arXiv:2304.12030v2 [math.HO] 2 Apr 2024

# 大学数学中的策略灵活性

Peter H¨ast¨o * Jon R. Star †

2024年4月3日

我们的同事 Miguel Ab´anades 请西班牙的一年级大学生计算 $\frac{d}{dx}\log(x^2)$。40名学生中，有39名使用链式法则解出了这道题：

$$\frac{d}{dx}\log(x^2) = \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^2 = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}.$$

只有一名学生一开始就对对数进行变形：

$$\frac{d}{dx}\log(x^2) = \frac{d}{dx}(2\log x) = \frac{2}{x}.$$

这两种方法，也就是解题策略，都是正确的，但许多数学家可能会认为后者更“巧妙”。我们将根据问题的特点选择适切解法的能力和倾向称为策略灵活性。

这一现象长期以来一直受到关注（例如 Wertheimer，1945；见下文第 2 节）。过去一年中，该领域发表了两篇研究文献综述（[5] 和 [15]），每篇都引用了 70 多篇文献。我们建议读者参阅这些综述，以全面了解相关研究，并比较该现象的不同概念化方式。通常，大多数研究是在小学和初中阶段开展的，尽管策略灵活性的影响在更高阶段或许更为显著。

在这篇阐释性文章中，我们论证了策略灵活性与大学数学及其教学相关。全文贯穿具体的数学示例，希望能帮助读者将所介绍的理念与自身经验联系起来，并或许从中获得一些关于自身教学发展历程的启发-为自己的教学发展之旅做好准备。

我们首先介绍灵活性或缺乏灵活性的其他表现形式，以及大学阶段的大部分相关研究（第 1 节）。我们还将从其他阶段的灵活性研究中进行推论，并结合我们的个人经验。具体而言，我们将介绍与灵活性相关的数学教育研究（第 2 节），并提出一些可在大学课堂中采取的实践步骤（第 3 节）。我们认为，大学数学教师非常适合培养策略灵活性所必需的技能和态度。最后，我们将介绍教授灵活性所面临的挑战及注意事项。

我们省略“策略灵活性”中的“策略”一词，因为我们只讨论这一种灵活性；关于表征中的其他灵活性类型，请参见 $[5, 15]$。我们还注意到，有些作者使用“适应性”一词，而非“灵活性”。

## 1 灵活性的示例

教授数学的人无疑都观察过事情的另一面：较弱的学生往往会选择出人意料地低效的解题策略。以今年的芬兰高中毕业考试为例，太多学生使用了如下商法则

$$\frac{d}{dx}\frac{x^3-15x^2+50x}{1000} = \frac{(3x^2-30x+50)\cdot 1000 - (x^3-15x^2+50x)\cdot 0}{1000^2}.$$

不出所料，这种方法给学生带来了许多出错的机会，而更高效的方法则不会出现这些问题。

*Peter H¨ast¨o 是芬兰赫尔辛基大学的数学教授。他的电子邮箱是 peter.hasto@helsinki.fi

†Jon R. Star 是美国哈佛大学的教育学教授。他的电子邮箱是 jon star@gse.harvard.edu

灵活巧妙地选择方法的机会，不仅存在于大学数学中，也存在于数学的各个层次。在算术中，计算 $5002-3997$ 时，可以采用标准的“借位”方法，也可以注意到，3997 加上 5 得到 4002，之后再加 1000 就能得到 5002。早在 1945 年，Wertheimer 就感叹学生们计算

$$\frac{274+274+274+274+274}{5}$$

先将分子中的五个数相加，然后进行除法。在初等代数中，方程 $3(x-4)+4(x-4)=14$ 可以通过分配两个括号的标准算法求解，也可以采用情境适切策略，先合并同类项：

$$\begin{aligned} 3(x-4)+4(x-4) &= 14 \\ 7(x-4) &= 14 \\ x-4 &= 2 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

大学数学既包含类似的灵活性机会，也包含更深层次的机会。在大学微积分课程中，我们可以使用诸如

$$\frac{d}{dx}\log(x^2) \qquad \text{and} \qquad \frac{d}{dz}\big(z(z^3+z)^{-1}\big),$$

前文第一段（以上）以及 Maciejewski–Star 在美国开展的研究 [7] 。在这两种情况下，求导前进行化简都会带来更高效的解法。这与上文提到的线性方程类似。Schoenfeld（1985年）对其学生处理诸如 $\int \frac{x}{x^2-9}\,dx$ 这类积分任务的方法则作出了相反的观察：最初的代数运算（部分分式）反而导致了更多的工作。超越微积分之后，低效的解题策略可能在技术上要求极高，以至于学生根本无法完成；表现上的数量差异由此转变为质量差异。

Broley 和 Hardy [2] 研究了加拿大一门分析学课程中的任务，例如证明当 $p>1$ 时集合 $\{\frac{n^p}{n+1}:\ n\in\mathbb{N}\}$ 无界。他们发现，学生大多依赖微积分的常规解题方法，难以将解法与分析学概念联系起来。不过，他们提出，微积分中的灵活性或许可以提升学生建立联系的能力——让学生能够在微积分与分析学之间建立联系。

在新西兰一所大学的线性代数课程中，Kontorovich [6] 同样将灵活性与优先运用一般性质、而非基于矩阵计算的方法联系起来。例如，学生被要求求出满足方程 $b\in\mathbb{R}^3$ 具有解的向量空间 $Ax=b$ 的一组基，其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

在这种情况下，最高效的方法是注意到 $A$ 的列向量是线性无关的，因为它们的坐标不成比例（这是课程中证明过的一个引理）。一种计算方法是使用高斯消元；这需要更多步骤，不同学生以或多或少高效的方式完成了这些步骤。

## 2 灵活性的本质

总而言之，灵活性是指能够运用多种解题策略，并且能够且愿意选择一种适合具体情境的策略，使其与当前任务高度契合。

传统上，数学能力通常通过程序性知识和概念性知识这两个构念来界定。程序性知识常常仅被视为执行记忆算法的能力（反映出表层理解），而概念性知识则被视为表明数学对象之间存在更深层的联系。Star[11] 认为，应将程序性—概念性维度与表层—深层维度区分开来。他提出，灵活性是一种深层程序性知识，要求人们理解程序相对于具体任务的局限性和优势。

在对中小学生数学学习的研究中，研究者长期以来一直关注数学熟练度的这一方面，并使用多种名称来指称它，包括创造性思维（Wertheimer）、关系性理解（Skemp）、适应性专长（Hatano）和策略性

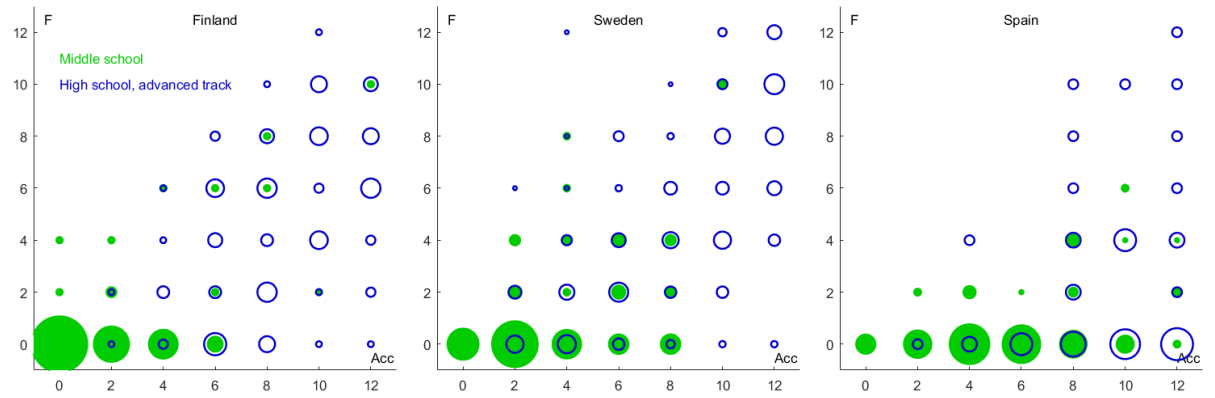


图1：芬兰（左）、瑞典（中）和西班牙（右）初中（绿色实心）和高中（蓝色轮廓）学生的准确性（“Acc”，横轴）与灵活性（“F”，纵轴）。圆形面积与具有相应准确性和灵活性得分的学生比例成正比。这张此前未发表的图表基于来自 [14] 的数据。

能力（Kilpatrick）。过去 20 年来，将这种能力概念化为灵活性在该领域逐渐受到重视（近期综述见 [5, 15] ），这或许是因为灵活性的定义更加精确，研究者开发并使用了经验证的灵活性测量工具，而且这一构念也易于应用于中学及高等数学。

其中一种工具是 Xu、Star 及其同事开发的三阶段测验。我们在三个国家开展了一项规模相当大的研究，使用该测验考察初中和高中学生在线性方程求解中的灵活性与准确性 [14]。不出所料，我们发现有些学生准确性和灵活性都较低，也有些学生两者都较高。此外，许多学生准确性较高而灵活性较低，几乎没有学生灵活性较高而准确性较低。这形成了图1所示的下三角分布。准确性很高的学生在灵活性方面涵盖了各个水平，这一事实表明，灵活性并非仅仅意味着拥有更强的程序性技能或更高的熟练度；相反，灵活性涉及一种不同的、更深层次的程序性知识。

需要具备深厚的知识，因为要决定情境适切策略，就必须关注问题的特殊结构，并评估这些特征与问题解决目标 [11]之间的关系。人们或许会认为，大多数问题都具有一般结构，而非特殊结构，但经验表明，在数学研究和应用中，具有特殊结构的问题远比其“统计概率”所暗示的更常见（例如，如果生成随机系数的多项式，那么巧妙的捷径几乎永远派不上用场）。事实上，事情能够恰好吻合、相互抵消并得到简化，这往往会让数学家觉得自己正走在解决问题的正确道路上。

研究人员将把对象和表达式视为各部分组合的能力称为结构感。这一概念也出现在美国共同核心高中标准的目标“在表达式中看见结构”中。总结上一段：灵活性需要结构感，而灵活性也使学生能够通过根据当前结构选择最合适的策略来发挥其结构感。关于灵活性的研究大多涉及小学和中学。然而，结构感的作用往往远不止算术和线性方程。事实上，微积分的很大一部分都涉及将表达式与公式进行模式匹配，并执行正确的代数运算。不过，结构感的作用还可以延伸得更远。

例如，在实分析中，H¨older 不等式

$$\int f(x)g(x)\,dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}\,, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

对于学生来说，这很容易理解，但要在闵可夫斯基不等式的证明中应用它，则需要将 $\int |u|^p\,dx$ 的被积函数解读为 $|u|\cdot|u|^{p-1}$，并在 H¨older 不等式中将第一项与 $f$、第二项与 $g$ 对应起来。这样的应用难度要大得多，尤其是对于不太擅长在代数表达式中发现模式的学生而言。

灵活性不仅涉及技能和知识，也关乎一种倾向。灵活性的核心是在特定情境下力求找到最合适或最佳的解决方案。一些研究者试图根据某个人将某种策略应用于某个问题时的速度和准确性来量化“最佳”。Hickendorff [4] 对这一观点作了很好的总结。情境适切策略往往步骤更少、执行更快，但我们认为这只是灵活性的副作用，而非其目标。比起采用脑海中最先闪现的想法，更重要的是考虑多种方法，并权衡它们的利弊。

让我们推测一下，这种优化思维方式会在数学课中的数学任务之外带来哪些更广泛的后果。进一步来说，既然它影响数学的各个层面，那么即使在阅读研究论文时，人们有时也会怀疑，这是否只是作者设法完成的第一个证明，以及如果再付出一些努力，是否能够得到更加简洁优美的证明。在编程中，蛮力解决方案与优雅的解决方案之间存在天壤之别。数据结构选择不当，会扼杀程序随需求变化而不断演进的机会。更进一步说，只要投入时间和精力进行优化，就可以从效率角度评估并改进从工程到行政管理的大多数流程。

细心的读者可能会想知道，这一切“灵活性”是否确实是同一种特质的体现。我们认为，这些不同的灵活性案例在概念上彼此相关，而且至少在个体层面上——也会在程序性数学之外运用同样灵活的思维。然而，研究表明，在不同情境之间迁移技能通常很困难；而（习得的）灵活性在多大程度上能够迁移到其他数学领域和其他学科，目前尚无定论。研究确实证明，通过适当调整教学实践，可以积极提升学生的灵活性。

## 3 面向灵活性的教学

关于数学问题解决（即 P´olya 所说的问题解决），人们已经撰写了大量论述，其中也包括大学层面的研究（例如 Schoenfeld，1985年）；教授问题解决技能也很可能有助于培养灵活性。然而，尽管人们数十年来一直在努力，但公平地说，问题解决教学并未产生大规模的影响，部分原因在于人们对于“问题解决”究竟是什么存在分歧。与改善数学问题解决这一艰巨任务相比，以灵活性为目标具有若干优势。传统的、以常规训练为导向的方法和灵活性都注重程序性知识。然而，加入灵活运用程序这一要素，会改变学生对数学任务的看法：数学任务不再只是复述教师示范过的做法，而是提供一组更广泛、但仍然有限的创造性选项。正是这种有限范围的创造性，使灵活性区别于问题解决。因此，与数学问题解决相比，灵活性所要求教师和学生进行的重新定位较小。

Star 和 Newton [12] 研究了数学专家的灵活性。参与者回忆说，在数学任务中寻找情境适切策略既富有智力挑战，也很有趣。此外，他们表示，自己并未受过寻找最优策略的教学，而是认为这样做是自己在解决问题时怀有的一种个人愿望。虽然这些数学专家能够自行摸索出灵活使用策略的方法，但前文提到的研究表明，大多数学生并非如此。

关于图1，我们提到，

在我们的研究中，几乎没有灵活性高而准确性低的学生 [14]。该图表明，与北欧国家相比，样本中的西班牙学校更加重视准确性，而非灵活性。这说明，通过教学和课程选择，可以影响灵活性。据我们所知，目前还没有类似的跨国灵活性大学层面比较。不过，Ernvall-Hyt¨onen、H¨ast¨o、Krzywacki 和 Parikka [3]发现，芬兰大学学生表现出相当程度的灵活性；而 Shaw、Pogossian 和 Ramirez [10] 发现，美国大学的学生表现出的灵活性低于他们的预期。需要指出的是，这些研究使用了截然不同的测量工具。然而，不同背景下的差异表明，灵活性并非（仅仅）是数学天赋的结果，而是取决于教育体系，并且可以通过教学加以培养。重要的是，不要将灵活性视为凭空想出不同寻常的巧妙解法的能力（“固定型思维”），因为这种看法可能令人沮丧，并产生反作用。相反，灵活性是技能与态度的结合，可以通过系统性的训练获得，并在教学指导下得到支持（“成长型思维”）。

Star 和 Seifert [13] 开展了一项干预，展示了一种相当直接却具有普适性的教学方法。研究人员通过讲授方程中允许进行哪些运算（在等式两边加上常数、合并同类项等），向学生介绍方程求解，但没有要求他们遵循特定的步骤顺序或规则（例如标准算法）。此外，研究人员要求学生至少使用两种不同的策略来解答每道题。这一做法将注意力集中在解题过程而非答案上，并让学生了解到存在多种可行的解题策略。结果显示，与对照组相比，接受干预的学生表现出更加多样的解题策略，同时在标准算法方面达到了相同的熟练程度。在微积分情境中，相应的转变可以是同时处理多种求导法则，设计能够同时匹配几种法则的任务。除此之外，微积分还涉及可能促成灵活性的代数运算；引言中的示例就采用了这种做法。

在加拿大大学开展的一项为期一课时的相关干预由 Maciejewski 和 Star [7]进行了研究。

参与干预的学生 [7, 13] 比接受传统教学的学生有更多自由来推导解法，但提供给他们的选项数量并不会多到令人无所适从。此外，这种方程求解方法并不灌输“总是先展开”的教条，而是鼓励学生在着手解题之前先停下来思考片刻。先思考再行动，应该有助于减少那些效率低得离奇、却过于频繁出现的解法，例如对 $(x+1)(2x-3) = 0$ 先展开，再对 $2x^2 - x - 3 = 0$ 使用求根公式。减少 “ 总是遵循这一套步骤”的做法，也能开展不同类型的任务，让学生逆向执行步骤、从中间开始、分析给定的解法等。举例来说，学生可以从一个答案开始，再通过变换构造一个方程，供全班其他同学求解；整个过程可以是这样：

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ 3x &= 18 \\ 3x - 4 &= 14 \\ \frac{1}{2}(3x-4) &= 7. \end{aligned}$$

这道题凸显了方程求解步骤的可逆性。微积分中类似的题目可以阐明求导与积分之间的关系。为避免题目过于简单，应鼓励学生尝试设计一些“刁钻”的题目，让同学们也得费一番功夫。

虽然灵活性有时被描述为从一组已知策略中选择最优方案，但这项干预 [13]也表明，学生可以自行构建策略。只要在适当受限的定义域内开展，复杂性和认知负荷就能保持在合理水平。限制越少，情形就越接近问题解决。

我们强调，灵活性不仅仅是生成多种策略：这些策略还应

运用数学标准进行比较和评估。教师在与全班协商应采用哪些标准进行比较、确保每位学生的贡献都得到认可，同时仍对提出的不同策略进行批判性讨论方面发挥着关键作用。任何要求学生生成解法的任务，都可以对不同解法进行比较。此外，恰当选择公式结构和数值，有助于采用适时且非通用的策略。例如，积分

$$\int_1^2 x^2 - 2x + 1 \, dx$$

引导进行变量替换 $z := x - 1$，尽管直接计算也相当可行。

另一方面，也可以在任务中明确聚焦于灵活性。例如，可以要求学生针对给定问题提供两种（或更多种）不同的解法。比较这些解法可以作为任务的一部分，也可以由教师组织成课堂讨论。借助数字工具培养灵活性，是另一个有趣但尚未得到充分探索的领域 [1]。

专为培养灵活性而设计的一种任务形式是解答示例对（WEP）。解答示例对呈现两名假想学生针对某个问题给出的解法（见图 2）。最简单的情形是，其中一种解法采用通用方法，另一种则适合具体情境。解答示例对还包含一些提示，例如：

- 解释解答中采用了什么做法。
- 解释为什么这是该问题的一个有效解法。
- 指出这些解法之间的相同点和不同点。
- 每种解法各有哪些优点和缺点？
- 哪种解法更好？
- 你还能用另一种方法解决这个问题吗？
- 哪种解法是正确的？

正如最后一个问题所暗示的，WEP 的一种子类型涉及解答中存在一个或两个错误。这种故意错误可能有助于将学生的注意力从答案转向论证，并减轻他们在课堂上展示带有错误的解答时的焦虑 [9]。此外，调试解答本身就是一次重要的学习机会。

学生的态度可能会对关注灵活性构成挑战。以往的教育经历可能使他们相信，在数学中最重要的，甚至是唯一重要的事情，就是得到正确答案，因此，讨论多种解法是在浪费时间。学生可能认为，教师的职责是解释解决一组问题的正确策略，而他们的任务就是按照要求加以运用。这类观念会阻碍较高层次思维的教学，包括灵活性。

短期来看，以答案为中心的取向可能会带来表面上良好的结果。当学生在几周内反复练习一组任务时，大多数学生在训练期结束时面对类似任务的测试，都会表现得足够好。然而，这些知识迁移到不同情境中的能力、应用能力以及日后的保持情况，很可能相当有限（Boaler，1993）。在芬兰一项针对中学生灵活进行方程求解的干预中，许多教师认为，后续几年无需从头开始复习方程所节省的时间，足以弥补初期进展缓慢所带来的影响。短期测试成绩之所以良好，是因为学生不必承担解决问题所涉及的许多过程，例如识别问题类型和相关解法，或结合多个领域的技巧与概念。但这些恰恰是学生应该学习的重要思维习惯。从长远来看，这会导致结构感变差，以及元认知技能减弱，例如在某种情境中评估一种策略是否可行的能力下降。

这种无益观念的一个来源是评估。在某些教育体系和机构中，教师评定学生作业时，只给最终答案的正确性打分。只为答案打分，实际上是在向学生传达：论证并不重要。在中学和高等教育中，分数通常也会分配给论证。然而，在数学中，通常任何正确的

**Problem**: Calculate $\frac{d}{dz}\big(z(z^3+z)^{-1}\big)$.

| **Avery's solution**: | | **Blake's solution**: | |
|---|---|---|---|
| I rewrite the expression as a quotient | $\frac{d}{dz}\frac{z}{z^3+z}$ | $z^3+z=z(z^2+1)$ | I factorize the denominator |
| I use the quotient rule | $=\frac{(z^3+z)-z(3z^2+1)}{(z^3+z)^2}$ | $\frac{d}{dz}(z^2+1)^{-1}$ | I cancel the $z$ |
| I simplify the numerator and factorize the denominator | $=\frac{-2z^3}{(z^2+1)^2z^2}$ | $=-(z^2+1)^{-2}\frac{d}{dz}z^2$ | I use the power rule and the chain rule |
| I cancel the $z^2$ | $=-\frac{2z}{(z^2+1)^2}$. | $=-2z(z^2+1)^{-2}$ | I use the power rule again. |

- Highlight the similarities and differences between the solutions.
- What are the advantages and disadvantages of each strategy?

图 2：解答示例对

论证都能获得满分，不论其是否优雅、简洁或易读。尤其是，灵活性带来的即时收益可能相当有限，只是偶尔能在计算中节省一点时间。因此，学生可能需要额外的激励，才会努力追求灵活性以及随时间累积起来的微小优势。为此，Maciejewski [8] 建议在微积分考试中加入一些与灵活性直接相关的题目，例如要求针对同一道题给出多种解法，或使用 WEP。更进一步，你会考虑对图 2 中 Avery 和 Blake 的解题策略给予不同分数吗？这在数学中似乎是个奇怪的想法；而在大多数其他学科中，对论证进行优雅呈现，所得分数会高于笨拙的呈现方式。力以及使用情境适切策略的意愿被称为策略灵活性。在过去二十年中，这一直是数学教育研究的活跃领域，其根源还可以追溯得更远。

研究表明，在适当的支持和鼓励下，不同技能水平的学生都能学会灵活性。将关注点从答案转向解题策略及其背后的思想，有助于进一步培养灵活性。大多数任务都可以用于支持灵活性；不过，也有一些专门为促进灵活性而设计的任务，例如例题对。大多数研究关注的是大学前阶段的灵活性，但其中许多工具和任务类型都可以应用于大学环境。大学数学教师非常适合认识到灵活性的价值，并将其传达给学生，而这可能是培养灵活思维最重要的因素。

# 4 总结

我们已经论证，程序性知识可能比乍看之下更有深度，尤其是在选择或构建针对特定问题量身定制的解题策略时。这种能-

灵活性为数学教学提供了一个兼顾概念与程序性重点的框架。它使教师和学生能够逐步拓展自己的学习习惯，朝着更注重问题解决的方式发展。开展解题策略灵活性教学对教师而言只是一小步，但对那些意识到数学涉及决策以及具有不同优势的多种正确解题策略的学生来说，可能恰恰是

对于意识到数学涉及决策，并且存在各有优点的多种正确解题策略的学生来说，这是一次小小的飞跃。

## 致谢

感谢 Anne-Maria Ernvall-Hyt¨onen 对本文提出全面的反馈，也感谢 HeidiKrzywacki、P¨aivi Portaankorva-Koivisto 以及各位审稿人的意见。

## 参考文献

[1] B. Brezovszky、J. McMullen、K. Veermans、M.M. Hannula-Sormunen、G. Rodr´iguez-Aflecht、N. Pongsakdi、E. Laakkonen 和 E. Lehtinen：数学游戏化学习环境对小学生适应性数知识的影响，*Computers & Education* **128** (2019)，63–74。10.1016/j.compedu.2018.09.011。

[2] L. Bardy 和 N. Hardy：学生从微积分到分析学的学习演变：学生如何解决看似微积分题目的分析学任务，*International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* **8** (2022)，269–292。10.1007/s40753-022-00171-2

[3] A.-M. Ernvall-Hyt¨onen、P. H¨ast¨o、H. Krzywacki 和 S. Parikka：大学早期数学中的程序灵活性，*FMSERA Journal* **5** (2022)，46–60。

[4] M. Hickendorff：算术策略运用的灵活性与适应性：儿童知道什么以及他们展现什么，*Journal of Numerical Cognition* **8** (2022)，第3期，367–381。10.5964/jnc.7277

[5] W. Hong、F. Liu 和 J. Bai：数学灵活性的系统综述：概念、测量及相关研究，*Educational Psychology Review* **35** (2023)，104 (), 文章。10.1007/s10648-023-09825-2

[6] I. Kontorovich：定理还是程序？探究本科生解线性代数常规问题的方法，*Mathematics Education Research Journal* **32** (2020)，589–605。10.1007/s13394-019-00272-3

[7] W. Maciejewski 和 J.R. Star：《本科微积分中灵活程序性知识的培养》，*Mathematics Education* **18** (2016)，316 (), 第 3 期，299–。10.1080/14794802.2016.1148626

[8] W. Maciejewski：微积分中信心与程序灵活性之间的关系，*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **53** (2022)，(), 第 7 期，1733 1750 10 1080 0020739 2020 1840639 – . . / X. .

[9] R. Palkki 和 P. H¨ast¨o：数学教师使用（或不使用）故意错误的原因，*Teaching Mathematics and Computer Science* **16** (2018)，2, 263–282 (), 第 – 期。10.5485/TMCS.2018.0453

[10] S.T. Shaw、A.A. Pogossian 和 G. Ramirez：大学生的数学灵活性：认知因素和情感因素的作用，*British Journal of Educational Psychology* **90** (2020)，4, 981–996。10.1111/12340 (), 第 – 期。./bjep.

[11] J.R. Star：重新概念化程序性知识，*Journal for Research in Mathematics Education* **36** (2005)，第 5 期，404–411。https://www.jstor.org/stable/30034943

[12] J.R. Star 和 K.J. Newton：专家方程求解策略灵活性的性质与发展，*ZDM Mathematics Education* **41** (2009)，5, 557–567 (), 第 – 期。10.1007/s11858-009-0185-5

[13] J.R. Star 和 C. Seifert：方程求解灵活性的发展，*Contemporary Educational Psychology* **31** (2006)，3, 280–300 (), 第 – 期。10.1016/j.cedpsych.2005.08.001

[14] J.R. Star、D. Tuomela、N. Joglar Prieto、P. H¨ast¨o、R. Palkki、M.A. Ab´anades、J. Pejlare、R.H. Jiang、L. Li 和 R.-D. Liu：探索三个国家学生的程序灵活性，*International Journal of STEM Education* **9** (2022)，4, 10 1186 40594 021 00322 (), 文章编号 . /s - - -y

[15] L. Verschaffel：数学中的策略灵活性，*ZDM Mathematics Education* **56** (2024)，115–126 (), – 。10.1007/s11858-023-01491-6