arXiv:2304.11946v1 [math.GT] 24 Apr 2023

高维简单环猜想的反例

GIANLUCA FARACO

摘要。对于每个 g ≥ 2 和 n ≥ 4，我们构造一个 n–维流形 M 以及一个连续2–侧映射 f : S ⟶ M，其中 S 是一个闭的亏格 g 曲面，使得没有简单环包含于 ker(f*) 中。这为经典的从曲面到维数至少为四的流形的简单环猜想提供了一个反例。

目录

1. 引言 1
2. 1–侧与 2–侧映射 2
3. 寻找一个有限表示群G 3
4. 实现过程 4
参考文献 6

1. 引言

对于亏格为 S g ≥ 2 的闭曲面，所谓的简单环猜想指出：如果一个连续映射 f: S ⟶ Σ 在闭曲面之间诱导出基本群的非单射映射 f_*：$\pi_1(S)$ → $\pi_1(\Sigma)$，那么 ker(f_*) 中存在一条本质简单闭曲线。在 [Gab85], Gabai 对这一猜想给出了肯定的回答。自然会产生这样的疑问：如果将目标替换为高维流形的基本群，会发生什么？因此，我们可以将简单环猜想重新表述为

简单环猜想。设 f : S ⟶ M 是从闭曲面 S 到 n–维流形 M 的连续 2–侧映射，并设 f*：π_1(S) ⟶ π_1(M) 是基本群上的诱导映射。如果 ker(f*) 非平凡，那么 ker(f*) 中存在一条本质简单闭环。

在 [Has87] Hass 证明了，对于从闭曲面S 到 Seifert纤维化三流形M的映射，简单环猜想成立。一个由来已久的问题是：若将目标换成任意可定向三流形，这一结果是否仍然成立？尽管对于图流形这一点已得到证明，见 [RW98], 但这个问题基本上仍未解决。最近，在 [Zem16] 中，简单环猜想已对 3–以Sol几何为模型的流形得到验证。本文旨在通过证明以下定理，探讨高维流形的情形。

日期：2023年4月25日。2020年数学主题分类。
57N35。

定理。设 S 为亏格为 g ≥ 2 的闭曲面。对于任意 n ≥ 4，存在一个 n–维流形 M 以及一个连续的 2– 侧映射 f : S ⟶ M，使得诱导映射 f$_*$： π_1(S) ⟶ π_1(M) 的核 ker(f$_*$) 非平凡，且不包含任何本质简单闭曲线。

假设 $n \geq 4$ 在下面的构造中起着重要作用。事实上，正如我们将在第 §4节回顾的，众所周知，任意有限表示群G 都可以实现为某个闭n–维流形 M 的基本群，$n \geq 4$取任意满足条件的值。因此，基本思路是找到一个有限表示群 G 以及一个满同态 ρ: $\pi_1(S) \longrightarrow G$，使其核非平凡，并且核中没有任何元素在$S$中表示一个本质简单闭环。通过实现一个连续映射 $f : S \longrightarrow M$，使得 $f_* = \rho$，即可得到所需的反例。因此，按上述表述，维数至少为 4 时简单环猜想不成立。这引出了以下似乎具有普遍意义的问题:

问题。对于维数为 n ≥ 4 的闭流形 M，关于 π_1(M) 的哪些条件是简单环猜想成立的充要条件?

我们通过提及一个更具挑战性的简单环猜想版本来结束本引言，在该版本中，目标被替换为一个李群。沿着这一方向，针对 PSL(2, $\mathbb{R}$) 和 PSL(2, $\mathbb{C}$) 等相关李群，已有研究成果。对于这些群，已知简单环猜想不成立。事实上，Cooper 和 Manning 在 [CM15], 中首次给出了 PSL(2, $\mathbb{C}$) 的反例，这回答了 Minsky 在 [Min00 中提出的问题 5.3]。Louder 在[Lou14] 中、Calegari 在 [Cal13]中进一步描述了其他反例。对于 PSL(2, $\mathbb{R}$)， [Man14] 给出了明确的反例；然而，这些反例都来自非离散表示。于是可以问，针对 PSL(2, $\mathbb{R}$) 中的离散表示，简单环猜想是否成立。该问题在与 Gupta 的合作研究中得到了肯定回答，参见 [FG23]。

致谢。作者希望感谢他的朋友 Lorenzo Ruffoni，感谢其评论，这些评论使本文的阐述得到了显著改进。他还希望感谢 Stefano Francaviglia 和 Subhojoy Gupta 对这项工作的评论。

2. 1–侧映射与 2–侧映射

设 M 为一个连通流形，并令 $\pi_1(M)$ 表示其基本群。流形 M 的定向特征 是一个表示 χ_M: $\pi_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$，满足 $\chi_M(\gamma) = 1$ 当且仅当 γ 在 M 的万有覆盖上作为反定向同胚作用。特征 χ_M 是平凡的，当且仅当 M 是可定向的。参见 [DK01] 以了解相关参考文献。

定义 2.1。设 M 和 N 为连通流形，并令 χ_M 和 χ_N 分别为它们的定向特征。若映射 f: M ⟶ N 满足 2–侧，则称其为 2–侧映射，即

$$\chi_M = \chi_N \circ f_* \tag{2.1}$$

成立，其中 f$_*$: π_1(M) ⟶ π_1(N)。否则，称 f 为 1–侧映射。

在三维中，对于 1–侧映射 f : S ⟶ M，简单环猜想已知不成立，因此 2–侧假设是必要的。下面给出一个反例，可用于说明在高维中也需要相同的假设。

反例（在三维中）。一个容易考虑的情形是 1–侧嵌入环面 ı: S $\cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1$。事实上，ı$_*$: π_1(S) $\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ 具有非平凡的核，其中恰好包含所有对应于数对 {(2k, 0) | k ∈ $\mathbb{Z}$}的曲线。它

很容易看出这些曲线都不是单纯曲线。这清楚地表明，在三维中， 2–侧假设是必要的。

对于 $n \geq 4$，上述反例很容易推广到 n维流形。事实上，可以考虑 $M = \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-3}$，因此自然嵌入 $\jmath\colon \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$。

3. 寻找一个有限表示群G

设 S 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的闭曲面。对于一个群 G，表示 $\rho\colon \pi_1(S) \longrightarrow G$ 具有几何核，如果核中的某个非平凡元素可以由一条简单环表示。否则，我们称 ρ 具有非几何核。本节旨在构造一个有限群 G——进而构造一个有限表示群——以及一个具有非几何核的满同态$\rho\colon \pi_1(S) \longrightarrow G$。这一过程在文献中并不新颖，事实上通常归功于 Casson。由于我们找不到直接的参考文献，这里给出一种直接构造。其基本思想依赖于以下观察：如果 $p\colon \Sigma \longrightarrow S$ 是一个正则覆盖，使得 S 上没有本质简单闭曲线提升到 Σ，那么自然投影

$$\pi_1(S) \longrightarrow \frac{\pi_1(S)}{p_*(\pi_1(\Sigma))} = G \tag{3.1}$$

具有非几何核。

给定一个闭的亏格 g 曲面 S，让我们考虑对应于满同态 $\phi\colon \pi_1(S) \longrightarrow H_1(S, \mathbb{Z}_2)$ 的核的覆盖空间 $p\colon \Sigma' \longrightarrow S$。注意，S 上的简单非分隔环是 $H_1(S, \mathbb{Z}_2)$ 的生成元，因此不会提升到 Σ'。这里的关键观察如下

引理3.1。每个简单分隔环都提升到 Σ'，且每个原像都是 Σ' 上的简单非分隔环。

证明。首先，我们注意到 $p\colon \Sigma' \longrightarrow S$ 是一个 2^{2g} 度覆盖，因此 Σ' 是一个闭曲面。设 γ 是 S 中一个简单本质分隔环，即 $S = S_1 \cup_\gamma S_2$。我们用反证法，假设某个——因而任意一个——提升将 Σ' 分成两个子曲面。由于 $\deg(p) = 2^{2g}$，有 2^{2g} 个提升，记为 $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_{2^{2g}}$，它们都是 γ 的提升。由于这些曲线都是分隔环，切割后的曲面

$$\Sigma' \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{2g}} \gamma'_i \tag{3.2}$$

有 $2^{2g} + 1$ 个连通分支。其中一些分支，设为 m 个，映射到 S_1，其余 $2^{2g} + 1 - m$ 个分支映射到 S_2。覆盖投影 p 限制在这些分支上的映射，分别构成到 S 1 或 S 2 的覆盖。设 $\Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_m$ 表示切割曲面中映射到 S_1 的连通分支，并用 $\Sigma'_{m+1}, \ldots, \Sigma'_{2^{2g}+1}$ 表示其余连通分支——当然，它们都映射到 S_2。定义 d_i 为 p 限制在连通分支 Σ'_i 上的次数，即

$$d_i = \deg\left(p_{|\Sigma'_i}\colon \Sigma'_i \longrightarrow p(\Sigma'_i)\right). \tag{3.3}$$

我们声称，至少有一个指标 i 满足 $d_i = 1 \in \{1, \ldots, 2^{2g} + 1\}$。事实上，反设对所有 i $= 1, \ldots, 2^{2g} + 1$，都有 $d_i \geq 2 = 1$。那么我们很容易发现

$$d_1 + \cdots + d_m = 2^{2g} \geq 2m \quad \text{and} \quad d_{m+1} + \cdots + d_{2^{2g}+1} = 2^{2g} \geq 2^{2g+1} - 2m + 2. \tag{3.4}$$

然而，将这些不等式结合起来，显然可以推出以下一系列不等式

$$0 < 2^{2g-1} + 1 \leq m \leq 2^{2g-1} \tag{3.5}$$

这显然是不可能的。因此，至少存在一个分支，不妨在重新编号后记为 Σ_1'，使得 $d_1 = 1$。这意味着 $p|_{\Sigma_1'}$ 是一个同胚。然而，这是不可能的，因为 Σ_1' 不是圆盘，因此必定包含一条非分离简单闭曲线，它是该曲线在覆盖投影下的像的一个提升。这便得到了所需的矛盾。□

为了得到所需的群 G，我们再次应用上述论证。考虑对应于 $\pi_1(\Sigma') \longrightarrow H_1(\Sigma', \mathbb{Z}_2)$ 的核的覆盖空间 $q : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$。由于 Σ' lifts 到 Σ 的每条简单非分隔环都不存在，因此可直接推出，S 上没有本质简单闭曲线能够通过覆盖投影 $p \circ q : \Sigma \longrightarrow \Sigma' \longrightarrow$ S lifts 到 Σ。接下来只需证明 $p \circ q$ 是正则覆盖。然而，这由构造直接得到，因为 $p_*(\pi_1(\Sigma'))$ 在 $\pi_1(S)$ 中是特征的；同理，$q_*(\pi_1(\Sigma))$ 在 $\pi_1(\Sigma')$ 中也是特征的。直接推论是，$(p\circ q)_*(\pi_1(\Sigma))$ 在 $\pi_1(S)$ 中是特征的，因而是正规子群。于是，覆盖 $p \circ q$ 是正则覆盖。我们考虑上面在 (3.1) 中的表示 ρ，即

$$\rho : \pi_1(S) \longrightarrow \frac{\pi_1(S)}{(p \circ q)_*(\pi_1(\Sigma))} = G. \tag{3.6}$$

我们可以观察到，$\pi_1(S)$ 中的闭路属于 $\ker(\rho)$，当且仅当该路可提升为 Σ 中的闭路。然而，根据构造，S 中没有简单闭环可以提升到 Σ，因此表示 ρ 具有所需的非几何核。

4. 实现过程

本节旨在为每个维数 $n \geq 4$ 下的简单环猜想提供所需的反例。

4.1. 寻找具有指定基本群的 n– 流形。众所周知，任意有限表示群都可以实现为某个 n– 维流形 M 的基本群。为求完整起见，我们在此回顾一种广为人知的构造。设 G 是一个有限表示群，其表示为

$$G \cong \langle a_1, \ldots, a_k \,|\, r_1, \ldots, r_\ell \rangle. \tag{4.1}$$

考虑 $\mathbb{S}^n$，再取 k 个 $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ 的副本，并令 M_o 为闭 n– 流形

$$M_o = \mathbb{S}^n \# (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \# \cdots \# (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1). \tag{4.2}$$

由于 $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$，很容易推出 $\pi_1(M_o) \cong \langle a_1, ..., a_k \mid \phi \rangle$。这是以下引理的推论，其证明是塞弗特-范坎彭定理的一个应用。

引理 4.1. 设 $n \geq 3$ 且 M 和 N 是闭光滑 n–维流形。则

$$\pi_1(M \# N) = \pi_1(M) * \pi_1(N). \tag{4.3}$$

为了实现一个基本群为 G 的流形 M，我们按如下方式进行。我们可以用 M_o中的某个光滑嵌入圈来表示一般关系 r，记作 γ。令 T_γ 为 γ 的一个与 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$同胚的管状邻域。通过从 M_o 中切除管状邻域 T_γ，我们得到一个 n–流形，其边界与 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$同胚。这里的关键观察是以下事实：空间 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$ 和 $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{D}^2$ 具有相同的边界（差一个同胚），即 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$。然后，我们沿着边界粘合一个 $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{D}^2$的副本。由于 $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{D}^2$ 是单连通的——注意这里我们使用了 $n \ \gamma$

这一假设——可以证明所得空间的基本群同构于 $\langle a_1, \ldots . a_k \mid r \rangle$。下面我们来证明这一事实。

唯一需要检查的是以下事实：移除管状邻域 T_γ 并将其替换为 $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{D}^2$，会消去 γ。令 M_γ 表示通过此过程从 M_o得到的流形。我们有

$$M_\gamma = \left(M_o \setminus \operatorname{int}(T_\gamma)\right) \cup_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}} \left(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^{n-2}\right) \tag{4.4}$$

注意，以下结论成立：

$$\pi_1\left(M_o \setminus \operatorname{int}(T_\gamma)\right) \cong \pi_1(M_o) = \langle a_1, \ldots, a_k \mid \phi \rangle, \tag{4.5}$$

因为在 n–维流形中，当 $n \geq 4$时，两条环不会彼此链接。此外，我们还有：

$$\pi_1(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^{n-2}) = \{0\} \tag{4.6}$$

and

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}) \cong \mathbb{Z} = \langle z \rangle, \tag{4.7}$$

其中 z 在 $\mathbb{S}^1 \times \{*\}$ $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$ 中表示。注意，z 在 M_γ 中的像正是曲线 γ。因此，根据塞弗特–范坎彭定理，我们有 $\pi_1(M_\gamma) = \langle a_1, \ldots, a_k \mid r \rangle$。

在我们的流形 M_o 上，我们用一条光滑环路 γ_i 表示每个关系子 r_i；不失一般性地，我们可以假设这些环路两两不相交。因此，重复这一过程 l 次后，我们最终得到一个基本群为 G 的 4–流形 M，正如所要求的那样。

4.2. 寻找连续映射。对于一个闭的亏格 g 曲面 S，令 G 为第 §3 节中得到的有限群，并令 M 为一个基本群为 $\pi_1(M) \cong G$ 的 n–流形。现在可以将 (3.6) 中的表示视为一个表示 $\rho\colon \pi_1(S) \longrightarrow \pi_1(M)$。回顾第 §3 节的内容，我们知道 ρ 具有非几何核。在这里，我们旨在寻找一个连续映射 $f : S \longrightarrow M$，使得 $f_* = \rho$。由此，我们得到维数 n 中简单环猜想所需的反例。

映射 $f : S \longrightarrow M$ 的存在性现在成为一个障碍理论问题。注意到 S 和 M 都具有 CW结构，并且我们可以选择使这些结构都只有一个 0–胞腔。由于 S 是一个闭的亏格 g 曲面，我们将其视为一个 CW复形，其中有一个 0–胞腔、2g 个 1–胞腔以及仅一个 2–胞腔。我们利用 ρ 在 1–骨架层次上定义映射 f，方法是将每个 1–胞腔（例如 e）映射到 ρ (e) 的一个胞腔代表。由于 ρ是基本群的映射，它保持路径之间的同伦关系，因此我们可以将 f 延拓到 2–骨架。事实上，唯一的 2–胞腔的边界在 $\pi_1(S)$ 中是平凡的，因此它被映射为 $\pi_1(M)$ 中的平凡环路。因此，存在一个连续映射 $f : S \longrightarrow M$，使其如所要求的那样将 ρ 实现为基本群的映射。剩下的工作是证明 f 是2–侧的。事实确实如此：由于 M 是可定向的，其定向特征 χ_M 是平凡的，特别地，对于所有 $\gamma \in \pi_1(S)$，都有 $\chi_M \circ f_*(\gamma) = 0$，因此 $\chi_S = \chi_M \circ f_*$，正如所要求的，因为 S 也是可定向的。

4.3. 最后说明。 上述构造中，定义域和目标均为可定向流形。值得一提的是，根据定义 2.1 从不可定向曲面 S 到可定向目标 M 的连续映射绝不会是 2–侧的。不过，即使目标流形 M 不可定向，从可定向曲面 S 出发的连续映射也完全可能是 2–侧的。下面举例说明这一现象。设 $\rho\colon \pi_1(S) \longrightarrow G$是到有限表示群的一个表示，并设 M 是一个可定向 n–流形

其基本群为 G。上文已经说明如何实现一个 2–侧映射 $f : S \longrightarrow M$。考虑 $M \# (\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^{n-2})$；根据引理 4.1，其基本群同构于 $G * \mathbb{Z}_2$。现在按如下方式实现一个 2–侧映射 $f : S \longrightarrow M \# (\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^{n-2})$。定义 M°为开子流形 $M \setminus \mathbb{D}^n$，并注意到 $\pi_1(M^\circ) \cong \pi_1(M) \cong G$。然后，首先完全按照上文所述实现一个 2–侧映射 $f^\circ : S \longrightarrow M^\circ$，再定义 $f = \imath \circ f^\circ$，其中 $\imath : M^\circ \hookrightarrow M \# (\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^{n-2})$ 是一个嵌入。

参考文献

[Cal13] Danny Calegari，使用稳定交换长度证明非单射曲面的不可压缩性，《太平洋数学杂志》262（2013），第2期，257–262。[CM15] D. Cooper 和 J. F. Manning，将曲面群表示到 $SL(2,\mathbb{C})$ 中且不消灭任何简单闭曲线的非忠实表示，《几何学专论》 **177** 2015 165 187 3370029（），–。[01] MR DK James F. Davis 和 Paul Kirk，《代数拓扑讲义》，《数学研究生教材》，第 35, 2001 1841974 卷，美国数学学会，普罗维登斯，[23] 罗得岛州，。MR FG G. Faraco 和 S. Gupta，$PSL(2,\mathbb{R})$ 中离散表示的简单环猜想——准备中，2023。[Gab85] D. Gabai，简单环猜想，《微分几何杂志》21（1985），第1期，143–149。MR 806708[Has87] J. Hass，具有 S^1 作用的流形中的极小曲面以及塞弗特纤维化空间的简单环猜想，《美国数学学会会刊》 **99** 1987 2, 383 388 870806（），第–期。MR Lou Larsen [14] Louder，极限群的简单环猜想，《以色列数学杂志》199（2014），第2期，527–545。[Man14] K. Mann，关于 $PSL(2,\mathbb{R})$ 的简单环猜想的一个反例，《太平洋数学杂志》269（2014），第2期，425–432。MR 3238484[Min00] Yair N. Minsky，短测地线与端不变量，第1153号，2000，《复动力系统及相关领域综合研究》（日文）（京都，1999），第1–19页。[RW98] J. H. Rubinstein 和 S. Wang，图流形中的 π_1-单射曲面，《Comment. Math. Helv.》73（1998），第4期，499–515。MR 1639876[Zem16] Drew Zemke，模型为 Sol 的 3-流形的简单环猜想，《代数、几何与拓扑》16（2016），第5期，3051–3071。MR 3572359

（GIANLUCA FARACO）米兰比可卡大学数学与应用数学系 U5, 科齐街 55 号, 20125 米兰 , 意大利
电子邮箱地址：gianluca.faraco@unimib.it