arXiv:2304.12079v1 [cs.LO] 24 Apr 2023

带传递闭包的存在关系演算：复杂度与边饱和

Yoshiki Nakamura 东京工业大学
邮箱:
nakamura.yoshiki.ny@gmail.com

摘要—我们研究带传递闭包的关系存在演算（ECoR*）及其片段的等式理论的可判定性与复杂度。ECoR* 是扩展了项变量补集和常量的带传递闭包关系正演算。我们利用边饱和刻画这些等式理论，并证明：1）对于不含传递闭包的 ECoR*，其等式理论是 coNP-完全的；2）对于不含交的 ECoR*，其等式理论属于 coNEXP，而对于两个更小的片段，其等式理论是 PSPACE 完全的；3）对于 ECoR*，其等式理论是 Π^0_1-完全的。第二项结果为 Kleene 代数的若干扩展给出了 PSPACE 上界，其中包括关于二元关系的带顶元的 Kleene 代数。

索引词—关系代数、Kleene 代数、复杂度

I. 引言

关系演算（简称 CoR） [1] 是一个作用于二元关系的代数系统。由于二元关系在计算机科学中无处不在，CoR 和关系代数（包括其传递闭包扩展）可以应用于数据库以及程序开发与验证等多个领域。然而，CoR 的等式理论是不可判定的 [2]。即使在仅包含复合$\{\cdot, \cup, {}^{-}\}$（$\cdot$）、并$\cup$（$^{-}$）和补关系（[3, ）的签名下，不可判定性 1], 仍然成立；此外，即使项变量的数量为一，这一结论也成立 [4]。

避免 CoR 等式理论不可判定性的一种方法，是考虑其正片段，即排除补集。关系正演算（简称 PCoR） [5], [6] 是定义在签名 $\{\cdot, \cup, {}^{\smile}, \bot, \top, \mathsf{I} \cap\}$ 上的项集合，该签名包含复合（$\cdot$）、并（$\cup$）、逆（$^{\smile}$）、空关系（$\bot$）、全关系（$\top$）、恒等关系（I）和交（$\cap$）。PCoR 的等式理论是可判定的 [5]。加入自反传递算子后，这一可判定性结论仍然成立，从而得到 Kleene allegory 项 [7]–[9]。

因此，自然会提出这样的问题：当以受限方式加入补算子时，PCoR 的可判定性和复杂度如何（参见例如 Kleene 代数与测试（KAT） [12]中的反定义域 [10], [11] 和测试），从而在不大幅增加复杂度的情况下扩展 PCoR 的表达能力。本文受到命题动态逻辑（PDL） [13]–[15],语境下原子程序否定的启发，考虑关系存在演算——即加入项变量和常量的补集的正关系演算（也就是说，补算子仅作用于项变量或常量）

本研究获得 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 JP21K13828。

——并研究其等式理论的可判定性和复杂度。我们将带有自反传递闭包算子（ *）的 PCoR 记为 PCoR$*$ 。我们将带有项变量和常量的补集的 PCoR（分别为 PCoR$*$）记为 ECoR（分别为 ECoR$*$）。例如，尽管$(a\cdot a)^{-}$和$(a^*)^{-}$不是 ECoR 项，但 ECoR 包含如下项:

$$a^{-} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{there is } \textit{not} \text{ an } (a\text{-labeled}) \text{ edge}\\ \text{from the source to the target}\end{array}\right)$$

$$(a\cdot a)\cap a^{-}\cap \mathsf{I}^{-} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{the distance from the source}\\ \text{to the target is two}\end{array}\right)$$

由于这些表达式在同态下不保持，因此无法用 PCoR 表达；所以，ECoR 的表达能力严格强于 PCoR。更准确地说，对于二元关系，PCoR 的表达能力与带等式的存在正逻辑的三变量片段相同[16, Cor. 3.2], ，而 ECoR 的表达能力与带等式存在逻辑的三变量片段相同 [16,Cor.3.14][1]。（“关系存在演算”这一名称正是由此而来。）

关于 ECoR 的等式理论$*$，尽管它包含 PCoR 的等式理论$*$ （包括 Kleene 代数和关系代数的公理[6]），一些非平凡的有效（不）等式如下（证明见附录A ）：

$$\top = a\cup a^{-} \quad (1) \qquad a\le \mathsf{I}^{-}\cup aa \quad (3)$$

$$aba^{-}\le \mathsf{I}^{-}a^{-}\cup a\mathsf{I}^{-} \quad (2) \qquad a^{\smile}a^{-}\le \mathsf{I}^{-} \quad (4)$$

贡献与相关工作

我们证明，该等式理论是
1) ECoR 中为 coNP-完全（定理24）；**2)**对于不含 $\cap$ 的 ECoR，属于 coNEXP（定理 35）；对于不含 $\cap$ 使得 I^{-} 不出现的 ECoR，属于 PSPACE-完全（定理 41）；对于不含 $\cap$ 使得 a^{-} 对任何项变量都不出现的 ECoR，属于 a （定理 44）；

3) Π^0_1-完全的 ECoR$*$（定理 50）。
表 I总结了我们的结果及相关结果。2) 给出了某些 ***Kleene*** 代数 的扩展的 PSPACE 上界

[1]ECoR 具有与 点-七首交替层级 [17] [16, 的第 Σ_1^{CoR} 层相同的表达能力（定义 3.13] ），因为每个 ECoR 项都是一个 Σ_1^{CoR}项; 反之，每个 Σ_1^{CoR} 项都有一个等价的 ECoR 项，这是通过将补关系和投影尽可能深入地推入该项中得到的。在这里， Σ_1^{CoR}具有与存在逻辑的三变量片段相同的表达能力（即一阶逻辑量词交替层级的第 Σ_1 层） [16, （推论 3.14]）。

表 I 关于 $S \cup S'$（二元关系）的等式理论的复杂度：其中 $S \subseteq \{\cdot, \cup, \smile, \cap, {}^*, \bot, \top, \mathsf{I}\} = S_{\mathrm{PCoR}*}$ 和 $S' \subseteq \{a^-, \mathsf{I}^-, {}^-\}$。这里，$a^-$、$\mathsf{I}^-$和 $^-$ 分别表示项变量的补、常量的补以及（完全）补关系。

S \ S'	$\emptyset$	$\{\mathsf{I}^-\}$	$\{a^-\}$	$\{a^-, \mathsf{I}^-\}$	$\{\_^-\}$
$\{\cdot, \cup\} \subseteq S \subseteq S_{\mathrm{PCoR}*} \setminus \{\_^*\}$	coNP-完全 ([18], [19], [3, 引理 8])	coNP-完全 （定理 24）			Σ^0_1-c ([1]–[3])
$\{\cdot, \cup, \_^*\} \subseteq S \subseteq S_{\mathrm{PCoR}*} \setminus \{\cap\}$	PSPACE-完全 ([18], [19], 定理 41)	PSPACE-完全 (定理 44)	PSPACE-完全 (定理 41)	属于 coNEXP (定理 35)	Π^1_1-c ([20, p.332], [15][2])
$\{\cdot, \cup, \cap, \_^*\} \subseteq S \subseteq S_{\mathrm{PCoR}*}$	指数空间完全 ([7]–[9])	指数空间困难 [8], [9]	Π^0_1-c （定理 50）		

(KA) 关于二元关系，作为不含 $\cap$ 包括 KA 项（即，关于签名 $\{\cdot, \cup, {}^*, \bot, \mathsf{I}\}$）。值得注意的是，它包括带逆运算的 KA（$\smile$） [22], [23]和带顶元的 KA（$\top$） [24] 关于二元关系；因此，该结果肯定回答了 Pous 和 Wagemaker 提出的一个问题 [24,p.14]如下：关于二元关系的带顶元的 KA 的等式理论仍处于 PSPACE 中。此外，3)否定地回答了 Nakamura 提出的一个问题 [9,p. 12] 如下：关于二元关系的、带有项变量的补的 Kleene 代数的等式理论是不可判定的。

为证明这些结论，我们给出 ECoR 等式理论的图论刻画$*$ （第 IV 节）。基于图语言和图同态的刻画借鉴了 PCoR 的刻画$*$，由 Brunet 和 Pous 提出 [8, 定理3。9][6, 定理 16], 但相同的刻画并不适用于 ECoR$*$。尽管如此，我们可以将这种刻画扩展到 ECoR$*$，方法是扩展其图语言，使用边饱和（参见图的饱和 [26], [27]；在我们的饱和中，顶点集保持不变）。利用这一图刻画，我们可以证明以下上界：1）和3）。

关于 2)：ECoR 的等式理论$*$在不含交的情况下，我们通过使用带有一些附加信息的路径图来细化上述图刻画，这些路径图称为 可饱和路径 （第 V节）。这一概念受到带有原子程序否定的布尔模态逻辑 [13] 和 PDL 中 Hintikka 树的启发 [14],；在这些逻辑中，我们考虑路径而非无限树，并引入逆关系和差关系I^-。这一刻画给出了不含交的 ECoR 等式理论的 coNEXP 上界$*$ 。此外，对于某些片段，我们可以利用可饱和路径构造字自动机，这表明当 $*$ I不出现时（定理 41），或者当 a^- 不出现时（对于任意项变量 a）（定理 44），不含交的 ECoR 等式理论在 PSPACE 中是可判定的。（我们的自动机构造无法应用于完整情况（备注 45）。）

对于下界，1）和2）可由正则表达式中已知的结果直接得到 [18], [19]。对于3），我们通过带假设的 KA，将上下文无关文法的普遍性问题（第VI节）归约为 [28]–[30] 其形式为 $t \leq a$ （其中 t 是一个项， a 是一个项变量），相对于二元关系。

[2]关于下界，带交和原子程序否定的 PDL 有效性问题是 Π^1_1-完全的 [15], , 可通过从模态逻辑到 CoR 的标准翻译，递归归约到签名 $\{\cup, \cdot, {}^*, {}^-\}$ 上的等式理论 [21, , 第 95] 页；同时利用一个新变量消去恒等关系，并保持有效性 [4, 引理 9]。[3]最近，这一结果也见于 [25]。

大纲

第 II节简要介绍基本定义。第 III 节定义 ECoR$*$（第III-A节），并回顾 ECoR 较小片段的词语言和图语言方面的已知结果$*$（第 III-B、III-C节）。在第 IV节中，我们给出 ECoR 的图论刻画$*$，并使用 边饱和。借此，我们证明1）以及 3）的上界。在第V节中，我们为不带交的 ECoR$*$ 引入可饱和路径，以细化对图饱和的刻画。此外，我们利用可饱和路径为两个较小片段构造自动机。借助这些自动机，我们证明 2）。在第 VI节中，我们证明 3）的下界。第VII 节总结本文。

II. 预备知识

我们用 $\mathbb{N}$ 表示所有非负整数的集合。对于l， $r \in \mathbb{N}$，我们用 $[l, r]$ 表示集合 $\{i \in \mathbb{N} \mid l \leq i \leq r\}$。对于$n \in \mathbb{N}$，我们用 $[n]$ 表示 $[1, n]$。对于集合 A，我们用 #(A) 表示 A 的基数，用 $\wp(A)$ 表示 A的幂集。

A. 图

对于 $k \in \mathbb{N}$，集合 A 上的 k-点图 G 是一个元组 $\langle |G|, \{a^G\}_{a \in A}, 1^G, \ldots, k^G \rangle$，其中

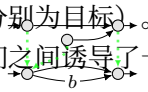
- $|G|$是一个非空的顶点集合；
- $a^G \subseteq |G|^2$ 对于每个 $a \in A$ 都是一个二元关系（$\langle x, y \rangle \in a^G$ 表示存在一条从 x 到 y的 a-标记边 ）；
- 1^G、……、 $k^G \in |G|$ 是由 1、……、 k 指向的顶点。

这里所说的二标记图是图；我们主要使用这类图。对于二标记图 G，我们分别称 1^G 和 2^G 为源和目标。

从一个图 G到一个图 H 的（图）同态是一个映射 h，它从 $|G|$ 映射到 $|H|$，满足

- $\langle h(1^G), h(2^G) \rangle = \langle 1^H, 2^H \rangle$;
- $\langle h(x), h(y) \rangle \in a^H$ for every $a \in A$ and $\langle x, y \rangle \in a^G$.

特别地，如果 h 是双射的，并且对于每个 $a \in A$ 和 $\langle x, y \rangle \notin a^G$, $\langle h(x)\ h(y) \rangle \notin a^H$，我们称 h 为 同构 。如果 h 是从 G 到 H 的同态，我们记作 $h\colon G \longrightarrow H$；如果对于某个 h 有 $h\colon G \longrightarrow H$，则记作 $G \longrightarrow H$。关系 $\longrightarrow$ 是一个预序。我们以标准方式展示图，其中带有一条指向节点的（分别为从节点指出的）无标签箭头的节点表示源（分别为目标）。例如，下面是两个连通图，虚线箭头在它们之间诱导了一个同态 ：



III. 关系存在演算

A. 带传递闭包的关系存在演算（*ECoR**）：语法与语义

1) 语法：我们固定一个有限集 Σ 的变量。Σ 上的*ECoR*$*$ 项集定义如下：[4]

$$\mathrm{ECoR}* \ni t,s,u ::= a \mid a^- \mid a^\smile \mid (a^-)^\smile \mid \mathsf{I} \mid \mathsf{I}^- \mid \bot \mid \top \mid t\cdot s \mid t\cup s \mid t\cap s \mid t^* \qquad (a\in\Sigma).$$

在存在歧义的情况下，我们使用括号。我们通常将 $t\cdot s$ 简写为 ts。对于 $n\in\mathbb{N}$，我们将 t^n 写作 $\begin{cases} t\cdot t^{n-1} & (n\geq 1)\\ \mathsf{I} & (n=0)\end{cases}$。令 $S_{\mathrm{ECoR}*} \triangleq \{\cdot,\cup,\ ^\smile,\cap,\ ^*,\bot,\top,\mathsf{I}\}\cup\{a^-,\mathsf{I}^-\}$。这里，“$^\smile$”仅适用于 a 或 a^-（为简便起见），我们使用“a^-”表示项变量的补集，并使用“I^-”表示常量的补集（在此设置中，重要的补常量只有 I^-）。

对于 $S\subseteq S_{\mathrm{ECoR}*}$，我们将 $\mathcal{T}_S$ 写作 ECoR 中满足以下条件的所有项的集合：t ECoR$*$ 中出现的每个运算符 t 都与以下某一项匹配：S。对于某些签名，我们使用以下缩写（回顾第I节中的缩写；此处，扩展 *KA*（ExKA）项用于表示本文中的 ECoR$*$ 项，但不含 $\cap$）：

$S_{acronym}$	operator set
ECoR$*$	$\{\cdot,\cup,\_^\smile,\cap,\_^*,\bot,\top,\mathsf{I},a^-,\mathsf{I}^-\}$
ECoR	$S_{\mathrm{ECoR}*}\setminus\{\_^*\}$
ExKA	$S_{\mathrm{ECoR}*}\setminus\{\cap\}\quad(=S_{\mathrm{KA}}\cup\{\_^\smile,\top,a^-,\mathsf{I}^-\})$
PCoR$*$	$S_{\mathrm{ECoR}*}\setminus\{a^-,\mathsf{I}^-\}$
PCoR	$S_{\mathrm{PCoR}*}\setminus\{\_^*\}$
KA	$S_{\mathrm{PCoR}*}\setminus\{\_^\smile,\cap,\top\}\quad(=\{\cdot,\cup,\_^*,\bot,\mathsf{I}\})$

令 $\Sigma_{\mathsf{I}}\triangleq\Sigma\cup\{\mathsf{I}\}$，并令

$$\Sigma^{(-)}\triangleq\{a,a^-\mid a\in\Sigma\};\qquad \Sigma_{\mathsf{I}}^{(-)}\triangleq\{a,a^-\mid a\in\Sigma_{\mathsf{I}}\}.$$

对于每个项 $t\in\Sigma_{\mathsf{I}}^{(-)}\cup\{\bot,\top\}$，$^-t$ 表示以下项，其中 $a\in\Sigma$：

$$\overline{a}\triangleq a^-;\quad \overline{a^-}\triangleq a;\quad \overline{\mathsf{I}}\triangleq\mathsf{I}^-;\quad \overline{\mathsf{I}^-}\triangleq\mathsf{I};\quad \overline{\bot}\triangleq\top;\quad \overline{\top}\triangleq\bot\ .$$

一个方程 $t=s$ 是由两个项组成的一对。一个不等式 $t\leq s$ 是方程 $t\cup s=s$ 的简写。[5]

项 t 的大小 $\|t\|$ 是其中出现的符号数量。此外，令 $\|t=s\|\triangleq\|t\|+\|s\|$。

2) 关系语义：对于集合W上的二元关系 R、Q，其关系逆 $R^\smile$、关系复合$R\cdot Q$、n次迭代 R^n（其中 $n\in\mathbb{N}$）以及自反传递闭包 R^* 定义如下：

$$R^\smile\triangleq\{\langle y,x\rangle\mid\langle x,y\rangle\in R\}$$
$$R\cdot Q\triangleq\{\langle x,z\rangle\mid\exists y\in W.\ \langle x,y\rangle\in R\ \wedge\ \langle y,z\rangle\in Q\}$$
$$R^n\triangleq\begin{cases}R\cdot R^{n-1} & (n\geq 1)\\ \{\langle x,x\rangle\mid x\in W\} & (n=0)\end{cases};\quad R^*\triangleq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}R^n.$$

[4]为简便起见，在项集合中，逆仅适用于形如 a 或 a^- 以及 $\bot^-$ 的项，并且 $\top^-$ 不出现；但我们可以通过取 B）中的 逆向范式 以及 $\models_{\mathrm{REL}}\bot^-=\top$ 和 $\models_{\mathrm{REL}}\top^-=\bot$ 成立，将项集合进行多项式时间变换。因此，即使不施加这些限制，我们的复杂度上界仍然成立（定理 24、41、44、50）。

[5]Note that $[\![t]\!]_{\mathfrak{A}}\subseteq[\![s]\!]_{\mathfrak{A}}\iff[\![t\cup s]\!]_{\mathfrak{A}}=[\![s]\!]_{\mathfrak{A}}$.

定义 1。我们称 G 为 k-尖点结构，如果 G 是一个基于 $\Sigma_{\mathsf{I}}^{(-)}$ 的 k- 尖点图，使得
- $\mathsf{I}^G=\{\langle x,x\rangle\mid x\in|G|\}$；
- $\overline{a}^G=|G|^2\setminus a^G$ for $a\in\Sigma_{\mathsf{I}}$.[6]

我们称 0-指向结构为结构。我们分别用 $\ddot{\mathfrak{A}}$ 和 $\mathfrak{A}$ 表示 0-指向结构和二指向结构。对于一个结构 $\mathfrak{A}$ 和两个顶点 $x,y\in|\mathfrak{A}|$，我们用 $\mathfrak{A}[x,y]$ 表示二指向结构 $\langle|\mathfrak{A}|,\{a^{\mathfrak{A}}\}_{a\in\Sigma^{(-)}},x,y\rangle$。

ECoR$*$ 项 t 在结构 $\mathfrak{A}$ 上的二元关系 $[\![t]\!]_{\mathfrak{A}}\subseteq|\mathfrak{A}|^2$ 定义如下（其中 $a\in\Sigma$）：

$$[\![a]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq a^{\mathfrak{A}}\qquad [\![a^-]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq(a^-)^{\mathfrak{A}}$$
$$[\![\bot]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq\emptyset\qquad [\![\top]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq|\mathfrak{A}|^2$$
$$[\![t\cup s]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq[\![t]\!]_{\mathfrak{A}}\cup[\![s]\!]_{\mathfrak{A}}\qquad [\![t\cap s]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq[\![t]\!]_{\mathfrak{A}}\cap[\![s]\!]_{\mathfrak{A}}$$
$$[\![\mathsf{I}]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq\mathsf{I}^{\mathfrak{A}}\qquad [\![\mathsf{I}^-]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq(\mathsf{I}^-)^{\mathfrak{A}}$$
$$[\![t\cdot s]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq[\![t]\!]_{\mathfrak{A}}\cdot[\![s]\!]_{\mathfrak{A}}$$
$$[\![t^*]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\![t^n]\!]_{\mathfrak{A}}\qquad [\![t^\smile]\!]_{\mathfrak{A}}\triangleq[\![t]\!]_{\ddot{\mathfrak{A}}}.$$

如果对于每个结构 $\mathfrak{A}$都有 $[\![t]\!]_{\mathfrak{A}}=[\![s]\!]_{\mathfrak{A}}$，我们记作 $\models_{\mathrm{REL}}t=s$。关于 S 二元关系的等式理论定义为 $\mathcal{T}_S$ 中满足 $\models_{\mathrm{REL}}t=s$的所有项对 $t=s$ 的集合。

记号 2。基于$[\![\ ]\!]_{\mathfrak{A}}$，我们定义以下记号：

$$\mathfrak{A}[x,y]\models t\iff\langle x,y\rangle\in[\![t]\!]_{\mathfrak{A}}$$
$$\ddot{\mathfrak{A}}\models t=s\iff(\ddot{\mathfrak{A}}\models t)\leftrightarrow(\ddot{\mathfrak{A}}\models s)$$
$$\mathfrak{A}\models t=s\iff[\![t]\!]_{\mathfrak{A}}=[\![s]\!]_{\mathfrak{A}}.$$

（注意，$\mathfrak{A}\models t=s\iff\forall x,\ y\in|\mathfrak{A}|.\ \mathfrak{A}[x,y]\models t=s$。）

B. 关于二元关系的 *KA* 项和词语言

对于集合 X，我们用 X^* 表示其上的所有有限序列（即词）的集合。我们用 I 表示空单词。我们用 wv 表示词 w 和 v 的连接。对于集合 L，$K\subseteq\Sigma^*$，复合 $L\cdot K$ 定义如下：

$$L\cdot K\triangleq\{wv\mid w\in L\ \wedge\ v\in K\}.$$

KA 项 t 的（单词）语言 $[t]\subseteq\Sigma^*$ 定义如下：

$$[a]\triangleq\{a\}$$
$$[\bot]\triangleq\emptyset$$
$$[t\cup s]\triangleq[t]\cup[s]$$
$$[\mathsf{I}]\triangleq\{\mathrm{I}\}$$
$$[t\cdot s]\triangleq[t]\cdot[s]$$
$$[t^*]\triangleq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[t^n].$$

有趣的是，对于 KA 项，众所周知，关于二元关系的等式理论与单词语言解释（单一）下的理论一致（参见例如 [6,定理4]）：对于任意 KA 项 t，s，我们有

$$\models_{\mathrm{REL}}t\leq s\quad\iff\quad[t]\subseteq[s].\qquad(\dagger)$$

[6]对于每个 $a\in\Sigma_{\mathsf{I}}^{(-)}\setminus\Sigma$，$a^G$ 都是冗余的，因为它可以由其他关系确定。不过，这个定义与后者兼容。

以下结论可由（†）以及关于正则表达式的已知结果推出 [18, 第 3]（[19], 具体构造）：

命题 3 ([19, 定理 2.7], [18])。 $\mathcal{T}_{\{\cdot,\cup\}}$ 的等式理论（关于二元关系）是 *coNP*-完全的。

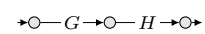
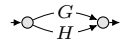
命题 4 ([19, 命题 2.4], [18])。 $\mathcal{T}_{\{\cdot,\cup,\ ^*\}}$ 的等式理论（关于二元关系）是 *PSPACE* 完全的。

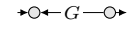
They 可以给出定理24的下界 , 41, 44.

注 5。等价关系（†）在通过标准的单词语言解释 [6,第 4] 节添加 $\cap$ $^\smile$或 $\top$ 时会失效。请注意，若添加 a^- 或 I^-，并分别满足 $[a^-] \triangleq \Sigma^* \setminus \{a\}$ 和 $[\mathrm{I}^-] \triangleq \Sigma^* \setminus \{\mathrm{I}\}$，则（†）也会失效。例如，$\models_{\mathrm{REL}} \top a \top b \top = \top b \top a \top$ 在 [6,第 13], 页成立，但它们的语言并不相同。这里，$\top$ 是项 $c \cup c$ 的缩写（参见方程（1））， 其中 c 可以是任意对象。反过来，例如，$[a^-] = [\mathrm{I} \cup (\Sigma \setminus \{a\}) \cup (\Sigma \cdot \Sigma \cdot \Sigma^*)]$ 成立，但这样的方程在关系语义中并不成立（其中有限集 $L = \{t_1, \ldots, t_n\}$ 个项在此处缩写为项 $t_1 \cup \cdots \cup t_n$）。

C. PCoR* 与图语言

回顾第 II-A 节。使用图语言而非词语言，我们可以给出关于二元关系的等式理论对更一般项（例如，[6]）的刻画。我们使用图上的以下三种运算： 串联复合 $(\cdot)$、并联复合 $(\cap)$以及逆 $(\ ^\smile)$:

$G \cdot H \triangleq$  $G \cap H \triangleq$ 

$G^\smile \triangleq$  .

以下内容受 [8], [6, 定义 15] 中关于 PCoR* 的定义启发，其中我们扩展了 ECoR* 中 a^- 和 I^- 的定义。

定义 6（参见 [8], [6, 定义 15]）。ECoR* 项 t 的图语言 $\mathcal{G}(t)$ 是定义在 $\Sigma^{(-)}$ı 上的图的集合，定义如下：

$$\mathcal{G}(a) \triangleq \{ \bullet \xrightarrow{a} \bullet \} \text{ where } a \in \Sigma^{(-)} \qquad \mathcal{G}(\bot) \triangleq \emptyset \qquad \mathcal{G}(\top) \triangleq \{ \bullet \quad \bullet \}$$

$$\mathcal{G}(t \cup s) \triangleq \mathcal{G}(t) \cup \mathcal{G}(s) \qquad \mathcal{G}(t \cap s) \triangleq \{G \cap H \mid G \in \mathcal{G}(t) \ \wedge \ H \in \mathcal{G}(s)\}$$

$$\mathcal{G}(\mathrm{I}) \triangleq \{ \bullet \to \bullet \} \qquad \mathcal{G}(\mathrm{I}^-) \triangleq \{ \bullet \xrightarrow{\bar{\mathrm{I}}} \bullet \}$$

$$\mathcal{G}(t \cdot s) \triangleq \{G \cdot H \mid G \in \mathcal{G}(t) \ \wedge \ H \in \mathcal{G}(s)\} \qquad \mathcal{G}(t^*) \triangleq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}(t^n) \qquad \mathcal{G}(t^\smile) \triangleq \{G^\smile \mid G \in \mathcal{G}(t)\}.$$

定义 7。对于定义在 $\Sigma^{(-)}$ı 上的图 G，结构 $\mathfrak{A}$ 上的二元关系$[\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^2$ 定义为：

$$\langle x, y \rangle \in [\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \quad \stackrel{\triangle}{\Longleftrightarrow} \quad (G \longrightarrow \mathfrak{A}[x, y]).$$

（$G \longrightarrow H$ 表示存在一个从 G 到H的同态。）对于每个图语言 $\mathcal{G}$，令

$$[\![\mathcal{G}]\!]_{\mathfrak{A}} \triangleq \bigcup_{G \in \mathcal{G}} [\![G]\!]_{\mathfrak{A}}.$$

根据 $[\![G]\!]_{\mathfrak{A}}$ 和 $[\![\mathcal{G}]\!]_{\mathfrak{A}}$，我们也将 $\models$（记号 2）用于图和图语言。注意：

$$\ddot{\mathfrak{A}} \models G \iff G \longrightarrow \ddot{\mathfrak{A}}; \quad \ddot{\mathfrak{A}} \models \mathcal{G} \iff \exists G \in \mathcal{G}. G \longrightarrow \ddot{\mathfrak{A}}.$$

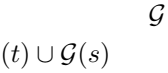
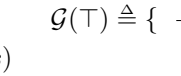
上述图语言刻画了 PCoR 的关系语义和等式理论*，如下所示（命题 8通过对 t 进行归纳法证明，命题 9则通过使用命题 8证明；更多详情请参见附录 C）：

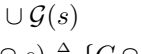
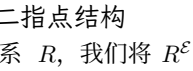
命题 8. 对于每个结构 $\mathfrak{A}$ 和 *PCoR** 项 t,

$$[\![t]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{G}(t)]\!]_{\mathfrak{A}}.$$

命题 9 ([8,定理 3.9], [6, 定理 16]). 对于任意两个 *PCoR**项 t、s，我们有

$$\models_{\mathrm{REL}} t \leq s \iff \forall G \in \mathcal{G}(t). \exists H \in \mathcal{G}(s).\ H \longrightarrow G.$$

例 10. 我们可以利用同态  证明 $\models_{\mathrm{REL}} a \cap b \leq a \cap (\bar{a} \cap \bar{b})$。这里， 

$\mathcal{G}(a \cap b) =$ {  }; $\mathcal{G}(a \cap (\top b)) =$ {  }.

IV. Graph characterization for ECoR*

我们考虑将命题 8,9 推广到 ECoR*。我们可以直接推广命题 8。

命题 11 (参见命题 8). 对于每个结构 $\mathfrak{A}$ 和 *ECoR** 项 t，我们有 $[\![t]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{G}(t)]\!]_{\mathfrak{A}}$。

证明。 类似于命题8 （附录D）。 □

然而，我们无法立即扩展命题9。

例12。$\models_{\mathrm{REL}} \top \leq a \cup a$ 成立（参见方程（1））， 但命题9 的右侧公式不成立，因为不存在从 $\mathcal{G}(a \cup a)$ 中的任何图出发的同态:

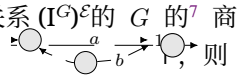
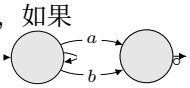
$$\mathcal{G}(a \cup \bar{a}) = \{ \bullet \xrightarrow{a} \bullet \ , \ \bullet \xrightarrow{\bar{a}} \bullet \} \qquad \mathcal{G}(\top) \ni \bullet \quad \bullet .$$

（即使没有 $\top$，同样的问题仍然存在；考虑 $\models_{\mathrm{REL}} b \cup \bar{b} \leq a \cup \bar{a}$其中 $b \neq a$。）

为避免上述问题，我们考虑使用边饱和修改图语言。

A. 边饱和图与二指点结构

对于二元关系 R，我们将 $R^{\mathcal{E}}$ 写作 R 的 等价闭包（包含 R 的最小等价关系）。

对于定义在 $\Sigma^{(-)}$ı 上的图 G，我们将 $G^{\mathcal{Q}}$ 写作关于等价关系 $(\mathbf{I}^G)^{\mathcal{E}}$的 G 的[7] 商图；例如，如果 $G =$  ，则 $G^{\mathcal{Q}} =$  我们使用 $[x]_G$ 表示关于等价关系 $(\mathbf{I}^G)^{\mathcal{E}}$的顶点 $x \in |G|$ 的商集。

定义 13。设 G 是定义在 $\Sigma^{(-)}$ı 上的图。若对于每个 $a \in \Sigma_{\mathrm{I}}$，以下条件成立，我们称 G 为一致的：**(a-一致)** $((\mathbf{I}^G)^{\mathcal{E}} \cdot a^G \cdot (\mathbf{I}^G)^{\mathcal{E}}) \cap ((\mathbf{I}^G)^{\mathcal{E}} \cdot a^G \cdot (\mathbf{I}^G)^{\mathcal{E}}) = \emptyset_{\circ}^{-}$ 若 G一致并且满足以下条件，我们称 G为（一致）边饱和的：**(a-饱和)** $a^G \cup a^G = |G|^2_{\_}$，对每个 $a \in \Sigma_{\mathrm{I}}$均成立；

[7] $G^{\mathcal{Q}}$ $\Sigma^{(-)}$ $|G^{\mathcal{Q}}| = \{[x]_G \mid x \in$具体来 $G\}$ $a^{G^{\mathcal{Q}}} = \{\langle X, Y \rangle \in |G^{\mathcal{Q}}|^2 \mid \exists x \in X.\ \exists y \in Y.\ \langle x, y \rangle \in a^G\}$ 说，定义在ı上的图为；对于$a \in \Sigma^{(-)}$ı； $\langle 1^{G^{\mathcal{Q}}}, 2^{G^{\mathcal{Q}}} \rangle = \langle [1^G]_G, [2^G]_G \rangle$。

(I-等价) I^G 是一个等价关系。

每个边饱和图都会诱导出一个二指向结构：

命题 14。 如果图 G *over* $\Sigma^{(-)}$ 是边饱和的，那么 $G^{\mathcal{Q}}$ 就是一个2指向结构。

证明。 $\mathrm{I}^{G^{\mathcal{Q}}}$ 是恒等关系，因为 I^G 是一个等价关系（I-等价）。对于 $a \in \Sigma_{\mathrm{I}}$，$\bar{a}^{G^{\mathcal{Q}}} = |G^{\mathcal{Q}}|^2 \setminus a^{G^{\mathcal{Q}}}$ 成立，因为 $a^{G^{\mathcal{Q}}} \cup \bar{a}^{G^{\mathcal{Q}}} = |G^{\mathcal{Q}}|^2$（$a$-饱和）且 $a^{G^{\mathcal{Q}}} \cap \bar{a}^{G^{\mathcal{Q}}} = \emptyset$（$a$-一致）。因此，$G^{\mathcal{Q}}$ 是一个2指向结构。 □

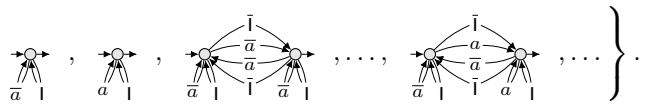
B. 通过边饱和进行图刻画

定义 15。 对于图 G，H 在 $\Sigma^{(-)}$ 上的图，如果对于每个 $a \in \Sigma^{(-)}$ 都有 $|H| = |G|$ 和 $a^H \supseteq a^G$，我们称 H 是 G的边扩展。如果 H是 G的边扩展且是边饱和的，我们称 H 是 G 的（边）饱和。

令 $\mathcal{S}(G)$ 表示 G 的所有饱和的集合。

对于图语言 $\mathcal{G}$，令 $\mathcal{S}(\mathcal{G}) \triangleq \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \mathcal{S}(G)$ 且 $\mathcal{Q}(\mathcal{G}) \triangleq \{G^{\mathcal{Q}} \mid G \in \mathcal{G}\}$。我们将 $\mathcal{Q} \circ \mathcal{S}$ 缩写为 $\mathcal{QS}$。

例 16：当 $\Sigma = \{a\}$、$\mathcal{QS}(\ )$ 为以下集合时：



$\mathcal{QS}(\ )$ 在同构意义下有 18 个图（当两个顶点由 I 连接时，模式 ($2^{1\times1} = 2$) 的数量与其他情况下模式 ($2^{2\times2} = 16$) 的数量之和）。对于每个 $G \in \mathcal{QS}(\ )$，都存在从 a 或 a 到 G 的同态，因为 G 是边饱和的：

$$\mathcal{G}(a \cup \bar{a}) = \{\ \ ,\ \ \}$$

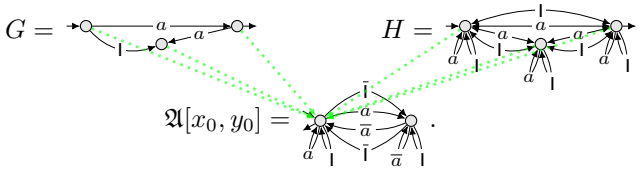
$$\mathcal{QS}(\mathcal{G}(\top)) = \left\{\ \ ,\ \ ,\ \ldots,\ \ ,\ \ldots\right\}.$$

如上所述，通过使用 $\mathcal{QS}(\mathcal{G}(\top))$ 来代替 $\mathcal{G}(\top)$，我们可以避免例 12 中的问题。使用 $\mathcal{QS}$，对于 ECoR，我们可以加强命题 9([8, 定理 3。9], [6, 定理 16])，正如定理 18 所示。我们首先证明以下内容：

引理 17。 对于任意图 G 在 $\Sigma^{(-)}$ 上，$[\![G]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{QS}(G)]\!]_{\mathfrak{A}}$。

证明。 我们证明，对于任意 G，$[\![G]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{S}(G)]\!]_{\mathfrak{A}}$ 和 $[\![G]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![G^{\mathcal{Q}}]\!]_{\mathfrak{A}}$分别成立。

对于 $[\![G]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{S}(G)]\!]_{\mathfrak{A}}$：($\supseteq$)：如果 $H \in \mathcal{S}(G)$ 且 $h\colon H \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$，那么 $h\colon G \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$ 因为 H是 G 的饱和。($\subseteq$)：如果 $h\colon G \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$，令 H为 G 的饱和，使得对于 $a \in \Sigma^{(-)}$，$a^H = \{\langle x, y\rangle \mid \langle h(x)\ h(y)\rangle \in a^{\mathfrak{A}}\}$。那么 $h\colon H \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$。这里，$H$是 G 的边扩展，因为 $\langle x, y\rangle \in a^G \Longrightarrow \langle h(x)\ h(y)\rangle \in a^{\mathfrak{A}} \Longrightarrow \langle x, y\rangle \in a^H$；$H$ 是边饱和的，因为 $\mathfrak{A}$ 是边饱和的；因此，H 确实是 G 的饱和。例如，根据 $G \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$的同态，通过在 G 中填入不存在的边使它们映射到 $\mathfrak{A}$ 的边，我们可以构造 G 的饱和 H，使得 $H \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$，如下所示：



对于 $[\![G]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![G^{\mathcal{Q}}]\!]_{\mathfrak{A}}$：($\supseteq$)：如果 $G^{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$，那么 $G \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$，因为 $G \longrightarrow G^{\mathcal{Q}}$ 通过商映射（利用 $\longrightarrow$的传递性）。($\subseteq$)：如果 $h\colon G \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$，那么$h \circ g\colon G^{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathfrak{A}[x_0, y_0]$，其中 g是从 G 到 $G^{\mathcal{Q}}$ 的商映射的截面（一个满足 g 使得 $g(X) \in X$ 对于 $X \in |G^{\mathcal{Q}}|$的映射）。因此，$[\![G]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{S}(G)]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{QS}(G)]\!]_{\mathfrak{A}}$。 □

定理 18 （参见命题 9）。 对于每个 *ECoR*$*$ 项 t，s，

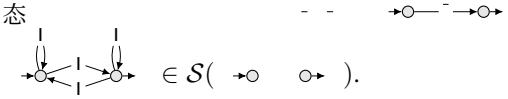
$$\models_{\mathrm{REL}} t \le s \iff \forall G \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t)).\exists H \in \mathcal{G}(s).\ H \longrightarrow G.$$

证明。 通过以下公式变换：

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathrm{REL}} t \le s \iff \forall \mathfrak{A}.\ [\![t]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq [\![s]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } \models_{\mathrm{REL}}\text{)}\\
&\iff \forall \mathfrak{A}.\ [\![\mathcal{QS}(\mathcal{G}(t))]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Prop. 11, Lem. 17)}\\
&\iff \forall \mathfrak{A}.\forall G \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t)).\ [\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } [\![\,]\!]\text{)}\\
&\iff \forall G \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t)).\forall \mathfrak{A}.\ [\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&\iff \forall G \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t)).\forall \ddot{\mathfrak{A}}.\\
&\quad (G \longrightarrow \ddot{\mathfrak{A}}) \text{ implies } (\exists H \in \mathcal{G}(s).\ H \longrightarrow \ddot{\mathfrak{A}}) && \text{(Def. of } [\![\,]\!]\text{)}\\
&\iff \forall G \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t)).\exists H \in \mathcal{G}(s).\ H \longrightarrow G. && (\heartsuit)
\end{aligned}$$

这里，对于（♡），$\Longleftarrow$：令 $H \in \mathcal{G}(s)$ 满足 $H \longrightarrow G$。那么，对于任意满足 $G \longrightarrow \ddot{\mathfrak{A}}$ 的二指向结构 $\ddot{\mathfrak{A}}$，有 $H \longrightarrow \ddot{\mathfrak{A}}$，这是由 $\longrightarrow$的传递性得出的。$\Longrightarrow$：令 $\ddot{\mathfrak{A}} = G$。注意，G 是一个二指向结构，因为 $G \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t))$（命题 14）。 □

备注 19。 我们应该使用 $\mathcal{QS}$，而不是 $\mathcal{S}$。考虑 $\models_{\mathrm{REL}} \top \le \mathrm{I} \cup \mathrm{I}$。那么，从 $\mathcal{G}(\mathrm{I}\cup\mathrm{I}) = \{\ \ ,\ \ \}$ 中的任何图到该图，都不存在同态



C. 有界模型性质

定理 18为关系存在演算的等式理论给出了一个上界。注意，ECoR$*$的模型检测问题可在多项式时间内判定。

命题 20。 以下问题在 $\mathcal{O}(\|t\| \times \#(|\mathfrak{A}|)^{\omega})$ 时间内是可判定的：给定一个有限的二指向结构和一个 *ECoR*$*$ 项 t，$\ddot{\mathfrak{A}} \models t$ 是否成立？这里，ω 是矩阵乘法指数。

证明概要。 令 $\ddot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}[x, y]$。对于 $s \in \mathrm{Sub}(t)$，令 $f_s\colon |\mathfrak{A}| \times |\mathfrak{A}| \to \{\text{真}, \text{假}\}$，使得 $f_s(x,\ y) =$ 当且仅当为真 $\langle x, y\rangle \in [\![s]\!]_{\mathfrak{A}}$。这里，$\mathrm{Sub}(t)$ 表示 t 的所有子项的集合。然后，可以通过对 s 进行简单的动态规划来计算 $\{f_s\}_{s\in\mathrm{Sub}(t)}$ 的函数表；对于情况 $s = u^*$，我们使用布尔矩阵 [31] 的传递闭包算法。 □

引理 21（有界模型性质）。对于每个 *ECoR*∗ 项t，s都有：$\not\models_{\mathrm{REL}} t \le s \iff$ 存在一个2指向的结构 $\mathfrak{A} \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t))$，使得 $\mathfrak{A} \not\models t \le s$。

证明。$\Longleftarrow$：显然。$\Longrightarrow$：设 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}[x,y] \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t))$是一个二指向结构，使得 $\forall H \in \mathcal{G}(s)$，$H \not\longrightarrow \mathfrak{A}$(定理18 $\langle x,y\rangle \in [\![\mathcal{QS}\ \mathcal{G}\ t\ ]\!]_{\mathfrak{A}}$ $\mathcal{QS}\ \mathcal{G}\ t\ \ni$)。于是(( ))，因为(( )) $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}[x,y]$ ($\longrightarrow$是自反的)。$\langle x,y\rangle \notin [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}}$因为$\forall H \in \mathcal{G}(s).\ H \not\longrightarrow \mathfrak{A}$ （ $[\![]\!]_{\mathfrak{A}}$的定义）。因此 $\langle x,y\rangle \in [\![t]\!]_{\mathfrak{A}}$ 且 $\langle x,y\rangle \notin [\![s]\!]_{\mathfrak{A}}$（命题 11，引理 17）。由此得 $\mathfrak{A} \not\models t \le s$。 □

引理 22。*ECoR*∗的等式理论属于Π_1^0。

证明。由于 $\not\models_{\mathrm{REL}} t = s$ 当且仅当($\not\models_{\mathrm{REL}} t \le s$) $\vee$($\not\models_{\mathrm{REL}} s \le t$)，只需证明以下问题属于 Σ_1^0：给定 ECoR∗ 项 t、s，$\not\models_{\mathrm{REL}} t \le s$ 是否成立？由引理 21 和命题20可得此结论。注意，对于每个$G \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t))$，#(|$G$|)总是有限的，而且我们可以轻易枚举 $\mathcal{QS}(\mathcal{G}(t))$中的图。 □

特别是对于 ECoR（而非 ECoR∗），每个项 t的图，其顶点数量相对于大小 $\|t\|$是线性的。

命题 23。对于每个 *ECoR* 项 t 和 $G \in \mathcal{QS}(\mathcal{G}(t))$，我们有#(|$G$|) $\le 1 + \|t\|$。

证明概要。通过对 t进行简单归纳法，我们有：对于每个 $H \in \mathcal{G}(t)$，#(|H|) $\le 1 + \|t\|$。此外，对于每个 $G \in \mathcal{QS}(H)$，#(|G|) $\le$ #(|H|) 显然成立。 □

定理24。*ECoR* 的等式理论是 *coNP*-完全的。

证明。关于困难性：根据命题 3，由于 ECoR 包含 $\mathcal{T}_{\{\cdot,\cup\}}$。关于上界：类似于引理22，我们证明以下问题属于 NP：给定 ECoR 项 t、s，是否$\not\models_{\mathrm{REL}} t \le s$ 成立？根据引理 21，我们可以给出以下算法：

1) 根据 $\mathcal{G}$的定义，非确定性地取一个图 $H \in \mathcal{G}(t)$；然后非确定性地取一个图 $G \in \mathcal{S}(H)$（G是 $\mathcal{S}(\mathcal{G}(t))$ 中的一个图）。
2) 如果 $G^{\mathcal{Q}} \not\models t \le s$，则返回 true；否则返回 false。

那么 $\not\models_{\mathrm{REL}} t \le s$ 如果某次执行返回真；$\models_{\mathrm{REL}} t \le s$否则。这里，$G^{\mathcal{Q}} \not\models t \le s$ 可由命题20 在#(|$G^{\mathcal{Q}}$|) $\le 1 + \|t\|$ （命题23）。 □

V. 可饱和路径：无交片段中基于路径图的饱和

本节利用∗ 可饱和路径，细化上一节针对无交 ECoR（简称 ExKA；第III-A节）给出的边饱和图刻画。借助这一刻画，我们可以证明等式理论的可判定性（定理33），并为两个更小的片段给出自动机构造（定理40、43）。

A. 作为项的非确定有限自动机

带 ε 转移的非确定性有限自动机I（简称 NFA）$\mathcal{A} = \langle |\mathcal{A}|, \{a^{\mathcal{A}}\}_{a\in A}, 1^{\mathcal{A}}, 2^{\mathcal{A}}\rangle$ 定义在集合 A 上（其中 A 包含指定元素 I），是一个图定义在 A上。词 $w = a_1 \dots a_n \in (A \setminus \{\mathsf{I}\})^*$的转移关系由下式定义：

$$\delta_w^{\mathcal{A}} \triangleq (\mathsf{I}^{\mathcal{A}})^* \cdot a_1^{\mathcal{A}} \cdot (\mathsf{I}^{\mathcal{A}})^* \cdot \dots \cdot (\mathsf{I}^{\mathcal{A}})^* \cdot a_n^{\mathcal{A}} \cdot (\mathsf{I}^{\mathcal{A}})^*.$$

为简化记号，对于 $x \in |\mathcal{A}|$ 和 $X \subseteq |\mathcal{A}|$，令$\delta_w^{\mathcal{A}}(x) \triangleq \{y \mid \langle x,y\rangle \in \delta_w^{\mathcal{A}}\}$以及 $\delta_w^{\mathcal{A}}(X) \triangleq \bigcup_{x\in X} \delta_w^{\mathcal{A}}(x)$。$\mathcal{A}$ 的语言 $[\mathcal{A}]$ 定义如下：

$$[\mathcal{A}] \triangleq \{w \in (A \setminus \{\mathsf{I}\})^* \mid 2^{\mathcal{A}} \in \delta_w^{\mathcal{A}}(1^{\mathcal{A}})\}.$$

令 $\Sigma^{(-,\smile)}{}_{\mathsf{I}} \triangleq \{a, a^{\smile} \mid a \in \Sigma^{(-)}\} \cup \{\mathsf{I}, \mathsf{I}^{-}\}$。类似地，对于 t，对于每个 $t \in \Sigma^{(-,\smile)}{}_{\mathsf{I}} \cup \{\bot, \top\}$，$\breve{t}$表示以下项，其中 $a \in \Sigma^{(-)}$：

$$\breve{a} \triangleq a^{\smile} \quad a^{\breve{\smile}} \triangleq a \quad \breve{\mathsf{I}} \triangleq \mathsf{I} \quad \breve{\mathsf{I}^{-}} \triangleq \mathsf{I}^{-} \quad \breve{\top} \triangleq \top \quad \breve{\bot} \triangleq \bot.$$

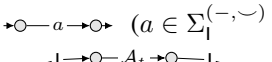
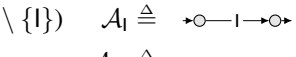
下文中，我们始终考虑集合 $\Sigma^{(-,\smile)}{}_{\mathsf{I}}$ 上的非确定有限自动机（其中 I 用作 ε转换）。

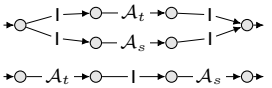
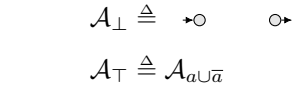
对于 $\Sigma^{(-,\smile)}{}_{\mathsf{I}}$ 上的非确定有限自动机 $\mathcal{A}$，其二元关系 $[\![\mathcal{A}]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathcal{A}|^2$ 定义如下：

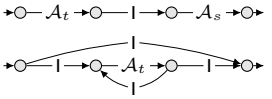
$$[\![\mathcal{A}]\!]_{\mathfrak{A}} \triangleq \bigcup_{w\in[\mathcal{A}]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}.$$

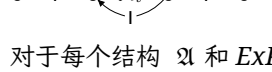
自然地，我们可以使用 Thompson构造 [32], 将ExKA项构造成非确定有限自动机，具体如下：

定义 25。ExKA 项 t 的非确定有限自动机 $\mathcal{A}_t$ 定义如下：

$\mathcal{A}_a \triangleq$  $(a \in \Sigma^{(-,\smile)}_{\mathsf{I}} \setminus \{\mathsf{I}\})$ $\mathcal{A}_{\mathsf{I}} \triangleq$ 

$\mathcal{A}_{t\cup s} \triangleq$  $\mathcal{A}_{\bot} \triangleq$ 

$\mathcal{A}_{t\cdot s} \triangleq$  $\mathcal{A}_{\top} \triangleq \mathcal{A}_{a\cup\bar{a}}$

$\mathcal{A}_{t^*} \triangleq$  .

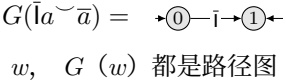
命题 26。对于每个结构 $\mathfrak{A}$ 和 *ExKA* 项 t，都有 $[\![t]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{A}_t]\!]_{\mathfrak{A}}$。

证明概要。令 s 为项 t，其中每个 $\top$ 都已替换为 $a \cup a$。于是，$[\![s]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![t]\!]_{\mathfrak{A}}$根据方程（1）和 $\mathcal{A}_s$（根据定义 25）相重合 $\mathcal{A}_t$，将 s 视为 $\Sigma^{(-,\smile)}{}_{\mathsf{I}} \setminus \{\mathsf{I}\}$上的正则表达式，我们有 $[s] = [\mathcal{A}_s]$ [32]。通过对 s 利用分配律进行直接归纳 $[\![s]\!]_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{w\in[s]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}$ $[\![t]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![s]\!]_{\mathfrak{A}} =$ (附录 E)，可得。 $\bigcup_{w\in[s]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{w\in[\mathcal{A}_s]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{A}_s]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{A}_t]\!]_{\mathfrak{A}}$ □

借助上述命题，接下来我们直接使用非确定有限自动机，而不使用项。

B. 可饱和路径

对于一个词 $w \in (\Sigma^{(-,\smile)}{}_{\mathsf{I}} \setminus \{\mathsf{I}\})^*$，我们用 $G(w)$ 表示 $\mathcal{G}(w)$（定义 6）中唯一的图（在同构意义下）。这里，$G(w)$ 中的每个顶点都从左到右用 $[0,n]$中的一个数字作为索引，其中 $w = a_1 \dots a_n$。例如，

$G(\bar{\mathsf{I}} a^{\smile} \bar{a}) =$  .

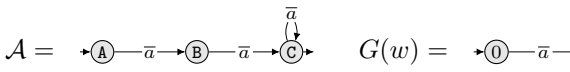
对于每个 w，$G(w)$ 都是路径图（忽略边的标签和方向后）。

回顾 $[\![\mathcal{A}]\!]_{\mathfrak{A}}$ 第 V-A节中的内容。基于 $[\![\mathcal{A}]\!]_{\mathfrak{A}}$，我们也将 $\models$（记号 2）用于自动机。请注意：

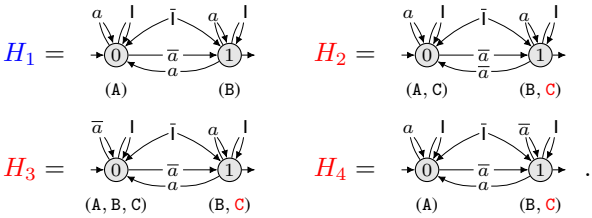
$$\ddot{\mathfrak{A}} \models \mathcal{A} \iff \exists w \in [\mathcal{A}].\ \ddot{\mathfrak{A}} \models w \qquad \text{(Def. of } [\![\mathcal{A}]\!]_{\mathfrak{A}}\text{)}$$
$$\iff \exists w \in [\mathcal{A}].\ G(w) \longrightarrow \ddot{\mathfrak{A}}. \qquad \text{(Prop. 11)}$$

在本小节中，我们考虑以下可饱和性问题：给定一个非确定有限自动机 $\mathcal{A}$ 和一个词 w，是否存在一种饱和H，使得 $G(w)$ 满足 $H^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A}$? （回顾 $H^{\mathcal{Q}}$ (命题 14)。）这个问题可以应用于等式理论（定理 33）。对于这个问题，我们引入可饱和路径。

例 27。设 $\Sigma = \{a\}$。令 $\mathcal{A}$ 为由项 $a \cdot a \cdot a^*$ 和 $w = a$得到的非确定有限自动机：



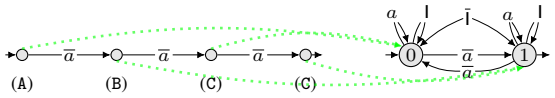
我们来考虑构造一种饱和 H，使得 $G(w)$ 满足$H^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A}$。在这种情况下，以下 H_1 是唯一解（H_2、H_3、H_4 不是解，因为 $\mathsf{C} \in U_1$）：



这里，每个顶点下方的状态表示它们从顶点 0 上的状态 A 可达；更准确地说，每个集合$U_i \subseteq |\mathcal{A}|$（其中 $i \in |G(w)|$）定义如下：

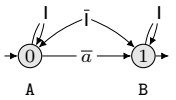
$$z \in U_i \triangleq \exists v \in [\mathcal{A}[\_, z]].\ G(v) \longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[\_, [i]_H].$$

这里，$\mathcal{A}[\_, z]$ 表示图 $\mathcal{A}$，其中 $2^{\mathcal{A}}$ 已被替换为 z（$H^{\mathcal{Q}}[\ , [i]_H]$ 同理）。根据定义，$H^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A}$（当且仅当$\neg(\exists v \in [\mathcal{A}].\ G(v) \longrightarrow H^{\mathcal{Q}})$）当且仅当 $2^{\mathcal{A}} \notin U_{2^H}$。例如，在 H_2中，$\mathsf{C} \in U_1$，因为 $G(a\ a\ a) \longrightarrow H_2^{\mathcal{Q}}$成立：

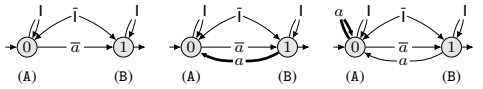


相比之下，在 H_1中，因为 $\mathsf{C} \notin U_1$（即 $\forall v \in [\mathcal{A}].\ G(v) \not\longrightarrow H_1^{\mathcal{Q}}$）成立，所以有 $H_1^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A}$。

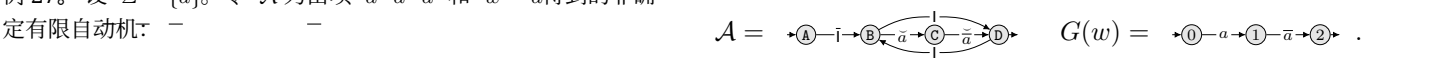
考虑以下 P，它是图 $G(w)$，带有一个等价关系 I、其补关系 I，以及 $\{U_i\}_{i \in |G(w)|}$：



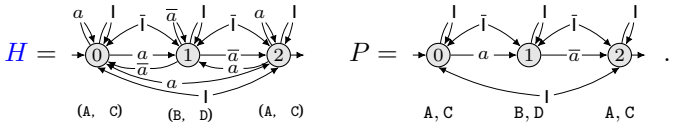
仅利用 P 的数据，我们就可以证明存在一个 $G(w)$ 的饱和。对于每一对 $\langle i, j\rangle$ 顶点，若满足 $(\delta_a^{\mathcal{A}}(U_i) \subseteq U_j$ 且 $\delta_{\bar{a}}^{\mathcal{A}}(U_j) \subseteq U_i)$ 或 $(\delta_a^{\mathcal{A}}(U_i) \subseteq U_j$ 且 $\delta_{\breve{a}}^{\mathcal{A}}(U_j) \subseteq U_i)$（参见定义 29 中的 (P-Sat)），则根据该条件添加带有 a-或 a-标签的边；例如，对于顶点对 $\langle 1, 0\rangle$，由于 $\delta_a^{\mathcal{A}}(U_1) = \emptyset \subseteq U_0$且 $\delta_{\bar{a}}^{\mathcal{A}}(U_0) = \emptyset \subseteq U_1$ 成立，我们添加用于 $\langle 1, 0\rangle \in a^H$（我们无法为 $\langle 1, 0\rangle \in a^H$ 添加边，因为$\delta_a^{\mathcal{A}}(U_1) = \{\mathsf{C}\} \not\subseteq U_0$）。注意，在该策略中添加边时，$\{U_i\}_{x \in |G(w)|}$ 保持不变。尽可能多地添加此类边，我们就可以在保持 $G(w)$ 不变的情况下，从P 得到 $\{U_i\}_{x \in |G(w)|}$（参见引理 30）；最后，H_1 如下获得（从左到右）：



例 28（另一个包含 $\breve{\ }$ 和 I 的例子）。设 $\Sigma = \{a\}$。令 $\mathcal{A}$为由 $\mathrm{I} \cdot (\breve{a} \cdot \breve{a})^*$ 和 $w = aa$得到的非确定有限自动机：



考虑构造 H 的 $G(w)$ 饱和，使得 $H^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A}$。那么，以下 H 是一个解（注意，$\mathsf{D} \notin U_2$；因此，$H^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A}$），而以下 P 是对应的可饱和路径：



（示例见注释45，其中不存在饱和。）

受上文 $\{U_i\}_{i \in |G(w)|}$ 启发，为了刻画可饱和性问题，我们定义了可饱和路径；它们是带有附加数据（一个等价关系 I、其补关系 I，以及 $\{U_i\}_{i \in |G(w)|}$）的路径图，以便适当地进行饱和。对于图 G，H 上的 $\Sigma^{(-)}$ı，我们称 H 为 G的 I-饱和，如果 H 是 G 的边扩展，且满足

- 对于每个 $a \in \Sigma_{(-)}$，$a^H = a^G$；
- I^H 是一个等价关系，且 $\mathrm{I}^H = |H|^2 \setminus \mathrm{I}^H$；
- H 是一致的。

（根据定义，如果存在，H 由 I^H唯一确定。）

定义29（可饱和路径）。对于一个在 $\Sigma^{(-,\breve{\ })}$ı 上的非确定有限自动机 $\mathcal{A}$，以及一个在 $\Sigma^{(-,\breve{\ })}$ı $\setminus \{\mathrm{I}\}$上的词 w，考虑一对 $P = \langle G, \{U_i\}_{i \in |G|}\rangle$ .....

- G 一个 $G(w)$ 的 I-饱和；
- $U_i \subseteq |\mathcal{A}|$ 对于每个 $i \in |G|$。

对于 $a \in \Sigma^{(-,\breve{\ })}$ı，令

$$\mathrm{Con}_a^{\mathcal{A}}(U, U') \triangleq (\delta_a^{\mathcal{A}}(U) \subseteq U' \wedge \delta_{\breve{a}}^{\mathcal{A}}(U') \subseteq U).$$

如果以下三点均成立，则称 P 为 $\not\models_{\mathrm{REL}} w \leq \mathcal{A}$ 的可饱和路径：

(P-s-t) $1^{\mathcal{A}} \in U_{1^G}$和 $2^{\mathcal{A}} \notin U_{2^G}$；**(P-Con)** 对于所有 $a \in \Sigma^{(-)}$ı和 $\langle i, j\rangle \in a^G$，$\mathrm{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$；**(P-Sat)** 对于所有 $a \in \Sigma$ı和 $\langle i, j\rangle \in |G|^2$，$\mathrm{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j) \vee \mathrm{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$。

可饱和路径可以刻画32中的可饱和性问题。我们首先证明以下结论：

引理 30。对于每条可饱和路径 $P = \langle G, \{U_i\}_{i \in |G|}\rangle$ *for* $\not\models_{\mathrm{REL}} w \leq \mathcal{A}$，存在一个 H 的饱和 G，使得 **(P-Con')** 对所有 $a \in \Sigma^{(-)}$ı和 $\langle i, j\rangle \in a^H$均成立，$\mathrm{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$。

证明。从 $H = G$开始，我们添加标记为 $a \in \Sigma^{(-)}$ 的边，同时保持 (P-Con')，重复执行以下操作：

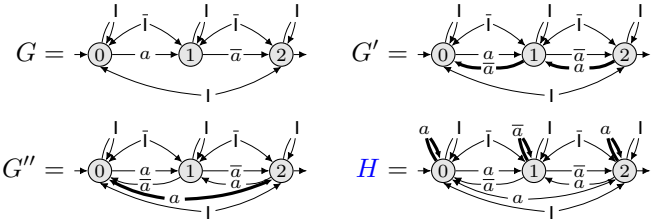
- 如果对于某个 $a \in \Sigma_{(-)}$ 以及 $i, j \in |H|$，$\langle i, j\rangle \in (\mathrm{I}^H \cdot a^H \cdot \mathrm{I}^H) \setminus a^H$ 成立，我们就将该边添加到 H中。于是，$\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$ 如下成立。令 i', j' 满足 $\langle i, i'\rangle \in \mathrm{I}^H$, $\langle i', j'\rangle \in a^H$，且 $\langle j', j\rangle \in \mathrm{I}^H$。对于每个 $z \in |\mathcal{A}|$，我们都有

$$\begin{aligned} z \in U_{i'} &\Longrightarrow z \in \delta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{A}}(U_i) && (U_{i'} \subseteq \delta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{A}}(U_i) \text{ (P-Con')}) \\ &\Longrightarrow z \in U_i && (\delta_{\mathrm{I}}^{\mathcal{A}} = (\mathrm{I}^{\mathcal{A}})^* \text{ is reflexive}) \\ &\cdots \Longrightarrow z \in U_{i'}. && (\mathrm{I}^H \text{ is symmetric}) \end{aligned}$$

  因此 $U_i = U_{i'}$。同理，$U_j = U_{j'}$。于是，$\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$ 可由 $\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_{i'}, U_{j'})$ 推导得到。
- 否则，由于 H $a \in \Sigma$ $i\ j \in |H|$ $\langle i, j\rangle \notin a^H \cup$ 不 $\mathcal{A}$ U_i U_j 是边饱和的，因此存在某个 和 ，。若 Con(,)成立，则我们将 $\langle i, j\rangle \in a^H$ 对应的边添加到 H中。否则，由于 $\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$ 根据 (P-Sat)成立，我们将 $\langle i, \overline{j}\rangle \in a^H$ 对应的边添加到 H中。

于是，H 是 G的一个饱和，如下所述。对于(I-等价)：因为 G 是一个 I-饱和。对于 (a-饱和)：显然。对于(a-一致)：因为 G 是一致的，并且 $\mathrm{I}^H \cdot a^H \cdot \mathrm{I}^H) \cap (\mathrm{I}^H \cdot a^H \cdot \mathrm{I}^H) = \emptyset$ 在 H的构造过程中得以保持。 □

例 31（引理 30）。回顾 $\mathcal{A}$、w以及可饱和路径 $P = \langle G, \{U_i\}_{i\in|G|}\rangle$ 在例 28中。



首先，我们为 $\langle 2, 1\rangle$ 添加带有 a 标签的边，因为 $\langle 2, 1\rangle \in (\mathrm{I}^G \cdot a^G \cdot \mathrm{I}^G)$；类似地，我们为 $\langle 1, 0\rangle$ 添加带有 $\overline{a}$ 标签的边（令 G' 为该图）。其次，我们考虑为 $\langle 0, 2\rangle$ 添加带有 a 或 $\overline{a}$ 标签的边。然后，由于 $\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(\{\mathsf{A}, \mathsf{C}\}, \{\mathsf{A}, \mathsf{C}\})$，我们为 $\langle 0, 2\rangle$ 添加带有 a 标签的边（注意， , , = $\{\ \} \not\subseteq \{\ ,\ \}$ − a $\langle 2, 0\rangle$ $\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(\{$ A C}、{A C})，因为 $\delta_{\underset{a}{\sim}}^{\mathcal{A}}(\{\mathsf{A}\ \mathsf{C}\})\ \mathsf{D}\ \mathsf{A}\ \mathsf{C})$；我们还为 添加带有 -标签的边，因为 $\langle 2, 0\rangle$、$\langle 0, 2\rangle \in \mathrm{I}^{G'}$（令 G'' 为该图）。以类似方式添加其他边后，即可得到 $G(w)$ 的饱和 H。

引理 32。对于一个在 $\Sigma^{(-,\smile)}$ı 上、具有 $\mathcal{A}$ 的非确定有限自动机，以及一个在 $\Sigma^{(-,\smile)}$ı $\setminus \{\mathrm{I}\}$ 上的词，以下两者等价：

- 存在一个 $G(w)$ 的饱和 H，使得 $H^{\mathcal{Q}} \not\models w \leq \mathcal{A}$。
- 存在一条适用于 $\not\models_{\mathrm{REL}}$ $w \leq \mathcal{A}$ 的可饱和路径 P。

证明。$\Longleftarrow$：令 $P = \langle G, \{U_i\}_{i\in|G|}\rangle$。令 H 为 G 的饱和（引理 30）。则 $H^{\mathcal{Q}} \not\models w \leq \mathcal{A}$ 如下成立。对于$H^{\mathcal{Q}} \models w$：因为 $G(w) \longrightarrow H \longrightarrow H^{\mathcal{Q}}$（参见引理 17）。对于 $H^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A}$：假设 $H^{\mathcal{Q}} \models \mathcal{A}$。那么存在一个词 $a_1 \ldots a_m \in [\mathcal{A}]$ 使得 $G(a_1 \ldots a_m) \longrightarrow H^{\mathcal{Q}}$。根据 $a_1 \ldots a_m \in [\mathcal{A}]$，存在 z_0、……、$z_m \in |\mathcal{A}|$ 使得$\langle z_0, z_m\rangle = \langle 1^{\mathcal{A}}, 2^{\mathcal{A}}\rangle$，并且对于 $k \in [m]$，$z_k \in \delta_{a_k}^{\mathcal{A}}(z_{k-1})$。根据 $G(a_1 \ldots a_m) \longrightarrow H^{\mathcal{Q}}$，存在 l_0、……、$l_m \in |H|$ 使得 $\langle l_0, l_m\rangle = \langle 1^H, 2^H\rangle$，并且对于 $k \in [m]$，$\langle l_{k-1}, l_k\rangle \in a_k^H$。然后，

子引理。对于每个 $k \in [0, m]$, $z_k \in U_{l_k}$。

证明。对 k 归纳。情况 $k = 0$：根据 $1^{\mathcal{A}} \in U_{1^H}$ (P-s-t)。情况 $k \geq 1$：我们有

$$\begin{aligned} z_k \in \delta_{a_k}^{\mathcal{A}}(z_{k-1}) &\subseteq \delta_{a_k}^{\mathcal{A}}(U_{l_{k-1}}) && (\text{By } z_{k-1} \in U_{l_{k-1}} \text{ (IH)}) \\ &\subseteq U_{l_k}. && (\text{By } \langle l_{k-1}, l_k\rangle \in a_k^H \text{ (P-Con')}) \quad \square \end{aligned}$$

由于 $z_m \in U_{l_m}$ 与 $2^{\mathcal{A}} \notin U_{2^H}$ (P-s-t) 矛盾，$H^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A}$。

$\Longrightarrow$：我们定义 $P = \langle G, \{U_i\}_{i\in|G|}\rangle$ 如下：

- G 是 $G(w)$的边扩展，满足：对于$a \in \{\mathrm{I}, \mathrm{I}\}$ 和 $a^G = a^{G(w)}$，对于 $a \in \Sigma_{(-)}$；
- 中的每个集合 $U_i \subseteq |\mathcal{A}|$ 定义如下：

$$z \in U_i \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \exists v \in [\mathcal{A}[\_, z]].\ G(v) \longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[\_, [i]_H].$$

这里，$\mathcal{A}[\ , z]$ 表示图 $\mathcal{A}$，其中 $2^{\mathcal{A}}$ 已被替换为 z（$H^{\mathcal{Q}}[\ , [i]_H]$同理）。 −

于是，P 是 $\not\models_{\mathrm{REL}}$ $w \leq \mathcal{A}$的可饱和路径，如下所示。

子引理。设 $a \in \Sigma^{(-,\smile)}$ı。如果 $G(a) \longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[[i]_H, [j]_H]$，则$\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$。（这里，$H^{\mathcal{Q}}[[i]_H, [j]_H]$表示图$H^{\mathcal{Q}}$，其中 $1^{H^{\mathcal{Q}}}$和 $2^{H^{\mathcal{Q}}}$分别已被 $[i]_H$和$[j]_H$替换。）

证明。令 $z \in U_i$。根据定义，存在 $v \in [\mathcal{A}[\ , z]]$使得 $G(v)$ $\longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[\ , [i]_H]$。结合 $G(a)$ $\longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[[i]_H, [j]_H]$可得 $G(va)$ $\longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[\ , [j]_H]$。因此，对于每个$z' \in \delta_a^{\mathcal{A}}(z)$，都有 $z' \in U_j$。于是 $\delta_a^{\mathcal{A}}(U_i) \subseteq U_j$。同样，由 $G(\bar{a}) \longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[[j]_H, [i]_H]$，可得 $\delta_{\bar{a}}^{\mathcal{A}}(U_j) \subseteq U_i$。 □

对于 (P-s-t)：$1^{\mathcal{A}} \in U_{1^G}$ 可通过考察 $v = \mathrm{I}$ 来证明。$2^{\mathcal{A}} \notin U_{2^G}$ 是因为 $H^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A}$。对于 (P-Con)：令 $\langle i, j\rangle \in a^G$。由于 $G(a)$ $\longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[[i]_H, [j]_H]$（因为 H是 G的饱和），我们有 $\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$（子引理）。对于 (P-Sat)：对于每个 $a \in \Sigma$ 和 i, $j \in |G|$，由于 $G(a)$ $\longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[[i]_H, [j]_H]$ 或 $G(a) \longrightarrow H^{\mathcal{Q}}[[i]_H, [j]_H]$ 总是成立，因此我们有 $\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$ ∨ $\mathsf{Con}_a^{\mathcal{A}}(U_i, U_j)$（子引理）。 − □

定理 33。对于字母表 $\Sigma^{(-,\smile)}$ 上的两个非确定有限自动机 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ı，以下条件等价：

- $\not\models_{\mathrm{REL}}$ $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$。
- $\exists w \in [\mathcal{A}]$. 存在一条针对 $\not\models_{\mathrm{REL}}$ $w \leq \mathcal{B}$ 的可饱和路径。

证明。我们有

$\not\models_{\mathrm{REL}} \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \Longleftrightarrow \exists w \in [\mathcal{A}].\exists H \in \mathcal{S}\ (G\ (w))$. $H^{\mathcal{Q}} \not\models \mathcal{A} \leq \mathcal{B}$（引理 21）$\Longleftrightarrow \exists w \in [\mathcal{A}].\exists H \in \mathcal{S}\ (G$ $(w))$. $H^{\mathcal{Q}} \not\models w \leq \mathcal{B}$（因为 $H^{\mathcal{Q}} \models w$ 和 $H^{\mathcal{Q}} \models \mathcal{A}$ 根据 $H \in \mathcal{S}\ (G\ (w))) \Longleftrightarrow \exists w \in [\mathcal{A}]$. 存在一条可饱和路径，经过 $\not\models_{\mathrm{REL}}$ $w \leq \mathcal{B}$.（引理 32）

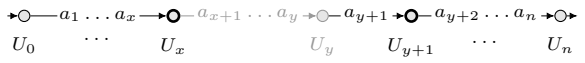
□

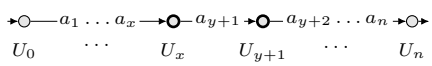
C. 指数规模模型性质

可饱和路径的刻画（定理 33）为 ExKAterms 提供了另一个有界模型性质（参见引理 21），如下所述。下面的证明类比于自动机理论中广为人知的泵引理。

引理 34 (指数规模模型性质). 对于所有定义在 $\Sigma^{(-,\smile)}_{\mathsf{I}}$ 上的非确定有限自动机 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$，若 $\not\models_{\mathrm{REL}} \mathcal{A} \leq \mathcal{B}$，则存在一个 2 点结构 $\ddot{\mathfrak{A}}$，其大小为 $\#(|\ddot{\mathfrak{A}}|) \leq \#(|\mathcal{A}|) \times 2^{\#(|\mathcal{B}|)}$，使得 $\ddot{\mathfrak{A}} \not\models_{\mathrm{REL}} \mathcal{A} \leq \mathcal{B}$。

证明。根据定理33，存在一个词 $w = a_1 \dots a_n \in [\mathcal{A}]$和一条关于 $\not\models_{\mathrm{REL}} w \leq \mathcal{B}$的可饱和路径 $P = \langle G, \{U_i\}_{i\in[0,n]}\rangle$。不失一般性，我们可以假设 n 是此类词中最小的。由于 $w \in [\mathcal{A}]$，令 $\{s_i\}_{i\in[0,n]}$ 为满足 $\langle s_0, s_n\rangle = \langle 1^{\mathcal{A}}, 2^{\mathcal{A}}\rangle$ 且对 $i \in [n]$有 $s_x \in \delta^{\mathcal{A}}_{a_i}(s_{i-1})$ 的对象。假设 $n+1 > \#(|\mathcal{A}|) \times 2^{\#(|\mathcal{B}|)}$。根据鸽巢原理，存在 $0 \leq x < y \leq n$ 使得 $\langle s_x, U_x\rangle = \langle s_y, U_y\rangle$。令 $w' \triangleq a_1 \dots a_x a_{y+1} \dots a_n$。令 P' 为这样的 P：将 $\langle y, y+1\rangle \in a^G_{y+1}$ 对应边的源替换为 x，并移除 $x+1$ 与 y 之间的顶点：

$P =$ 

$P' =$ 

（为简便起见，省略了 I 标记的边或 I 标记的边以及一些中间顶点。）这里，当 $\langle x, y+1\rangle \in \mathsf{I}^G$ 且 $a_{y+1} = \mathsf{I}$ 时，P' 的图并不一致；因此，对于每一对 $\langle i, j\rangle$，只要 $i \neq j \wedge \mathsf{Con}^{\mathcal{B}}\mathsf{I}(U_i, U_j)$，我们就将标签 I 替换为标签 $\mathsf{I}_\smile$。（$i \neq j$ 表示关系 I 的自反性，而 $\mathsf{Con}^{\mathcal{B}}\mathsf{I}(U_i, U_j)$ 则用于保持（P-Con）。）于是，根据 $s_x = s_y$，$w' \in [\mathcal{A}]$ 成立；由于 P' 的每个条件都可由 P 的条件（带有 $U_x = U_y$）以及 P' 是 P 的（几乎）一个“子图”这一事实得到证明，P' 是 $\not\models_{\mathrm{REL}} w' \leq \mathcal{B}$ 的一条可饱和路径（详见附录 F）。然而，这与 n 是最小的事实矛盾。因此，$\#(|G|) = n+1 \leq \#(|\mathcal{A}|) \times 2^{\#(|\mathcal{B}|)}$。最后，$\ddot{\mathfrak{A}} = H^{\mathfrak{Q}}$ 就是所需的二指向结构，其中 H 是由引理 30 得到的 G的饱和。 □

定理 35. *ExKA* 项（关于二元关系）的等式理论是 *co NEXP* 可判定的。

证明。与引理 22类似，只需证明以下问题属于 NEXP：给定 ExKA 项 t、s，$\not\models_{\mathrm{REL}} t \leq s$ 是否成立？根据引理 34（结合命题 26），我们可以给出以下算法：

1）非确定性地取一个大小为 2-指向结构 $\ddot{\mathfrak{A}}$，其大小为 $\#(|\ddot{\mathfrak{A}}|) \leq \#(|\mathcal{A}_t|) \times 2^{\#(|\mathcal{A}_s|)}$。这里，$\mathcal{A}_t$ 和 $\mathcal{A}_s$ 分别是由 t和 s得到的非确定有限自动机（定义 25）。2）若 $\ddot{\mathfrak{A}} \not\models t \leq s$，则返回 true；否则返回 false。

那么 $\not\models_{\mathrm{REL}} t \leq s$，如果某次执行返回真；$\models_{\mathrm{REL}} t \leq s$，否则。这里，$\ddot{\mathfrak{A}} \not\models t \leq s$ 可在指数时间内判定（命题20）。 □

D. 从可饱和路径到字自动机

对于某些情形，给定非确定有限自动机 $\mathcal{A}$，我们可以构造一个非确定有限自动机 $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$，使得：对于每个在 $\Sigma^{(-,\smile)}_{\mathsf{I}} \setminus \{\mathsf{I}\}$ 上的词 w，以下条件等价：

- $w \in [\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]$;
- 对于 $\not\models_{\mathrm{REL}} w \leq \mathcal{A}$，存在一条可饱和路径。

为此，首先令

$$\varphi(\mathcal{U}, U) \triangleq \bigwedge \begin{cases} U \times (|\mathcal{A}| \setminus U) \times U \times (|\mathcal{A}| \setminus U) \subseteq \mathcal{U} \\ \forall \langle t_1, t_2, t_3, t_4\rangle \in \mathcal{U}. \forall a \in \Sigma_{\mathsf{I}}. \\ \quad \bigvee \begin{cases} \delta^{\mathcal{A}}_a(t_1) \subseteq U \wedge t_2 \notin \delta^{\mathcal{A}}_{\breve{a}}(U) \\ \delta^{\mathcal{A}}_{\bar{a}}(t_3) \subseteq U \wedge t_4 \notin \delta^{\mathcal{A}}_{\bar{\breve{a}}}(U) \end{cases} \end{cases}$$

我们证明以下引理：

引理 36。 令 $\mathcal{A}$ 是定义在 $\Sigma^{(-,\smile)}_{\mathsf{I}}$ 上的 $w = a_1 \dots a_n$ 词 $\Sigma^{(-,\smile)}_{\mathsf{I}} \setminus \{\mathsf{I}\}$。回顾 *(P-Sat)* 的公式：

$$\forall \langle i, j\rangle \in [0,n]^2. \forall a \in \Sigma_{\mathsf{I}}. \bigvee \begin{cases} \delta^{\mathcal{A}}_a(U_i) \subseteq U_j \wedge \delta^{\mathcal{A}}_{\breve{a}}(U_j) \subseteq U_i \\ \delta^{\mathcal{A}}_{\bar{a}}(U_i) \subseteq U_j \wedge \delta^{\mathcal{A}}_{\bar{\breve{a}}}(U_j) \subseteq U_i \end{cases}$$

该公式等价于以下公式：[8]

$$\exists \mathcal{U} \subseteq |\mathcal{A}|^4. \forall i \in [0,n].\ \varphi(\mathcal{U}, U_i).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned} &\delta^{\mathcal{A}}_a(U_i) \subseteq U_j \ \wedge\ \delta^{\mathcal{A}}_{\breve{a}}(U_j) \subseteq U_i \\ &\Leftrightarrow \delta^{\mathcal{A}}_a(U_i) \subseteq U_j \ \wedge\ |\mathcal{A}| \setminus U_i \subseteq |\mathcal{A}| \setminus \delta^{\mathcal{A}}_{\breve{a}}(U_j) \\ &\Leftrightarrow (\forall t_1 \in U_i. \delta^{\mathcal{A}}_a(t_1) \subseteq U_j) \wedge (\forall t_2 \in |\mathcal{A}| \setminus U_i. t_2 \notin \delta^{\mathcal{A}}_{\breve{a}}(U_j)) \\ &\Leftrightarrow \forall t_1 \in U_i. \forall t_2 \in |\mathcal{A}| \setminus U_i.\ \delta^{\mathcal{A}}_a(t_1) \subseteq U_j \wedge t_2 \notin \delta^{\mathcal{A}}_{\breve{a}}(U_j). \end{aligned}$$

因此令

$$\xi(U) \triangleq \bigvee \begin{cases} \delta^{\mathcal{A}}_a(t_1) \subseteq U \wedge t_2 \notin \delta^{\mathcal{A}}_{\breve{a}}(U) \\ \delta^{\mathcal{A}}_{\bar{a}}(t_3) \subseteq U \wedge t_4 \notin \delta^{\mathcal{A}}_{\bar{\breve{a}}}(U) \end{cases};$$
$$\nu(U) \triangleq U \times (|\mathcal{A}| \setminus U) \times U \times (|\mathcal{A}| \setminus U),$$

我们有

$$\begin{aligned} &\forall \langle i, j\rangle \in [0,n]^2. \forall a \in \Sigma_{\mathsf{I}}. \bigvee \begin{cases} \delta^{\mathcal{A}}_a(U_i) \subseteq U_j \wedge \delta^{\mathcal{A}}_{\breve{a}}(U_j) \subseteq U_i \\ \delta^{\mathcal{A}}_{\bar{a}}(U_i) \subseteq U_j \wedge \delta^{\mathcal{A}}_{\bar{\breve{a}}}(U_j) \subseteq U_i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \forall \langle i, j\rangle \in [0,n]^2. \forall a \in \Sigma_{\mathsf{I}}. \forall \langle t_1, t_2, t_3, t_4\rangle \in \nu(U_i).\ \xi(U_j) \\ &\Leftrightarrow \forall \langle t_1, t_2, t_3, t_4\rangle \in \bigcup_{i=0}^{n} \nu(U_i).\ \forall a \in \Sigma_{\mathsf{I}}. \forall i \in [0,n].\ \xi(U_i) \\ &\Leftrightarrow \exists \mathcal{U} \subseteq |\mathcal{A}|^4.\ \bigcup_{i=0}^{n} \nu(U_i) \subseteq \mathcal{U} \quad \wedge \\ &\qquad \forall \langle t_1, t_2, t_3, t_4\rangle \in \mathcal{U}. \forall a \in \Sigma_{\mathsf{I}}. \forall i \in [0,n].\ \xi(U_i) \qquad (\diamondsuit) \\ &\Leftrightarrow \exists \mathcal{U} \subseteq |\mathcal{A}|^4. \forall i \in [0,n].\ \nu(U_i) \subseteq \mathcal{U} \quad \wedge \\ &\qquad \forall \langle t_1, t_2, t_3, t_4\rangle \in \mathcal{U}. \forall a \in \Sigma_{\mathsf{I}}.\ \xi(U_i) \\ &\Leftrightarrow \exists \mathcal{U} \subseteq |\mathcal{A}|^4. \forall i \in [0,n].\ \varphi(\mathcal{U}, U_i). \end{aligned}$$

[8]这种变换也用于 [14]中的自动机构造（粗略地说，$\mathcal{U}$ 对应于 [14]中的“P”），但由于逆操作，过程稍微复杂一些。

这里，对于（♢），$\Longrightarrow$：令 $\mathcal{U}=\bigcup_{i=0}^{n}\nu\left(U_i\right)$。$\Longleftarrow$：因为公式 $\forall\langle t_1,t_2,t_3,t_4\rangle\in\mathcal{U}'.\forall a\in\Sigma_{\mathsf{I}}.\forall i\in[0,n].\ \xi\left(U_i\right)$ 对任意 $\mathcal{U}'\subseteq\mathcal{U}$ 和 $\bigcup_{i=0}^{n}\nu\left(U_i\right)\subseteq\mathcal{U}$成立。□

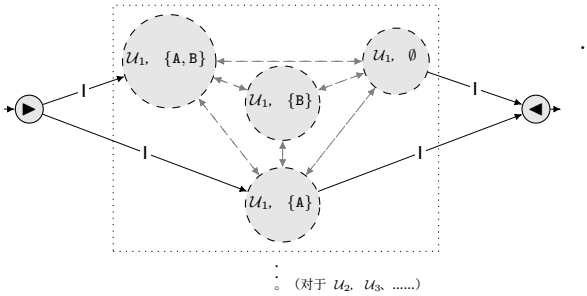
通过使用引理 36 关于(P-Sat)的公式，我们可以逐点检查条件(P-Sat)（无需考虑对$[0,n]^2$）。利用这一点，我们给出以下非确定有限自动机构造：

定义 37。对于一个 $\mathcal{A}$ 上的非确定有限自动机 $\Sigma^{(-,\smile)}\ \mathsf{I}$，令 $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$ 为定义在 $\Sigma^{(-,\smile)}\ \mathsf{I}$ 上的非确定有限自动机：

- $|\mathcal{A}^{\mathcal{S}}|\triangleq\{\blacktriangleright,\blacktriangleleft\}\cup\{\langle\mathcal{U},U\rangle\in\wp(|\mathcal{A}|^4)\times\wp(|\mathcal{A}|)\mid\varphi(\mathcal{U},U)\wedge\delta_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}(U)\subseteq U\}$;
- $\mathsf{I}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$ is the minimal set such that
  - for all $\langle\mathcal{U},U\rangle\in|\mathcal{A}^{\mathcal{S}}|$ s.t. $1^{\mathcal{A}}\in U$, $\langle\blacktriangleright,\langle\mathcal{U},U\rangle\rangle\in\mathsf{I}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$;
  - for all $\langle\mathcal{U},U\rangle\in|\mathcal{A}^{\mathcal{S}}|$ s.t. $2^{\mathcal{A}}\notin U$, $\langle\langle\mathcal{U},U\rangle,\blacktriangleleft\rangle\in\mathsf{I}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$;
- for each $a\in\Sigma_{\mathsf{I}}^{(-,\smile)}$, $a^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$ is the minimal set such that for every $\langle\mathcal{U},U\rangle,\langle\mathcal{U},U'\rangle\in|\mathcal{A}^{\mathcal{S}}|$ s.t. $\mathrm{Con}_a^{\mathcal{A}}(U,U')$, $\langle\langle\mathcal{U},U\rangle,\langle\mathcal{U},U'\rangle\rangle\in a^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$ holds;
- $1^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}=\blacktriangleright$ and $2^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}=\blacktriangleleft$.

（这里，$\blacktriangleright$ 和 $\blacktriangleleft$ 是两个新的符号。$\mathcal{U}$ 引入它是为了处理(P-Sat)，参见引理 36。注意，$\mathcal{U}$ 在转移中是不变的。）

例如，当 $|\mathcal{A}|=\{\mathsf{A},\mathsf{B}\}$ 和 $\langle 1^{\mathcal{A}},2^{\mathcal{A}}\rangle=\langle\mathsf{A},\mathsf{B}\rangle$时，非确定有限自动机 $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$ 具有以下形式，其中每个虚线状态 $\langle\mathcal{U}_1,U\rangle$ 是否存在取决于 $\varphi(\mathcal{U}_1,U)\wedge\delta_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}(U)\subseteq U$ 是否成立，而从 $\langle\mathcal{U}_1,U\rangle$ 到 $\langle\mathcal{U}_1,U'\rangle$ 的每条虚线边上带有 a标记的边是否存在，则取决于 $\mathrm{Con}_a^{\mathcal{A}}(U,U')$ 是否成立：



使用这一变换，$\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$ 满足以下条件：

引理38 (完备性（关于 $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$))。对于任意在 $\Sigma^{(-,\smile)}\ \mathsf{I}$ 上的非确定有限自动机 $\mathcal{A}$ 和在 $\Sigma^{(-,\smile)}\ \mathsf{I}$ 上的词 $w\setminus\{\mathsf{I}\}$，我们有：$w\in[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]\Longleftarrow$ 存在一条关于 $\not\models_{\mathrm{REL}}w\leq\mathcal{A}$ 的可饱和路径。

证明。设 $w=a_1\ldots a_n$ 和 $P=\langle G,\{U_i\}_{i\in[0,n]}\rangle$ 是关于 $\not\models_{\mathrm{REL}}w\leq\mathcal{A}$ 的一条可饱和路径。令 $\mathcal{U}\triangleq\bigcup_{i\in[0,n]}U_i\times\left(|\mathcal{A}|\setminus U_i\right)\times U_i\times\left(|\mathcal{A}|\setminus U_i\right)$。于是我们有

- $\langle\blacktriangleright,\langle\mathcal{U},U_0\rangle\rangle\in\delta^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}\ \mathsf{I}$（根据 （P-s-t））；
- 对于所有 $i\in[n]$，$\langle\langle\mathcal{U},U_{i-1}\rangle,\langle\mathcal{U},U_i\rangle\rangle\in\delta_{a_i}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$（根据 （P-Con））；
- $\langle\langle\mathcal{U},U_n\rangle,\blacktriangleleft\rangle\in\delta^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}\ \mathsf{I}$（根据 （P-s-t））。

对于 $i\in[0,n]$，$\langle\mathcal{U},U_i\rangle\in|\mathcal{A}^{\mathcal{S}}|$ 成立，因为 $\varphi\left(\mathcal{U},U_i\right)$ 根据(P-Sat) 和引理 36 成立，而 $\delta_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}\left(U_i\right)\subseteq U_i$ 根据(P-Con)成立。因此，$w\in[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]$。□

引理 39（I^{-}-自由片段的可靠性）。对于每个定义在 $\Sigma^{(-,\smile)}\ \mathsf{I}$ 上的 *NFA* $\mathcal{A}$，以及定义在 $\Sigma^{(-,\smile)}\ \mathsf{I}\setminus\{\mathsf{I}\}$上的词 w，若 $\mathcal{A}$ 不包含 I^{-}，则有：

$w\in[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]\Longrightarrow$ 存在一条对应于 $\models_{\mathrm{REL}}w\leq\mathcal{A}$的可饱和路径。证明。设 $w=a_1\ldots a_n$。根据 $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$的形式，存在 $\mathcal{U}$、U_0、.....以及 U_n，使得

- $\langle\blacktriangleright,\langle\mathcal{U},U_0\rangle\rangle\in\delta_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$;
- for every $i\in[n]$, $\langle\langle\mathcal{U},U_{i-1}\rangle,\langle\mathcal{U},U_i\rangle\rangle\in\delta_{a_i}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$;
- $\langle\langle\mathcal{U},U_n\rangle,\blacktriangleleft\rangle\in\delta_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$.

令 H 为 $G(w)$ 的 I-饱和，使得

$$\mathsf{I}^{H}\text{ is the identity relation.}$$

H 是一致的，因为 $G(w)$ 是一致的，而 I^{H} 是恒等关系。H 是 $G(w)$ 的边扩展，因为 $\mathsf{I}^{H}\supseteq\mathsf{I}^{G(w)}=\emptyset$ 以及 $\mathsf{I}^{H}=|H|^2\setminus\mathsf{I}^{H}\supseteq\mathsf{I}^{G(\bar{w})}$。因此，$H$ 确实是 $G(w)$ 的 I-饱和。

接下来，$P=\langle H,\{U_i\}_{i\in[0,n]}\rangle\not\models_{\mathrm{REL}}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}w\leq\mathcal{A}$ 是一个可饱和路径，具体如下。对于 (P-s-t)：根据 I 的定义，$1^{\mathcal{A}}\in U_0$ 和 $2^{\mathcal{A}}\notin U_n$。对于 $a\in\Sigma^{(-)}$ 的 (P-Con)：根据 $a_i^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$ 的定义，$\mathrm{Con}_{a_i}^{\mathcal{A}}(U_{i-1},U_i)$。（注意，其他边不存在。）对于 $a=\mathsf{I}$ 的 (P-Con)：因为 I^{H} 是恒等关系，并且对于每个 $i\in[0,n]$，$U_i\in\delta_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}(U_i)$（根据 $|\mathcal{A}^{\mathcal{S}}|$的定义）。对于 $a=\mathsf{I}$ 的 (P-Con)：因为 I 不出现在 $\mathcal{A}$ 中，所以对于每个 i，$\delta^{\mathcal{A}}\mathsf{I}\left(U_i\right)=\emptyset\subseteq U_j$始终成立。因此，$\mathrm{Con}^{\mathcal{A}}\mathsf{I}\left(U_i,U_j\right)$。对于 (P-Sat)：因为对于每个 $i\in[0,n]$，$\mathcal{U}$满足 $\varphi(\mathcal{U},U_i)$（根据 $|\mathcal{A}^{\mathcal{S}}|$的定义），依据引理 36。

□

定理 40。对于任意两个 *NFAs* $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$，在 $\Sigma^{(-,\smile)}\ \mathsf{I}$ 上，若 $\mathcal{B}$ 不包含I^{-}，则有

$$\not\models_{\mathrm{REL}}\mathcal{A}\leq\mathcal{B}\quad\Longleftrightarrow\quad[\mathcal{A}]\cap[\mathcal{B}^{\mathcal{S}}]\neq\emptyset.$$

证明。我们有

$\not\models_{\mathrm{REL}}\mathcal{A}\leq\mathcal{B}$

$\Longleftrightarrow\exists w\in[\mathcal{A}].$ 存在一条关于 $\not\models_{\mathrm{REL}}w\leq\mathcal{B}.$ 的可饱和路径 (Thm. 33)

$\Longleftrightarrow\exists w\in[\mathcal{A}].\ w\in[\mathcal{B}^{\mathcal{S}}]$ (Lems. 38, 39)

$\Longleftrightarrow[\mathcal{A}]\cap[\mathcal{B}^{\mathcal{S}}]\neq\emptyset.$ □

定理 41。不含I^{-} 的 *ExKA* 项的等式理论（关于二元关系）是 *PSPACE* 完全的。

证明。关于困难性：根据命题 4，由于项类包含$\mathcal{T}_{\{\cdot,\cup,\ ^*\}}$。关于上界：类似于引理 22，结合（余）NPSPACE = PSPACE（Savitch 定理 [33]），只需证明以下问题属于 NPSPACE：给定 ExKA 项 t、s 不含 I^{-}，是否成立？根据定理 40（结合命题 26），我们可以将该问题归约为 NFAs 的空性问题（其大小关于输入呈指数增长）。因此，通过使用 NFAs 非空性问题的标准动态算法（其本质上是图可达性问题），我们可以给出一个非确定性多项式空间算法。□

E. 关于完整 *ExKA* 项情形的备注

此外，我们指出，对于不含补关系的 ExKA 项，可靠性同样成立。

引理42（a^--自由片段，参见引理 39）：对于任意定义在 $\Sigma^{(-,\smile)}\cup\{\mathsf{I}\}$ 上的非确定有限自动机 $\mathcal{A}$ 和定义在 $\Sigma^{(-,\smile)}\cup\{\mathsf{I}\}\setminus\{\mathsf{I}\}$上的词 w，如果对于任意 $a\in\Sigma$，w 都不包含 a^-，则有：

$w\in[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]\Longrightarrow$ 存在一条通往 $\nvDash_{\mathrm{REL}} w\le\mathcal{A}$ 的可饱和路径。

证明。令 $w=a_1\dots a_n$。根据 $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$ 的形式，存在 $\mathcal{U}$、U_0、。。。以及 U_n，使得

- $\langle\blacktriangleright,\langle\mathcal{U},U_0\rangle\rangle\in\delta_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$；
- for every $i\in[n]$, $\langle\langle\mathcal{U},U_{i-1}\rangle,\langle\mathcal{U},U_i\rangle\rangle\in\delta_{a_i}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$；
- $\langle\langle\mathcal{U},U_n\rangle,\blacktriangleleft\rangle\in\delta_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$.

令 H 为 $G(w)$ 的 I-饱和，使得

$$\mathsf{I}^H=\{\langle i,j\rangle\in[0,n]^2\mid i=j\vee\neg\,\mathrm{Con}_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}(U_i,U_j)\}.$$

我们有 $\mathrm{Con}^{\mathcal{A}}\mathsf{I}(U_i,U_j)\vee\mathrm{Con}_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}(U_i,U_j)$，因为 $\mathcal{U}$ 对每个 $i\in[0,n]$ 都满足 $\varphi(\mathcal{U},U_i)$（引理 36）。如果 $\neg\,\mathrm{Con}^{\mathcal{A}}\mathsf{I}(U_i,U_j)$，则 $\mathrm{Con}_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}(U_i,U_j)$；因此 $U_i=U_j$。所以，二元关系 $\{\langle i,j\rangle\in[0,n]^2\mid\neg\,\mathrm{Con}^{\mathcal{A}}\mathsf{I}(U_i,U_j)\}$ 是对称且传递的；因此 I^H 是等价关系。此外，H 是一致的，因为对于任意 $a\in\Sigma$，a^- 都不出现在 H 中。H 是 $G(w)$ 的边扩展，因为 $\mathsf{I}^H\supseteq\mathsf{I}^{G(w)}=\emptyset$ 且 $\mathsf{I}^H\supseteq\mathsf{I}^{G(w)}$（根据 I^H 的定义）。因此，H 确实是 $G(w)$ 的 I-饱和。

那么，$P=\langle H,\{U_i\}_{i\in[0,n]}\rangle$ 是 $\nvDash_{\mathrm{REL}} w\le\mathcal{A}$ 的可饱和路径，如下所示。对于 (P-s-t)、(P-Sat) 和 (P-Con)，对于$a\in\Sigma^{(-)}$：对于引理 39，同样如此。对于 $a=\mathsf{I}$ 的 (P-Con)：对于每个 $\langle i,j\rangle\in\mathsf{I}^H$，如果 $i=j$，则 $\delta_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}(U_i)\subseteq U_j$，根据 $|\mathcal{A}^{\mathcal{S}}|$的定义；因此 $\mathrm{Con}_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}(U_i,U_j)$。如果 $\neg\,\mathrm{Con}^{\mathcal{A}}\mathsf{I}(U_i,U_j)$，则根据 (P-Sat)，$\neg\,\mathrm{Con}_{\mathsf{I}}^{\mathcal{A}}(U_i,U_j)$。对于 $a=\mathsf{I}$ 的 (P-Con)：根据 I^H 的定义，对于每个 $\langle i,j\rangle\in[0,n]^2\setminus\mathsf{I}^H$，我们都有 $\mathrm{Con}^{\mathcal{A}}\mathsf{I}(U_i,U_j)$。□

定理 43。对于在 $\Sigma^{(-,\smile)}\cup\{\mathsf{I}\}$ 上定义的任意非确定有限自动机 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$，如果 $\mathcal{A}$ 对于任何 $a\in\Sigma$ 都不包含 a^-，那么有

$$\nvDash_{\mathrm{REL}}\mathcal{A}\le\mathcal{B}\quad\Longleftrightarrow\quad[\mathcal{A}]\cap[\mathcal{B}^{\mathcal{S}}]\neq\emptyset.$$

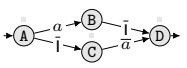
证明。参见定理 40（使用引理 42而非引理 39）。□

定理 44。不含 a^-（对于任意 $a\in\Sigma$）的 *ExKA* 项的等式理论（关于二元关系）是 *PSPACE* 完全的。

证明。参见定理 41（使用定理 43 而非定理 40）。□

然而，我们尚未确定 ExKA 项的等式理论的精确复杂度，尽管它在 coNEXP 中是可判定的（定理 35），且至少是 PSPACE-hard 的（命题 4）。问题情况是 I^- 和 a^- 同时出现的情况。我们的自动机构造无法应用于完整情况，具体如下：

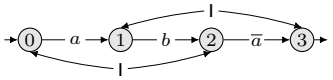
注记 45（自动机构造的失败（定义37）对于（完整）ExKA 项）。考虑 ExKA 项的可靠性（引理 39、42）：对于给定的词 $w\in[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]$，构造一条针对 $\nvDash_{\mathrm{REL}} w\le\mathcal{A}$ 的可饱和路径。引理 39、42 中证明的核心是，I-饱和总是存在于 $G(w)$ 中。然而，对于（完整）ExKA 项，情况有所不同。例如，设 $\mathcal{A}$ 是由项 $a\mathsf{I}\cup\mathsf{I}a$（参见方程（2））得到的非确定有限自动机，且 $w=aba$：

$\mathcal{A}=$  $G(w)=$.

那么 $w\in[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]$ 成立，因为

- $\langle\blacktriangleright,\langle\mathcal{U},U_0\rangle\rangle\in\delta^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}\mathsf{I}$；
- $\langle\langle\mathcal{U},U_0\rangle,\langle\mathcal{U},U_1\rangle\rangle\in\delta_a^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$；
- $\langle\langle\mathcal{U},U_1\rangle,\langle\mathcal{U},U_2\rangle\rangle\in\delta_b^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$；
- $\langle\langle\mathcal{U},U_2\rangle,\langle\mathcal{U},U_3\rangle\rangle\in\delta_a^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}$；
- $\langle\langle\mathcal{U},U_3\rangle,\blacktriangleleft\rangle\in\delta^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}\mathsf{I}$，

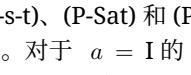
令 $U_0=U_2=\{\mathsf{A},\mathsf{D}\}$，$U_1=U_3=\{\mathsf{B},\mathsf{C}\}$，且 $\mathcal{U}=\bigcup_{i\in[0,3]}U_i\times(|\mathcal{A}|\setminus U_i)\times U_i\times(|\mathcal{A}|\setminus U_i)$。然而，$\nvDash_{\mathrm{REL}} w\le\mathcal{A}$ 不存在任何可饱和路径，因为$\models_{\mathrm{REL}} w\le\mathcal{A}$（方程 (2)）。此外，若存在，则 $G(w)$ 的 I-饱和 H 应满足 $\langle0,2\rangle\in\mathsf{I}^H$（由 $\mathsf{I}a\in[\mathcal{A}]$）以及 $\langle1,3\rangle\in\mathsf{I}^H$（由 $a\mathsf{I}\in[\mathcal{A}]$），其中 $H^{\mathcal{Q}}\not\models\mathcal{A}$：



.

然而，H 不满足(a-一致)；因此，我们无法构造一致的 H 即使 $w\in[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]$。

注记46。人们可能会认为 $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$ 表现得像是一个非确定有限自动机的补关系 $\mathcal{A}$（参见定理40、43）。注意，$\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$ 并非非确定有限自动机的语言补集 $\mathcal{A}$，也就是说，以下命题不成立：对每个词 w，$w\in[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]\iff w\notin[\mathcal{A}]$。例如，令 $\mathcal{A}$ 为由项 $a\cup a$ 和 $w=\mathsf{I}$得到的非确定有限自动机：

$\mathcal{A}=$  $G(w)=$  .

根据 $\mathcal{A}$, $w\notin[\mathcal{A}]$ 的形式。然而，$w\notin[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]$，如下所示。假设 $w\in[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]$。根据 $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$ 的形式，存在 $\mathcal{U}$和 U_0，使得 $\langle\blacktriangleright,\langle\mathcal{U},U_0\rangle\rangle\in\delta^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}\mathsf{I}$，$\langle\langle\mathcal{U},U_0\rangle,\blacktriangleleft\rangle\in\delta^{\mathcal{A}^{\mathcal{S}}}\mathsf{I}$，$\mathsf{A}\in U_0$，且 $\mathsf{B}\notin U_0$。根据引理 36，$\mathrm{Con}_{\mathcal{A}}^{a}(U_0,U_0)\vee\mathrm{Con}_{\mathcal{A}}^{a}(U_0,U_0)$。无论哪种情况，$\mathsf{B}\in U_0$，这与 $\mathsf{B}\notin U_0$ 矛盾。因此 $w\notin[\mathcal{A}^{\mathcal{S}}]$。

VI. ECOR* 的不可判定性

一个上下文无关文法（CFG）$\mathcal{C}$ 定义在有限集 A 上，是一个元组 $\langle X,\mathcal{R},\mathsf{s}\rangle$，其中

- X 是一个有限的非终结符标签 集，满足 $A\cap X=\emptyset$；
- $\mathcal{R}$ 是一个有限的重写规则 集 $x\leftarrow w$，其规则作用于 $x\in X$ 并且$w\in(A\cup X)^*$；
- $\mathsf{s}\in X$ 是开始标签。

定义关系 $x\vdash_{\mathcal{C}}w$，其中 $x\in X$ 且 $w\in A^*$，为在以下规则下封闭的最小关系：如果$x\leftarrow w_0x_1w_1\dots x_nw_n\in\mathcal{R}$（其中 x、x_1、……、$x_n\in X$ 以及 w_0、……、$w_n\in A^*$），则 $x_1\vdash_{\mathcal{C}}v_1$ … $x_n\vdash_{\mathcal{C}}v_n$ $x\vdash_{\mathcal{C}}w_0v_1w_1\dots v_nw_n$。~~语言 $[\mathcal{C}]\subseteq A^*$ 是集合 $\{w\mid\mathsf{s}\vdash_{\mathcal{C}}w\}$~~。众所周知，对于 CFG 而言，普遍性问题 ——给定一个 CFG $\mathcal{C}$，是否有$[\mathcal{C}]=A^*$ 成立？——是 Π_1^0-完全的。

令 Γ 为一个方程集合。我们记作：

$$\mathfrak{A}\models\Gamma\iff\mathfrak{A}\models t=s\text{ for every }t=s\in\Gamma;$$
$$\Gamma\models_{\mathrm{REL}}t=s\iff\mathfrak{A}\models t=s\text{ 对于每个满足 }\mathfrak{A}\models\Gamma\text{ 的 }\mathfrak{A}$$

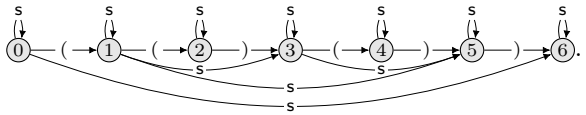
对于 CFG $\mathcal{C}=\langle X,\mathcal{R},\mathsf{s}\rangle$ 和一个词 $w=a_1\dots a_m$，令 $\Gamma_{\mathcal{C}}\triangleq\{w\le x\mid x\leftarrow w\in\mathcal{R}\}$。这里，$\ddot{\mathfrak{A}}_{\mathcal{C},\,w}\triangleq\mathfrak{A}_{\mathcal{C},\,w}[0,m]$，其中 $\mathfrak{A}_{\mathcal{C},\,w}\triangleq\langle|\mathfrak{A}|,\{a^{\mathfrak{A}}\}_{a\in A\cup X}\rangle$ 是定义在 $A\cup X$ 上的结构，定义如下：

- $|\mathfrak{A}|=[0,m]$;

- 对于 $a \in A$、 $a^{\mathfrak{A}} = \{\langle i-1, i\rangle \mid i \in [1,m] \text{ 和 } a_i = a\}$;
- $\{x^{\mathfrak{A}}\}_{x\in X}$ 中的元素是满足以下规则的极小关系：如果 ($w_0 x_1 w_1 \dots x_n w_n \le x$) $\in \Gamma_{\mathcal{C}}$（其中 x_1、…、 $x_n \in X$ 和 w_0、…、 $w_n \in A^*$），那么

$$\frac{\langle i_0, j_0\rangle \in [\![w_0]\!]_{\mathfrak{A}} \quad \langle j_0, i_1\rangle \in x_1^{\mathfrak{A}} \quad \dots \quad \langle j_{n-1}, i_n\rangle \in x_n^{\mathfrak{A}} \quad \langle i_n, j_n\rangle \in [\![w_n]\!]_{\mathfrak{A}}}{\langle i_0, j_n\rangle \in x^{\mathfrak{A}}}.$$

例如，如果 $A = \{(,)\}, \mathcal{C} = \langle \{\mathsf{s}\}, \{\mathsf{s} \leftarrow (\mathsf{s})\mathsf{s}, \mathsf{s} \leftarrow \mathrm{I}\}, \mathsf{s}\rangle$（即， $[\mathcal{C}]$ 是 Dyck-1语言），并且 $w = (()())$，那么 $\mathfrak{A}_{\mathcal{C},w}$如下：



于是我们有如下结果：

引理 47. 设 $\mathcal{C} = \langle X, \mathcal{R}, \mathsf{s}\rangle$ 是一个上下文无关文法。对于每个 $x \in X$和 $w \in A^*$，以下命题等价：

1) $x \vdash_{\mathcal{C}} w$;
2) $\ddot{\mathfrak{A}}_{\mathcal{C},w} \models x$;
3) $\Gamma_{\mathcal{C}} \models_{\mathrm{REL}} w \le x$.

证明。 1 $\Longrightarrow$ 3：对$x \vdash_{\mathcal{C}} w$的推导树进行归纳。此推导树的形式如下：$\dfrac{x_1 \vdash_{\mathcal{C}} v_1 \quad \dots \quad x_n \vdash_{\mathcal{C}} v_n}{x \vdash_{\mathcal{C}} w_0 v_1 w_1 \dots v_n w_n}$，其中 $n \in \mathbb{N}$， x_1、…、 $x_n \in X$， $w_0 \dots v_1 \dots w = w_0 v_1 w_1 \dots v_n w_n$、 $w_n \in A^*$，、，$v_n \in A^*$ 使得并且 $x \leftarrow w_0 x_1 w_1 \dots x_n w_n \in \mathcal{R}$。关于 $\Gamma_{\mathcal{C}} \models_{\mathrm{REL}}$，我们有

$$\begin{aligned} w &= w_0 v_1 w_1 \dots v_n w_n \\ &\le w_0 x_1 w_1 \dots x_n w_n \quad (\Gamma_{\mathcal{C}} \models_{\mathrm{REL}} v_i \le x_i \text{ for } i \in [n] \text{ (IH)}) \\ &\le x. \qquad ((w_0 x_1 w_1 \dots x_n w_n \le x) \in \Gamma_{\mathcal{C}}) \end{aligned}$$

因此 $\Gamma_{\mathcal{C}} \models_{\mathrm{REL}} w \le x$。 3 $\Longrightarrow$ 2：因为 $\mathfrak{A}_{\mathcal{C},\, w} \models \Gamma_{\mathcal{C}}$ 和 $\mathfrak{A}_{\mathcal{C},\, w} \models w$ 成立。 2 $\Longrightarrow$ 1：我们证明如下结论：

子引理。 对于任意 i、 $j \in [0,m]$ 和 $x \in X$，若 $\mathfrak{A}_{\mathcal{C},\, w}[i,j] \models x$，则 $i \le j$和 $x \vdash_{\mathcal{C}} a_i \dots a_{j-1}$。

证明。 根据 $\{x^{\mathfrak{A}_{\mathcal{C},w}}\}_{x\in X}$ 的定义，对推导树进行归纳。该推导树具有以下形式：$\dfrac{\langle i_0, j_0\rangle \in [\![w_0]\!]_{\mathfrak{A}_{\mathcal{C},w}} \quad \langle j_0, i_1\rangle \in x_1^{\mathfrak{A}_{\mathcal{C},w}} \quad \dots \quad \langle j_{n-1}, i_n\rangle \in x^{\mathfrak{A}_{\mathcal{C},\, n}} \quad \langle i_n, j_n\rangle \in [\![w_n]\!]_{\mathfrak{A}_{\mathcal{C},\, w}}}{\langle i_0, j_n\rangle \in x^{\mathfrak{A}_{\mathcal{C},w}}}$，其中 $x_1, \dots, x_n \in X$， $w_0, \dots, w_n \in A^*$ $j_0, \dots, i_n, j_n \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C},\, w}$，且 $\langle i_0, j_n\rangle = \langle i, j\rangle$。根据 $a^{\mathfrak{A}_{\mathcal{C},\, w}}$的定义（其中 $a \in A$），我们有 $i_k \le j_k$ 和 $w_k = a_{i_k} \dots a_{j_k - 1}$。根据归纳假设，我们有 $j_{k-1} \le i_k$ 和 $x_k \vdash_{\mathcal{C}} a_{j_{k-1}} \dots a_{i_k - 1}$。将它们结合起来可得 $i \le j$ 和 $x \vdash_{\mathcal{C}} a_i \dots a_{j-1}$（因为$x \leftarrow w_0 x_1 w_1 \dots x_n w_n \in \mathcal{R}$）。 □

将此子引理应用于 $\langle i, j\rangle = \langle 0, m\rangle$，即可完成证明。 □

引理 48。 对于每个上下文无关文法 $\mathcal{C} = \langle X, \mathcal{R}, \mathsf{s}\rangle$，都有

$$[\mathcal{C}] = A^* \iff \Gamma_{\mathcal{C}} \models_{\mathrm{REL}} A^* \le \mathsf{s}.$$

（这里， A^* 表示右侧中的项 $(a_1 \cup \dots \cup a_n)^*$，其中 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$。）

证明。我们有

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}] = A^* &\iff \forall w \in A^*.\ \mathsf{s} \vdash_{\mathcal{C}} w && \text{(Def. of } [\,]) \\ &\iff \forall w \in A^*.\ \Gamma_{\mathcal{C}} \models_{\mathrm{REL}} w \le \mathsf{s} && \text{(Lem. 47)} \\ &\iff \Gamma_{\mathcal{C}} \models_{\mathrm{REL}} A^* \le \mathsf{s}. && \square \end{aligned}$$

此外，我们为*Hoare* 假设 $u = \bot$ 准备以下演绎引理（参见 [34, 定理 4.1]，针对 Kleene 代数与测试）：

引理 49。 对于任意 *ECoR*$*$ 项 t、 s、 u 以及任意方程集合 Γ，我们有

$$\Gamma \cup \{u = \bot\} \models_{\mathrm{REL}} t \le s \iff \Gamma \models_{\mathrm{REL}} t \le s \cup (\top u \top).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned} &\Gamma \cup \{u = \bot\} \models_{\mathrm{REL}} t \le s \\ &\iff \text{for every } \mathfrak{A}[x,y] \text{ s.t. } \mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{u = \bot\}, \\ &\qquad\qquad \mathfrak{A}[x,y] \models t \le s && \text{(Def. of } \models_{\mathrm{REL}}) \\ &\iff \text{for every } \mathfrak{A}[x,y] \text{ s.t. } \mathfrak{A} \models \Gamma \text{ and } \mathfrak{A}[x,y] \not\models \top u \top, \\ &\qquad\qquad \mathfrak{A}[x,y] \models t \le s && (\clubsuit 1) \\ &\iff \text{for every } \mathfrak{A}[x,y] \text{ s.t. } \mathfrak{A} \models \Gamma, \\ &\qquad\qquad \mathfrak{A}[x,y] \models t \le s \cup (\top u \top) && (\clubsuit 2) \\ &\iff \Gamma \models_{\mathrm{REL}} t \le s \cup (\top u \top). && \text{(Def. of } \models_{\mathrm{REL}}) \end{aligned}$$

这里，(♣1) 是因为 $\mathfrak{A} \models u = \bot \iff [\![u]\!]_{\mathfrak{A}} = \emptyset \iff \mathfrak{A}[x,y] \not\models \top u \top$。(♣2) 是因为：

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{A}[x,y] \not\models \top u \top) \text{ implies } (\mathfrak{A}[x,y] \models t \le s) \\ &\iff \mathfrak{A}[x,y] \models \top u \top \ \vee\ \mathfrak{A}[x,y] \not\models t \ \vee\ \mathfrak{A}[x,y] \models s \\ &\iff \mathfrak{A}[x,y] \not\models t \ \vee\ \mathfrak{A}[x,y] \models s \cup (\top u \top) \\ &\iff \mathfrak{A}[x,y] \models t \le s \cup (\top u \top). && \square \end{aligned}$$

根据引理48、49，我们有如下结论：

定理 50。 *ECoR*$*$ 的等式理论是Π_1^0-完备的。

证明。 对于上界：根据引理 22。对于困难性：设 $\mathcal{C} = \langle X, \{x_i \leftarrow w_i \mid i \in [n]\}, \mathsf{s}\rangle$ 是一个上下文无关文法。于是我们有

$$\begin{aligned} &[\mathcal{C}] = A^* \\ &\iff \{w_i \le x_i \mid i \in [n]\} \models_{\mathrm{REL}} A^* \le \mathsf{s} && \text{(Lem. 48)} \\ &\iff \{w_i \cap x_i^- = \bot \mid i \in [n]\} \models_{\mathrm{REL}} A^* \le \mathsf{s} \\ &\qquad \text{(For every } \mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \models w_i \le x_i \iff \mathfrak{A} \models w_i \cap x_i^- = \bot) \\ &\iff \models_{\mathrm{REL}} A^* \le \mathsf{s} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \top (w_i \cap x_i^-) \top \right) && \text{(Lem. 49)} \\ &\iff \models_{\mathrm{REL}} A^* \le \mathsf{s} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} (a \cup a^-)(w_i \cap x_i^-)(a \cup a^-) \right). \\ &\qquad (\models_{\mathrm{REL}} \top = a \cup a^-, \text{ where } a \text{ is some element in } A.) \end{aligned}$$

因此，我们可以将 CFG 的普遍性问题（它是 Π_1^0-困难的）归约到 ECoR$*$ 的等式理论（确切地说，$\mathcal{T}_{\{\cdot, \cup, \cap,\ ^*\}}$ 带项变量补集的情形）。 □

VII. 结论与未来工作

我们利用边饱和研究了带传递闭包的关系存在演算的计算复杂度。一个自然的研究方向是将复杂度结果推广到更一般的语法。我们认为，无交片段的上界结果即使在扩展加入测试后仍然成立，例如，在 *KAT* 中（考虑 [35]可饱和路径中的受保护字符串而非词（字符串））；例如，带顶元的 *KAT*（关于二元关系），近期被用于建模不正确性逻辑 [24], [25], [36], [37]。

另一项未来工作是研究它们的公理化性。遗憾的是，（完整）ECoR 的等式理论*不可有限公理化，因为它不是递归可枚举的（定理50）；不过，我们将为其片段寻找某种完备的（有限）公理化方案这一问题留待以后研究，这些片段包括带项变量补的 KA 项。（方程（1）表明，至少就二元关系 [24]而言，我们需要带顶元的 KA 公理。）

致谢：我们感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

参考文献

[1] A. Tarski，《论关系演算》，The Journal of Symbolic Logic，第6卷，第3期，第73–89页，1941年。 [在线]。链接：https://doi.org/ 10 2307 2268577 。/ A. Tarski 和 S. Givant，《无变量集合论的形式化》。美国数学学会，1987年，第41卷。[2] R. Hirsch，《关系代数子签名的等式理论的可判定性》，载于 RAMiCS，计算机科学讲义，第 11194 卷。施普林格，2018 年，第 87–96 页。 [在线]。链接：https://doi.org/ 10 1007 978 3 030 02149 8 6 。/ - - - - Y. Nakamura，《FO3 与仅含一个二元关系的关系演算的不可判定性》，载于 ICLA，计算机科学讲义，第11600卷。施普林格，2019年，第108–120页。 [在线]。链接：https://doi.org/ 10 1007 978 3 662 58771 3 11 。/ - - - - H. Andreka 和 D. A. Bredikhin，《无并关系代数的等式理论》，Algebra Universalis，第 33, 4, 516 532, 卷，第 1995 [ ] 10 1007 33, 4, 516 532, 期，第 1995 [ ] 10 1007 33, 4, 516 532, – 1995 [ ] 10 1007 33, 4, 516 532, 页。在线。链接：https://doi.org/ 1995 [ ] 10 1007 33, 4, 516 532, 。/BF 1995 [ ] 10 1007 01225472 [6] D. Pous，《带传递闭包的关系正演算》，载于 STACS，第96卷。达格施图尔城堡，2018年，第3:1–3:16页。 [在线]。链接：https://doi.org/ 10 4230 2018 3 。/LIPICS.STACS.。P. Brunet 和 D. Pous，《Kleene 代数的 Petri 自动机》，载于 LICS。IEEE，2015年，第68–79页。 [在线]。链接：https: //doi.org/ 10 1109 2015 17 。/LICS.。——，《Petri 自动机》，Logical Methods in Computer Science，第13卷，第3期，2017年。 [在线]。链接：https://doi.org/10.23638/LMCS-13(3: 33 2017) Y. Nakamura，《Kleene 代数图上的偏导数》，载于 LICS。IEEE，2017年，第1–12页。 [在线]。链接：https: /doi.org/ 10 1109 2017 8005132 。/LICS.。M. Hollenberg，《动态否定与关系复合的等式公理化》，Journal of Logic, Language and Information，第6卷，第4期，第381–401页，1997年。 [在线]。链接：https://doi.org/ 10 1023 1008271805106 。/A: J. Desharnais、P. Jipsen 和 G. Struth，《定义域与反定义域半群》，载于 RelMiCS，计算机科学讲义，第5827卷。施普林格，2009年，第 73– 87 [ ] 10 1007 978 3 642 04639 1 6 页。在线。链接：https://doi.org/ 87 [ ] 10 1007 978 3 642 04639 1 6 。/ - - - - D. Kozen，《带测试的克莱尼代数》，美国计算机协会《编程语言与系统汇刊》，第 19, 3, 427 443, 卷，第 1997 [ ] 10 1145 256167 19, 3, 427 443, 期，第 1997 [ ] 10 1145 256167 19, 3, 427 443, – 1997 [ ] 10 1145 256167 19, 3, 427 443, 页。在线。链接：https://doi.org/ 1997 [ ] 10 1145 256167 19, 3, 427 443, 。/。 1997 [ ] 10 1145 256167 256195 [13] C. Lutz 和 U. Sattler，《布尔模态逻辑推理的复杂度》，《模态逻辑进展》，第329–348页，2002年。 [在线]。链接：https://doi.org/ 10 1142 9789812776471 0018 。/ C. Lutz 和 D. Walther，《带原子程序否定的 PDL》，Journal of Applied Non-Classical Logics，第 15, 2, 189 213, 卷，第 2005 [ ] 10 3166 15 189 213 15, 2, 189 213, 期，第 2005 [ ] 10 3166 15 189 213 15, 2, 189 213, – 2005 [ ] 10 3166 15 189 213 15, 2, 189 213, 页。在线。链接：https://doi.org/ 2005 [ ] 10 3166 15 189 213 15, 2, 189 213, 。/jancl.。- 2005 [ ] 10 3166 15 189 213

[15] S. G¨oller、M. Lohrey 和 C. Lutz，“带交与逆运算的 PDL：可满足性与无限状态模型检测”，《符号逻辑杂志》，第 74 卷第 1 期，第 279–314 页，2009 年。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 2178 1231082313 。/jsl/ Y. Nakamura，“二元关系正演算的表达能力与简洁性”，《逻辑与代数编程方法期刊》，第 127 卷，第 100760 页，2022 年。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2022.100760[17] ——，“关系正演算的表达能力与简洁性”，载于 RAMiCS，丛书《计算机科学讲义》，第 12062 卷。施普林格，2020 年，第 204– 220 [ ] 10 1007 978 3 030 43520 2 13 页。在线。可访问：https://doi.org/。/---- L. J. Stockmeyer 和 A. R. Meyer，“需要指数时间的字问题（初步报告）”，载于 STOC。美国计算机协会，1973 年，第 1 9 [ ] 10 1145 800125 804029 –页。在线。可访问：https://doi.org/。/。H. B. Hunt III、D. J. Rosenkrantz 和 T. G. Szymanski，“关于正则语言和上下文无关语言的等价、包含与覆盖问题”，《计算机与系统科学杂志》，第 12 卷第 2 期，第 222–268 页，1976 年。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 1016 0022 0000 76 80038 4 。/S - ( ) - E. Gradel、M. Otto 和 E. Rosen，“二变量逻辑中的不可判定性结果”，《数学逻辑档案》，第 38 卷第 4-5 期，第 313–354 页，1999 年。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.1007/s001530050130[21] E. Orlowska，“非经典逻辑的关系形式化”，《计算机科学中的关系方法》，第 90–105 页，1997 年。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 1007 978 3 7091 6510 2 6 。/---- P. Brunet 和 D. Pous，“带逆运算的克莱尼代数”，载于 RAMiCS，丛书《计算机科学讲义》，第 8428 卷。施普林格，2014 年，第 101–118 页。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.1007/978-3-319-06251-8 7[23] ——，“带逆运算的克莱尼代数算法”，《逻辑与代数编程方法期刊》，第 85, 4, 574 594, 2016 [ ] 10 1016 2015 07 卷第 期，第 – 页。在线。可访问：https://doi.org/。/J.JLAMP. . . 005 [24] D. Pous 和 J. Wagemaker，“带顶元的 Kleene 代数的完备性定理”，载于 CONCUR，第 243 卷。达格施图尔城堡，2022 年，第 26:1–26:18 页。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.4230/LIPICS. CONCUR.2022.26[25] ——，“带测试与顶元的 Kleene 代数的完备性定理”，2023 [ ] 2304 07190 。在线。可访问：https://arxiv.org/abs/。S. J. C. Joosten，“通过图饱和寻找模型”，《逻辑与代数编程方法期刊》，第 100, 98 112, 卷第 页，第 – 页。在线。 2018 [ ] 10 1016 2018 06 可访问：https://doi.org/。/j.jlamp. . . 005 [27] A. Doumane，“关系的全称理论的图刻画”，载于 MFCS，第 202 卷。达格施图尔城堡，2021 年，第 41:1–41:15 页。 [ ] 10 4230 2021 41 在线。可访问：https://doi.org/。/LIPICS.MFCS. . E. Cohen，“Kleene 代数中的假设”，未发表手稿，1994 年。[29] D. Kozen，“Kleene 代数中的推理复杂度”，《信息与计算》，第 179 卷第 2 期，第 152–162 页，2002 年。 [ ] 10 1006 2001 2960 在线。可访问：https://doi.org/。/INCO. . A. Doumane、D. Kuperberg、D. Pous 和 P. Pradic，“带假设的 Kleene 代数”，载于 FoSSaCS，丛书《计算机科学讲义》，第 11425 卷。施普林格，2019 年，第 207–223 页。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.4230/LIPICS. MFCS.2021.41[31] M. J. Fischer 和 A. R. Meyer，“布尔矩阵乘法与传递闭包”，载于 SWAT，1971 年，第 129–131 页。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 1109 1971 4 。/SWAT. . K. Thompson，“编程技术：正则表达式搜索算法”，《美国计算机协会通讯》，第 11, 6, 419 422, 卷第 期，第 – 页。在线。可 1968 [ ] 10 1145 363347 363387 访问：https://doi.org/。/。[33] W. Savitch，“非确定性与确定性带复杂度之间的关系”，《计算机与系统科学杂志》，第 4 卷第 2 期，第 177–192 页，1970 年。 [在线]。可访问：https: // doi.org/10.1016/S0022-0000(70)80006-X [34] D. Kozen，“关于霍尔逻辑与带测试的 Kleene 代数”，《美国计算机协会计算逻辑汇刊》，第 1 卷第 1 期，第 60–76 页，2000 年。 [ ] 10 1145 343369 343378 在线。可访问：https://doi.org/。/。[35] D. Kozen 和 F. Smith，“带测试的 Kleene 代数：完备性与可判定性”，载于 CSL，丛书《计算机科学讲义》，第 1258 卷。施普林格，1996 年，第 244– 259 [ ] 10 1007 3 540 63172 0 43 页。在线。可访问：https://doi.org/。/--- P. W. O’Hearn，“不正确性逻辑”，《美国计算机协会编程语言论文集》，第 4 卷第 POPL 期，第 10:1–10:32 页，2019 年。 [ ] 10 1145 3371078 在线。可访问：https://doi.org/。/ C. Zhang、A. A. de Amorim 和 M. Gaboardi，“关于不正确性逻辑以及带顶元与测试的 Kleene 代数”，《美国计算机协会编程语言论文集》，第

美国计算机协会编程语言论文集，第 6 卷第 POPL 期，第 29:1–29:30 页，2022 年。[在线]。可访问：https://doi.org/10.1145/3498690

附录 A

引言中方程的证明

（本截面中的记号取决于第III-A节。）

对于方程（1）：$\models_{\mathrm{REL}} \top = a \cup a^{-}$。对于每个结构$\mathfrak{A}$ 和 $x, y \in |\mathfrak{A}|$，我们有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle \in [\![\top]\!]_{\mathfrak{A}} &\iff \mathsf{true}\\ &\iff \langle x,y\rangle \in [\![a]\!]_{\mathfrak{A}} \vee \langle x,y\rangle \notin [\![a]\!]_{\mathfrak{A}}\\ &\iff \langle x,y\rangle \in [\![a \cup a^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}.\end{aligned}$$ □

对于方程（2）：$\models_{\mathrm{REL}} aba^{-} \leq \mathsf{I}^{-}a^{-} \cup a\mathsf{I}^{-}$。假设 $\langle x_0,x_3\rangle \in [\![aba^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。令 x_1 和 x_2 满足 $\langle x_0,x_1\rangle \in [\![a]\!]_{\mathfrak{A}}$，$\langle x_1,x_2\rangle \in [\![b]\!]_{\mathfrak{A}}$并且 $\langle x_2,x_3\rangle \in [\![a^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。由于 $\langle x_0,x_1\rangle \in a^{\mathfrak{A}}$ 和 $\langle x_2,x_3\rangle \notin a^{\mathfrak{A}}$，$\langle x_0,x_1\rangle \neq \langle x_2,x_3\rangle$ 应成立。我们区分以下情形：

- 如果 $x_0 \neq x_2$，那么 $\langle x_0,x_2\rangle \in [\![\mathsf{I}^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$ 和 $\langle x_2,x_3\rangle \in [\![a^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。因此，$\langle x_0,x_3\rangle \in [\![\mathsf{I}^{-}a^{-} \cup a\mathsf{I}^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。
- 否则（$x_1 \neq x_3$），$\langle x_0,x_1\rangle \in [\![a]\!]_{\mathfrak{A}}$ 和 $\langle x_1,x_3\rangle \notin [\![\mathsf{I}^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。因此，$\langle x_0,x_3\rangle \in [\![\mathsf{I}^{-}a^{-} \cup a\mathsf{I}^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。

证明至此完成。 □

对于方程 (3)：$\models_{\mathrm{REL}} a \leq \mathsf{I}^{-} \cup aa$。假设 $\langle x,y\rangle \notin [\![a]\!]_{\mathfrak{A}}$。我们区分以下情形：

- 如果 $x \neq y$，那么 $\langle x,y\rangle \in [\![\mathsf{I}^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。因此，$\langle x,y\rangle \in [\![\mathsf{I}^{-} \cup aa]\!]_{\mathfrak{A}}$。
- 否则（$x = y$），$\langle x,y\rangle \in [\![a]\!]_{\mathfrak{A}}$、$y = x$，并且 $\langle x,y\rangle \in [\![a]\!]_{\mathfrak{A}}$。因此，$\langle x,y\rangle \in [\![\mathsf{I}^{-} \cup aa]\!]_{\mathfrak{A}}$。

证明完成。 □

对于方程（4）：$\models_{\mathrm{REL}} a^{\smile}a^{-} \leq \mathsf{I}^{-}$。假设 $\langle x_0,x_2\rangle \in [\![a^{\smile}a^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。令 x_1 使得 $\langle x_0,x_1\rangle \in [\![a^{\smile}]\!]_{\mathfrak{A}}$ 且 $\langle x_1,x_2\rangle \in [\![a^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。由于 $\langle x_1,x_0\rangle \in a^{\mathfrak{A}}$ 且 $\langle x_1,x_2\rangle \notin a^{\mathfrak{A}}$，$x_0 \neq x_2$应成立。因此，我们有 $\langle x_0,x_2\rangle \in [\![\mathsf{I}^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$。证明完成。 □

附录 B 注释：脚注补充 脚注4

令 $\mathcal{T}_{\mathrm{gen}}$ 为按如下方式定义的项集：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathrm{gen}} \ni t,s,u ::= {} & a \mid a^{-} \mid \mathsf{I} \mid \mathsf{I}^{-} \mid \bot \mid \bot^{-} \mid \top \mid \top^{-}\\ & \mid t \cdot s \mid t \cup s \mid t^{*} \mid t^{\smile} \qquad (a \in \Sigma).\end{aligned}$$

结构 $\mathfrak{A}$ 上项 $\mathcal{T}_{\mathrm{gen}}$ 的二元关系 $[\![t]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^2$ 定义如下，其中 $a \in \Sigma$ 和$b \in \Sigma \cup \{\mathsf{I}\ \bot,\ \top\}$：

$$\begin{aligned}[\![a]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq a^{\mathfrak{A}} & [\![b^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq (b^{-})^{\mathfrak{A}}\\ [\![\bot]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq \emptyset & [\![\top]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq |\mathfrak{A}|^2\\ [\![t \cup s]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq [\![t]\!]_{\mathfrak{A}} \cup [\![s]\!]_{\mathfrak{A}} & [\![t \cap s]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq [\![t]\!]_{\mathfrak{A}} \cap [\![s]\!]_{\mathfrak{A}}\\ [\![\mathsf{I}]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq \mathsf{I}^{\mathfrak{A}}\\ [\![t \cdot s]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq [\![t]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot [\![s]\!]_{\mathfrak{A}}\\ [\![t^{*}]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![t^{n}]\!]_{\mathfrak{A}} & [\![t^{\smile}]\!]_{\mathfrak{A}} &\triangleq [\![t]\!]_{\mathfrak{A}}^{\smile}\end{aligned}$$

我们将 $\models_{\mathrm{REL}} t = s$ 写作：如果对于每个结构 $\mathfrak{A}$，$[\![t]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![s]\!]_{\mathfrak{A}}$。关于二元关系的 S 等式理论定义为所有项对的集合 $t = s$，其中 $\mathcal{T}_S$ 满足 $\models_{\mathrm{REL}} t = s$。我们也使用记号 $\models$（记号 2）表示 $\mathcal{T}_{\mathrm{gen}}$。

对于项 $t \in \mathcal{T}_{\mathrm{gen}}$，该项 $t^{\smile}$ 的逆向范式 $\breve{t}$（例如，[23, 第 2.1]节）定义如下：

$$\begin{aligned}\breve{a} &\triangleq a^{\smile} & \overbrace{a^{\smile}} &\triangleq a & (a \in \Sigma^{(-)})\\ \breve{a} &\triangleq a & \overbrace{a^{\smile}} &\triangleq a & (a \in \{\mathsf{I},\mathsf{I}^{-},\top,\top^{-},\bot,\bot^{-}\})\\ \overbrace{t \cdot s} &\triangleq \breve{s} \cdot \breve{t} & (t \cdot s)^{\smile} &\triangleq \overbrace{t^{\smile}} \cdot \overbrace{s^{\smile}}\\ \overbrace{t^{*}} &\triangleq (\breve{t})^{*} & (t^{*})^{\smile} &\triangleq (\overbrace{t^{\smile}})^{*}\\ \overbrace{t \cup s} &\triangleq \breve{t} \cup \breve{s} & (t \cup s)^{\smile} &\triangleq \overbrace{t^{\smile}} \cup \overbrace{s^{\smile}}\\ (\overbrace{t^{\smile}})^{\smile} &\triangleq \breve{t}.\end{aligned}$$

命题 51。对于每个项 $t \in \mathcal{T}_{\mathrm{gen}}$，$\models_{\mathrm{REL}} \breve{t} = t^{\smile}$。

证明概要。对 t 作直接归纳即可。例如，若 $t = s \cdot u$，则对于每个 $\mathfrak{A}[x,y]$，有

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}[x,y] \models \overbrace{s \cdot u} &\iff \mathfrak{A}[x,y] \models \breve{u} \cdot \breve{s} && \text{(Def. of } \breve{\bullet}\text{)}\\ &\iff \exists z.\ \mathfrak{A}[x,z] \models \breve{u} \ \wedge\ \mathfrak{A}[z,y] \models \breve{s} && \text{(Def. of } [\![\,]\!]\text{)}\\ &\iff \exists z.\ \mathfrak{A}[x,z] \models u^{\smile} \ \wedge\ \mathfrak{A}[z,y] \models s^{\smile} && \text{(IH)}\\ &\iff \mathfrak{A}[x,y] \models u^{\smile} \cdot s^{\smile} && \text{(Def. of } [\![\,]\!]\text{)}\\ &\iff \mathfrak{A}[x,y] \models (u \cdot s)^{\smile}. && \text{(Def. of } [\![\,]\!]\text{)}\end{aligned}$$ □

命题 52。$\mathcal{T}_{\mathrm{gen}}$ 的等式理论可在多项式时间内归约为 *ECoR*∗ 的等式理论。

证明。设 t 和 s 是 $\mathcal{T}_{\mathrm{gen}}$中的项。令 t'（分别为 s'）表示项 $\breve{t}$（分别为 $\breve{s}$），其中每个 $\top^{-}$ 均已替换为 $\bot$，每个 $\bot^{-}$ 均已替换为 $\top$。于是，根据命题 51，$\models_{\mathrm{REL}} t = s \iff \models_{\mathrm{REL}} t' = s'$，其中 $\models_{\mathrm{REL}} \top^{-} = \bot$和 $\models_{\mathrm{REL}} \bot^{-} = \top$。根据构造，$t'$ 和 s' 分别可在多项式时间内由 t 和 s 得到。此外，t' 和 s' 是 $\mathcal{T}_{\mathrm{gen}}$ 项，因为 $\smile$ 仅作用于 $a \in \Sigma^{(-)}$和 $\top^{-}$，且 $\bot^{-}$ 不出现。 □

附录 C 注释：证明命题。8、9

命题 53。对于每个结构 $\mathfrak{A}$ 和图 G、H，

$$\begin{aligned}[\![G \cap H]\!]_{\mathfrak{A}} &= [\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \cap [\![H]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Prop. 53}\cap\text{)}\\ [\![G \cdot H]\!]_{\mathfrak{A}} &= [\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot [\![H]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Prop. 53}\cdot\text{)}\\ [\![G^{\smile}]\!]_{\mathfrak{A}} &= [\![G]\!]_{\mathfrak{A}}^{\smile}. && \text{(Prop. 53}\smile\text{)}\end{aligned}$$

证明。命题 53∩。根据 $[\![\,]\!]_{\mathfrak{A}}$（定义 7），只需证明对于每个 $x,\ y \in |\mathfrak{A}|$：

$$\begin{aligned}&\exists f.\ f\colon (G \cap H) \longrightarrow \mathfrak{A}[x,y]\\ &\quad\iff \exists f_G, f_H.\ f_G\colon G \longrightarrow \mathfrak{A}[x,y] \wedge f_H\colon H \longrightarrow \mathfrak{A}[x,y].\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$：令 $f_G = \{\langle x', f(x')\rangle \mid x' \in |G|\}$和 $f_H = \{\langle x', f(x')\rangle \mid x' \in |H|\}$。$\Longleftarrow$：令 $f = f_G \cup f_H$。注意

即 $f_G(1^G) = x = f_H(1^H)$ 以及 $f_G(2^G) = y = f_H(2^H)$ 根据定义 7；因此 f 确实是一个映射。

命题 53·。根据 $[\![]\!]_{\mathfrak{A}}$ 的定义，只需证明对于每个 x， $y \in |\mathfrak{A}|$:

$$\exists f.\ f\colon (G \cdot H) \longrightarrow \mathfrak{A}[x,y]$$
$$\iff \exists z,\ f_G,\ f_H.\ f_G\colon\ G \longrightarrow \mathfrak{A}[x,z] \wedge f_H\colon\ H \longrightarrow \mathfrak{A}[z,y].$$

$\Longrightarrow$: 令 $z = f(2^G)$， $f_G = \{\langle x', f(x')\rangle \mid x' \in |G|\}$，以及 $f_H = \{\langle x', f(x')\rangle \mid x' \in |H|\}$。 $\Longleftarrow$: 令 $f = f_G \cup f_H$。注意 $f_G(2^G) = z = f_H(1^H)$ 根据定义 7；因此 f 确实是一个映射。

命题 53⌣。根据 $[\![]\!]_{\mathfrak{A}}$ 的定义，只需证明对于每个 x， $y \in |\mathfrak{A}|$:

$$\exists f.\ f\colon G^{\smile} \longrightarrow \mathfrak{A}[x,y] \iff \exists f_G.\ f_G\colon G \longrightarrow \mathfrak{A}[y,x].$$

使用相同的映射即可显然得出。 □

命题 54 (命题 8 的重述)。 对于每个结构$\mathfrak{A}$ 和 *PCoR*∗ 项 t， 我们有 $[\![t]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{G}(t)]\!]_{\mathfrak{A}}$。

证明。 对 t 使用归纳法。

情况 $t = a$ 其中 $a \in \Sigma$: 对于每个 x， $y \in |\mathfrak{A}|$， 我们有

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle \in [\![a]\!]_{\mathfrak{A}} &\iff \langle x,y\rangle \in a^{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&\iff \ \rightarrow\!\circ\!\!-a-\!\!\circ\!\rightarrow\ \longrightarrow \mathfrak{A}[x,y]\\
&\iff \langle x,y\rangle \in [\![\ \rightarrow\!\circ\!\!-a-\!\!\circ\!\rightarrow\ ]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. 7)}\\
&\iff \langle x,y\rangle \in [\![\mathcal{G}(a)]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}$$

情况 $t = \mathrm{I}$: 对于每个 x， $y \in |\mathfrak{A}|$， 我们有

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle \in [\![\mathsf{I}]\!]_{\mathfrak{A}} &\iff \langle x,y\rangle \in \mathsf{I}^{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&\iff \ \rightarrow\!\circ\!\!-\mathsf{I}-\!\!\circ\!\rightarrow\ \longrightarrow \mathfrak{A}[x,y]\\
&\iff \langle x,y\rangle \in [\![\ \rightarrow\!\circ\!\!-\mathsf{I}-\!\!\circ\!\rightarrow\ ]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. 7)}\\
&\iff \langle x,y\rangle \in [\![\ \rightarrow\!\circ\!\rightarrow\ ]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&\qquad (\mathsf{I}^{\mathfrak{A}} \text{ is the identity relation})\\
&\iff \langle x,y\rangle \in [\![\mathcal{G}(\mathsf{I})]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}$$

情况 $t = \top$: 对于每个 x， $y \in |\mathfrak{A}|$， 我们有

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle \in [\![\top]\!]_{\mathfrak{A}} &\iff \mathsf{true} && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&\iff \langle x,y\rangle \in [\![\ \rightarrow\!\circ\qquad \circ\!\rightarrow\ ]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. 7)}\\
&\iff \langle x,y\rangle \in [\![\mathcal{G}(\top)]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}$$

情况 $t = \bot$: 对于每个 x， $y \in |\mathfrak{A}|$， 我们有

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle \in [\![\bot]\!]_{\mathfrak{A}} &\iff \mathsf{false} && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&\iff \langle x,y\rangle \in [\![\emptyset]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. 7)}\\
&\iff \langle x,y\rangle \in [\![\mathcal{G}(\bot)]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}$$

情况 $t = s \cdot u$:

$$\begin{aligned}
&[\![s \cdot u]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![s]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot [\![u]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&= [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot [\![\mathcal{G}(u)]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(IH)}\\
&= \bigcup_{G\in\mathcal{G}(s)} \bigcup_{H\in\mathcal{G}(u)} [\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot [\![H]\!]_{\mathfrak{A}} && (\cdot \text{ is distributive w.r.t. } \cup)\\
&= \bigcup_{G\in\mathcal{G}(s)} \bigcup_{H\in\mathcal{G}(u)} [\![G \cdot H]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Equation (Prop. 53·))}\\
&= [\![\mathcal{G}(s \cdot u)]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}$$

情况 $t = s \cap u$:

$$\begin{aligned}
&[\![s \cap u]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![s]\!] \cap [\![u]\!] && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&= [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}} \cap [\![\mathcal{G}(u)]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(IH)}\\
&= \bigcup_{H\in\mathcal{G}(u)} \bigcup_{G\in\mathcal{G}(s)} [\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \cap [\![H]\!]_{\mathfrak{A}} && (\cap \text{ 关于 是分配的 } \cup)\\
&= \bigcup_{G\in\mathcal{G}(s)} \bigcup_{H\in\mathcal{G}(u)} [\![G \cap H]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Equation (Prop. 53}\cap\text{))}\\
&= [\![\mathcal{G}(s \cap u)]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}$$

情况 $t = s \cup u$:

$$\begin{aligned}
[\![s \cup u]\!]_{\mathfrak{A}} &= [\![s]\!]_{\mathfrak{A}} \cup [\![u]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&= [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}} \cup [\![G(u)]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(IH)}\\
&= [\![\mathcal{G}(s) \ \cup \mathcal{G}(u)]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&= [\![\mathcal{G}(s \cup u)]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}$$

情况 $t = s^*$:

$$\begin{aligned}
&[\![s^*]\!]_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![s^n]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[\![s]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot \ldots \cdot [\![s]\!]_{\mathfrak{A}}}_{n \text{ times}} && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot \ldots \cdot [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}}}_{n \text{ times}} && \text{(IH)}\\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{G_1,\ldots,G_n\in\mathcal{G}(s)} [\![G_1]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot \ldots \cdot [\![G_n]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&\qquad (\cdot \text{ 关于 } \cup\text{是分配的})\\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{G_1,\ldots,G_n\in\mathcal{G}(s)} [\![G_1 \cdot \ldots \cdot G_n]\!]_{\mathfrak{A}} \text{（方程（命题 53·））}\\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![\mathcal{G}(s^n)]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } s^n\text{)}\\
&= [\![\mathcal{G}(s^*)]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}$$

情况 $t = s^{\smile}$:

$$\begin{aligned}
[\![s^{\smile}]\!]_{\mathfrak{A}} &= [\![s]\!]_{\mathfrak{A}}^{\smile} && \text{(Def. of } [\![]\!]\text{)}\\
&= [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}}^{\smile} && \text{(IH)}\\
&= \bigcup_{G\in\mathcal{G}(s)} [\![G]\!]_{\mathfrak{A}}^{\smile} && (\smile \text{ is distributive w.r.t. } \cup)\\
&= \bigcup_{G\in\mathcal{G}(s)} [\![G^{\smile}]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Equation (Prop. 53}\smile\text{))}\\
&= [\![\mathcal{G}(s^{\smile})]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}$$

□

命题 55 (命题9的重述)。 对于每个 *PCoR*∗项， t 以及 s， 我们有

$$\models_{\mathrm{REL}} t \leq s \iff \forall G \in \mathcal{G}(t).\exists H \in \mathcal{G}(s).\ H \longrightarrow G.$$

证明。 通过以下公式变换:

$$
\begin{aligned}
&\models_{\mathrm{REL}} t \le s \iff \forall \mathfrak{A}.\ [\![t]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq [\![s]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } \models_{\mathrm{REL}}\text{)}\\
&\iff \forall \mathfrak{A}.\ [\![\mathcal{G}(t)]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq [\![\mathcal{G}(s)]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Prop. 8)}\\
&\iff \forall \mathfrak{A}. \forall G \in \mathcal{G}(t).\ [\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{G}(s)} [\![H]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } [\![\,]\!]\text{)}\\
&\iff \forall G \in \mathcal{G}(t). \forall \mathfrak{A}.\ [\![G]\!]_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{G}(s)} [\![H]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&\iff \forall G \in \mathcal{G}(t). \forall \ddot{\mathfrak{A}}.\\
&\quad (G \longrightarrow \ddot{\mathfrak{A}}) \text{ implies } (\exists H \in \mathcal{G}(s). H \longrightarrow \ddot{\mathfrak{A}}) && \text{(Def. of } [\![\,]\!]\text{)}\\
&\iff \forall G \in \mathcal{G}(t). \exists H \in \mathcal{G}(s).\ H \longrightarrow G. && (\heartsuit)
\end{aligned}
$$

¨此处，对于 (♡)， $\Longrightarrow$: 设 $\mathfrak{A}$ 为.....的饱和（见第IV-B节），其中 G使得

- $a^{\ddot{\mathfrak{A}}} = a^G$ for $a \in \Sigma$;
- $\mathsf{I}^{\ddot{\mathfrak{A}}} = \{\langle x, x\rangle \mid x \in |\ddot{\mathfrak{A}}|\}$.

($\ddot{\mathfrak{A}}$是一个二指向结构，因为 $a^{\ddot{\mathfrak{A}}} = |\ddot{\mathfrak{A}}|^2 \setminus a^{\ddot{\mathfrak{A}}}$ ¨且 I 是恒等关系。) 由于 $G \longrightarrow \mathfrak{A}$ 通过恒等映射，¨存在某个 $H \in \mathcal{G}(s)$，使得 $H \longrightarrow \mathfrak{A}$ (根据假设)。由于对于每个 $a \in \Sigma^{(-)}_{\mathsf{I}} \setminus \Sigma$， $a^H = \emptyset$（注意， s 是¨正），且对于每个 $a \in \Sigma$， $a^{\mathfrak{A}} = a^G$，因此我们有 $H \longrightarrow G$，这是因为¨对 $H \longrightarrow \mathfrak{A}$使用了相同的同态。 $\Longleftarrow$: 设 $H \in \mathcal{G}(s)$ ¨满足 $H \longrightarrow G$。令 $\mathfrak{A}$ 为任意满足 $G \longrightarrow$ ¨ .$\mathfrak{A}$的二指向结构。于是，根据 $\longrightarrow$的传递性，我们有 $H \longrightarrow \mathfrak{A}$。因此，.$\exists H \in \mathcal{G}(s)$. $H \longrightarrow \mathfrak{A}$。 □

Appendix D
Proof of Prop. 11

命题 56 (命题 11的重述。 对于每个结构$\mathfrak{A}$ 和 *ECoR*$*$ 项 t, 有 $[\![t]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\mathcal{G}(t)]\!]_{\mathfrak{A}}$。

证明。 对 t进行归纳法，方法与命题8相同。

情况 $t = a$ 其中 $a \in \Sigma^{(-)}_{\mathsf{I}} \setminus \Sigma_{\mathsf{I}}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in [\![a]\!]_{\mathfrak{A}} &\iff \langle x, y\rangle \in a^{\mathfrak{A}} && \text{(Def. of } [\![\,]\!]\text{)}\\
&\iff \quad \bullet\!\!-\!\!\circ\!\!-a\!\!\rightarrow\!\!\circ\!\!\rightarrow\ \longrightarrow \mathfrak{A}[x, y]\\
&\iff \langle x, y\rangle \in [\![\ \bullet\!\!-\!\!\circ\!\!-a\!\!\rightarrow\!\!\circ\!\!\rightarrow\ ]\!]_{\mathfrak{A}} && \text{(Def. 7)}\\
&\iff \langle x, y\rangle \in [\![\mathcal{G}(a)]\!]_{\mathfrak{A}}. && \text{(Def. of } \mathcal{G}\text{)}
\end{aligned}
$$

其他情形的证明方式与命题 8的证明相同。

□

Appendix E
Proof completion of Prop. 26

命题 57。 对于每个 *ExKA* 项 u 和结构 $\mathfrak{A}$ （基于Σ），有

$$[\![u]\!]_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{w \in [u]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}.$$

这里， $[u] \subseteq \quad \setminus \{\ \}^{*} \quad u \quad \setminus ($ $A^{(-,\smile)}_{\mathsf{I}}$ $\{\ \}$ u $A^{(-,\smile)} \setminus \{\ \}$ I I)是将其视为 I I 上的项后得到的、在 $A^{(-,\smile)}$ I I 上的语言。

证明。 对 u 进行归纳法。

情况 $u = a$ 对于 $a \in A^{(-,\smile)}_{\mathsf{I}}$ （包括 $a = \mathrm{I}$）: 由于 $[a] = \{a\}$，我们有 $[\![a]\!]_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{w \in [a]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}$。

情况 $u = \bot$: 由于 $[\bot] = \emptyset$，我们有 $[\![\bot]\!]_{\mathfrak{A}} = \emptyset = \bigcup_{w \in \emptyset} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{w \in [\bot]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}$。 情况 $u = t \cup s$:

$$
\begin{aligned}
[\![t \cup s]\!]_{\mathfrak{A}} &= [\![t]\!]_{\mathfrak{A}} \cup [\![s]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&= (\bigcup_{w \in [t]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}) \cup (\bigcup_{w \in [s]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}) && \text{(IH)}\\
&= \bigcup_{w \in [t] \cup [s]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&= \bigcup_{w \in [t \cup s]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}.
\end{aligned}
$$

情况 $u = t \cdot s$:

$$
\begin{aligned}
[\![t \cdot s]\!]_{\mathfrak{A}} &= [\![t]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot [\![s]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&= (\bigcup_{w \in [t]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}) \cdot (\bigcup_{v \in [s]} [\![v]\!]_{\mathfrak{A}}) && \text{(IH)}\\
&= \bigcup_{w \in [t], v \in [s]} ([\![w]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot [\![v]\!]_{\mathfrak{A}}) && \text{(By distributivity)}\\
&= \bigcup_{w \in [t], v \in [s]} [\![wv]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&= \bigcup_{w \in [t \cdot s]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}.
\end{aligned}
$$

情况 $u = t^*$: 我们有

$$
\begin{aligned}
[\![t^*]\!]_{\mathfrak{A}} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![t^n]\!]_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![t]\!]^n_{\mathfrak{A}}\\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup_{w \in [t]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}})^n && \text{(IH)}\\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{w_1, \ldots, w_n \in [t]} ([\![w_1]\!]_{\mathfrak{A}} \cdot \ldots \cdot [\![w_n]\!]_{\mathfrak{A}})\\
&\qquad \text{(By distributivity)}\\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{w_1, \ldots, w_n \in [t]} [\![w_1 w_2 \ldots w_n]\!]_{\mathfrak{A}}\\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{w \in [t^n]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{w \in [t^*]} [\![w]\!]_{\mathfrak{A}}.
\end{aligned}
$$

□

Appendix F
Proof completion of Lem. 34

引理的证明完成。 *34 (P' 是一个可饱和路径)*。 令

$$\langle l_0, \ldots, l_x, l_{x+1}, \ldots, l_{n'}\rangle = \langle 0, \ldots, x, y+1, \ldots, n\rangle.$$

（此处，如果 $y = n$，“$y+1, \ldots,$ n”是空序列）。于是，$w' = a_{l_0} \ldots a_{l_{n'}}$成立，并且 $P' = \langle G', \{U'_i\}_{i \in [0,n']}\rangle$如下:

- $U'_i = U_{l_i}$, 对每个 $i \in [0, n']$; • G' 是 $G\ w'$ $\mathcal{B}\ U'_i\ U'_j\ \}$ $G' = \{\langle i, j\rangle \in$ ( ) 的 I-饱和，使得 I Con$_{\mathsf{I}}$(,)。 $[0, n']^2 \mid i = j \vee \neg$

如果 $\neg \mathsf{Con}^{\mathcal{B}}_{\mathsf{I}}(U'_i, U'_j)$，那么 $\mathsf{Con}^{\mathcal{B}}_{\mathsf{I}}(U'_i, U'_j)$（对于 P，根据 (P-Sat)）；因此 $U'_i \underset{\mathcal{B}}{=} U'_j$ $\{\langle i, j\rangle \in [0, n]^2 \mid$。所以，二元关系 $\mathsf{Con}_{\mathsf{I}}(U'_i, U'_j)\}$具有对称性和传递性；因此 I 是一个等价关系。$G'$ 是一致的，因为 G 是一致的。（特别地，当 $\langle x, y+1\rangle \in \mathrm{I}^G$ 且 $a_{y+1} = \mathrm{I}$ 时，我们有

$U_x = U_y$（根据 x和 y的定义），以及 $U_x = U_{y+1}$（根据 $\langle x, y+1\rangle \in \mathrm{I}^G$），因此 $\mathsf{Con}^{\mathcal{B}}\mathrm{I}(U'_x, U'_{x+1})$（因为 $a_{y+1} = \mathrm{I}$ 与 $\bar{P}$满足 (P-Con)）。所以，$\langle x, x+1\rangle \in \mathrm{I}^{G'}$。因此，由于 $a_{y+1} = \mathrm{I}$，G' 是一致的。）G' 是 $G(w)$ 的边扩展，因为 $\mathrm{I}^{G'} \supseteq \mathrm{I}^{G(w)} = \emptyset$ 且 $\mathrm{I}^{G'} \supseteq \mathrm{I}^{G(w)}$（根据 $\mathrm{I}^{G'}$的定义）。所以，G' 确实是 $G(w)$ 的 I-饱和。

我们证明 P' 是 $\models_{\mathrm{REL}}$的可饱和路径 $w' \leq \mathcal{B}$.

- 对于 (P-s-t)：通过 $U'_0 = U_0$ 和 $U'_{n'} = U_n$ 以及 (P-s-t) 对于P。

- 对于 (P-Con)：– 对于 $a = \mathrm{I}$：令 $\langle i, j\rangle \in \mathrm{I}^{G'}$。如果 $i = j$，那么根据 P 的 (P-Con)，我们有 $\mathsf{Con}^{\mathcal{B}}\mathrm{I}(U'_i, U'_j)$。如果 $\neg \mathsf{Con}^{\mathcal{B}}\mathrm{I}(U'_i, U'_j)$，那么根据 P 的 (P-Sat)，我们有 $\neg\mathsf{Con}^{\mathcal{B}}\mathrm{I}(U'_i, U'_j)$。– 对于 $a = \mathrm{I}$：根据 $\mathrm{I}^{G'}$ 的定义。– 对于 $\mathsf{Con}^{\mathcal{B}}_{a_{l_i}}(U'_{i-1}, U'_i)$，其中 $i \in [n']$：情况 $i \neq x+1$ $U'_{i-1}\ \overset{\mathcal{B}}{a_{l_i}}\ U'_i$ $\langle l_{i-1}, l_i\rangle \in$：根据 $a^G_{l_i}$ P $\mathsf{Con}(,)$（因为根据 的 (P-Con) 与 一起）。情况 $i = x+1$：那么，$U'_x = U_{l_x} = U_x = U_y$和 $U'_{x+1} = U_{l_{x+1}} = U_{y+1}$。根据 $\mathsf{Con}^{\mathcal{B}}_{a_y}(U_y, U_{y+1})$（因为 $\langle y, y+1\rangle \in a^G_y$根据 P 的 (P-Con) 与 一起），我们有 $\mathsf{Con}^{\mathcal{B}}_{a_{l_{x+1}}}(U'_x, U'_{x+1})$。

- 对于(P-Sat)：根据 $\{U'_i \mid i \in [0, n']\} \subseteq \{U_i \mid i \in [0, n]\}$ 及(P-Sat)，可得 P。因此，P' 是$\models_{\mathrm{REL}}$ $w' \leq \mathcal{B}$的一条可饱和路径。 □