，参见定义 4.6。注意，此处及下文中的记号 $\mathcal{H}^1_t$ 是 H^1_t 的另一种写法（以符合

第4章的记号）。因此，设 $f \in \mathcal{H}^1_{-s_0}$ 满足 $h_a f = 0$。由定理 4.7 的证明，利用 (6.108a)–(6.108c) 以及 $k = 0$，我们得知，对于任意 $s' > 1 - \nu_0$ 都有 $f \in \mathcal{H}^1_{-s'}$（注意，对于 $s' \in (1-\nu_0, 2-\nu_0)$，$K_0^+ \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^1_{-s'})$）。特别地，$f \in \mathcal{H}^1_{-1}$。接下来仿照定理 4.2 的证明，即通过分部积分并推得

$$0 = \lim_{R\to\infty} \langle \chi_R f, \chi_R h_a f\rangle = \lim_{R\to\infty} \langle \chi_R f, h_a \chi_R f\rangle \geq c\||x|^{-1} f\|^2.$$

因此 $f = 0$。

5。利用（6.109a）和（6.108a）–（6.108c），我们可以得到 $r_\lambda^\pm$ 的界。注意，由于时间反演性质，后面的界同样适用于将 $R^+_{\nu\,,k}$ 替换为 $R^-_{\nu\,k,}$ 的情形。随后可以由以下公式推导出 $r_\lambda^\pm$ 的界：

$$r_\lambda^+ = \big(1 + K_k^+\big)^{-1}(G_k^-)^* = G_k^+\big(1 + (K_k^-)^*\big)^{-1}. \tag{6.109b}$$

这里可以使用 $G_k^\pm = G_{k\,,1}^\pm + G_{k\,,2}^\pm$，这与（6.108a）–（6.108c）中的分解 $R^+_{\nu\,,k} = R^+_{\nu\,,k,1} + R^+_{\nu\,k,,2}$ 一致。代入（6.109b）后得到关于 $r_\lambda^+ = r^+_{\lambda\,,1} + r^+_{\lambda\,,2}$ 的两个公式，它们直接展示了由（6.108a）–（6.108c）所确定的映射性质。

由于我们假设 λ_0 不是共振，因此可写为

$$-E_{\mathcal{H}}^+(\lambda) = p_a^2 + w + v_\lambda^+ + \lambda_0 - \lambda$$

然后考虑

$$\big(\widetilde{K}_k^+\big)^* = \big(-E_{\mathcal{H}}^+(\lambda)^*\big)\big(r_\lambda^+\big)^* - 1.$$

~ ~根据情形 II) 的正则性条件，极限算子 $K_0^+ := \lim_{k\to 0_+} K_k^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^1_{-1-\epsilon})$（对任意充分小的 $\epsilon > 0$ 都存在）满足

$$-1 \notin \sigma(\widetilde{K}_0^+). \tag{6.109c}$$

利用 (6.109a)–(6.109c) 与 (6.108a)–(6.108c) 相结合，我们可以得到 $E_{\mathcal{H}}^+(\lambda)$ 的逆算子的界。然而，为了处理 (6.104)，我们还需要关于傅里叶变换的界。

6. 傅里叶变换限制的界。我们注意到如下界

$$\|\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)\langle x\rangle^{-1-\epsilon}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^3),L^2(\mathbb{S}^2))} \leq C_{\epsilon,\epsilon'}(\lambda - \lambda_0)^{\epsilon'}, \quad 0 < 2\epsilon' < \epsilon \leq 1/2,$$

这可通过使用自由三维预解核的众所周知表达式和希尔伯特-施密特判据得到。就 k 变量而言，它对应于下列界中的第一个。关于第二个界，我们参见 [Ag，定理 3.2]。

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_0(k^2)\langle x\rangle^{-1-\bar\epsilon}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{X}),L^2(\mathbb{S}^2))} &\leq Ck^{\epsilon'}, \quad 0 < \epsilon' < \bar\epsilon \leq 1/2,\\ \|\mathcal{F}_0(k^2)\langle x\rangle^{-s}\|^2_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{X}),L^2(\mathbb{S}^2))} &\leq Ck^{-1}, \quad s > 1/2,\end{aligned}$$

对这些界进行插值可得

$$\begin{aligned}&\forall \kappa \in [0,1], \epsilon' < \bar\epsilon \leq 1/2,\ s > 1/2:\\ &\qquad \|\mathcal{F}_0(k^2)\langle x\rangle^{-\kappa(1+\bar\epsilon)-(1-\kappa)s}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{X}),L^2(\mathbb{S}^2))} \leq Ck^{\kappa\epsilon'-(1-\kappa)/2}.\end{aligned} \tag{6.110}$$

7。现在我们可以处理 (6.104)。(6.104) 的中间项可写为

$$\begin{aligned}-2\pi J_\alpha(\lambda)^* T_\alpha(\lambda) &= -2\pi \mathrm{i}\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)\big(w+\mathcal{O}(r^{-3})\big)\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)^* \\ &= -2\pi \mathrm{i}\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda) w \mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)^* + o((\lambda-\lambda_0)^0).\end{aligned}$$

第一项对应于势 w 的单体散射矩阵的“Born项”；类似地，在（6.104）的第三项中，贡献$2\pi \mathrm{i} T_\alpha(\lambda)^* S r_\lambda^+ S^* T_\alpha(\lambda)$，由 $r_\lambda^\pm = (p_a^2 + w + \lambda_0 - \lambda \mp \mathrm{i}0)^{-1}$ 可知，除去一个阶为 $o((\lambda-\lambda_0)^0)$ 的项后，可写成

$$2\pi \mathrm{i}\mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda) w r_\lambda^+ w \mathcal{F}_{\lambda_0}(\lambda)^*.$$

该表达式、恒等算子 1 与 Born项的组合恰好是 $S_w(\lambda-\lambda_0)$。因此，只需证明

$$\|T_\alpha(\lambda)^*\big(R(\lambda+\mathrm{i}0) - S r_\lambda^+ S^*\big) T_\alpha(\lambda)\| \to 0.$$

利用公式（6.7）和（6.8）（参见注 6.1），只需证明

$$\|T_\alpha(\lambda)^* \breve{R}(\lambda+\mathrm{i}0)\Pi' T_\alpha(\lambda)\| \to 0, \tag{6.111a}$$

$$\|T_\alpha(\lambda)^* \breve{R}(\lambda+\mathrm{i}0) T_\alpha(\lambda)\| \to 0. \tag{6.111b}$$

为证明这些断言，我们按照定理 6.10 的证明，考察 a）–c）三种情形。

a)。（6.111a）中的渐近行为可通过先写成以下形式得到

$$T_\alpha(\lambda)^* \breve{R}(\lambda+\mathrm{i}0)\Pi' T_\alpha(\lambda) = J_\alpha(\lambda)^* \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-2}) \breve{R}(\lambda+\mathrm{i}0)\Pi' \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-2}) J_\alpha(\lambda)$$

然后使用定理3.18和（6.110）。

至于（6.111b），我们按照定理 6.10 的证明展开 $R(\lambda+\mathrm{i}0)$，参见证明中的情形 b) 和 c)。

b). 我们写作

$$\begin{aligned}&T_\alpha(\lambda)^* S r_\lambda^+ \big(1 + v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1} S^* T_\alpha(\lambda) - T_\alpha(\lambda)^* S r_\lambda^+ S^* T_\alpha(\lambda) \\ &= -T_\alpha^+(\lambda)^* S r_\lambda^+ \tilde{v}_\lambda^+ r_\lambda^+ S^* T_\alpha^-(\lambda); \\ &\qquad \tilde{v}_\lambda^+ = \big(1 + v_\lambda^+ r_\lambda^+\big)^{-1} v_\lambda^+.\end{aligned}$$

在此公式中，我们代入步骤5开始处的 $r_\lambda^+ = r_{\lambda,1}^+ + r_{\lambda,2}^+$ 的两种表示（将右侧的 r_λ^+ 因子替换为（6.109b）的中间表达式，并将左侧的 r_λ^+ 因子替换为（6.109b）的第三个表达式）。然后我们便可证明所需的衰减。

将这两个和展开后，我们得到四项。首先考虑类型 $r_{\lambda,2}^+$ 出现两次时的贡献。我们在 $r_{\lambda 2,}^+$ 的两个因子旁边分别插入 $1 = \langle x\rangle^s \langle x\rangle^{-s}$，其中 $s = 1-\epsilon$较小；因此，对于左因子，我们写成 $r_{\lambda,2}^+ = \langle x\rangle^s \langle x\rangle^{-s} r_{\lambda,2}^+$，然后依次写成 $r_{\lambda,2}^+ = r_{\lambda,2}^+ \langle x\rangle^{-1-2\epsilon}\langle x\rangle^{1+2\epsilon}$，利用界（本质上由 (6.108a)–(6.108c) 给出）来估计 $\langle x\rangle^{-s} r_{\lambda,2}^+ \langle x\rangle^{-1-2\epsilon}$。右因子同理

我们写成 $r^+_{\lambda,2} = r^+_{\lambda,2}\langle x\rangle^{-s}\langle x\rangle^{s}$。结合 (6.110)（取右端为零的情形 $k \to 0_+$ 使用），我们随后得到界 $o((\lambda-\lambda_0)^0)$。

其余三个项也可以用类似的方法得到相同的结论。唯一的区别在于参数的选择。因此，$r^+_{\lambda,1}$ 较差的映射性质导致应用 (6.110) 时出现 k 的（较小）负幂。然而，在这种情况下，界 (6.108a) 提供了正幂，二者结合确实得到界 $o((\lambda-\lambda_0)^0)$。

c)。给定公共因子 2πi 后，需要考虑的四个项为：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= -T_\alpha(\lambda)^* S r^+_\lambda \big(1 + v^+_\lambda r^+_\lambda\big)^{-1} S^* I_a \breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\Pi' T_\alpha(\lambda),\\
S_2 &= T_\alpha(\lambda)^* \breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\Pi' I_a S r^+_\lambda \big(1 + v^+_\lambda r^+_\lambda\big)^{-1} S^* I_a \breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\Pi' T_\alpha(\lambda),\\
S_3 &= -T_\alpha(\lambda)^* \breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\Pi' I_a S r^+_\lambda S^* T_\alpha(\lambda),\\
S_4 &= T_\alpha(\lambda)^* \breve{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\Pi' I_a S r^+_\lambda \big(1 + v^+_\lambda r^+_\lambda\big)^{-1} v^+_\lambda r^+_\lambda S^* T_\alpha(\lambda).
\end{aligned}
$$

我们采用与情形 b) 类似的论证，并再次得到界 $o((\lambda-\lambda_0)^0)$，具体细节从略。于是，(6.111b) 得证。

6.3.3 证明 (6.98)，情形 III)

我们考虑第 1.2 节和第 1.3 节的情形 3 中，在定理 6.28 之后所述条件 a) 和 b) 下的断言 (6.98)。根据情形 III) 的定义，λ_0 是 H 的共振，但不是其特征值。我们可以将定理 5.24 的 (5.117a) 与 $\rho = 1$ 一起应用（或者使用定理 5.45），形式上取较小的 $z > 0$。更准确地说，我们考虑 $R(\lambda + \mathrm{i}0)$，其中 λ 略高于由 (5.117a) 给出的 λ_0。我们将此表达式代入 (6.104)（再次使用由 (6.96) 给出的波动算子，其中含有 $J_0^\pm = 1$）。

由于 $\lambda \to (\lambda_0)_+$ (6.104) 右端的第二项在极限中消失，参见 (6.110)。至于第三项，幂的消去$\lambda - \lambda_0$ 恰好与 [JK] 的单体共振情形相同。事实上，我们按照[JK 的方式，并利用备注 5.25，在小节 5], 中进行计算，

$$
\lim_{\lambda\to(\lambda_0)_+} 2\pi\mathrm{i} T^+_\alpha(\lambda)^* R(\lambda + \mathrm{i}0) T^-_\alpha(\lambda) = -2\langle Y_0, \cdot\rangle Y_0; \quad Y_0 = (4\pi)^{-1/2}.
$$

由此

$$
\lim_{\lambda\to(\lambda_0)_+} S_{\alpha\alpha}(\lambda) = 1 - 2\langle Y_0, \cdot\rangle Y_0, \tag{6.112}
$$

由于右端是酉的，故 (6.98) 确实得证。

我们注意到，(6.112) 与 Levison 定理在单体问题中的结论一致，例如参见 [Ne]。在定理 5.24 的 (5.117a) 的语境下，若重数为$m = m_a > 1$ 并假设 $\kappa = n_{\mathrm{res}} = m$（极大性条件），我们得到与 (6.112) 相同的结果，见下文。我们将在下一小节研究情形 $1 \le \kappa = n_{\mathrm{res}} < m$，但这里先给出一个在两种情形下均适用的公式。

我们将采用备注 5.25 中的归一化，即 $(c(S^*u_j)\ c(S^*u_k)) = \delta_{jk}$ 对于$j, k = 1, \dots, \kappa$, 其中对于任意 $u \in \mathcal{E}$（$\mathcal{E}$见定理 4.17）

$$
c_i(S^*u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{X}} \varphi_i I_0 u \, \mathrm{d}x; \qquad i = 1, \dots, m.
$$

考虑 $\alpha_i = (a, \lambda_0, \varphi_i)$，$i = 1, \ldots, m$，我们计算得到 (6.112) 的以下替代式，

$$\lim_{\lambda \to (\lambda_0)_+} S_{\alpha_i \alpha_i}(\lambda) = 1 - 2 \sum_{j \le \kappa} |c_i(S^* u_j)|^2 \langle Y_0, \cdot \rangle Y_0. \tag{6.113}$$

显然，情形 III) 的结果 (6.98) 由 (6.113) 得出（因为在该情形下 $\kappa = m$），参见 (5.35)。

6.3.4 一个透射示例

对于上述讨论的情形 III)，但将极大性条件替换为 $1 \le \kappa = n_{\text{res}} < m$ 时，极限散射算子可能不同于 (6.112)。由 (6.113) 可知，显然当 $\alpha_i = (a, \lambda_0, \varphi_i)$ 时会发生这种情况，除非 $\sum_{j \le \kappa} |c_i(\psi_j)|^2 = 1$（即不更小）。另一种极端情况是 $\sum_{j \le \kappa} |c_i(\psi_j)|^2 = 0$，这意味着 $\lim_{\lambda \to (\lambda_0)_+} S_{\alpha_i \alpha_i}(\lambda) = 1$，它是一个酉算子。另一方面，如果 $0 < \sum_{j \le \kappa} |c_i(\psi_j)|^2 < 1$，则 $\lim_{\lambda \to (\lambda_0)_+} S_{\alpha_i \alpha_i}(\lambda)$ 的等距性质不成立，并且将发生来自通道 α_i 的透射。我们将通过重新定义基 $\Phi := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ 来构造这样的示例。因此，我们考虑一般的酉变换 $(\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m)^t = M(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^t$。我们引入基 $\Phi' := \{\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m\}$ 以及记号 S_Φ, $S_{\Phi'}$，伴随算子也类似，以表示对基的依赖性。

我们计算

$$S^*_{\Phi'} = \overline{M} S^*_\Phi. \tag{6.114}$$

使用记号 $\alpha_i = (a, \lambda_0, \varphi_i)$ 和 $\alpha'_i = (a, \lambda_0, \varphi'_i)$，$i = 1$、.....、$m$，我们同样计算

$$\big(S_{\alpha'_i \alpha'_j}(\lambda_0)\big)_{i,j \le m} = \Big(\lim_{\lambda \to (\lambda_0)_+} S_{\alpha'_i \alpha'_j}(\lambda) \Big)_{i,j \le m} = \overline{M} \big(S_{\alpha_i \alpha_j}(\lambda_0)\big)_{i,j \le m} \overline{M}^*. \tag{6.115}$$

让我们在 $\mathcal{E}$ 引入 $\mathbb{C}^m$值函数 c_Φ，稍微滥用一下记号，

$$c_{\Phi,i}(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \langle 1, (S^*_\Phi I_0 u)_i \rangle_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{X}} \varphi_i I_0 u \, \mathrm{d}x; \quad i = 1, \ldots, m, \ u \in \mathcal{E}.$$

利用（6.114）我们计算

$$c_{\Phi'}(u) = \overline{M} c_\Phi(u); \quad u \in \mathcal{E}. \tag{6.116}$$

使用此记号，备注 5.25 中共振函数的归一化写作

$$(c_\Phi(u_j), c_\Phi(u_k)) = \delta_{jk}; \quad j, k = 1, \cdots, \kappa.$$

令 $e_1, \ldots, e_m$ 表示 $\mathbb{C}^m$ 中的标准基，$(e_j)_i = \delta_{ij}$。我们选取酉矩阵 M 使得

$$\overline{M} c_\Phi(u_j) = e_j; \quad j \le \kappa.$$

由 (6.116) 可得

$$c_{\Phi',i}(u_j) = \delta_{ij}; \quad i \le m, j \le \kappa. \tag{6.117}$$

利用（6.117），按照第6.3.3小节中的方法计算

$$\begin{aligned} S_{\alpha'_k\alpha'_l}(\lambda_0) &= \delta_{kl}1 - 2\sum_{j\le\kappa} c_{\Phi',k}(u_j)\overline{c_{\Phi',l}(u_j)}\,\langle Y_0,\cdot\rangle Y_0 \\ &= \delta_{kl}\begin{cases} 1-2\langle Y_0,\cdot\rangle Y_0, \text{ for } k,l\le\kappa, \\ 1, \text{ otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

鉴于（6.115），该公式给出了算子值矩阵 $\big(S_{\alpha_i\alpha_j}(\lambda_0)\big)_{i,\ j\le m}$ 的显式对角化。其中每个出现的对角元素均为 $1-2\langle Y_0$、$\cdot\rangle Y_0$ 或 1（取决于其所在位置）。由于这两个选项都是酉的，我们得出结论：与 (a,λ_0) 相关联的入射通道若发生透射，则仅限于与 (a,λ_0) 相关联的出射通道族。此外，确实不存在从通道 $\alpha'_i = (a,\lambda_0,\varphi'_i)$、$i = 1$、……、$m$ 中任何一个通道发生的此类透射。然而，对于这些通道的“混合态”，透射确实会发生。因此，例如，考虑 $\alpha = (a,\lambda_0,\varphi)$，对于混合态 $\varphi = \cos\theta\,\varphi'_1 + \sin\theta\,\varphi'_m$、$\cos\theta\sin\theta \ne 0$，利用（6.115）计算

$$S_{\alpha\alpha}(\lambda_0) = 1 - 2\cos^2\theta\,\langle Y_0,\cdot\rangle Y_0,$$

且该算子不是等距的。

6.4 原子-离子散射中总截面的阈值行为

具有初始双簇数据的多粒子库仑系统的散射过程，已经在物理学文献中通过实验和理论进行了研究。特别是在中性簇与带电簇碰撞的情况下（原子-离子散射），物理图像表明，如果中性子系统没有静态偶极矩，则总截面将是有限的。其数学证明颇为微妙。在 [ES], V. Enss 和 B. Simon 提出了几个未决问题，其中第六个问题如下：

> “*6.* 原子-离子散射。诱导极化图像表明，当一个中性簇与一个带电簇碰撞时，如果中性系统没有静态偶极矩，则库仑截面将是有限的。我们无法证明这一点。在这种情况下，能否得到显式界？”

在 [JKW], 中，作者对 Enss-Simon 的这一问题给出了肯定的回答。事实上，他们证明了非阈值能量下原子-离子散射中库仑总截面的有限性，并研究了 Born-Oppenheimer近似。这里我们关注总截面的阈值行为。

回顾一体散射理论中的一个众所周知的事实（例如参见 [Ya4]）：如果有界实势 V 在 $\mathbb{R}^3$ 上的衰减形式为 $\mathcal{O}(|x|^{-\rho})$，其中某个 $\rho > 2$ 满足条件，那么

由算子对（ $-\Delta$、 $-\Delta + V(x)$）描述的散射过程的总截面是有限的；而如果 $V(x) \approx \frac{C}{|x|^2}$ 如 $|x| \to \infty$，其中某个 $C \neq 0$ 满足条件，那么总截面就是无限的。在具有初始双簇数据的多粒子库仑系统散射理论中，通常情况下两个簇之间的簇间相互作用按 $\mathcal{O}(|x|^{-1})$ 衰减；如果其中一个簇为中性（原子-离子散射），则按 $\mathcal{O}(|x|^{-2})$ 衰减；如果两个簇均为中性（原子-原子散射），则按 $\mathcal{O}(|x|^{-3})$ 衰减，参见第 1.2.1 小节。这里， $x \in \mathbb{R}^3$ 表示两个簇质心之间的相对位置。对于原子-离子散射，已知的一体情形结果表明，在没有附加假设的情况下，总截面将是无限的。另一方面，在假设原子处于基态的情况下，由于库仑势的对称性，原子不存在静态偶极矩，因此由 [JKW], 可知总截面的有限性，参见第 1.2.1 小节中列出的子情形 3b 和 3c。本节旨在研究最低阈值 Σ_2处原子-离子散射总截面的阈值行为。

考虑一个含有 N 个电子的双原子分子的哈密顿量，它可写成如下型式

$$
\begin{aligned}
H_{\text{phys}} \;=\; & \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2m_k}\big(-\Delta_{x_k}\big) \;+\; \sum_{j=3}^{N+2} \frac{1}{2}\big(-\Delta_{x_j}\big) \;+\; \frac{Z_1 Z_2}{|x_1 - x_2|} \\
& + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=3}^{N+2} \frac{q_j Z_k}{|x_j - x_k|} \;+\; \sum_{3 \le l < j \le N+2} \frac{q_l q_j}{|x_l - x_j|},
\end{aligned}
\tag{6.118}
$$

其中 $x_k \in \mathbb{R}^3$、 $k = 1$、2表示两个原子核的位置，它们的质量为 m_k ，电荷为 $Z_k > 0$； $x_j \in \mathbb{R}^3$、 $j = 3$、.....、 $N+2$表示 N 个电子的位置，电子的质量为1，电荷为 $q_j \in \mathbb{R}$ （在物理情形下，电荷相等且为负）。在此公式中，普朗克常数 $\hbar$ 取为1。显然，(6.118)是(1.13)的一种特殊形式。

我们关注入射通道为双簇通道、而出射通道任意的散射过程。令 $a = (C_1, C_2)$ 为 $\{1, \ldots, N+2\}$ 的一个双簇分解，即粒子标签集 $\{1, \ldots, N+2\}$ 的一个划分 (C_1, C_2)，其中 $j \in C_j$ 对于 $j = 1$， 2。为了便于进行显式计算，我们选择适用于该簇分解的所谓 簇化原子坐标 $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3N}$:

$$
h \;=\; \left(\frac{1}{2M_1} + \frac{1}{2M_2}\right)^{1/2}, \qquad M_k = m_k + |C_k'|, \quad C_k' = C_k \setminus \{k\}, \quad k = 1, 2,
$$

$$
\begin{aligned}
R_k &= \frac{1}{M_k}\left(m_k x_k + \sum_{j \in C_k'} x_j\right), k = 1, 2, \\
x &= R_1 - R_2, \\
y_j &= x_j - x_k, \quad j \in C_k', \quad k = 1, 2, \\
l(y) &= \frac{1}{M_1}\sum_{j \in C_1'} y_j - \frac{1}{M_2}\sum_{j \in C_2'} y_j.
\end{aligned}
$$

在 [JKW] 研究的 Born-Oppenheimer近似中， h 被视为一个小参数。这里 h 被视为常数，因此令 $h=1$。注意， R_k 是簇 C_k （ $k=1$=1,2）的质心，而 x 是这些质心的相对位置。这些坐标非常适合描述双原子分子的双团簇散射。去除分子质心运动后，哈密顿量 $H_{\rm phys}$ 在这组坐标下可写为

$$H \;=\; -\Delta_x + H_{\rm e}(x), \quad H_{\rm e}(x) \;=\; H^a + {\rm I}_a(x), \tag{6.119}$$

其中，子哈密顿量 H^a 定义为

$$H^a = H^{C_1} + H^{C_2}, \tag{6.120}$$

with

$$H^{C_k} = \sum_{j\in C_k'}\Big(-\frac{1}{2}\Delta_{y_j} + \frac{Z_k q_j}{|y_j|}\Big) - \frac{1}{2m_k}\Big(\sum_{j\in C_k'}\partial_{y_j}\Big)^2 + \sum_{\substack{l,j\in C_k'\\ l<j}}\frac{q_l q_j}{|y_l-y_j|},$$

而簇间相互作用 I_a 定义为

$$I_a(x) = \frac{Z_1Z_2}{|x-l(y)|} + \sum_{\substack{k\in C_1'\\ j\in C_2'}}\frac{q_kq_j}{|y_k-y_j+x-l(y)|} + \sum_{j\in C_1'}\frac{Z_2q_j}{|y_j+x-l(y)|} + \sum_{j\in C_2'}\frac{Z_1q_j}{|x-l(y)-y_j|}.$$

$H_e(x)$ 是 Born-Oppenheimer近似下的电子哈密顿量。最后，我们令

$$H_a \;=\; -\Delta_x + H^a. \tag{6.121}$$

该算子以及完整的哈密顿量 H 均被视为定义在 $L^2_{x,y}=L^2(\mathbb{R}^{3(N+1)};{\rm d}x{\rm d}y)$ 上的自伴算子。

对于 $\{1,\dots,N+2\}$ 的任意簇分解 $a=(C_1,\dots,C_k)$，即 $C_1\cup\cdots\cup C_k=\{1,\dots,N+2\}$ 且 $C_j\cap C_k=\emptyset$，当 $j\neq k$ 时，我们可以像上文讨论的情形 $k=2$ 一样，选取适配的坐标 (x_a,y^a)。我们将 H^a 称为子哈密顿量，将 $x_a\in\mathbb{R}^{3(k-1)}$ 称为团簇间坐标，将 y^a 称为团簇内坐标，并将 $I_a(x_a,y^a)$ 称为簇间相互作用。用 D_{x_a}（分别为 D_{y^a}）和 $-\Delta_{x_a}$（分别为 $-\Delta_{y^a}$）表示团簇间（分别为团簇内）坐标中的 i 倍梯度和拉普拉斯算子。众所周知 [Do, De3, Sk6] ，对于该薛定谔算子 H，Dollard 波算子

$$W_\alpha^\pm \;=\; s-\lim_{t\to\pm\infty}{\rm e}^{{\rm i}tH}{\rm e}^{-{\rm i}t\left(-\Delta_{x_a}+\int_{\pm1}^t I_a(2sD_{x_a},0)ds+\lambda_\alpha\right)}J_\alpha \tag{6.122}$$

对于任意通道 $\alpha=(a,\lambda_\alpha,\varphi_\alpha)$ 均存在。回顾一下，根据定义， a 是任意簇分解（$\neq a_{\max}$），而 φ_α 是 H^a 的归一化特征函数，其特征值为 λ_α、$H^a\varphi_\alpha=\lambda_\alpha\varphi_\alpha$。算子 J_α 表示识别算子，它对于变量 x_a 的任意 L^2-函数 f 定义为

$$(J_\alpha f)(x_a,y_a) = f(x_a)\varphi_\alpha(y_a). \tag{6.123}$$

此外，波算子族 $\{W_\alpha^\pm,\,\text{all}\;\alpha\}$ 是渐近完备的[De3]。如果 $a=(C_1,C_2)$ 是一种双簇分解，其中一个簇为中性簇（一个原子），设为 C_1，即

$$\sum_{j\in C_1'} q_j \;=\; -Z_1, \tag{6.124}$$

那么，对于任意通道 $\alpha=(a,\lambda_\alpha,\varphi_\alpha)$，波算子简单地（参见第6.2节）为

$$W_\alpha^{\pm} \;=\; s-\lim_{t\to\pm\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(-\Delta_{x_a}+\lambda_\alpha\right)}J_\alpha. \tag{6.125}$$

对于任意两个通道 α 和 β，我们将从通道 α 到通道 β 的关联散射算子定义为

$$\mathrm{S}_{\beta\alpha} \;=\; \left(W_\beta^{+}\right)^{*}W_\alpha^{-},\quad \mathrm{T}_{\beta\alpha} \;=\; \mathrm{S}_{\beta\alpha}-\delta_{\beta\alpha}, \tag{6.126}$$

其中，当 $\alpha=\beta$ 时 $\delta_{\beta\alpha}=1$，否则为 0。

按照 [ES], ，我们定义总散射截面如下。对于 $\lambda>\lambda_\alpha$，我们通过下式引入通道 α 中两个簇相对运动的动能所对应的动量大小

$$n_\alpha(\lambda):=(\lambda-\lambda_\alpha)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.127}$$

对于 $g\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}$（$I_\alpha$；$\mathbb{C}$）、$I_\alpha=$（$\lambda_\alpha$，$\infty$）以及 $\omega\in\mathbb{S}^2$，我们考虑波包

$$\mathbb{R}^3\ni x\;\mapsto\; g_\omega(x)\;=\tilde{g}(\omega\cdot x) \tag{6.128}$$

其中

$$\tilde{g}(\nu)=\;\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{in_\alpha(\mu)\nu}\frac{g(\mu)}{n_\alpha(\mu)^{1/2}}\,d\mu.$$

归一化的选取使得

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|\tilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

记 $\mathcal{C}$ 为我们希望对函数 $g_\omega(x)\varphi_\alpha(y)$ 应用算子 $\mathrm{T}^{\beta\alpha}$ 的所有通道集合。对于任意 $\beta\in\mathcal{C}$，由于该函数不属于 $L^2(\mathbb{R}^{3(N+1)})$——它只在由 ω 定义的方向上快速衰减——我们通过乘以函数 $h_{R,\,\omega}\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 对其进行正则化。该函数仅依赖于垂直于入射波包 $g_\omega(x)$ 方向 ω 的变量 $x-(\omega\cdot x)\omega$，并满足逐点

$$\lim_{R\to\infty}h_{R,\omega}\;=\;1. \tag{6.129}$$

为本文之目的，我们将此截断函数具体取为高斯函数，明确地说，我们取

$$h_{R,\omega}(x)=\mathrm{e}^{-(x-(\omega\cdot x)\omega)^2/R}. \tag{6.130}$$

定义。 ([JKW]) 对于 $\lambda\in I_\alpha$ 和 $\omega\in\mathbb{S}^2$，若入射通道 α 在能量 λ 及入射方向 ω 下满足以下极限为有限值，则称总截面 $\sigma_\alpha(\lambda,\omega)$ 存在：

$$\sigma_\alpha(\lambda,\omega)\;:=\;\lim_{n\to\infty}\lim_{R\to\infty}\sum_{\beta\in\mathcal{C},\,\lambda_\beta<\lambda}\|\mathrm{T}_{\beta\alpha}h_{R,\omega}g_{n,\omega}\varphi_\alpha\|^2, \tag{6.131}$$

其中 $g_{n,\,\omega}$ 如 (6.128) 中所定义，只需将 g 替换为 g_n：

$$g_n(\mu)=n^{-1/2}h((\mu-\lambda)/n)$$

且 h 是任意一个满足 $\int_{\mathbb{R}}|h(\mu)|^2d\mu=1$ 归一化条件的 $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$-函数。

回顾一下，在 [ES] 和 [Wa3], 中，总截面被定义为 $\mu \in I_\alpha$ 上的分布：

$$\int_{I_\alpha} \sigma_\alpha(\mu,\omega)|g(\mu)|^2\,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{R\to\infty}\sum_{\beta\in\mathcal{C}} \|\mathrm{T}_{\beta\alpha}h_{R,\omega}g_\omega\varphi_\alpha\|^2, \tag{6.132}$$

对于所有 $g \in C_{\mathrm{c}}^\infty(I_\alpha;\mathbb{C})$。由于 $|g_n(\cdot)|^2$ 收敛于 $\beta_\lambda(\cdot)$，当 $n\to\infty$ 时，λ 处的狄拉克测度，因此，如果在 λ 的邻域内，(6.132) 中定义的分布可以与一个连续函数对应，则定义 (6.131) 和 (6.132) 一致。对于快速衰减的成对势，总截面也可以通过散射振幅来定义（见 [IT]）。

6.4.1 原子-离子散射中总截面的有限性

假设1。设 $\alpha=(a,\ \lambda_\alpha,\ \varphi_\alpha)$ 为一个通道，其中 $\lambda_\alpha \in \sigma_{\mathrm{d}}(H^a)$，且其簇分解为 $a=(C_1,\ C_2)$，使得簇 a_1 为中性的（即一个原子），也就是说

$$\sum_{j\in C_1'} q_j \;+Z_1=0. \tag{6.133}$$

假设对于 $j=1,\ 2,\ \lambda_\alpha = \lambda_\alpha^1+\lambda_\alpha^2$、$\varphi_\alpha=\varphi_\alpha^1\otimes\varphi_\alpha^2$、$H^{C_j}\varphi_\alpha^j=\lambda_\alpha^j\varphi_\alpha^j$，并且 λ_α^1 是 H^{C_1} 的单特征值（即中性簇的特征值是非简并的）。

[JKW] 的以下结果表明，对于 λ，当其不属于下列集合时，$\sigma_\alpha(\lambda,\omega)$是有限的

$$\mathcal{T}_{\mathrm{p}}=\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(H)=\mathcal{T}(H)\cup\sigma_{\mathrm{pp}}(H)$$

该集合由 H的阈值和特征值组成；此外，该结果还给出了一个光学公式，可用于许多问题。

定理6.30 ([JKW])。设 $\alpha=(a,\ \lambda_\alpha,\ \varphi_\alpha)$ 是满足假设*1*的散射通道。令

$$F(z,\omega)=\Big\langle I_a e_\alpha^\omega,\, R(z)\left(I_a e_\alpha^\omega\right)\Big\rangle, \qquad \operatorname{Im} z\neq 0, \tag{6.134a}$$

其中

$$e_\alpha^\omega(x,y)=\mathrm{e}^{in_\alpha(\lambda)\omega\cdot x}\varphi_\alpha(y). \tag{6.134b}$$

那么，对于任意能量 $\lambda\in I_\alpha\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}}$ 和任意入射方向 $\omega\in\mathbb{S}^2$，极限

$$F(\lambda+\mathrm{i}0,\omega)=\lim_{\epsilon\to 0_+}F(\lambda+\mathrm{i}\epsilon,\omega) \tag{6.135a}$$

存在并定义了一个关于 $\lambda\in I_\alpha\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}}$的连续函数。总散射截面 σ_α（λ，ω）对于任意能量 $\lambda\in I_\alpha\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}}$ 和任意入射方向 $\omega\in\mathbb{S}^2$均存在，并且满足光学公式

$$\sigma_\alpha(\lambda,\omega)=\;\frac{1}{n_\alpha(\lambda)}\operatorname{Im}F(\lambda+\mathrm{i}0,\omega). \tag{6.135b}$$

注意，在假设1下，$I_a e_\alpha^\omega$仅属于 $L^{2\ (1/2)\ -} = L^{2\ (1/2)\ -}(\mathbb{R}^{3+3N};\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ 极限 (6.135a) 的存在性并非显然。[JKW] 中给出的证明使用了极限吸收原理（参见定理3.18）以及通过对两个簇的相对动能进行适当局部化而开展的相空间分析。出于同样的原因，第5章中关于阈值预解式渐近行为所建立的结果不能直接应用，因为这些结果成立于从 L^2_s 到 L^2_{-s} 的算子上，并且至少具有 $s > 1$。尽管如此，正如读者将看到的，第5章中的各种要素仍可用于研究 $\sigma_\alpha(\lambda,\omega)$ 的阈值行为。在本小节中，为方便起见，我们仅考虑最简单的情形，即该通道满足以下条件。（在小节6.4.3中，我们将考虑更一般的设置。）

6.4.2 Σ_2处的总截面，非重合双簇情形

假设2。令 $\alpha = (a,\ \lambda_\alpha,\ \varphi_\alpha)$ 为一个散射通道，其中 $\lambda_\alpha = \lambda_0 = \Sigma_2$ 是 H 的最低阈值。假设 Σ_2 是一个非重合双簇阈值，并且$\Sigma_2 \notin \sigma(H')$，其中 $H' = \Pi'_\alpha H \Pi'_\alpha$ 和

$$\Pi'_\alpha u = u - \langle \varphi_\alpha, u\rangle_y \otimes \varphi_\alpha, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^{3+3N}_{x,y}).$$

在假设2下，我们可以应用 Grushin 约化（参见第5章中扩展的 [Wa2], ）来研究 $\sigma_\alpha(\lambda,\omega)$ 在 λ 接近 $\lambda_0 = \Sigma_2$时的行为。更一般的情形，即 λ_α 可能是一个多重双簇阈值和/或 $\lambda_\alpha \in \sigma(H')$ 的情形，也可以用本文所发展的方法进行研究（重根情形确实将在小节6.4.3中研究）。在假设2下，$R'(z) = (H' - z)^{-1}\Pi'_\alpha$ 在 z 接近 λ_0 时是全纯的，并且有

$$R(z) = E(z) - E_+(z) E_{\mathcal{H}}(z)^{-1} E_-(z) \tag{6.136}$$

其中

$$\begin{aligned} E(z) &= R'(z) \\ E_+(z) &= S - R'(z)HS \\ E_-(z) &= S^* - S^* H R'(z) \\ E_{\mathcal{H}}(z) &= S^*(z - H + HR'(z)H)S \end{aligned}$$

以及 $S\colon L^2(\mathbb{R}^3_x) \to L^2(\mathbb{R}^{3+3N}_{x,y})$，$(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3N}$，定义为

$$Sf(x,y) = f(x)\varphi_\alpha(y), \quad f \in L^2_x.$$

Un由假设 1 和 2，根据定理6.30可知，当 $\lambda > \lambda_0$ 接近 λ 时 0

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\lambda,\omega) &= \frac{1}{n_\alpha(\lambda)} \operatorname{Im}\langle I_a e_\alpha^\omega,\ R(\lambda + \mathrm{i}0)(I_a e_\alpha^\omega)\rangle \\ &= -\frac{1}{n_\alpha(\lambda)} \operatorname{Im}\langle f(\lambda,\omega), E_{\mathcal{H}}(\lambda + \mathrm{i}0)^{-1} f(\lambda,\omega)\rangle_x; \end{aligned} \tag{6.137}$$

$$f(\lambda,\omega) = E_-(\lambda)(I_a e_\alpha^\omega). \tag{6.138}$$

这里我们用到了这样一个事实：当 λ 接近 λ_0 时， $R'(\lambda+\mathrm{i}0) = R'(\lambda)$ 是自伴的。可以计算得

$$f(\lambda,\omega) = \langle\varphi_\alpha, I_a e_\alpha^\omega\rangle_y - \langle\varphi_\alpha,\, I_a R'(\lambda)(I_a e_\alpha^\omega)\rangle_y, \tag{6.139a}$$

$$\langle\varphi_\alpha,\, I_a e_\alpha^\omega\rangle_y = \mathcal{O}(|x|^{-4}), \tag{6.139b}$$

$$\langle\varphi_\alpha,\, I_a R'(\lambda)(I_a e_\alpha^\omega)\rangle_y \in L^2_{(5/2)^-}(\mathbb{R}^3_x), \tag{6.139c}$$

关于 λ 和 ω一致。对于（6.139b），参见 [JKW，引理 A.1]。因此

$$f(\lambda,\omega) \in L^2_{(5/2)^-} = L^2_{(5/2)^-}(\mathbb{R}^3_x) \text{ uniformly in } \lambda \text{ and } \omega.$$

类似地,

$$E_{\mathcal{H}}(z) = z - \lambda_0 - (-\beta_x + U(z)),$$

其中

$$U(z) = \langle\varphi_\alpha,\, I_a\varphi_\alpha\rangle_y - \langle\varphi_\alpha,\, I_a R'(z) I_a(\varphi_\alpha\otimes\cdot)\rangle_y$$

是 z 附近 λ_0的算子值全纯函数。有

$$\langle\varphi_\alpha,\, I_a\varphi_\alpha\rangle_y = \mathcal{O}(|x|^{-4}), \quad \langle\varphi_\alpha,\, I_a R'(z) I_a(\varphi_\alpha\otimes\cdot)\rangle_y \in \mathcal{L}(H^1_s, H^{-1}_{s+4}); \quad s\in\mathbb{R}.$$

Set

$$U = U(\lambda_0) = \langle\varphi_\alpha, I_a\varphi_\alpha\rangle_y - \langle\varphi_\alpha,\, I_a R'(\lambda_0) I_a(\varphi_\alpha\otimes\cdot)\rangle_y. \tag{6.140}$$

比较 $f(\lambda_0,\omega)$与 U，可见

$$f(\lambda_0,\omega) = E_-(\lambda_0)(I_a\varphi_\alpha) = U1, \tag{6.141}$$

也就是说，将 U 作用于常函数 $1\in L^{2}{}_{(-3/2)^-}(\mathbb{R}^3_x)$。

回顾第5.1.2节，在加权 L^2-空间中，当 $\operatorname{Im} z\neq 0$ 时，预解式 $(-\Delta_x - z')^{-1}$, $z' = z-\lambda_0$ 的渐近展开为

$$(-\Delta_x - z')^{-1} = G_0 + \sqrt{z'}G_1 + \cdots$$

定理 6.31 (正则情形)。 设假设 *1* 和 *2* 成立。假设 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是 H 的正则点（见小节 *5.1.1.1*）。那么

$$\sigma_\alpha(\lambda,\omega) = 4\pi|s_{lnt}|^2 + o(1) \quad as \quad \lambda\to(\lambda_0)_+, \tag{6.142a}$$

其中

$$s_{\mathrm{lnt}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3_x}(1+UG_0)^{-1}E_-(\lambda_0)(I_a\varphi_\alpha)\,\mathrm{d}x. \tag{6.142b}$$

证明。 由于 λ_0是 H的正则点，$(1+G_0U)^{-1}$ 存在，且对任意 $s>1$，从 L^2_s到 L^2_{-s} 有界。令 $z' = z-\lambda_0$ 且 $\operatorname{Im} z\neq 0$。有

$$\begin{aligned}
&E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z')^{-1}\\
&\quad= -\big(1+(-\Delta_x - z')^{-1}U(z')\big)^{-1}(-\Delta_x - z')^{-1}\\
&\quad= -(1+G_0U)^{-1}G_0 + \sqrt{z'}\left\{(1+G_0U)^{-1}G_1\big(U(1+G_0U)^{-1}G_0 - 1\big)\right\} + o(\sqrt{z'})\\
&\quad= -(1+G_0U)^{-1}G_0 - \sqrt{z'}(1+G_0U)^{-1}G_1(1+UG_0)^{-1} + o(\sqrt{z'})
\end{aligned}$$

在 $L^2_s \to L^2_{-s}$、 $s > 3/2$中。利用 (6.137)，对于 $\lambda' = \lambda - \lambda_0$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sigma_\alpha(\lambda,\omega)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda'}}\operatorname{Im}\Big\langle f(\lambda,\omega),\, \Big((1+G_0U)^{-1}G_0 + \sqrt{\lambda'}(1+G_0U)^{-1}G_1(1+UG_0)^{-1} + o(\sqrt{\lambda'})\Big)\, f(\lambda,\omega)\Big\rangle_x\\
&= \operatorname{Im}\langle f(\lambda_0,\omega),\, (1+G_0U)^{-1}G_1(1+UG_0)^{-1} f(\lambda_0,\omega)\rangle_x + o(1)
\end{aligned}$$

如 $\lambda' \to 0_+$。由于 G_1 具有常数积分核$\mathrm{i}\ 4\pi$，上述方程中的首项等于

$$\frac{1}{4\pi}\Big|\int_{\mathbb{R}^3_x} (1+UG_0)^{-1}E_-(\lambda_0)(I_a\varphi_\alpha)\ \mathrm{d}x\Big|^2,$$

从而证明了 (6.142a) 和 (6.142b)。 □

注意，由于

$$E_-(\lambda_0)(I_a\varphi_\alpha) = f(\lambda_0,\omega) \in L^2_{(5/2)^-},$$

事实上，常数 s_{lnt} 是良定义的。此外，它可以写成

$$s_{\mathrm{lnt}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3_x} (1+UG_0)^{-1}U1\ \mathrm{d}x.$$

回顾一下，对于对 $(-\Delta, -\Delta + V(x))$ 的散射理论，散射长度与总截面的低能极限相关。在三维情况下，它等于

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3_x} (1+VG_0)^{-1}V(x)\ \mathrm{d}x,$$

如果 $V(x)$ 衰减得足够快（参见 [JK，定理 5.1]）。与单体散射类似，式（6.142b）中给出的 s_{lnt} 可解释为原子-离子散射中的 散射长度 。

定理 6.32 （第一类特殊点）。设假设 *1* 和 *2* 成立。假设 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是 H 的共振，但不是其特征值。那么

$$\sigma_\alpha(\lambda,\omega) = \tfrac{1}{\lambda-\lambda_0}\big(4\pi + o(1)\big) \quad as \quad \lambda \to (\lambda_0)_+. \tag{6.143}$$

证明。一般来说， λ_0 是 H 的共振（分别为特征值）当且仅当 0 是 $-\Delta_x + U$ 的共振（分别为特征值），参见引理 5.2。由于我们假设 λ_0 是第一类特殊点，算子 $E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z')^{-1}$ 具有如下渐近行为

$$\begin{aligned}
&E_{\mathcal{H}}(\lambda_0+z')^{-1}\\
&\quad= -\big(1 + (-\Delta_x - z')^{-1}U(z')\big)^{-1}(-\Delta_x - z')^{-1}\\
&\quad= -\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{z'}}\big(\langle\psi,\,\cdot\rangle_x\psi + o(1)\big), \quad z' \to 0,
\end{aligned}$$

in $L^2_s \to L^2_{-s}$, $s > 1$，其中 $\psi \in L^2_{(-1/2)^-}$ 是满足以下条件的 $-\Delta + U$ 共振态

$$\tfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\langle U\psi, 1\rangle = 1. \tag{6.144}$$

参见 [Wa2 定理 3.9]的证明或命题 5.12 的证明。由（6.137）可推出，对于 $\lambda' = \lambda - \lambda_0$,

$$\sigma_\alpha(\lambda,\omega) = \tfrac{1}{\lambda'}(|\langle\psi, f(\lambda_0,\omega)\rangle|^2 + o(1)) \text{ as } \lambda' \to 0_+.$$

注意到

$$\begin{aligned}\langle\psi, f(\lambda_0,\omega)\rangle &= \langle\psi, E_-(\lambda_0)(I_a\varphi_\alpha)\rangle \\ &= \langle U\psi, 1\rangle_x = 2\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

可得（6.143）。 □

值得注意的是，在存在阈值共振的情况下，总截面在阈值附近表现出一种与势的具体型式无关的普适行为。如果 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 是 H 的一个特征值，由于缺乏衰减性，这里所采用的方法无法给出 $\sigma_\alpha(\lambda,\omega)$ 的首项。然而，只要 L^2 特征函数在 λ_0 处具有某种弱衰减性，便可获得与上述类似的结果。下一小节将在 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 可能为多重双簇阈值这一更一般的设定下对此进行详细说明。

6.4.3 Σ_2处的总截面，多重双簇情形

在本小节中，我们考虑原子-离子模型，其中 $\alpha = (a, \lambda_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是满足假设1的散射通道。我们不采用假设2，而是利用第 4.3 节和第 5.3 节中的记号施加以下条件。注意，原子-离子模型是这些章节所涵盖的一个具体示例。尽管我们不能直接使用第 5.3 节的结果，但可以使用其证明，参见小节 6.4.2。同样，我们只考虑 $\lambda_0 = \Sigma_2$ 为双簇阈值的情形。我们施加以下条件

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_3^{\mathrm{fd}}, \tag{6.145}$$

以及（5.161），即

$$\operatorname{ran}\Pi_H \subset L^2_t \text{ for some } t > 3/2, \tag{6.146}$$

其中 Π_H 是到核（$H - \lambda_0$）上的正交投影。

假设3。 设 $\alpha = (a, \lambda_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是一个通道，其最低阈值为 $\lambda_\alpha = \lambda_0 = \Sigma_2$，属于 H。假设 Σ_2 是双簇的，满足 (4.68a)、(4.68b)、(6.145) 和(6.146) （特别地， $a \in \mathcal{A}_3^{fd}$）。

我们指出，假设3对任意通道 α都蕴含假设1，并且比前一小节中使用的假设1和2的组合更一般（即更弱）。式（6.145）的含义是，对于双簇阈值$\sim\Sigma_2$，任意 $a = (C_1, C_2) \in \mathcal{A}$ （可能不唯一）都满足其中一个簇是中性的；不妨设式（6.124）对 C_1成立。

定理 6.33 （正则或 2 阶奇异情形）。 设假设*3*对 $\alpha = (a, \lambda_\alpha, \varphi_\alpha)$ 成立，并假设 $\lambda_\alpha = \lambda_0 = \Sigma_2$ 为正则情形或 2 阶奇异情形。令 $H_\sigma := H - \sigma\Pi_H$，其中 $\sigma > 0$ 足够小。然后，使用记号（6.134b）以及定理 *5.44*中的记号，令

$$f_\sigma(\lambda,\omega) = \big(S^* - S^*_{I_\sigma} R'_\sigma(\lambda)\big)(I_{a,\sigma} e^\omega_\alpha); \quad \lambda \geq \lambda_0. \tag{6.147a}$$

Here

$$S^*_{I_\sigma}(\cdot)=\sum_{\beta=(b,E_\beta,\varphi_\beta):\, b\in\widetilde{\mathcal{A}}}^{\oplus}\langle\varphi_\beta|I_{b,\sigma}(\cdot)\rangle_{y_b},\quad I_{b,\sigma}=I_b-\sigma\Pi_H,$$

并回顾 $R'_\sigma(\lambda)=(\Pi' H_\sigma\Pi'-\lambda)^{-1}\Pi'$。类似地，令 $U_\sigma(\lambda-\lambda_0)$ 由如下方式定义：将 H_σ的有效*Grushin*哈密顿量写作 $-E_{\mathcal{H},\,\sigma}(\lambda_0+z)=P_0+U_\sigma(z)-z,\ z=\lambda-\lambda_0\geq 0$，具体沿用（5.5a）、（5.5b）和（5.38a）中的思路。于是

$$\sigma_\alpha(\lambda,\omega)=4\pi|s_{lnt}|^2+o(1)\quad as\quad \lambda\to(\lambda_0)_+,\tag{6.147b}$$

其中

$$s_{\rm lnt}=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3_x}(1+U_\sigma G_0)^{-1}f_\sigma(\lambda_0,\omega)\,{\rm d}x\in\mathbb{C}^m;\quad U_\sigma=U_\sigma(0),\,m=\#\widetilde{\mathcal{A}}.\tag{6.147c}$$

证明。我们可以仿照定理 6.31 的证明，结合定理6.30和（5.87），首先检验相应的界

$$f_\sigma(\lambda,\omega)\in\mathcal{H}_{(3/2)^+}=\mathcal{H}_{(3/2)^+}(\mathbb{R}^3_x).$$

后一断言直接由（6.146）得到（事实上可推出 $f_\sigma(\lambda,\omega)\in\mathcal{H}_s$只要 $s\leq t$ 和 $s<5/2$）。□

定理 6.34（第一类或第三类例外点）。设假设*3*对 $\alpha=(a,\ \lambda_\alpha,\ \varphi_\alpha)$ 成立。假设 $\lambda_\alpha=\lambda_0=\Sigma_2$是第一类或第三类例外点。令 $H_\sigma=H-\sigma\Pi_H$满足 $\sigma>0$ 足够小，且 $\{u_1,\dots,u_\kappa\}\subset H^{1}{}_{(-1/2)}$ - 是 H的共振态基，更准确地说，它取作满足归一化条件的H_σ 的共振态基

$$(c(T^*u_i),c(T^*u_j))=\beta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,\kappa,\tag{6.148a}$$

参见（6.144）和命题 *5.8*。根据定义 T 由（2.14）给出，并且

$$c(v)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\big(\langle 1,\ \Sigma_{k\leq m}U_{\sigma,\,1k}v_k\rangle_x,\ \cdots,\ \langle 1,\ \Sigma_{k\leq m}U_{\sigma,\,mk}v_k\rangle_x\big)\in\mathbb{C}^m;\ \ m=\#\widetilde{\mathcal{A}}.\tag{6.148b}$$

~这里，$\mathcal{A}$ 的元素用数字1、.....m标记。

于是，按照1 标记 a的约定，

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(\lambda,\omega)&=\tfrac{1}{\lambda-\lambda_0}\Big(\sum_{j=1}^{\kappa}|\langle T^*u_j,f_\sigma(\lambda_0,\omega)\rangle|^2+o(1)\Big)\\&=\tfrac{4\pi}{\lambda-\lambda_0}\Big(\sum_{j=1}^{\kappa}|c_1(T^*u_j)|^2+o(1)\Big)\quad as\quad\lambda\to(\lambda_0)_+.\end{aligned}\tag{6.149a}$$

特别地

$$\sigma_\alpha(\lambda,\omega)\leq\tfrac{4\pi}{\lambda-\lambda_0}\big(1+o(1)\big)\quad as\quad\lambda\to(\lambda_0)_+,\tag{6.149b}$$

而在 $\kappa=m$所对应的最大例外情形下，

$$\sigma_\alpha(\lambda,\omega)=\tfrac{4\pi}{\lambda-\lambda_0}\big(1+o(1)\big)\quad as\quad\lambda\to(\lambda_0)_+.\tag{6.149c}$$

证明。 我们通过仿照定理 6.32 的证明，得到（6.149a）。(6.141) 的对应形式为

$$\begin{aligned} f_\sigma(\lambda_0,\omega) &= E_-(H_\sigma-\lambda_0)\varphi_\alpha = E_-(H_\sigma-\lambda_0)S_1[1] \\ &= -E_{\mathcal{H}}[\Sigma_k^{\oplus}\,\beta_{1k}] = (P_0+U_\sigma)[\Sigma_k^{\oplus}\,\beta_{1k}] = U_\sigma[\Sigma_k^{\oplus}\,\beta_{1k}]. \end{aligned}$$

断言 (6.149b) 和 (6.149c) 可由 (6.149a) 及归一化条件 (6.148a) 得出。

□

注： (6.149a) 中的量 $\sum_{j=1}^{\kappa}|c_1(T^*u_j)|^2$ 也出现在 (6.113) 和第 6.3.4 小节中，尽管所采用的设定不同。这并非巧合；总体结论可以视为相同：它可以解释为阈值处共振诱导散射现象发生的概率。在最大例外情形下，这种影响在两个模型中都以概率 1 出现。

参考文献

[*AW*]*M. Aafarani*、*X.P. Wang*，热半群和薛定谔半群的预解估计与亚指数时间衰减的 *Gevrey*估计。*II*。《微分方程杂志》*316*（*2022*），*387-424*。[*AIIS*] *T. Adachi*、*K. Itakura*、*K. Ito*、*E. Skibsted*，关于 N体薛定谔算子谱理论的新方法，《数学物理评论》*33*（*2021*），*48*页。[*Ag*] *S. Agmon*，亥姆霍兹方程解的表示定理与拉普拉斯算子的预解估计，*Academic Press, Inc.*，波士顿，*MA*，*xii*+694 页，*1990*，*39–76*。[*ABG*] *W.O. Amrein*、*A.M. Boutet de Monvel*、*V. Georgescu*，薛定谔算子零能本征函数的下界，《*Helvetica*物理学学报》*57*，第*3*期（*1984*），*301–306*。[*AHS*] *A. Agmon*、*I. Herbst* 和 *E. Skibsted*，广义 N 体问题中嵌入本征值的扰动，《数学物理通讯》*122*（*1989*），*411–438*。[*Ba*] *E. Balslev*，特征函数与散射矩阵的解析性，《数学物理通讯》*114*，第*4*期（*1988*），*599–612*。[*Bo*] *A. Bommier*，长程 *N* 体问题中双团簇-双团簇散射矩阵的性质，《巴黎高等师范学院科学年鉴：理论物理》*59*，第*3*期（*1993*），*237–267*。[*Ca*] *G. Carron*，谱移函数在零点的跳跃，《函数分析杂志》*212*（*2004*），*222-260*。[*CT*] *J.M. Combes*、*A. Tip*，电子-原子碰撞散射振幅的性质，《巴黎高等师范学院科学年鉴：理论物理》*40*（*1984*），*117–139*。[*De*1] *J. Dereziński*，低能下多体散射振幅的存在性与解析性，《数学物理杂志》*28*（*1987*），*1080–1088*。[*De*2]*J. Dereziński*，膨胀解析势的双团簇–双团簇散射振幅的阈值奇点，《数学物理杂志》*29*（*1988*），*1171–1173*。[*De*3] *J. Dereziński*，N粒子长程量子系统的渐近完备性，《数学年刊》*38*（*1993*），*427–476*。[*DG*] *J. Dereziński* 和 *C. Gérard*，经典与量子 N粒子系统的散射理论，《物理学教材与专著》，柏林，施普林格，*1997*。

[*DS*1] *J. Dereziński*、*E. Skibsted*，低能量下的量子散射，《函数分析杂志》*257*（*2009*），*1828–1920*。[*DS*2] *J. Dereziński*、*E. Skibsted*，齐次吸引势在零能量处的散射，《高等师范学院数学年刊》*10*，第*3*期（*2009*），*549–571*。[*Do*] *J. Dollard*，渐近收敛与库仑相互作用，《数学物理杂志》*5*（*1964*），*729–738*。[*ES*] *V. Enss*、*B. Simon*，非相对论量子力学中的有限总截面。《数学物理通讯》*76*（*1980*），*177–209*。[*Fr*] *R. Frank*，关于齐次长程势的低能散射，《高等师范学院数学年刊》*10*，第*3*期（*2009*），*573–575*。[*FH*] *R. Froese* 和 *I. Herbst*，N体薛定谔算子的指数界与正特征值的不存在性，《数学物理通讯》*87*（*1982*），*429–447*。[*FS*] *S. Fournais*、*E. Skibsted*，一类缓慢衰减势的预解式零能渐近，《数学杂志》*248*（*2004*），*593–633*。[*Gr*] *G.M. Graf*，N体短程量子系统的渐近完备性：一种新证明，《数学物理通讯》*132*（*1990*），*73–101*。[*GIS*] *C. Gérard*、*H. Isozaki*、*E. Skibsted*，N体预解估计，《日本数学会杂志》*48*，第*1*期（*1996*），*135–160*。[*Hö*1] *L. Hörmander*，《线性偏微分算子分析》*I*，柏林，施普林格，*1990*。[*Hö*2] *L. Hörmander*，《线性偏微分算子分析》*II-IV*，柏林，施普林格，*1983-85*。[*Is*1] *H. Isozaki*，与薛定谔算子相关的广义傅里叶变换的可微性，《京都大学数学杂志》*25*，第*4*期（*1985*），*789–806*。[*Is*2] *H. Isozaki*，三体薛定谔算子*S*矩阵的结构，《数学物理通讯》*146*（*1992*），*241–258*。[*Is*3] *H. Isozaki*，三粒子薛定谔方程解的渐近性质，《数学物理通讯》*222*（*2001*），*371–413*。[*Is*4] *H. Isozaki*，N体薛定谔算子的*Sommerfeld*辐射条件的推广，《杜克数学杂志》*74*，第*2*期（*1994*），*557–584*。[*IS*1] *K. Ito*、*E. Skibsted*，硬核 N体系统中正特征值的不存在性，《亨利·庞加莱研究所年刊》*15*（*2014*），*2379–2408*。[*IS*2] *K. Ito*、*E. Skibsted*，*Rellich*定理与 N体薛定谔算子，《物理学评论》*28*，第*5*期（*2016*），*12*页。[*IT*] *H. Ito*、*H. Tamura*，*N*体量子系统总散射截面的半经典渐近，《大阪数学杂志》*32(3)*（*1995*），*753–781*。

[JKW] T. Jecko, M. Klein, X.P. Wang，《离子-原子碰撞中总散射截面的存在性与 Born-Oppenheimer 渐近行为》，《经典与量子系统的长期行为》（博洛尼亚，1999），220–237，Ser. Concr. Appl. Math.，1，World Sci. Publ.，River Edge, NJ，2001。[Je] A. Jensen，《薛定谔型算子的传播估计》，美国数学学会汇刊 291 第1期（1985），129–144。[Ji] X. Jia，《薛定谔算子的若干阈值谱问题》，论文，南特大学，2009。[JK] A. Jensen 和 T. Kato，《薛定谔算子的谱性质与波函数的时间衰减》，《杜克数学杂志》46 第3期（1979），583–611。[JMP] A. Jensen、É. Mourre、P. Perry，《量子散射理论中的多重交换子估计与预解算子光滑性》，《亨利·庞加莱年刊》41 第2期（1984），207–225。[JN1] A. Jensen，G. Nenciu，《阈值处预解式展开的统一方法》，Rev. Math. Phys.，13（2001），717-754。[JN2] A. Jensen，G. Nenciu，勘误：《阈值处预解式展开的统一方法》[Rev. Math. Phys. 13（2001），717–754],Rev. Math. Phys., 2014, 675–677。[Ka]T. Kato，《线性算子微扰理论》，Springer-Verlag，柏林，1995，重印1980年版。[La] L.J. Landau，《贝塞尔函数：单调性与界》，《伦敦数学学会杂志》（2）61（2000），197–215。[Mo] É. Mourre，《某些自伴算子的奇异连续谱不存在性》，《数学物理通讯》78 第3期（1980/81），391–408。[Na] S. Nakamura，《具有缓慢衰减势的薛定谔算子的低能渐近性》，《数学物理通讯》161（1994），63–76。[Ne] R. G. Newton，《非中心势：广义Levinson定理与谱结构》，J. Math. Phys., 18（1977），1582-1588。[Pe] P. Perry，《 N体薛定谔算子的指数界与点谱半有限性》，《数学物理通讯》92（1984），481–483。[PSS] P. Perry、I.M. Sigal 和 B. Simon，《 N体薛定谔算子的谱分析》，Ann. of Math. 114 第3期（1981），519–567。[RS] M. Reed 和 B. Simon，《现代数学物理方法 I-IV》，Academic Press，1972-78。[Sk1] E. Skibsted，《 N体薛定谔算子的传播估计》，《数学物理通讯》142（1991），67–98。[Sk2] E. Skibsted，《 N体散射振幅的光滑性》，Rev. Math. Phys. 4 第4期（1992），619–658。

[Sk3] E. Skibsted, 《与玻色场耦合的 N体系统的谱分析》, Rev. Math. Phys. 10（1998）, 989–1026。[Sk4] E. Skibsted, 《阈值处的Sommerfeld辐射条件》, Comm. PDE 38（2013）, 1601–1625。[Sk5] E. Skibsted, 《重整化二体低能散射》, Journal d'Analyse Mathématique 122（2014）, 25–68。[Sk6] E. Skibsted, 《定态散射理论: N体长程情形》, Comm. Math. Phys.（2023）, https://doi.org/10.1007/s00220-023-04689-7[Sk7] E. Skibsted, 《格林函数与完备性；重新审视三体问题》, 预印本，2022年5月30日, http://arxiv.org/abs/2205.15028v1。[SW] E. Skibsted, X. P. Wang, 《二体阈值谱分析：临界情形》, J. Funct. Anal. 260（2011）, 1766-1794。[SZ] J. Sjöstrand 和 M. Zworski, 《高级谱问题的初等线性代数》, Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔）57 第7期（2007）, 2095–2141。[Ta1] M. Taylor, 《偏微分方程：基础理论》, Springer, 纽约, 1996；1999年修订后第二次印刷。[Ta2] M. Taylor, 《偏微分方程 II：线性方程的定性研究》, Springer, 纽约, 1996；1997年修订后第二次印刷。[Va1] A. Vasy, 《三体散射中的奇异性传播》, Astérisque 第262号（2000）, vi+151 页。[Va2] A. Vasy, 《存在束缚态时多体散射中的奇异性传播》, J. Funct. Anal. 184(1)（2001）, 177–272。[VW] A. Vasy 和 X.P. Wang, 《多体散射中谱移函数的光滑性与高能渐近性》, Comm. Partial Differential Equations 27（2002）, 第11-12期, 2139–2186。[Wa1] X.P. Wang, 《多体薛定谔算子的微局部预解式估计》, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA Math. 40（1993）, 337-385。[Wa2] X.P. Wang, 《阈值附近多体薛定谔算子预解式的渐近行为》, 《亨利·庞加莱年刊》4（2003）, 553–600。[Wa3] X.P. Wang, 《多体问题中的总截面：有限性与高能渐近性》, 《数学物理通讯》156（1993）, 333–354。[Wa4] X.P. Wang, 《几何散射中的阈值能量共振》, 《散射与谱理论》研讨会论文集, 2003年8月, 巴西累西腓。Matemática Contemporânea 26（2004）, 135–164。[Wa5] X.P. Wang, 《锥流形上薛定谔群的时间渐近展开》, Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔）56 第6期（2006）, 1903–1945。

[*Wa*6] *X.P. Wang*，《热半群和薛定谔半群的预解估计与次指数时间衰减》，*J. Math. Pures Appl. 135 no. 9 (2020), 284-338*[*Ya*1]*D.R. Yafaev*，《缓慢衰减势的低能散射》，《数学物理通讯》*85 (1982), 177–196*。[*Ya*2] *D.R. Yafaev*，《具有缓慢衰减势的薛定谔算子的谱性质》，*Funct. Anal. and its Appl. (Steklov Math. Inst.) 16 (1982), 47–54*。（英文译本，*1983*年。）[*Ya*3] *D.R. Yafaev*，《散射理论：一些新旧问题》，《数学讲义》*1735*。*Springer-Verlag*，柏林，*2000*年。*xvi*+169 页。[*Ya*4] *D.R.Yafaev*，《薛定谔方程的程函近似以及总散射截面的渐近行为》。*Ann. Inst. Henri Poincaré，40 (4) (1986), 397–425*。[*Ya*5] *D.R. Yafaev*，《 N体哈密顿量的预解估计与散射矩阵》，*Intgr. Equat. Oper. Th. 21 (1995), 93–126*。