arXiv:2304.12042v2 [math.FA] 5 Oct 2023

关于 Lipschitz 可逼近性的常数

´RUBEN MEDINA

Abstract. 在本文中，我们找到 $\lambda > 1$ 并给出一个可分巴拿赫空间 X 的显式构造，使得不存在从 X 到其任意紧凸子集的 λ-利普希茨收缩映射，其中该紧凸子集的闭线性张成为 X 的 X。这与 Godefroy 和 Ozawa 于 2014年提出的一个著名未解决问题密切相关，并构成了已知的首个具有此性质的巴拿赫空间实例。

Contents

1 引言 .1
1.1 动机与背景 .11.2 定义与记号。.2

2 主要结果.3
2.1 证明概要 .32.2 最终构造 .4**参考文献** .22

1. Introduction

1.1. **动机与背景**。 本文源于 Godefroy 和 Ozawa 提出的一个自然问题，该问题见于 [8], ，随后又见于 [10], [9], [7], [6] 和[11]。他们想知道，对于每个可分巴拿赫空间，是否都存在一个到某个紧凸子集上的 Lipschitz 收缩映射，使得该子集的闭线性张成是整个空间。请注意，这个问题只有对可分空间才有意义，因为具有此性质的任何空间都必须由某个紧集生成。在 [12, 定理 3。3], 中，对于具有有限维分解的巴拿赫空间，后一个问题得到了肯定的解决。事实上，对于每个 $\varepsilon > 0$ ，当该空间具有单调 Schauder 基时，可以构造出一个（$1+\varepsilon$）-Lipschitz 收缩映射。然而，一般情形的问题仍未解决，尽管该问题的一个 Hölder 版本已在¨中得到肯定解决， [15, 定理 2。1]。

日期：2023年10月6日。2020 数学学科分类。 46B20, 46B80, 51F30, 54C15。关键词和短语。 利普希茨、收缩、逼近性质。

我们证明，存在一个可分巴拿赫空间 X ，使得不存在λ-Lipschitz 收缩映射到 X 的任何紧凸子集上，并且对于某个 $\lambda > 1$，该子集的闭线性张成是整个空间。然而，我们的例子确实存在具有更大 Lipschitz 常数的此类收缩映射（见推论 2.10）。

Godefroy-Ozawa 问题与非线性逼近性质理论密切相关。事实上，若存在从巴拿赫空间 X 到其生成紧凸子集 K 的 λ-利普希茨收缩映射 R，则存在一列 λ-利普希茨收缩映射 $R_n : X \to X$，它们具有紧值域，并在 X上逐点收敛到恒等映射。具体而言，若固定 $k_0 \in K$，则映射 R_n 可定义为 $R_n(x) = nR\left(\frac{x}{n} + k_0\right) - nk_0$，它是对 R 的平移（使得 0 属于像）与一次扩张的复合。~~注意，对于所有 $x \in X$，~~都有 $R_n(x) \to x$，因为$\bigcup_n R_n(X) = \bigcup_n n(K - k_0) = X$。因此，Godefroy-Ozawa 问题与 Kalton 的问题 1 密切相关；该问题见 [14, 第 1260], 页，具体而言，就是询问每个可分巴拿赫空间 X 中是否都存在一列具有紧值域、逐点收敛到 X上恒等映射的等度一致连续映射。值得一提的是，Kalton 问题的一个反例将给出一种对 ℓ_1 的重新赋范，使其不具有度量逼近性质，从而解决逼近性质理论中的一个经典公开问题。

非线性逼近性质与线性逼近性质密切相关（例如，参见 [5, 定理 5.3], [12, 推论 4.8] 和 [13, 推论 2.9]）。正因为如此，为了解决 Godefroy-Ozawa 问题，我们决定沿着 Enflo 所开辟的道路，构造一个没有基的可分巴拿赫空间（[3]）。他首先着手解决寻找基常数大于 1 的巴拿赫空间这一问题（参见 [2]），我们也在类似的非线性情形下采取了同样的做法。此外，Enflo 本人在 [2, 第 309]页第二段中提到， [3] 中发展的方法与 [2], 中的方法相似，这一点令我们深受鼓舞。

第 2 节分为两个小节。为了避免读者在我们证明中展开的计算过程中失去直觉，我们增设了一个简短的小节，用于说明构造背后的总体思路。在最后一个小节中，我们给出了构造以及主要结果定理 2.1 的证明。

1.2. 定义与记号。 设 (M, d_M) 和 (N, d_N) 是两个度量空间，且令 $f : M \to N$ 为任意映射。若存在 $\lambda \geq 0$，使得对于每个 $x, y \in M$，都有 $d_N(f(x) f(y)) \leq \lambda d_M(x, y)$，则称 f 是利普希茨的。若要指明某个常数 $\lambda \geq 0$ 满足上述不等式，则称 f是 λ-利普希茨的。所有使 f 为 λ-利普希茨的 $\lambda > 0$ 的下确界，称为 f的利普希茨常数 。

从度量空间 (M, d) 到子集 $N \subset M$ 的一个收缩是满足以下条件的映射 $R : M \to N$：对每个 $x \in N$，都有 $R(x) = x$ 。收缩映射的像称为收缩像。如果收缩映射 R 是利普希茨映射，我们就称 R 是一个*Lipschitz* 收缩映射，或者等价地称 $R(M)$ 是一个利普希茨收缩像。

若 X 是巴拿赫空间，则当子集 S 的闭线性张成等于 X 时，称 S 是 X 的一个生成子集。我们将 S 的闭线性张成记作 span(S)。

给定某个可数集 Γ，我们将 $\ell_\infty(\Gamma)$ 表示为有界函数的空间$x\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ 赋予上确界范数 $\|x\|_\infty = \sup |x(\gamma)|$。每当我们处理属于某个 $\ell_\infty(\Gamma)$ 的元素 x 时，我们将 x 的上确界范数简单记为 $\|x\|$。我们还将 $\ell_1(\Gamma)$ 表示为可求和函数的空间$x\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ 赋予范数 $\|x\|_1 = \sum |x(\gamma)|$。对于 $N \in \mathbb{N}$，我们将称 $\ell_\infty^N{}_{\gamma\in\Gamma}$ 以及 ℓ_1^N，分别称空间 $\ell_\infty(\Gamma)$ 和 $\ell_1(\Gamma)$ 为 $\Gamma = \{1, \dots, N\}$。如果巴拿赫空间 E 中的归一化向量序列 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $\ell_1(\mathbb{N})$ 基 等价，则对于每个仅含有限个非零元素的序列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$，都有

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n \right\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|.$$

值得一提的是，给出的定义并不是通常意义上的基本序列等价。

给定一个巴拿赫空间 E、E 的两个非空子集 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 以及一个元素 $v \in E$，当对于每个 $z \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$、$\|v - z\| = d\left(\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2\right)/2.$ 时，我们称 v 是 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 的中点

在整篇文章中，我们将 $\mathbb{N}$ 从 1 开始的自然数以及 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$。

在整篇文章中，我们将遵循[4]中使用的术语和记号。关于利普希茨收缩和一致连续收缩映射的背景知识，我们请读者参阅权威专著 [1]。

2. 主要结果

2.1. 证明概要。我们先对第 2.2 小节采用的方法作一个不太精确但有用的表述。我们将尝试构造 X，使得如果 R 是一个具有凸像 K 的 $(1+\varepsilon)$-利普希茨收缩映射（其中 $0 \in K$），那么对于足够小的某个 $\varepsilon > 0$，若它近似保持某些固定向量 $\pm U_1$、$\pm U_2$、$\pm V_1$、1、$\pm V_2$、$_1 \in X$，则 K 中必定存在一个没有柯西子列的序列。论证将采用迭代方法。更确切地说，从八个向量 $\pm U_1$、$\pm U_2$、$\pm V_1$、1、$\pm V_2$、1 中，我们能够找到另外四个向量 $\pm V_1$、2、$\pm V_2$、2，它们与其余向量相距较远，并且也被 R 近似保持。接着，利用 $\pm U_1$、$\pm U_2$、$\pm V_1$、2、$\pm V_2$、2 被 K 近似保持这一事实，我们将找到另外四个向量 $\pm V_1$、3、$\pm V_2$、3，它们与其余向量相距较远，并且同样被 R 近似保持，如此继续。所求的无柯西子列序列将是 $(R(V_1$、$_n))_{n\in\mathbb{N}}$。唯一的问题是，如何从先前近似保持的向量 $\pm U_1$、$\pm U_2$、$(\pm V_1$、$_m)_{m=1}^n$、$(\pm V_2$、$_m)_{m=1}^n$ 中生成新的四个近似保持的向量 $\pm V_1$、$_{n+1}$、$\pm V_2$、$_{n+1}$：

出于技术原因，论证取决于 n 是偶数还是奇数。先假设 n 是奇数，且 $\pm U_1$、$\pm U_2$、$\pm V_1$、$_n$、$\pm V_2$、$_n$ 被 R 近似保持。我们需要考虑两个向量子集 $\mathcal{S}_n^+$、$\mathcal{S}_n^- \subset X$，使得 $\mathcal{S}_n^\pm \subset \text{co}\,\{R(\pm U_1)\ R(\pm U_2)\ R(\pm V_1$、$_n)\ R(\pm V_2$、$_n)\} \subset K$。更确切地说，集合 $\mathcal{S}_n^\pm$ 含有 8 个向量 $\mathcal{S}_n^\pm = \{Z_{1,n}^\pm, \dots, Z_{8,n}^\pm\}$，其选取方式使得元素 Z_1^+、$_n$、.....、Z_8^+、$_n$ 接近 $_{U_1+}{}^{V_1}$、$_{n+V_2}$、$_2{}^2$，而元素 Z_1^-、$_n$、.....、Z_8^-、$_n$ 接近 $_{U_1+}{}^{V_1}$、$_{n+V_2}$、$_2{}^2$。空间 X 的构造方式保证了 V_1、$_{n+1}$ 是 $\{0\}$ 和 $\mathcal{S}_n^+ \setminus \{Z_{2,n}^+\}$ 的唯一中点，而向量 V_2、$_{n+1}$ 是 $\{0\}$ 和 $\mathcal{S}_n^- \setminus \{Z_{3,n}^-\}$ 的唯一中点。由于后面提到的所有集合都属于 K，其中的元素均被 R 保持；又由于这些集合不存在其他中点，且这些中点是 $\{0\}$ 而非 V_1、$_{n+1}$、V_2、$_{n+1}$，因此这些向量也必定被 $(1+\varepsilon)$-利普希茨收缩映射 R 近似保持。

我们可以定义 U_1，U_2，$V_{1,\ n}$，$V_{2,\ n}$，使其满足 $\|U_1\|$，$\|U_2\| = 1$、$\|V_{1,\ n}\|$，$\|V_{2,\ n}\| \approx 1/3$以及

$$d(\{0\}, \mathcal{S}_n^\pm) \approx \frac{\|U_1\| + \frac{\|V_{1,n}\| + \|V_{2,n}\|}{2}}{2} \approx 2/3 \quad \text{for } i = 2, 3.$$

因此，向量 $V_{1,\ n+1}$，$V_{2,\ n+1}$ 必须满足 $\|V_{1,\ n+1}\|$，$\|V_{2,\ n+1}\| = d(\{0\},\ \mathcal{S}_n^\pm)/2 \approx 1/3 \approx \|V_{1,\ n}\|$，$\|V_{2,\ n}\|$。这是防止序列 $(V_{1,\ n})_{n\in\mathbb{N}}$收敛到 0 的关键因素。因此，可以定义彼此相距较远的向量。相反，如果 n 为偶数，我们则使用 U_2 代替 U_1，以类似方式进行。

现在让我们说明下面的主要引理所发挥的作用。引理 2.6 表明，$\pm V_{i,n+1}$ 是 $\{0\}$ 的中点及其相应集合 $\mathcal{S}$，该集合已在上文描述；而引理 2.7 证明，$\pm V_{i,n+1}$ 是具有这一性质的唯一元素。此外，由于论证必须适用于直到 $\varepsilon > 0$ 的情形，我们在引理 2.7 中证明，如果向量 B 几乎是 $\{0\}$ 和 $\mathcal{S}$ 的中点（误差至多为 ε），那么 B 几乎是$\pm V_{i,n+1}$（误差至多为常数 $C > 0$ 乘以 ε）。最后，引理 2.6 和引理 2.7 用于定理 2.8 的证明中（定理 2.1 的更精确表述），以完成本节。

2.2. 最终构造。 我们将明确给出一个可分巴拿赫空间 X 的定义，并证明对于某个 $\lambda > 1$，不存在到 X 的任一生成性紧凸子集上的 λ-利普希茨收缩映射。也就是说，我们将证明以下结果。

定理 2.1。 存在 $\lambda > 1$ 以及一个可分巴拿赫空间 X，使得不存在到 X 的任一生成性紧凸子集上的 λ-利普希茨收缩映射。

空间 X 将是 $\ell_\infty(\mathbb{N}^2)$中一列经过精心选取的可数个向量的闭线性张成。

下面继续给出 X的定义。该构造将依赖于一些常数 δ、M、$\Delta > 0$，这些常数将在后文中指定。对于每个 $1 \le k \le 8$，我们令

如下各量,

$$x_k = \frac{\frac{1}{2} + \frac{k}{M}}{1 - \frac{2k}{M}} \quad , \quad t(k) = \frac{1}{2} - \frac{k}{M}$$
$$\alpha = 1 - x_8 \quad , \quad \beta = 1 + x_1^2,$$

现在开始定义函数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其定义如下

$$f(x) = \alpha + x \quad \text{and} \quad g(x) = \beta - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

我们还定义三个向量 $u, v, c \in \mathbb{R}^8$，其定义如下： $u(k) = f(x_k)$、 $v(k) = g(x_k)$ 以及$c(k) = 1$，其中 $k = 1, \dots, 8$。

事实 2.2. 向量 $(x_k)_{k=1}^8$ 在 $k = 1, \dots, 8$ 中严格递增。此外，若$M > 16$ 并令 $\delta_M\colon = x_8^2 - x_1^2$，则 $\delta_M > x_8 - x_1 > 0$, $\delta_M \xrightarrow{M\to\infty} 0$ 且

$$\max_{k=1,\dots,8} u(k) = u(8) = 1 \quad , \quad \min_{k=1,\dots,8} u(k) = u(1) = 1 - (x_8 - x_1),$$
$$\max_{k=1,\dots,8} v(k) = v(1) = 1 \quad , \quad \min_{k=1,\dots,8} v(k) = v(8) = 1 - (x_8^2 - x_1^2).$$

证明。 $M > 16$ 意味着对每个 $1 \le k \le 8$ 都有 $x_k > \frac{1}{2}$。然后， $x_8 + x_1 > 1$ 并且他 nce

$$\delta_M = (x_8 + x_1)(x_8 - x_1) > x_8 - x_1.$$

证明的其余部分显而易见。 □

从现在起，我们将考虑一个序列 $(e_n) \subset S_{\ell_\infty(\mathbb{N})}$，它等价于 $\ell_1(\mathbb{N})$ 在 $\ell_\infty(\mathbb{N})$ 中的基。这是可能的，因为 $\ell_\infty(\mathbb{N})$ 是可分空间的等距泛函空间。此外，令 $\delta_i \in \mathbb{R}^8$ for $i = 1, \dots, 8$ 由 $\delta_i(k) = 0$ if $i \neq k$ and $\delta_i(i) = \Delta$ 给出。

我们终于可以介绍来自 $\ell_\infty(\mathbb{N}^2)$、将张成我们的空间的向量了。所有向量都将采用相同的方法定义，即对于每个 $m \in \mathbb{N}$，每个向量都将在 $\{m\} \times \mathbb{N}$ 中以特定方式定义。在 $m = 1$ 的情况下，定义将被拆分为每行包含 8 个元素的块，也就是说，第一个区块由 $(1, 1) \dots, (1, 8)$ 构成，第二个区块由 $(1, 8{+}1) \dots, (1, 2{\cdot}8)$ 构成，而第 n^{th} 个区块由 $(1, (n-1)8 + 1) \dots, (1, n8)$ 构成（见图 1）。我们将对于每个 $m \in \mathbb{N}_0$，把元素 $(1, m8 + 1) \dots, (1, (m + 1)8)$ 记为区块 m。

现在考虑由以下给出的元素 U_1， $U_2 \in \ell_\infty(\mathbb{N}^2)$

$$U_i(x) = \begin{cases} u(k) & \text{if } x = (1, 8(2m + j - 1) + k) \text{ for } m \in \mathbb{N}_0,\ k = 1, \dots, 8, \\ \delta_8(k) & \text{if } x = (1, 8(2m - j) + k) \text{ for } m \in \mathbb{N},\ k = 1, \dots, 8, \\ \frac{1}{10} e_1(k) & \text{if } x = (p, k) \text{ for } p, k \in \mathbb{N},\ p \ge 2. \end{cases}$$

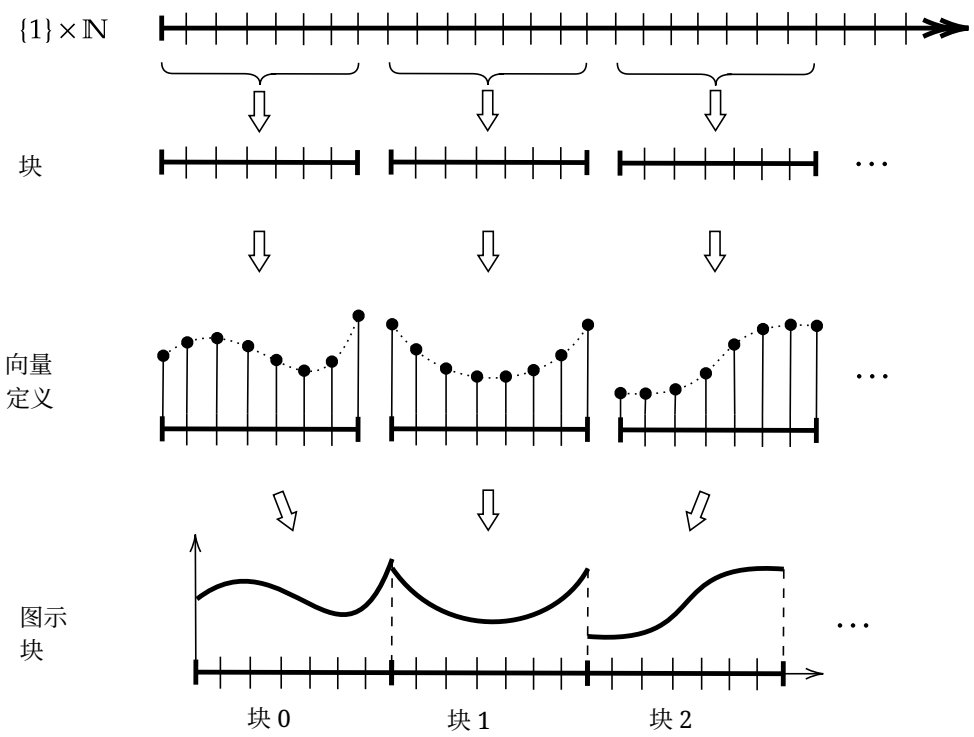

FIGURE 1

然后，我们对每个 $n \in \mathbb{N}$ 定义元素 $V_{1,\,n}$，$V_{2,\,n} \in \ell_\infty(\mathbb{N}^2)$ 如下

$$V_{i,n}(x) = \begin{cases} (-1)^{i-1}\left(\frac{1-\delta}{3} - \delta_{i+1}(k)\right) & \text{if } x = (1, n8+k),\ k = 1,\dots,8 \\ v(k) - \frac{2+2\delta}{3} + (-1)^i \delta_7(k) & \text{if } x = (1, (n+1)8+k),\ k = 1,\dots,8 \\ (-1)^{i-1}\left(\frac{1-2\delta}{3} - \delta_6(k)\right) & \text{if } x = (1, m8+k),\ k = 1,\dots,8,\ m \in 2\mathbb{N}_0 + \frac{1-(-1)^n}{2} \setminus \{n\}, \\ (-1)^{i-1}\frac{1-\delta}{3} e_1(k) & \text{if } x = (2n+i-1, k),\ k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{10} e_{2n+i-1}(k) & \text{if } x = (m,k),\ \left| \begin{array}{l} m,k \in \mathbb{N},\ m \geq 2, \\ m \neq 2n+i-1, 2(n+1), 2(n+1)+1, \end{array} \right. \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

我们所寻求的空间是

$$X = \overline{\operatorname{span}}\Big(\{V_{i,n}\}_{\substack{i=1,2 \\ n\in\mathbb{N}}} \cup \{U_1, U_2\}\Big).$$

参见图 2 和图 3，以便对向量 U_i、$V_{i,\,n}$ 限制在 $\{1\} \times \mathbb{N}$ 上时的形状有一个直观概念（我们通过给出按照图 1最后一步所示方式排列的区块图来展示该图像）。请注意，当限制在$\{m\} \times \mathbb{N}$ 上且 $m \neq 1$时，前述向量不过是来自 ℓ_1 基的某个向量e_j 的倍数。我们在图 3 中加入了对 $\left.\frac{V_{1,\,n}+V_{2,\,n}}{2}\right|_{\{1\}\times\mathbb{N}}$ 的描述，因为它在后续讨论中也将发挥核心作用。

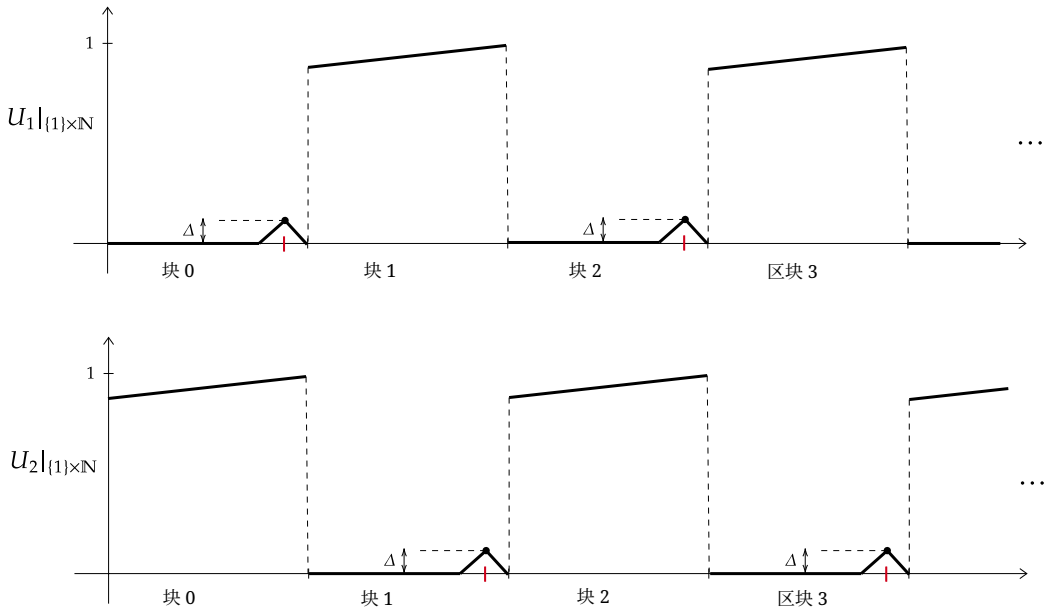

FIGURE 2

现在，我们转而关注定理 2.1的证明。为此，我们首先需要陈述并证明一些技术辅助结果。我们从下面这个简单而实用的引理开始。

引理 2.3. 设 $N, n \in \mathbb{N}$满足 $N > n$, $\{v_1, \dots, v_n\} \in \ell_\infty^N \setminus \{0\}$和 $c = (1, \dots, 1) \in \ell_\infty^N$。如果 $v_1, \dots, v_n, c$线性无关，那么存在 $K > 0$，使得对n任意 $a \in$张成空间 $\{v_1, \dots, v_n, c\}$满足 $a = \lambda c + \sum \lambda_i v_i$时，都有$_{i=1}$

$$|\lambda - 1|, |\lambda_i| \leq K\|a - c\|, \quad i = 1, \dots, n.$$

证明。 由序列 $\{v_1, \dots, v_n, c\}$是一个块基这一事实可立即得出结论；不过，为方便读者，我们在此给出完整证明。

由于 $v_1, \dots, v_n, c$线性无关，我们知道存在 $f_0, f_1, \dots, f_n \in_n (\ell_\infty^N)^* = \ell_1^N$，使得对每个 $z \in \ell_\infty^N$，都有 $z = f_0(z)c + \sum f_i(z)v_i$。此外，我们$_{i=1}$知道 $f_0(c) = 1$，且 $f_i(c) = 0$，其中 $i = 1, \dots, n$。考虑 $K =$max$\{\|f_0\|, \|f_1\|, \dots, \|f_n\|\} < \infty$。显然，对每个 $1 \leq i \leq n$,

$$|\lambda_i| = |f_i(a)| = |f_i(a - c)| \leq \|f_i\| \cdot \|a - c\| \leq K\|a - c\|.$$

最后，显然有

$$|\lambda - 1| = \|f_0(a - c)\| \leq \|f_0\|\|a - c\| \leq K\|a - c\|.$$

□

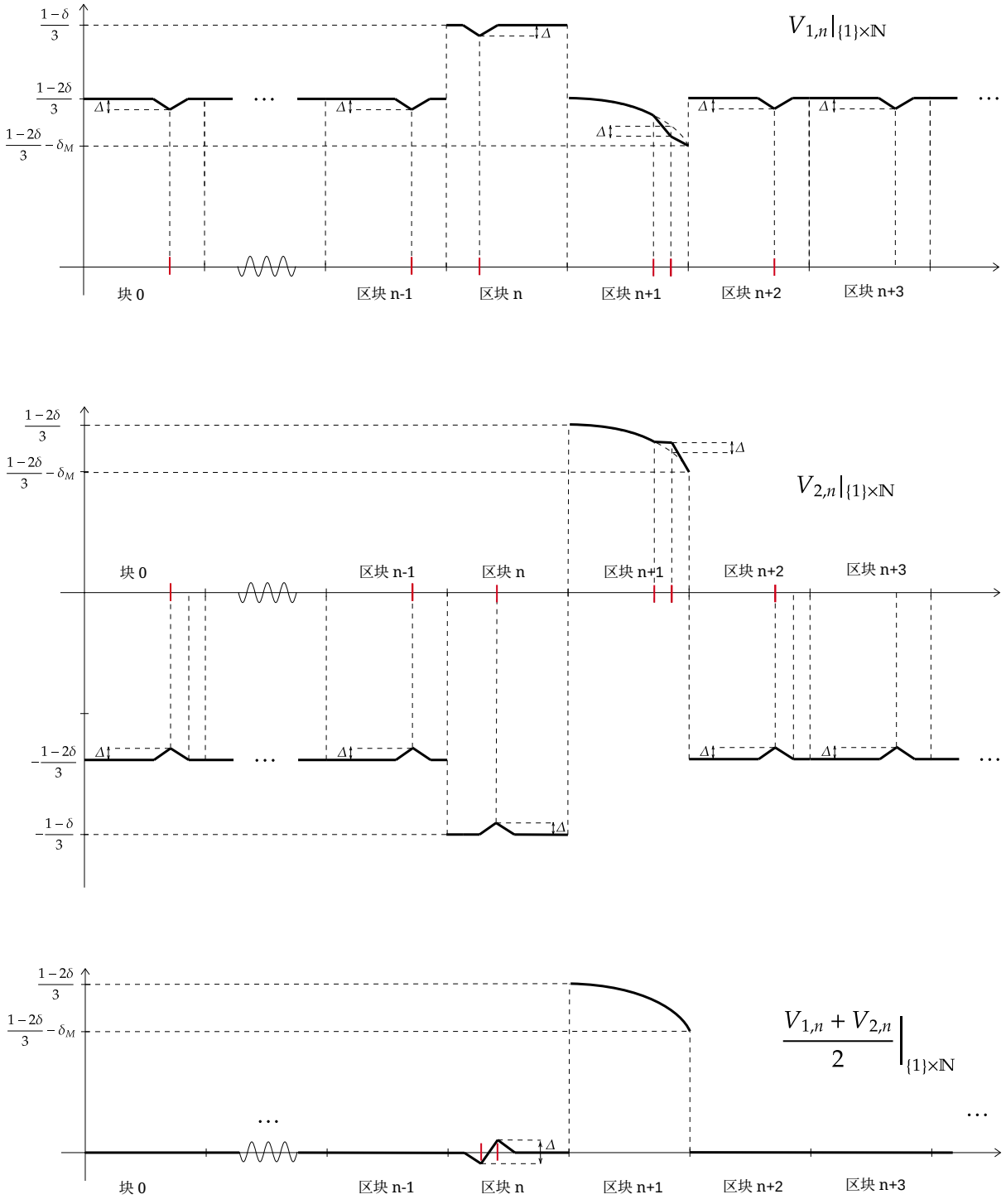
$\frac{1-\delta}{3}$
$\frac{1-2\delta}{3}$
$\frac{1-2\delta}{3}-\delta_M$
Δ
$V_{1,n}|_{\{1\}\times\mathbb{N}}$
块 0
区块 n-1
区块 n
区块 n+1
区块 n+2
区块 n+3
$V_{2,n}|_{\{1\}\times\mathbb{N}}$
$\frac{V_{1,n}+V_{2,n}}{2}\Big|_{\{1\}\times\mathbb{N}}$

FIGURE 3

我们将使用以下完全取决于 $M > 0$ 的量,

$$\mu_M = \min_{\substack{j,k=1,\dots,8 \\ j\neq k}} \{(1-t(k))(u(k)-u(j)) + t(k)(v(k)-v(j))\}. \tag{2.1}$$

事实 2.4。 对于每个 $M > 16$, 都有 $\mu_M > 0$ 和 $\mu_M \xrightarrow{M\to\infty} 0$。

证明。 令我们考虑对于 $1 \le k \le 8$ 的函数 h_k : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 其定义为

$$h_k(x) = (1-t(k))f(x) + t(k)g(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

显然,

$$\mu_M = \min_{\substack{j,k=1,\dots,8 \\ j\neq k}} \{h_k(x_k) - h_k(x_j)\}.$$

对于 $M > 16$ 的每一种选择, 函数 h_k 是一个二次多项式, 并在 x_k 处取得唯一最大值。因此, 如果 $j \neq k$, 则 $h_k(x_k) > h_k(x_j)$, 从而 $\mu_M > 0$。现在, 由于 h_k 是连续的且 x_k, $x_j \xrightarrow{M\to\infty} 1/2$, 显然有

$$h_k(x_k) - h_k(x_j) \xrightarrow{M\to\infty} h_k\Big(\frac{1}{2}\Big) - h_k\Big(\frac{1}{2}\Big) = 0$$

至此, 证明完成。 □

最后, 我们选取合适的 δ, M, $\Delta > 0$ 使得 X 满足定理 2.1 的结论, 其中 $\lambda > 1$。

δ、 M **和** Δ的选取:
我们取满足以下条件的某个 $\delta > 0$

$$\delta < \frac{1}{10}, \tag{2.2}$$

并取足够大的 M , 使得以下不等式成立,

$$\frac{8}{M} + \delta_M + \mu_M < \frac{1-8\delta}{6}, \tag{2.3}$$

$$\delta_M < \frac{\delta}{3}. \tag{2.4}$$

最后, 我们选取 $\Delta > 0$, 使得

$$\Delta < \frac{\mu_M}{2},\ \frac{\delta}{6},\ \frac{1-2\delta}{3} - \delta_M, \delta_M,\ \frac{1-\delta_M}{2}. \tag{2.5}$$

现在, 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le k \le 8$, 我们将由下式给出的元素记为 $S_{k,\,n} \in X$

$$S_{k,n} = (1-t(k))U_{\frac{3+(-1)^n}{2}} + t(k)\frac{V_{1,n}+V_{2,n}}{2}.$$

元素$S_{k,\,n} \in X$ 对于定理 2.1的证明将非常重要。请参见图 4 , 以大致了解将其限制在 $\{1\}\times\mathbb{N}$时的形态。

对于 δ, M 和 Δ的后一种选取, 我们有以下命题。

命题 2.5。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 以下性质均成立,

(1) $\|V_{i,n}\| = \frac{1-\delta}{3}$ and $\|U_i\| = 1$ for $i = 1, 2$.
(2) $|(V_{1,n}+V_{2,n})(1,m)| \le \Delta$ for every $m \in \mathbb{N} \setminus \{(n+1)8+1, \dots, (n+1)8+8\}$.

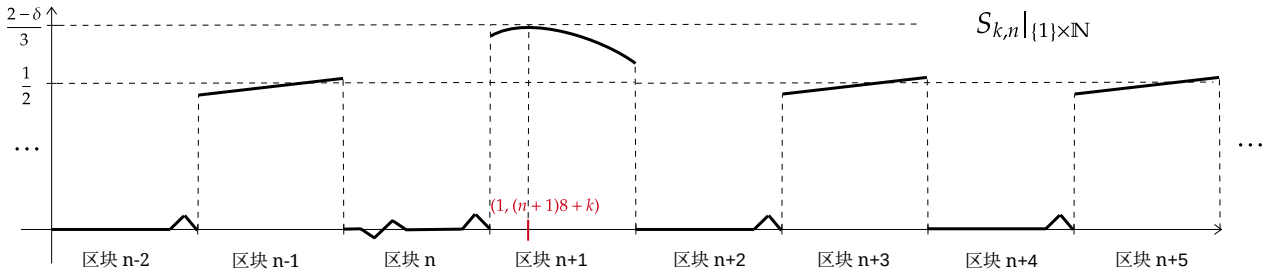

FIGURE 4

(3) 对于每个 $k = 1, \ldots\ldots, 8$,

$$S_{k,n}(1,(n+1)8+k) > \frac{2-\delta}{3} - \delta_M + \frac{\Delta}{2}.$$

(4) 对于每个 $x \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(1,(n+1)8+k)\}$,

$$|S_{k,n}(x)| \le S_{k,n}(1,(n+1)8+k) - \mu_M.$$

证明。

(1): 显然, $\|U_i\| = u(8) = 1$。现在, 考虑到δ、M 和 Δ的约束, 经过逐情况检查可得 $\|V_{i,\ n}\| = \frac{1-\delta}{3}$。

(2): 证明直接由定义得出。

(3): 根据事实2.2,

$$u(1) + v(1) = 2 - (x_8 - x_1) > 2 - \delta_M. \tag{2.6}$$

我们还可推 deduce 得出

$$u(1) = 1 - (x_8 - x_1) \overset{\text{Fact 2.2}}{>} 1 - \delta_M \overset{(2.4)}{>} \frac{1-2\delta}{3} = v(1) - \frac{2+2\delta}{3}. \tag{2.7}$$

此外, 鉴于 $1 - t(k) > t(k)$, 可得

$$(1-t(k))u(1) + t(k)\Big(v(1) - \frac{2+2\delta}{3}\Big) \overset{(2.7)}{>} \frac{u(1) + v(1) - \frac{2+2\delta}{3}}{2}. \tag{2.8}$$

最后，由于 $\mu_M > 0$ 我们知道 $(1-t(k))u(k)+t(k)(v(k)) \geq (1-t(k))u(1)+t(k)v(1)$，因此

$$\begin{aligned}
S_{k,n}(1,(n+1)8+k) &= (1-t(k))u(k)+t(k)\Big(v(k)-\frac{2+2\delta}{3}\Big)\\
&\geq (1-t(k))u(1)+t(k)\Big(v(1)-\frac{2+2\delta}{3}\Big)\\
&\overset{(2.8)}{>} \frac{u(1)+v(1)-\frac{2+2\delta}{3}}{2}\\
&\overset{(2.6)}{>} \frac{2-\delta_M-\frac{2+2\delta}{3}}{2}\\
&= \frac{2-\delta}{3}-\frac{\delta_M}{2} \overset{\delta_M>\Delta}{>} \frac{2-\delta}{3}-\delta_M+\frac{\Delta}{2}.
\end{aligned}$$

(4)：我们根据元素 $x \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(1,(n+1)8+k)\}$： 的不同情况进行区分：

情况1， $x=(1,(n+1)8+j)$ 对于 $j=1,\ldots\ldots,8$ 以及 $j \neq k$。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}
|S_{k,n}(x)| =&(1-t(k))u(j)+t(k)\Big(v(j)-\frac{2+2\delta}{3}\Big)\\
=&(1-t(k))u(k)+t(k)\Big(v(k)-\frac{2+2\delta}{3}\Big)\\
&-\big((1-t(k))(u(k)-u(j))+t(k)(v(k)-v(j))\big)\\
\overset{(2.1)}{\leq}& S_{k,n}(1,(n+1)8+k)-\mu_M.
\end{aligned}$$

情况2， $x=(1,q)$，其中 $q \neq (n+1)8+j$ 对于 $j=1,\ldots\ldots,8$。由性质（2）可知 $\Big|V_{1,n}+V_{2,n}\over 2(x)\Big| \leq \Delta/2$，因此

$$\begin{aligned}
|S_{k,n}(x)| \leq&(1-t(k))\big|U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(x)\big|+\Delta/2\\
\overset{(1)}{\leq}&1-t(k)+\Delta/2 \overset{(2.3)}{\leq} \frac{2-\delta}{3}-\delta_M-\mu_M+\Delta/2\\
\overset{(3)}{<}&S_{k,n}(1,(n+1)8+k)-\mu_M.
\end{aligned}$$

情况3， $x=(p,q)$ 对于某个 $p,\ q \in \mathbb{N}$，其中 $p \geq 2$。在这种情况下

$$|U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(x)| \leq \frac{1}{10} \quad \text{and} \quad \frac{1}{3} \overset{(2.3)}{\leq} \frac{2-\delta}{3}-\delta_M-\mu_M \overset{(3)}{<} S_{k,n}(1,(n+1)8+k)-\mu_M,$$

因此

$$\begin{aligned}
|S_{k,n}(x)| \leq&(1-t(k))\big|U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(x)\big|+t(k)\frac{|V_{1,n}(x)|+|V_{2,n}(x)|}{2}\\
\overset{(1)}{\leq}&(1-t(k))\frac{1}{10}+t(k)\frac{1-\delta}{3}<\frac{1}{3}<S_{k,n}(1,(n+1)8+k)-\mu_M.
\end{aligned}$$

□

下面的引理对我们后续的工作至关重要。尽管它篇幅较长，看起来也颇为复杂，但其证明是初等的，所需的计算也并不困难。然而，由于向量 U_i、$V_{i,\,n} \in X$ 的定义性质，我们不得不分情况进行讨论。

引理 2.6。 存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得如果 E_1，E_2，W_1，$W_2 \in X$ 满足 $\|W_i - V_{i,\,n}\|$，$\|E_i - U_i\| \leq \varepsilon_0$ 对于 $i = 1$、2 以及某个 $n \in \mathbb{N}$，则对于 $k = 1$、……、8，我们有 $\|Z_{k,\,n}\| \geq \frac{2-2\delta}{3}$ 并且

$$\|V_{i,n+1}\|, \left\|(-1)^{i+1}V_{i,n+1} - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right\| = \frac{1-\delta}{3} \quad \forall k \neq i+1, \tag{2.9}$$

其中 $Z_{k,\,n} = (1 - t(k))E_{3+\frac{(-1)^n}{2}} + t)\,(k)\frac{W_1+W_2}{2}$.

证明。 我们首先选取 ε_0，使其满足一些将在整个证明过程中使用的不等式。取 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$\varepsilon_0 < \frac{\mu_M - 2\Delta}{2},\ \frac{1}{40},\ \frac{\delta}{3} - \delta_M,\ \frac{\delta}{3} - 2\Delta,\ \frac{1-8\delta}{6} - \frac{8}{M},\ \frac{1-10\delta}{60}. \tag{2.10}$$

注意，由于适当地选取了 δ、M 和 Δ，右端的量均严格为正，因此这样的 ε_0 存在。下面证明该ε_0 满足引理 2.6的陈述。由命题2.5的性质（3）和（4）可得，对于 $k = 1$、……、8，

$$\|S_{k,n}\| = S_{k,n}(1, (n+1)8 + k) > \frac{2-\delta}{3} - \delta_M. \tag{2.11}$$

因此，对于每个 $k = 1$，……，8，我们有

$$\begin{aligned} \|Z_{k,n}\| \geq & \|S_{k,n}\| - \varepsilon_0 \overset{(2.11)}{>} \frac{2-\delta}{3} - \delta_M - \varepsilon_0 \\ = & \frac{2-2\delta}{3} + (\delta/3 - \delta_M - \varepsilon_0) \overset{(2.10)}{>} \frac{2-2\delta}{3}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

我们转而证明（2.9）。根据命题 2.5，我们已经知道 $\|V_{i,\,n+1}\| = \frac{1-\delta}{3}$ 因此只需证明（2.9）中的第二个等式。显然，

$$\left\|(-1)^{i+1}V_{i,n+1} - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right\| \geq \left\|\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right\| - \|V_{i,n+1}\| \overset{(1)}{=} \frac{1-\delta}{3}.$$

因此，只需证明对于每个 $x \in \mathbb{N}^2$ 和 $k \neq i+1$，

$$\left|\left((-1)^{i+1}V_{i,n+1} - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right)(x)\right| \leq \frac{1-\delta}{3}. \tag{2.13}$$

我们将不等式（2.13）的证明分成不同情形。

情况1， $x = (1,\ (n+1)8 + k)$。在这种情况下

$$V_{i,n+1}(x) = (-1)^{i-1}\left(\frac{1-\delta}{3} - \delta_{i+1}(k)\right) \overset{k\neq i+1}{=} (-1)^{i-1}\frac{1-\delta}{3},$$

并且由于根据（2.10）我们知道 $2\varepsilon_0 < \mu_M$ 那么对于每个 $z \in \mathbb{N}^2 \setminus \{x\}$,

$$\begin{aligned} |Z_{k,n}(z)| \le |S_{k,n}(z)| + \varepsilon_0 &\overset{(4)}{\le} S_{k,n}(x) - \mu_M + \varepsilon_0 \\ &\le Z_{k,n}(x) - \mu_M + 2\varepsilon_0 \\ &< Z_{k,n}(x). \end{aligned}$$

这表明

$$\|Z_{k,n}\| = Z_{k,n}(1, (n+1)8 + k). \tag{2.14}$$

因此,

$$\left|\left((-1)^{i+1}V_{i,n+1} - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right)(x)\right| \overset{(2.14)}{=} \left|\frac{1-\delta}{3} - \frac{2-2\delta}{3}\right| = \frac{1-\delta}{3}.$$

情况2, $x = (1, (n+1)8 + j)$ 对于 $j \in \{1, \dots, 8\} \setminus \{k\}$。在这种情况下,

$$V_{i,n+1}(x) = (-1)^{i-1}\Big(\frac{1-\delta}{3} - \delta_{i+1}(j)\Big), \tag{2.15}$$

$$S_{k,n}(x) = (1 - t(k))u(j) + t(k)\Big(v(j) - \frac{2+2\delta}{3}\Big). \tag{2.16}$$

现在，由于 $\delta_M \overset{(2.4)}{<} \frac{\delta}{3} \overset{(2.2)}{<} \frac{1}{30}$，可得

$$v(j) - \frac{2+2\delta}{3} \overset{\text{Fact 2.2}}{\ge} 1 - \delta_M - \frac{2+2\delta}{3} > 0. \tag{2.17}$$

因此，考虑到 $1 - t(k) \ge 1/2$，我们得到

$$\begin{aligned} Z_{k,n}(x) \ge S_{k,n}(x) - \varepsilon_0 &\overset{(2.16)}{=} (1 - t(k))u(j) + t(k)\Big(v(j) - \frac{2+2\delta}{3}\Big) - \varepsilon_0 \\ &\overset{(2.17)}{\ge} \frac{u(j)}{2} - \varepsilon_0 \overset{\text{Fact 2.2}}{\ge} \frac{1-\delta_M}{2} - \varepsilon_0 > 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

最后一个不等式成立，因为 $\delta_M < \frac{1}{30}$ 和 $\varepsilon_0 \overset{(2.10)}{<} \frac{1}{40}$。结合前面的不等式可得

$$\left((-1)^{i+1}V_{i,n+1} - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right)(x) \overset{(2.15)(2.18)}{<} \frac{1-\delta}{3}. \tag{2.19}$$

由于

$$\|S_{k,n}\| \le (1 - t(k))\|U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}\| + t(k)\frac{\|V_{1,n}\| + \|V_{2,n}\|}{2} \overset{(1)}{<} 1, \tag{2.20}$$

并且 $\varepsilon_0 \overset{(2.10)}{<} \frac{1-4\delta}{3}$，我们有

$$\|Z_{k,n}\| \le \|S_{k,n}\| + \varepsilon_0 \overset{(2.20)}{<} 1 + \frac{1-4\delta}{3} = \frac{4-4\delta}{3}. \tag{2.21}$$

此外,

$$|Z_{k,n}(x)| \le |S_{k,n}(x)| + \varepsilon_0 \overset{(4)}{\le} \|S_{k,n}\| - \mu_M + \varepsilon_0 \le \|Z_{k,n}\| - \mu_M + 2\varepsilon_0. \tag{2.22}$$

利用上述不等式，我们推得

$$\begin{aligned}\Big(\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}-(-1)^{i+1}V_{i,n+1}\Big)(x) &\overset{(2.15)}{\leq} \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}|Z_{k,n}(x)|-|V_{i,n+1}(x)| \\ &\overset{(2.22)}{\leq} \Big(\frac{2-2\delta}{3}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}(\mu_M-2\varepsilon_0)\Big)-\Big(\frac{1-\delta}{3}-\Delta\Big) \\ &\overset{(2.21)}{<} \frac{1-\delta}{3}-\frac{1}{2}(\mu_M-2\varepsilon_0-2\Delta) \overset{(2.10)}{<} \frac{1-\delta}{3}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

因此，结合（2.19）和（2.23）即可证明此情况。

情况3, $x=(1,(n+2)8+j)$，其中 $1\leq j\leq 8$。在这种情况下，我们有

$$V_{i,n+1}(x)=v(j)-\frac{2+2\delta}{3}+(-1)^i\delta_7(j),$$

注意到 $v(j)$，可得 $\overset{\text{事实 2.2}}{\leq}$ 1意味着

$$|V_{i,n+1}(x)|\leq\frac{1-2\delta}{3}+\Delta. \tag{2.24}$$

现在我们计算 $|S_{k,n}(x)|$。由于我们有 $|(V_{1,n}+V_{2,n})(x)| \overset{(2)}{\leq} \Delta$ 以及 $U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(x)=\delta_8(j)$，显然可得

$$|S_{k,n}(x)|\leq(1-t(k))|\delta_8(j)|+t(k)\Delta\leq\Delta. \tag{2.25}$$

因此，

$$\begin{aligned}\Big|\Big((-1)^{i+1}V_{i,n+1}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\Big)(x)\Big| &\overset{(2.12)}{\leq} |V_{i,n+1}(x)|+|Z_{k,n}(x)| \\ &\leq |V_{i,n+1}(x)|+|S_{k,n}(x)|+\varepsilon_0 \\ &\overset{(2.24)(2.25)}{\leq} \frac{1-2\delta}{3}+2\Delta+\varepsilon_0 \\ &= \frac{1-\delta}{3}-\Big(\frac{\delta}{3}-2\Delta-\varepsilon_0\Big) \overset{(2.10)}{<} \frac{1-\delta}{3}.\end{aligned}$$

情形 4, $x=(1,m8+j)$，其中 $m\in 2\mathbb{N}_0+\frac{1-(-1)^n}{2}\setminus\{n+2\}$ 以及 $1\leq j\leq 8$。在此情形下，根据定义可得

$$V_{i,n+1}(x)=0\ ,\ |(V_{1,n}+V_{2,n})(x)|\overset{(2)}{\leq}\Delta\ ,\ U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(x)=\delta_8(j).$$

因此，$|S_{k,n}(x)|\leq(1-t(k))\Delta+t(k)\Delta=\Delta$，我们得出结论

$$\Big|\Big((-1)^{i+1}V_{i,n+1}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\Big)(x)\Big| \overset{(2.12)}{\leq} |Z_{k,n}(x)|\leq|S_{k,n}(x)|+\varepsilon_0\leq\Delta+\varepsilon_0\leq\frac{1-\delta}{3}.$$

最后一个不等式由对 Δ 和 ε_0 在（2.5）和（2.10）中所确立的约束得出。

情形5， $x=(1,\ m8+j)$，其中 m 与前述情形不同，且 $1\le j\le 8$，也就是说，除 $n+1$外，m 是一个与 n 具有相反奇偶性的任意数：

$$m\in 2\mathbb{N}_0+\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}\setminus\{n+1\}.$$

在这种情况下，

$$V_{i,n+1}(x)=(-1)^{i-1}\Big(\frac{1-2\delta}{3}-\delta_6(j)\Big)\quad,\quad U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(x)=u(j). \tag{2.26}$$

于是，由于 $\delta_M \overset{(2.4)}{<} \delta/3<1/30$ 以及 $\Delta \overset{(2.5)}{<} \delta/6 \overset{(2.2)}{<} 1/60$ 可得

$$\begin{aligned} S_{k,n}(x) &\overset{(2.26)}{=} (1-t(k))u(j)+t(k)\frac{(V_{1,n}+V_{2,n})(x)}{2}\\ &\overset{(2)}{\ge} (1-t(k))u(j)-\Delta\\ &\overset{\text{Fact 2.2}}{\ge} (1-t(k))(1-\delta_M)-\Delta\\ &\ge \frac{1-\delta_M}{2}-\Delta>0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

于是，

$$\begin{aligned} \Big((-1)^{i+1}V_{i,n+1}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}S_{k,n}\Big)(x) &\overset{(2.27)}{\le} (-1)^{i+1}V_{i,n+1}(x)\\ &\overset{(2.26)}{=} \frac{1-2\delta}{3}-\delta_6(j)\\ &\overset{\varepsilon_0<\delta/3}{<} \frac{1-\delta}{3}-\varepsilon_0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

此外，我们有

$$S_{k,n}(x)\overset{(2.26)}{=}(1-t(k))u(j)+t(k)\frac{(V_{1,n}+V_{2,n})(x)}{2}\overset{(2)}{\le}(1-t(k))u(j)+\Delta, \tag{2.29}$$

因此，

$$\begin{aligned} \Big(\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}S_{k,n}-(-1)^{i+1}V_{i,n+1}\Big)(x) &\overset{(2.12)}{\le} S_{k,n}(x)-(-1)^{i+1}V_{i,n+1}(x)\\ &\overset{(2.26)(2.29)}{\le} (1-t(k))u(j)+\Delta-\frac{1-2\delta}{3}+\delta_6(j)\\ &\overset{u(j)\le 1}{\le} \frac{1}{2}+\frac{k}{M}-\frac{1-2\delta}{3}+2\Delta\\ &\overset{\Delta<\delta/6}{<} \frac{1}{6}+\frac{8}{M}+\delta\le\frac{1-\delta}{3}-\varepsilon_0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

注意到 $u(j)\le 1$ 可由事实 2.2 推出，而 $\Delta<\delta/6$ 是（2.5）中的一个不等式。

不等式（2.28）和（2.30）得出

$$\Big|\Big((-1)^{i+1}V_{i,n+1}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}S_{k,n}\Big)(x)\Big|<\frac{1-\delta}{3}-\varepsilon_0, \tag{2.31}$$

因此，我们使用三角不等式完成这种情况

$$\begin{aligned}\left|\left((-1)^{i+1}V_{i,n+1}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right)(x)\right| &\leq \left|\left((-1)^{i+1}V_{i,n+1}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}S_{k,n}\right)(x)\right| \\ &\quad+\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}\|S_{k,n}(x)-Z_{k,n}(x)\| \\ &\overset{(2.12)(2.31)}{<} \frac{1-\delta}{3}.\end{aligned}$$

情况 6, $x=(2(n+1)+i-1,\ j)$ 其中 $j\in\mathbb{N}$。在这种情况下，

$$\begin{aligned}V_{i,n+1}(x)=(-1)^{i-1}\frac{1-\delta}{3}e_1(j) \quad &, \quad V_{1,n}(x)=V_{2,n}(x)=0,\\ U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(x)=\frac{1}{10}e_1(j) \quad &, \quad S_{k,n}(x)=(1-t(k))\frac{1}{10}e_1(j).\end{aligned} \tag{2.32}$$

首先，我们计算

$$\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}\cdot\frac{1}{10}(1-t(k)) \overset{(2.12)}{<} \frac{1}{10} \overset{(2.2)}{<} \frac{1-\delta}{3}. \tag{2.33}$$

现在，考虑到 $1-t(k)\geq\frac{1}{2}$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left((-1)^{i+1}V_{i,n+1}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}S_{k,n}\right)(x)\right| &\overset{(2.32)}{=} \left|\left(\frac{1-\delta}{3}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}\cdot\frac{1}{10}(1-t(k))\right)e_1(j)\right| \\ &\overset{(2.33)}{=} \left(\frac{1-\delta}{3}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}\cdot\frac{1}{10}(1-t(k))\right)|e_1(j)| \\ &\overset{(2.21)}{\leq} \frac{1-\delta}{3}-\frac{1}{40} \overset{(2.10)}{<} \frac{1-\delta}{3}-\varepsilon_0.\end{aligned}$$

因此，根据三角不等式和上面最后一个等式，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\left((-1)^{i+1}V_{i,n+1}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right)(x)\right| &\leq \left|\left((-1)^{i+1}V_{i,n+1}-\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}S_{k,n}\right)(x)\right|+\varepsilon_0 \\ &< \frac{1-\delta}{3}.\end{aligned}$$

情况 7, $x=(p,\ j)\in\mathbb{N}^2$ 与前几种情况不同。在这种情况下，$p\geq 2$因此我们知道 $V_{i,\ n}(x)\in\{(-1)^{i-1}\frac{1-\delta}{3}e_1(j),\ \frac{1}{10}e_{2n+i-1}(j),\ 0\}$其中不可能出现 $V_{1,\ n}(x)=V_{2,\ n}(x)=(-1)^{i-1}\frac{1-\delta}{3}e_1(j)$。然后，

$$\left|\frac{V_{1,n}(x)+V_{2,n}(x)}{2}\right|\leq\frac{\frac{1-\delta}{3}+\frac{1}{10}}{2}=\frac{13-10\delta}{60}. \tag{2.34}$$

此外，由于 x 与情形 6 中的不同，必然有 $p\neq 2(n+1)+i-1$，从而$V_{i,\ n+1}(x)\in\{0,\ \frac{1}{10}e_{2(n+1)+i-1}(j)\}$。因此，

$$|V_{i,n+1}|\leq\frac{1}{10} \quad\text{and}\quad U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(x)=\frac{1}{10}e_1(j). \tag{2.35}$$

这与 $1\ 10\ (2.2)< \ ^{13-10\delta}_{60}$ 这一事实结合起来可得

$$
\begin{aligned}
|S_{k,n}(x)| &\le (1-t(k))\left|U_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(x)\right| + t(k)\left|\frac{V_{1,n}(x)+V_{2,n}(x)}{2}\right| \\
&\overset{(2.34)(2.35)}{\le} (1-t(k))\frac{1}{10} + t(k)\frac{13-10\delta}{60} < \frac{13-10\delta}{60}.
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

因此，考虑到由（2.10），$\varepsilon_0 \le \ ^{1-10\delta}_{60}$ 我们最终得出结论

$$
\begin{aligned}
\left|\left((-1)^{i+1}V_{i,n+1} - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right)(x)\right| &\overset{(2.12)}{\le} |V_{i,n+1}(x)| + |S_{k,n}(x)| + \varepsilon_0 \\
&\overset{(2.35)(2.36)}{<} \frac{1}{10} + \frac{13-10\delta}{60} + \varepsilon_0 \le \frac{1-\delta}{3}.
\end{aligned}
$$

□

我们的下一个目标是证明，$(-1)^{i+1}V^i_{n+1}$ 是满足引理 ε的结论的唯一向量（在2.6 的意义下）（在 ε的意义下）。证明依赖于我们先前定义的向量所表现出的 ℓ_1类似行为。

引理 2.7。存在 $C>0$ 使得，若 $Z_{1,\ n}, \ldots, Z_{8,\ n}$ 如引理 2.6中所述，对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 那么，只要存在满足 $B \in X$ 的

$$
\|B\|, \left\|B - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|}Z_{k,n}\right\| \le \frac{1-\delta}{3} + \varepsilon, \quad \forall k \ne i_0+1,
$$

对于某个 $i_0 \in \{1,2\}$ 和 $\varepsilon>0$，可得

$$
\|B - (-1)^{i_0+1}V_{i_0,n+1}\| \le C\varepsilon.
$$

证明。不失一般性，我们可以假设

$$
B \in \operatorname{span}\Big(\{V_{i,n}\}_{\substack{i=1,2\\ n\in\mathbb{N}}} \cup \{U_1, U_2\}\Big).
$$

我们考虑 $y_k = (1,\ (n+1)8+k)$，其中 $k \in \{1,\ldots,8\}$ 且 $\Gamma = \{y_k\}_{k=1,\ \ldots,\ 8}$。现在，$_{k\ne i_0+1}$我们考虑向量 $w,\ c,\ b,\ u_1,\ u_2,\ v_{i,\ m} \in \ell_\infty(\Gamma) \equiv \ell^7_\infty$，其中 $i=1,\ 2$，并由下式给出

$$
\begin{aligned}
w(y_k) &= \frac{1-2\delta}{3} - \delta_6(k) \ , \ c(y_k) = 1 \ , \ b(y_k) = B(y_k), \\
u_1(y_k) &= U_1(y_k) \ , \ u_2(y_k) = U_2(y_k) \ , \ v_{i,m}(y_k) = V_{i,m}(y_k).
\end{aligned}
$$

断言。如果 $i_1 \in \{1,2\}\setminus\{i_0 g\}$，那么向量 $c,\ v_{i_1,\ n+1},\ v_{1,\ n},\ v_{2,\ n},\ u_1,\ u_2,\ w$是来自 $\ell_\infty(\Gamma)$ 的线性无关向量。

断言的证明。我们首先将向量 $p,\ q \in \ell_\infty(\Gamma)$ 定义为

$$
p(y_k) = g(x_k) \ , \ q(y_k) = f(x_k) \quad \forall k \in \{1,\ldots,8\} \setminus \{i_0+1\}.
$$

还要考虑 $e_s \in \ell_\infty(\Gamma)$，其中 $s \in \mathbb{N}$ 为

$$
e_s(y_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = s \\ 0 & \text{if } K \ne s. \end{cases}
$$

若考虑到一个显而易见的事实： p、 q 和 c 分别是在 $\{x_k\}_{k=1,\dots,8}$ 处对一个次数恰为 2 的多项式、一个次数为 $k\neq i_0+1$ 的多项式求值所得
恰好为 1 且为一个非零常数多项式，因此可知，来自 $\beta=\{p,q,c,e_{i_1+1},e_6,e_7,e_8\}$ 的向量是线性无关的。因此， β 是 $\ell_\infty(\Gamma)$ 的一个基，我们只需计算矩阵 M 的行列式即可，该矩阵的各行是向量 c， $v_{i_1,\ n+1}$， $v_{1,\ n}$， $v_{2,\ n}$， u_1， u_2， w 相对于基 β的坐标。容易验证

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (-1)^{i_1-1}\frac{1-\delta}{3} & (-1)^{i_1}\Delta & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -\frac{2+2\delta}{3} & 0 & 0 & -\Delta & 0\\ 1 & 0 & -\frac{2+2\delta}{3} & 0 & 0 & \Delta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta\\ 0 & 0 & \frac{1-2\delta}{3} & 0 & -\Delta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

为了证明 $det(M)\neq 0$，只需反复使用行列式的拉普拉斯展开。□

现在继续证明引理 2.7。考虑与 i_0不同的 $i_1\in\{1,2\}$。必定存在唯一的 λ, λ_1，……， λ_5， $\rho_{i,\ m}\in\mathbb{R}$，对于 $i=1$，2 和 $m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}$，其中只有有限多个不为零，并满足 2.37

$$B=\lambda(-1)^{i_0+1}V_{i_0,n+1}+\lambda_1V_{i_1,n+1}+\lambda_2V_{1,n}+\lambda_3V_{2,n}+\lambda_4U_1+\lambda_5U_2+\sum_{\substack{i=1,2\\ m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}}}\rho_{i,m}V_{i,m}.$$

如果 $m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}$ 和 $i=1$，2，那么

$$v_{i,m}(y_k)=\begin{cases}(-1)^{i-1}\big(\frac{1-2\delta}{3}-\delta_6(k)\big)=(-1)^{i-1}w(y_k) & \text{if } m\neq n \bmod 2,\\ 0 & \text{if } m=n \bmod 2.\end{cases}$$

因此，由于 $\frac{1-\delta}{3}c=(-1)^{i_0-1}v_{i_0,\ n+1}$ 我们有

$$b=\lambda\frac{1-\delta}{3}c+\lambda_1v_{i_1,n+1}+\lambda_2v_{1,n}+\lambda_3v_{2,n}+\lambda_4u_1+\lambda_5u_2+\lambda_6w, \tag{2.38}$$

其中 $\lambda_6=\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}\\ m\neq n\text{模 }2}}\rho_{1,\ m}-\rho_{2,\ m_\circ}$ 此外，对于 $i=1$，2，

$$v_{i,n}(y_k)=v(k)-\frac{2+2\delta}{3}+(-1)^i\delta_7(k)\ ,\ v_{i,n+1}(y_k)=(-1)^{i-1}\Big(\frac{1-\delta}{3}-\delta_{i+1}(k)\Big),$$

$$u_{\frac{3+(-1)^n}{2}}(y_k)=u(k)\quad,\quad u_{\frac{3-(-1)^n}{2}}(y_k)=\delta_8(k).$$

根据前面的断言，我们知道向量 c、$v_{i_1,\ n+1}$、$v_{1,\ n}$、$v_{2,\ n}$、 u_1、 u_2、 w 是来自 ℓ_∞^7的线性无关向量。因此，我们可以使用引理 2.3 ，取 $a=\frac{3}{1-\delta}b$，该引理为我们提供了某个 $K>0$，其与 ε 和 n 无关，使得 $|\lambda-$

1|, $|\lambda_s - \frac{3}{1-\delta}| \le K\|a-c\|$ 对于 $s=1$, ..., 6。因此,

$$|\lambda-1|, |\lambda_s| \le 4K\left\|b - \frac{1-\delta}{3}c\right\| \quad \text{for} \quad s=1,\dots,5. \tag{2.39}$$

由假设可推得，对于 $k \neq i_0+1$, $B(y_k) \le \frac{1-\delta}{3} + \varepsilon$ 以及

$$\frac{2-2\delta}{3} - B(y_k) \overset{(2.14)}{=} \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}\|} Z_{k,n}(y_k) - B(y_k) \le \frac{1-\delta}{3} + \varepsilon.$$

这意味着 $|B(y_k) - \frac{1-\delta}{3}| \le \varepsilon$对于 $k \in \{1,\dots,8\} \setminus \{i_0+1\}$，从而

$$\left\|b - \frac{1-\delta}{3}c\right\| \le \varepsilon. \tag{2.40}$$

考虑不等式（2.39）和（2.40），我们得到

$$|\lambda-1|, |\lambda_s| \le 4K\varepsilon \quad \text{for} \quad s=1,\dots,5. \tag{2.41}$$

最后，我们考虑

$$\widetilde{b} = B|_{\{2(n+1)+i_0-1\}\times\mathbb{N}} \quad \text{and} \quad \widetilde{d} = \widetilde{b} - \sum_{\substack{i=1,2 \\ m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}}} \rho_{i,m}\, V_{i,m}|_{\{2(n+1)+i_0-1\}\times\mathbb{N}}.$$

注意，对于每个 $1 \le i \le 2$ 和 $m \in \mathbb{N}\setminus\{n, n+1\}$ 都有 $V_{i,\ m}|_{\{2(n+1)+i_0-1\}\times\mathbb{N}} = \frac{1}{10} e_{2m+i-1}$。
此外，由（2.37）和（2.41）可得

$$\left\|\widetilde{d} - \frac{1-\delta}{3}e_1\right\| = \|\widetilde{d} - (-1)^{i_0-1}\, V_{i_0,n+1}|_{\{2(n+1)+i_0-1\}\times\mathbb{N}}\| \le |\lambda-1| + \sum_{s=1}^{5} |\lambda_s| \overset{(2.41)}{\le} 24K\varepsilon.$$

因此，根据三角不等式,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{b}\| &= \left\|\widetilde{d} + \sum_{\substack{i=1,2 \\ m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}}} \rho_{i,m}\frac{1}{10}e_{2m+i-1}\right\| \\
&= \left\|\left(\widetilde{d} - \frac{1-\delta}{3}e_1\right) + \left(\frac{1-\delta}{3}e_1 + \frac{1}{10}\cdot \sum_{\substack{i=1,2 \\ m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}}} \rho_{i,m}e_{2m+i-1}\right)\right\| \\
&\ge \left(\frac{1-\delta}{3} + \frac{1}{10}\cdot \sum_{\substack{i=1,2 \\ m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}}} |\rho_{i,m}|\right) - 24K\varepsilon.
\end{aligned}$$

另一方面，$\|\widetilde{b}\| \le \|B\| \le \frac{1-\delta}{3} + \varepsilon$。因此,

$$\frac{1}{10}\cdot \sum_{\substack{i=1,2 \\ m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}}} |\rho_{i,m}| \le (24K+1)\varepsilon.$$

这就完成了证明，因为

$$\|B-(-1)^{i_0+1}V_{i_0,n+1}\|$$
$$\overset{(2.37)}{=}\left\|(\lambda-1)(-1)^{i_0+1}V_{i_0,n+1}+\lambda_1V_{i_1,n+1}+\lambda_2V_{1,n}+\lambda_3V_{2,n}+\lambda_4U_1+\lambda_5U_2+\sum_{\substack{i=1,2\\ m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}}}\rho_{i,m}V_{i,m}\right\|$$
$$\leq|\lambda-1|+\sum_{s=1}^{5}|\lambda_s|+\sum_{\substack{i=1,2\\ m\in\mathbb{N}\setminus\{n,n+1\}}}|\rho_{i,m}|\overset{(2.41)}{\leq}(264K+10)\varepsilon.$$

□

我们现在终于可以证明定理 2.1，并在此给出更精确的表述。

定理 2.8. 存在 ε_0，$C>0$，使得若 D 是 X 的凸子集，且满足$0\in D$和 $R:X\to X$是到 D 上的 $(1+\varepsilon_0/C)$-利普希茨收缩映射，并满足对i，$j=1$，2，

$$\|R((-1)^jV_{i,1})-(-1)^jV_{i,1}\|,\|R((-1)^jU_i)-(-1)^jU_i\|\leq\varepsilon_0,$$

那么对每个 i，$j=1$，2 以及 $n\in\mathbb{N}$，

$$\|R((-1)^jV_{i,n})-(-1)^jV_{i,n}\|\leq\varepsilon_0.$$

证明。 我们考虑分别由引理 2.6 和引理2.7给出的 ε_0，$C>0$。下面用归纳法证明，对每个 $n\in\mathbb{N}$，都有$\|R((-1)^jV_{i,n})-(-1)^jV_{i,n}\|\leq\varepsilon_0$。情形 $n=1$ 由上述假设直接得出。现在，若假设对某个 $n\in\mathbb{N}$，有 $\|R((-1)^jV_{i,n})-(-1)^jV_{i,n}\|\leq\varepsilon_0$，则我们来证明

$$\|R((-1)^jV_{i,n+1})-(-1)^jV_{i,n+1}\|\leq\varepsilon_0. \tag{2.42}$$

首先，对于 $i,j=1,2$ 和 $k=1,\dots,8$，记作

$$W_i^j:=(-1)^jR((-1)^jV_{i,n})\quad,\quad E_i^j:=(-1)^jR((-1)^jU_i)\quad,\quad B_i^j=(-1)^jR((-1)^{i+j+1}V_{i,n+1}),$$

$$Z_{k,n}^j:=(1-t(k))E^j_{\frac{3+(-1)^n}{2}}+t(k)\frac{W_1^j+W_2^j}{2}.$$

根据命题 2.5中的性质 (1，

$$\|B_i^j\|=\|R((-1)^{i+j+1}V_{i,n+1})-R(0)\|\leq(1+\varepsilon_0/C)\frac{1-\delta}{3}. \tag{2.43}$$

显然，$(-1)^jE_i^j$，$(-1)^jW_i^j\in D$因此$3\|Z_k^j{}_{,n}\|^{2-2\delta}(-1)^jZ_{k,n}^j\in D$对于 $j\in\{1,2\}$。另请注意，根据归纳假设，我们知道 E_1^j，E_2^j，W_1^j，W_2^j

满足引理 2.6的要求。因此，根据引理 2.6，如果 $k \neq i+1$,

$$\begin{aligned}\left\|B_i^j - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}^j\|}Z_{k,n}^j\right\| =& \left\|R((-1)^{i+j+1}V_{i,n+1}) - R\Big(\frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}^j\|}(-1)^j Z_{k,n}^j\Big)\right\| \\ \leq& (1+\varepsilon_0/C)\left\|(-1)^{i+1}V_{i,n+1} - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}^j\|}Z_{k,n}^j\right\| \\ =& (1+\varepsilon_0/C)\frac{1-\delta}{3}.\end{aligned} \tag{2.44}$$

结合不等式（2.43）和（2.44，可知只要 $k \neq i+1$,

$$\|B_i^j\|, \left\|B_i^j - \frac{2-2\delta}{3\|Z_{k,n}^j\|}Z_{k,n}^j\right\| \leq \frac{1-\delta}{3} + \varepsilon_0/C.$$

显然，根据归纳假设，我们有 $\|W_i^j - V_{i,\ n}\| \leq \varepsilon_0$ 以及 $\|E_i^j - U_i\| \leq \varepsilon_0$，当 i, $j \in \{1,2\}$时。因此，在这种情况下可以应用引理 2.7。于是，对每个 $1 \leq i,\ j \leq 2$,

$$\|B_i^j - (-1)^{i+1}V_{i,n+1}\| \leq \varepsilon_0.$$

这就证明了（2.42），从而完成归纳，因为对每个 $1 \leq i,\ j \leq 2$,

$$\begin{aligned}\|R((-1)^{i+j+1}V_{i,n+1}) - (-1)^{i+j+1}V_{i,n+1}\| =& \|(-1)^j R((-1)^{i+j+1}V_{i,n+1}) - (-1)^{i+1}V_{i,n+1}\| \\ =& \|B_i^j - (-1)^{i+1}V_{i,n+1}\| \leq \varepsilon_0,\end{aligned}$$

□

定理 *2.1* 的证明。取 $\lambda = 1+\varepsilon_0/C > 1$。假设存在一个 λ-利普希茨收缩映射 R，从 X 映到其生成性紧凸子集 K，该子集属于 X。于是，对每个 $k \in \mathbb{N}$，我们可以用一个元素 $x_0 \in X$ 平移 R，再按比例 k 放大，得到

$$R_k(x) = kR\Big(\frac{x}{k} + x_0\Big) - kx_0.$$

注意到 R_k 是到 k上的 λ-利普希茨收缩映射，作用于 $k(K-x_0)$。适当地选取 $x_0 \in K$，由 K 是生成的这一事实可得 $R_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|} x$。因此，当 $k \in \mathbb{N}$足够大时， R_k 满足定理 2.8 的假设，从而

$$\|R_k(V_{1,n}) - V_{1,n}\| \leq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

显然，对于每个 n， $m \in \mathbb{N}$ 彼此不同，都有 $\|V_{1,\ m} - V_{1,\ n}\| \geq 1/5$。因此，对于每个彼此不同的 m， $n \in \mathbb{N}$，有 $\|R_k(V_{1,\ m}) - R_k(V_{1,\ n})\| \geq 1/5 - 2\varepsilon_0 > 0.$。于是我们得到矛盾，因为紧集 $k(K-x_0)$ 包含序列 $\big(R_k(V_{1,\ n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$，而该序列没有柯西子列。□

值得一提的是， X 确实具有线性逼近性质和非线性逼近性质。事实上，我们有如下直接的结果。

命题 2.9。该空间

$$X = \overline{\operatorname{span}}\Big(\{V_{i,n}\}_{\substack{i=1,2\\ n\in\mathbb{N}}} \cup \{U_1, U_2\}\Big)$$

同构于 ℓ_1。

证明。 我们知道， $X = \operatorname{span}(\{V_{1,1}, V_{2,1}, U_1, U_2\}) \oplus \operatorname{span}\Big(\{V_{i,n}\}_{\substack{i=1,2\\ n\geq 2}}\Big)$。因此，只需证明 $Y = \operatorname{span}\Big(\{V_{i,n}\}_{\substack{i=1,2\\ n\geq 2}}\Big)$ 与 ℓ_1同构。显然$V_{i,\ n}|_{\{2\}\times\mathbb{N}} = \frac{1}{10}e_{2n+i-1}$ 对于每个 $1 \leq i \leq 2,\ \ n \geq 2$ 因此，对于每个有限个非零元素的序列 $(\lambda_{i,\ n})_{i=1,\ 2} \subset \mathbb{R}$ 都有$_{n\geq 2}$

$$\left\| \sum_{\substack{i=1,2\\ n\geq 2}} \lambda_{i,n} V_{i,n} \right\| \geq \left\| \sum_{\substack{i=1,2\\ n\geq 2}} \lambda_{i,n}\ V_{i,n}|_{\{2\}\times\mathbb{N}} \right\| = \left\| \sum_{\substack{i=1,2\\ n\geq 2}} \lambda_{i,n} \frac{1}{10} e_{2n+i-1} \right\| = \frac{1}{10} \sum_{\substack{i=1,2\\ n\geq 2}} |\lambda_{i,n}|.$$

□

推论 2.10。存在一个从 $X = \operatorname{span}\Big(\{V_{i,n}\}_{\substack{i=1,2\\ n\in\mathbb{N}}} \cup \{U_1, U_2\}\Big)$ 出发的 Lipschitz 收缩映射映射到 X的一个生成性紧凸子集。

证明。由于 ℓ_1 具有 Schauder 基，因此必然有 X 也具有基。于是，该陈述由 [12] 中的定理 3.3 得出。 □

数据可用性声明。 我的手稿没有相关数据。

利益冲突声明。不存在利益冲突。

资助信息。 本研究得到 PID2021-122126NB- C31 AEI（西班牙）项目、FPU19/04085 MIU（西班牙）资助、Junta de Andalu- cia 资助项目 FQM-0185 和 PY20 00255、GA23-04776S 项目（捷克共和国）以及 SGS22/053/OHK3/1T/13 项目（捷克共和国）的支持。

References

[1] Yoav Benyamini 和 Joram Lindenstrauss，几何非线性泛函分析，美国数学会座谈会出版物第48卷第1册。美国数学会，2000年。[2] Per Enflo。基常数 *¿1* 的巴拿赫空间 1。Ark. Mat.，11:103–107，1973年。[3] Per Enflo。巴拿赫空间中逼近问题的一个反例。Acta Math.，130:309–317，1973年。[4] Mari´an Fabian、Petr Habala、Petr H´ajek、Vicente Montesinos 和 V´aclav Zizler。*Banach* 空间理论。CMS 数学丛书/SMC 数学著作。[5] Gilles Godefroy 和 Nigel J. Kalton。*Lipschitz* 自由 *Banach* 空间。第159卷，第121–141页。2003年。谨以此文献献给 Aleksander Pe-lczy´nski 教授，以庆祝他70岁生日。[6] Luis C. Garc´ıa-Lirola 和 Anton´ın Proch´azka。*Pe-lczy´nski* 空间与紧集上的 *Lipschitz* 自由空间同构。Proc. Amer. Math. Soc.，147(7):3057–3060，2019年。[7] Antonio J. Guirao、Vicente Montesinos 和 V´aclav Zizler。*Banach* 空间几何与分析中的未解问题。Springer， [Cham], 2016。[8] Gilles Godefroy 和 Narutaka Ozawa。自由 *Banach* 空间与逼近性质。Proc. Amer. Math. Soc.，142(5):1681–1687，2014年。[9] Gilles Godefroy。*Lipschitz* 函数的延拓与 *Grothendieck* 有界逼近性质。North-West. Eur. J. Math.，1:1–6，2015年。

[10] Gilles Godefroy。*Lipschitz* 自由 *Banach* 空间综述。Comment. Math.，55(2):89–118，2015年。[11]Gilles Godefroy。*Lipschitz* 可逼近 *Banach* 空间。Comment. Math. Univ. Carolin.，61(2):187–193，2020年。[12] Petr H´ajek 和 Rub´en Medina。巴拿赫空间中的紧回缩与 *Schauder* 分解。Trans. Amer. Math. Soc.，376(2):1343–1372，2023年。[13] Petr H´ajek 和 Rub´en Medina。巴拿赫空间中的收缩与有界逼近性质。Mediterr. J. Math.，20(2):论文编号75，13页，2023年。[14] Nigel J. Kalton。巴拿赫空间的一致结构。Math. Ann.，354(4):1247–1288，2012年。[15] Rub´en Medina。紧致 *H¨older* 回缩与最近点映射。Adv. Math.，428:论文编号109140，13页，2023年。

(R. MEDINA) Universidad de Granada, Facultad de Ciencias. Departamento de Análisis Matemático, 18071-Granada (Spain); and Czech Technical University in Prague, Faculty of Electrical Engineering. Department of Mathematics, Technická 2, 166 27 Praha 6 (Czech Republic)ORCID: 0000-0002-4925-0057

电子邮箱地址：rubenmedina@ugr.es