arXiv:2304.12131v1 [math.GR] 24 Apr 2023

半群恒等式与 Plactic幺半群簇

Thomas Aird[1]

曼彻斯特大学数学系，英国曼彻斯特 M13 9PL。

Abstract. 我们研究有限秩插板幺半群满足的半群恒等式。对于秩为 n 的插入单元幺半群，当 $n \geq 6$ 时，我们找到了一组新的半群恒等式（适用于 $n \geq 4$），其长度短于此前已知的恒等式。利用这些半群恒等式，我们证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，秩为 n 的插入单元幺半群都满足一个半群恒等式，而半群 $(n+1) \times (n+1)$ 上三角热带矩阵并不满足该恒等式。随后，我们证明，对于每个秩 n，秩为 n 的插入单元幺半群生成不同的半群簇。

1. Introduction

插入单元幺半群是基本的代数对象，因其与许多不同数学领域的联系而备受关注，包括表示论和组合学 [2, 4, 10]。Schensted 最初将它们隐含地描述为一种求给定单词的最长非递减子序列长度的方法 [12]。在此基础上，Knuth 随后找到了插入单元幺半群的一组定义关系，这些关系现称为 Knuth 关系 [7]。之后，Lascoux 和 Sch¨utzenberger [9] 对插入单元幺半群进行了系统研究。

研究插入单元幺半群的秩为n、 $\mathbb{P}_n$时所满足的半群恒等式，是一个活跃的研究领域 [1, 3, 5, 6, 8]。秩为 1 的插入单元幺半群是自由交换幺半群，因此满足与自由交换幺半群相同的恒等式；容易看出，秩为 2 的插入单元幺半群满足与双循环幺半群相同的恒等式；而对秩为 n for$n \geq 3$ 的插入单元幺半群所满足的半群恒等式的研究直到最近才开始。Kubat 和 Okni´nski [8]首先证明，秩为 3 的插入单元幺半群满足半群恒等式$uvvuvu = uvuvvu$ ，其中 u 和 v 分别是 Adian 恒等式的左侧和右侧。随后，Izhakian [5] 以及 Cain、Klein、Kubat、Malheiro 和 Okni´nski [3], 在 $UT_3(\mathbb{T}) \times UT_3(\mathbb{T})$ 中分别找到了秩为 3 的插入单元幺半群的（不同的）忠实表示，从而证明了 $\mathbb{P}_3$ 满足由 $UT_3(\mathbb{T})$满足的每一个恒等式。此外，在 [3] 中，作者证明了秩为 n 的插入单元幺半群所满足的最短恒等式的长度更长

Date: 2023年4月25日。*Key words and phrases.* 恒等式、簇、插入单元幺半群、上三角矩阵半群、热带半环。[1]本研究获曼彻斯特大学院长奖学金资助。电子邮箱: Thomas.Aird@manchester.ac.uk。

于 n。因此，不存在一个由所有有限秩插入单元幺半群共同满足的单一半群恒等式。

在这些结果的基础上，Johnson 和 Kambites [6] 证明，每个有限秩插入单元幺半群都可以表示为热带半环上的矩阵。利用这些表示，他们证明，秩 n 的插入单元幺半群满足的每个恒等式，$UT_n(\mathbb{T})$ 都满足；而秩 n 的插入单元幺半群满足 $UT_d(\mathbb{T})$ 满足的每个恒等式，其中$d = \left\lfloor \frac{n^2}{4} + 1 \right\rfloor$。特别地，他们证明，$\mathbb{P}_3$ 和 $UT_3(\mathbb{T})$ 生成相同的半群簇。

作者 [1, 推论 5.4] 此前证明，存在一个秩 4 插入单式满足、但 $UT_5(\mathbb{T})$ 不满足的恒等式（事实上，$UT_n(\mathbb{T})$ 和 $UT_{n+1}(\mathbb{T})$ 满足的半群恒等式并不相同）。本文将这一结果推广，证明对所有$n \in \mathbb{N}$，都存在一些 $\mathbb{P}_n$ 满足、但 $UT_{n+1}(\mathbb{T})$ 不满足的半群恒等式。因此，根据 Johnson 和 Kambites [6, 定理 4.4], 的结果，我们证明，对所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个 $\mathbb{P}_n$ 满足、但 $\mathbb{P}_{n+1}$ 不满足的恒等式；并且，若秩为 n 的插入单元幺半群与某个 k 的 $UT_k(\mathbb{T})$ 生成相同的簇，则 $n = k$。

众所周知，由 $UT_n(\mathbb{T})$ 生成的簇等于由 $\mathbb{P}_n$ 为 $n \leq 3$生成的簇。由$UT_n(\mathbb{T})$ 生成的簇是否等于由 $\mathbb{P}_n$ 为任意 $n \geq 4$生成的簇，仍是一个尚未解决的问题。

本文连同引言共分为 4 个章节。第 2 节介绍全文中使用的一些记号和定义。第 3 节回顾 [6], 给出的热带表示，证明关于该表示的若干结果，并引入两个新函数，用以证明一个技术性结果。第 4 节构造一组新的半群恒等式，插入单元幺半群的秩为 n 时满足这些恒等式。利用这些恒等式，我们证明不同秩的插入单元幺半群生成不同的半群簇。

2. Preliminaries

给定字母表 Σ，我们将 Σ 上所有词在连接运算下构成的幺半群记为 Σ^*，将 Σ 上所有非空词构成的子半群记为 Σ^+。对于 $w \in \Sigma^*$，我们用 $|w|$ 表示 w 的长度，用 w_i 表示 w 的第 i 个字母。对于 u、$v \in \Sigma^*$，若存在 s、$t \in \Sigma^*$ 使得 $v = sut$，则称 u 是 v 的因子；若对于某个$1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq |v|$ 有 $u = v_{j_1} \cdots v_{j_k}$，则称 u 是 v 的散布子词。

一个（非平凡的）半群恒等式是由一对（不同的）非空词构成的，记作“$u = v$”。对于半群 S，我们称 S 满足恒等式$u = v$，如果每个从 Σ^+ 到 S 的态射都将 u 和 v 映射到 S 中的同一个元素；并将由 S 生成的簇定义为所有满足 S所满足的全部半群恒等式的半群所构成的类。

设 S为一个半群，且 $w \in \{a, b\}^+$；于是对于 x、$y \in S$，记 $w(a \mapsto x, b \mapsto y)$ 表示在 S 中通过进行代换 $a \mapsto x$ 和 $b \mapsto y$所得的 w 的求值。当 $S = \Omega^+$ 对于某个字母表 Ω成立时，我们记作 $w[a \mapsto x, b \mapsto y]$，而不是 $w(a \mapsto x, b \mapsto y)$，以表示$w[a \mapsto x, b \mapsto y]$ 仍然是一个单词。

热带半环记为 $\mathbb{T}$，它是添加了 $-\infty$ 的实数集合，并定义了两个结合二元运算：$a \oplus b = \max(a, b)$ 和 $ab = a+b$，分别作为半环加法和乘法。由此构成一个半环结构，其中加法对最大值满足分配律。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义 $M_n(\mathbb{T})$ 为所有在 $\mathbb{T}$上的 $n \times n$矩阵构成的乘法半群，定义 $UT_n(\mathbb{T})$ 为所有在 $\mathbb{T}$上的 $n \times n$ 上三角矩阵构成的子半群，即对角线以下的每个元素均为 $-\infty$的矩阵。

对于矩阵 $X \in M_n(\mathbb{T})$，我们将 G_X 写作与 X相关联的带权有向图，即顶点集为 $\{1, \ldots, n\}$、边集为$E(G_X)$的带权有向图，其中对于所有满足 $1 \leq i, j \leq n$ 且 $X_{i,j} \neq -\infty$ 的情形，都包含一条从 i 到 j、权为 $X_{i,j}$ 的有向边。

于是，对于 $X, Y \in M_n(\mathbb{T})$，我们将 $G_{X,Y}$ 写作与 X 和 Y 相关联的标记带权有向图，即顶点集为$\{1, \ldots, n\}$、边集为 $E(G_X) \sqcup E(G_Y)$ 的标记带权有向图，其中来自 G_X 的边标记为 X，来自 G_Y 的边标记为 Y。

有向图上的一条路径 γ 是一系列边 $(i_1, j_1) \ldots, (i_m, j_m)$，满足$j_k = i_{k+1}$ 对所有 $1 \leq k < m$ 均成立。如果在 γ 中存在一条以 g 为起点或终点的边，我们称 g 是 γ 的一个节点；如果一条边的起点和终点是同一节点，则称其为环。如果存在路径 δ_1, δ_2 使得 $\gamma = \delta_1 \circ \delta \circ \delta_2$，我们称 δ 是 γ 的子路径；如果存在路径$\gamma_0, \ldots, \gamma_k$ 使得 $\gamma = \gamma_0 \circ \delta_1 \circ \gamma_1 \circ \cdots \circ \delta_k \circ \gamma_k$ 和 $\delta = \delta_1 \circ \cdots \circ \delta_k$，则称 δ 是 γ 的散布子路径。

路径 γ 的长度 m 被定义为 γ 所包含的 m 条边（按重数计），记作 $|\gamma| = m$。如果一条路径不包含任何环，则称其为简单路径。注意，对于任意路径 γ，都存在唯一的最大长度简单散布子路径，即通过移除 γ中的所有环得到的路径。对于任意单词 $w \in \{X, Y\}^+$ 和 γ 中的路径$G_{X,Y}$，如果$|\gamma| = |w|$，并且对于所有 $1 \leq r \leq |\gamma|$，γ 的第 r条边都标记为 w_r，即 w的第 r个字母，则称 γ 由 w 标记。令 $w(\gamma)$表示 γ 的权，即 $w(\gamma)$等于 γ中每条边的权之和。

根据 $\mathbb{T}$的定义，很容易看出，对于 $w \in \{a, b\}^*$ 和$X, Y \in M_n(\mathbb{T})$，$w(a \mapsto X, b \mapsto Y)$的第 ij项等于从 i 到 j、由 $w[a \mapsto X, b \mapsto Y]$ 标记的所有路径的最大权，其中这些路径位于$G_{X,Y}$中。

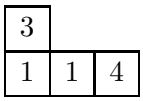
对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将秩为 n $\mathbb{P}_n$ 的插入单元幺半群定义为由集合 $\{1, \ldots, n\}$ 生成、满足 Knuth 关系的幺半群：

$$bca = bac \text{ for } 1 \leq a < b \leq c \leq n, \text{ and}$$
$$cab = acb \text{ for } 1 \leq a \leq b < c \leq n.$$

秩为 n 的插入单元幺半群也可以通过组合方式定义。杨图是由大小相等的方框组成的有限左对齐数组，其中每一行的方框数至多等于其下方一行的方框数。接着，我们将半标准杨表定义为这样的杨图：每个方框中都有一个来自 $\mathbb{N}$ 的元素，并且各列从上到下严格递减，各行从左到右弱递增。

现在，我们可以通过取字母表 $\{1, \ldots, n\}$，并将其中所有生成相同半标准杨表的词等同起来，从而定义 $\mathbb{P}_n$

在 Schensted 插入算法 [12] 下。例如，杨表



可以通过对单词 1314、1341 或 3114 应用 Schensted 插入算法得到；利用 Knuth 关系，可以很容易看出它们在插入单元幺半群中都相等。

3. Plactic 表示

我们首先介绍一些记号。令 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$、$[n] = \{1, \dots, n\}$ 和 $2^{[n]}$ 表示 $[n]$ 的幂集。对于 S 和 $T \in 2^{[n]}$，我们将 S^i 写作 S 中第 i 小的元素，并称 $S \leq T$，如果对于每个 $i \leq |T|$ 都有 $|S| \geq |T|$ 和 $S^i \leq T^i$。然后对于 $S \leq T$，我们将从 S 到 T 的序区间写作 $[S, T]$，并将所有 $[S, T]$ 中集合的并集写作 $\cup[S, T]$。

现在我们可以给出文献 [6] 中所给出的秩为 n 的插入单元幺半群到热带矩阵中的忠实表示的定义。

定义 3.1. 对所有 $n \in \mathbb{N}$，定义映射 $\rho_n \colon [n]^* \to M_{2^{[n]}}(\mathbb{T})$，其中

$$\rho_n(x)_{P,Q} = \begin{cases} -\infty & \text{if } |P| \neq |Q| \text{ or } P \not\leq Q; \\ 1 & \text{if } |P| = |Q| \text{ and } x \in \cup[P, Q]; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于每个生成元 $x \in \mathbb{P}_n$，将其乘法延拓到生成元的乘积，并按如下方式映射 e，即 $\mathbb{P}_n$ 的单位元:

$$\rho_n(e) = \begin{cases} -\infty & \text{if } |P| \neq |Q| \text{ or } P \not\leq Q; \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

定理 3.2（[6, 定理 2.9]）。对于所有 $n \in \mathbb{N}$、$\rho_n \colon \mathbb{P}_n \to M_{2^{[n]}}(\mathbb{T})$ 是 $\mathbb{P}_n$ 的忠实表示。

对于 S、$T \in 2^{[n]}$ 和 $S \leq T$，我们将 $[S, T]$ 的链长定义为满足对于某些 P_1, ..., $P_t \in [S, T]$ 有 $S = P_1 < \cdots < P_t = T$ 的最大 $t \in \mathbb{N}$。对于 $w \in [n]^*$ 和 $N \subseteq [n]$，令 $|w|_N = \sum_{i \in N} |w|_i$，即 w 中来自 N 的字母出现的次数。

引理 3.3. 设 $w \in [n]^*$和 S、$T \in 2^{[n]}$，使得 $|S| = |T|$和 $S < T$。那么，存在 $N \in [S, T]$，使得 $N \neq S$、$|w|_N \geq \min(|w|_S, |w|_T)$，且$[S, N]$的链长为 $\leq n$。

证明. 如果 $[S, T] \leq n$的链长，令 $N = T$，则结论成立。因此，假设 $[S, T] > n$ 的链长。令 $S' = S \setminus T$和 $T' = T \setminus S$。于是,

$$|w|_T - |w|_S = (|w|_{T'} + |w|_{S \cap T}) - (|w|_{S'} + |w|_{S \cap T}) = |w|_{T'} - |w|_{S'}. \quad (1)$$

现在，由于 $|S| = |T|$，我们有 $|S'| = |T'|$，因此令 $S' = \{s_1 < \cdots < s_{|S'|}\}$和 $T' = \{t_1 < \cdots < t_{|S'|}\}$。

假设存在矛盾：对所有 i， $|w|_{t_i}-|w|_{s_i}<\min(0,|w|_T-|w|_S)$。那么，

$$|w|_{T'}-|w|_{S'}=\sum_{i=1}^{|S'|}(|w|_{t_i}-|w|_{s_i})<|S'|\min(0,|w|_T-|w|_S)$$
$$\leq \min(0,|w|_T-|w|_S)$$

与（1）矛盾。因此，令 i 使得 $|w|_{t_i}-|w|_{s_i}\geq\min(0,|w|_T-|w|_S)$，并令 $N=(S\setminus\{s_i\})\cup\{t_i\}$。于是，

$$|w|_N=|w|_S+|w|_{t_i}-|w|_{s_i}\geq\min(|w|_S,|w|_T).$$

现在，我们证明 $S\leq N$ 和 $[S,N]$ 的链长为 $t_i-s_i+1\leq n$。令 $x\in S\cap T$，则对于某个 s 和 t，有 $x=S^s=T^t$，其中 $s\geq t$ 是 $S\leq T$。定义 $S_x=S\setminus\{x\}$ 和 $T_x=T\setminus\{x\}$。于是，

（i）对于 $1\leq j<t$，$(S_x)^j=S^j\leq T^j=(T_x)^j$；

（ii）对于 $t\leq j<s$，$(S_x)^j=S^j<x\leq T^{j+1}=(T_x)^j$；

（iii）对于 $s\leq j\leq|S_x|$，$(S_x)^j=S^{j+1}\leq T^{j+1}=(T_x)^j$。

因此，$S_x\leq T_x$，从而对所有 $x\in S\cap T$ 运用这一推理，我们得到 $S'\leq T'$。假设对于某些 $i\leq l_1$、$l_2\leq|S|$，$s_i=S^{l_1}$ 且 $t_i=T^{l_2}$，那么通过考察 (i)、(ii) 和 (iii)，我们得到 $l_1\leq l_2$。

由于 $S'<T'$ 且 $S'\cap T'=\emptyset$，我们得到 $s_i<t_i$。因此，令 $l_2\leq m\leq|S|$ 为满足 $S^m<t_i$ 的最大的元素。于是，我们有

$$N=\{S^1<\cdots<S^{l_1-1}<S^{l_1+1}<\cdots<S^m<t_i<S^{m+1}<\cdots<S^{|S|}\}.$$

注意，对于 $l<l_1$ 和 $l>m$，$S^l=N^l$。因此显然 $S\leq N$，且 $[S,N]$ 的链长为 $t_i-s_i+1\leq n$。

最后，我们旨在证明 $N\leq T$。注意，对于 $l\geq l_2$，$t_i\leq T^l$。因此，对于 $l_2\leq l<m$ 和 $N^m=t_i\leq T^m$，$S^{l+1}\leq T^l$。于是，对于 $l_2\leq l\leq m$，$N^l\leq T^l$。所以，我们需要证明对于所有 $l_1\leq l<l_2$，$N^l=S^{l+1}\leq T^l$。

为导出矛盾，令 $l_1\leq k<l_2$ 为满足 $S^{k+1}>T^k$的最小的对象。那么，如果 $k\neq l_1$，

$$S^{k+1}>T^k>T^{k-1}\geq S^k,$$

而如果 $k=l_1$，

$$S^{l_1+1}>T^{l_1}\geq S^{l_1}>S^{l_1-1}.$$

因此，在这两种情况下，$T^k\notin S\cap T$，因为 $S^{l_1}\notin S\cap T$。由于 $T^k<T^{l_2}=t_i$，我们有 $T^k=t_j$，其中某个 $j<i$。于是，存在 x_1、.....、$x_{k-j}\in S\cap T$，使得

$$x_1<\cdots<x_{l_1-i}<S^{l_1}<x_{l_1-i+1}<\cdots<x_{k-j}<T^k<S^{k+1}$$

因为 $S^{l_1}=s_i$ 且 $T^k=t_j$。然而，通过计算 x_s 的数量以及 S^{l_1}与 S^{k+1}之间 S中元素的数量，我们得到 $k-j-l_1+i\leq k-l_1$。因此，$i\leq j$，由此产生矛盾。所以，对于所有 $l_1\leq l<m$和 $N\in[S,T]$，都有 $S^{l+1}\leq T^l$。□

推论 3.4. 设 $w\in[n]^*$ 和 S、$T\in2^{[n]}$ 满足 $|S|=|T|$，且 $S<T$。则，

（i）如果 $|w|_S\leq|w|_T$，则存在 $N\in[S,T]$，使得 $N\neq S$，$[S,N]$的链长为 $\leq n$，且对于所有 $M\in[S,N]$，$|w|_M\leq|w|_N$。

（ii）如果 $|w|_T \leq |w|_S$，则存在 $N \in [S,T]$，使得 $N \neq T$，$[N,T]$的链长为 $\leq n$，且对于所有 $M \in [N,T]$，$|w|_M \leq |w|_N$。

证明。对于情形 (i)，将引理 3.3 应用于 S 和 T，得到 $N' \in [S,T]$，使得 $N' \neq S$、$|w|_{N'} \geq |w|_S$ 和 $[S,N']$ 的链长为 $\leq n$。然后令 $N \in [S,N]$ 为满足 $|w|_N \geq |w|_{N'}$ 和 $N \neq S$ 的极小元（在偏序中）。

对于情形 (ii)，如果 $[S,T] \leq n$ 的链长，则令 $N \in [S,T]$ 为满足 $|w|_N \geq |w|_S$ 和 $N \neq T$ 的极大元（在偏序中），这样便得证；因此，不妨设 $[S,T] > n$ 的链长。我们归纳地定义如下序列 $N_1 < \cdots < N_m$。令 $S = N_1$，并对每个 $i \geq 1$，令 $N_{i+1} \in [N_i,T]$ 为将引理 3.3 应用于 N_i 和 T 后得到的元素。由于 $[N_{i+1},T]$ 的链长严格小于 $[N_i,T]$ 的链长，我们可以重复此过程，直到存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $[N_m,T]$ 的链长至多为 n。注意，由于 $[N_{m-1},N_m]$ 的链长至多为 n，因此 $|w|_{N_m} \geq |w|_T$ 和 $N_m \neq T$。然后令 $N \in [N_m,T]$ 为满足 $|w|_N \geq |w|_{N_m}$ 和 $N \neq T$ 的极大元（在偏序中）。□

引理 3.5. $2^{[n]}$ 在 $\leq$下构成一个格，其中交运算和并运算定义为

$$S \wedge T = \bigcup_{i=1}^{k} \min(S^i, T^i) \cup \begin{cases} \{S^{k+1}, \ldots, S^{|S|}\} & \text{if } |S| \geq |T| \\ \{T^{k+1}, \ldots, T^{|T|}\} & \text{if } |S| < |T| \end{cases}$$

$$S \vee T = \bigcup_{i=1}^{k} \max(S^i, T^i)$$

其中 $k = \min(|S|, |T|)$。

证明。不妨设 $|S| \geq |T| = k$。现在，令 $P = \cup_{i=1}^{k} \min(S^i, T^i) \cup \{S^{k+1}, \ldots, S^{|S|}\}$ 以及 $Q = \cup_{i=1}^{k} \max(S^i, T^i)$。

对于 $i < j \leq k$、$S^i < S^j$ 和 $T^i < T^j$。因此，$\min(S^i, T^i) < \min(S^j, T^j)$，且 $\max(S^i, T^i) < \max(S^j, T^j)$。由此可推得 $|P| = |S|$、$|Q| = |T|$，并且对于 $i \in [k]$ $P^i = \min(S^i, T^i)$ 和 $Q^i = \max(S^i, T^i)$。

显然，对于所有 $i \in [k]$ 和 $P^i = S^i$，$P \leq S$、$T \leq Q$ 因为 $P^i \leq S^i$、$T^i \leq Q^i$ 对于 $k < i \leq |S|$ 成立。现在，令 P'、$Q' \in 2^{[n]}$ 使得 $P' \leq S$、$T \leq Q'$，则，

$$\begin{aligned} (P')^i &\leq \min(S^i, T^i) = P^i && \text{for } i \in [k], \\ (P')^i &\leq S^i = P^i && \text{for } k < i \leq |S|, \\ Q^i &= \max(S^i, T^i) \leq (Q')^i && \text{for } i \in [k]. \end{aligned}$$

因此，$P' \leq P$ 和 $Q \leq Q'$，从而 $P = S \wedge T$ 和 $Q = S \vee T$。 □

推论 3.6。设 S、$T \in 2^{[n]}$ 使得 $|S| = |T| = k$，则

$$S \wedge T = \bigcup_{i=1}^{k} \min(S^i, T^i) \text{ and } S \vee T = \bigcup_{i=1}^{k} \max(S^i, T^i).$$

在本文余下部分，我们将经常固定 $N \in 2^{[n]}$，然后针对 $S \in 2^{[n]}$ 考虑 $S \wedge N$ 和 $S \vee N$，因此引入以下函数。对于每个固定的 $N \in 2^{[n]}$，定义 ϕ_N、ψ_N：$2^{[n]} \to 2^{[n]}$，使得 $\phi_N(S) = S \wedge N$ 且 $\psi_N(S) = S \vee N$。

注意， ϕ_N 和 ψ_N 是保序的，也就是说，对于 S、$T \in 2^{[n]}$，如果 $S \leq T$，则 $\phi_N(S) \leq \phi_N(T)$ 且 $\psi_N(S) \leq \psi_N(T)$。

现在，令 $X = \rho_n(x)$ 和 $Y = \rho_n(y)$，其中 x、$y \in [n]^*$。考虑 $\mathcal{G}_{X,\ Y}$，注意到 X 和 Y 的行由 $2^{[n]}$ 索引，因此 $\mathcal{G}_{X,\ Y}$ 的节点是 $[n]$ 的子集。

设 e 是 $\mathcal{G}_{X,\ Y}$ 中从 S 到 T、标签为 $V \in \{X, Y\}$ 的一条边。我们将 $\phi_N(e)$ 和 $\psi_N(e)$ 分别定义为从 $\phi_N(S)$ 到 $\phi_N(T)$、标签为 V 的边，以及从 $\psi_N(S)$ 到 $\psi_N(T)$、标签为 V 的边。注意，由于 ϕ_N 和 ψ_N 是保序的，并根据 ρ_n 的定义，$(V)_{S,\ T} \neq -\infty$ 当且仅当 $|S| = |T|$ 和 $S \leq T$ 时，这两条边都存在。

此外，对于从 S到 T的任意路径 γ，在 $\mathcal{G}_{X,\ Y}$中，令 $\phi_N(\gamma)$ 和 $\psi_N(\gamma)$ 分别表示将 ϕ_N 和 ψ_N 作用于 γ的各条边后得到的路径。同样，由于 ϕ_N和 ψ_N是保序的， $\phi_N(\gamma)$ 和 $\psi_N(\gamma)$ 是 $\mathcal{G}_{X,\ Y}$中的良定义路径。

现在，为了继续讨论，我们需要引用 [6]中的一个定义和一个引理。若存在一个有序集合序列，使得单词 $w \in [n]^*$ 可以从 S 读到 T

$$S \leq P_1 \leq \cdots \leq P_{|w|} \leq T$$

使得对于每个 $1 \leq i \leq |w|$，都有 $w_i \in P_i$。

引理 3.7（引理 2.2, [6]）。对于每个 $w \in [n]^*$ 和 S，若 $T \in 2^{[n]}$ 满足 $|S| = |T|$ 和 $S \leq T$，则条目 $\rho_n(w)_{S,\ T}$ 是 w 中可从 S 读到 T的散布子词的最大长度

引理3.8。设 $x, y \in [n]^*$ $X = \rho_n(x)$，$Y = \rho_n(y)$。设 $S, T \in 2^{[n]}$ 满足 $|S| = |T|$ 和 $S \leq T$，且 γ是图 $\mathcal{G}_{X,Y}$ 中从 S到 T的一条路径。那么，对于任意 $N \in [S, T]$，存在三条路径，它们的标签都与 γ相同： σ从 S到 N， τ从 N到 T，以及 λ从 N到 N，使得 $w(\gamma) + w(\lambda) \leq w(\sigma) + w(\tau)$。

证明。设 $N \in [S, T]$, $\sigma = \phi_N(\gamma)$ 和 $\tau = \psi_N(\gamma)$，根据 ϕ_N 和 ψ_N 的定义，这些路径在 γ 处具有相同的标签。此外，根据推论 3.6， σ 和 τ 分别是从 S 到 N、从 N 到 T 的路径，如 $S \leq N \leq T$ 所示。设 λ 是一条完全由 N 处的环组成、且标签与 γ 相同的路径。只需证明，对于每条边 $f \in \gamma$，

$$w(f) + V_{N,N} \leq w(\phi_N(f)) + w(\psi_N(f)).$$

其中， $V \in \{X, Y\}$ 是与边 f的标签相对应的矩阵。设 f是从 F_1到 F_2的一条边， $\phi_N(f)$是从 D_1到 D_2的一条边，且$\psi_N(f)$是从 E_1到 E_2的一条边。那么，这可以写成如下形式。

$$V_{F_1,F_2} + V_{N,N} \leq V_{D_1,D_2} + V_{E_1,E_2}.$$

若 $V = X$，令 $v = x$；否则，若 $V = Y$，令 $v = y$。令 u 为 v 的一个散布子词，它可以从 F_1 读到 F_2，且长度最大，并且对于某个 $t \in \mathbb{N}_0$，有 $|u| = t$。那么，存在一个有序集合序列

$$F_1 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_t \leq F_2$$

使得 $u_i \in S_i$。现在，考虑以下两个序列

$$D_1 = \phi_N(F_1) \leq \phi_N(S_1) \leq \cdots \leq \phi_N(S_t) \leq \phi_N(F_2) = D_2,$$
$$E_1 = \psi_N(F_1) \leq \psi_N(S_1) \leq \cdots \leq \psi_N(S_t) \leq \psi_N(F_2) = E_2.$$

根据推论 3.6，对于所有 $i \in [t]$，都有 $u_i \in \phi_N(S_i) \cup \psi_N(S_i)$ 和$N \subseteq \phi_N(S_i) \cup \psi_N(S_i)$。此外，若 $u_i \in N$，则 $u_i \in \phi_N(S_i) \cap \psi_N(S_i)$，因为$u_i \in N \cap S_i$。因此，$u$，并且每个 $m \in N$的每次出现都会被上述序列从 D_1 读到 D_2，以及从 E_1 读到 E_2。因此，根据引理 3.7，$V_{D_1,\ D_2} + V_{E_1,\ E_2} \geq V_{F_1,\ F_2} + V_{N,\ N}$，因为$V_{N,\ N} = |v|_N$。□

4. Plactic Identities

本节中，我们找到了插入单元幺半群秩为 n时满足的一组新的半群恒等式。此外，我们构造了 $\mathbb{P}_n$ 满足、但 $UT_{n+1}(\mathbb{T})$不满足的半群恒等式，这表明由 $UT_{n+1}(\mathbb{T})$生成的簇不包含于由 $\mathbb{P}_n$生成的簇。因此，由 $\mathbb{P}_n$ 生成的簇严格包含于由 $\mathbb{P}_{n+1}$生成的簇。

定理 4.1. 设 $q \in \{a,b\}^*$ 包含 $\{a,b\}^*$中长度为 $n-1$ 的每个单词作为因子。设 $u = q^h a q^h$ 和 $v = q^h b q^h$，其中 $h = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$。那么，半群恒等式 $u[a \mapsto ab, b \mapsto ba] = v[a \mapsto ab, b \mapsto ba]$ 由 $\mathbb{P}_n$满足。

证明。我们需要证明，对所有 X、$Y \in \mathbb{P}_n$，

$$u(a \mapsto XY, b \mapsto YX) = v(a \mapsto XY, b \mapsto YX).$$

因此，令 x、$y \in [n]^*$、$X = \rho_n(x)$、$Y = \rho_n(y)$，并对每个 $N \in 2^{[n]}$，设 $w(N) = |xy|_N = (XY)_{N,\ N} = (YX)_{N,\ N}$ 是 N 的权，其中第二个等式由引理 3.7 得出。注意，对所有 $N \in 2^{[n]}$，$w(N)$ 都是非负整数。

回忆一下，根据 ρ_n 的定义，对于 S、$T \in 2^{[n]}$，

$$\begin{aligned} u(a \mapsto XY, b \mapsto YX)_{S,T} \neq -\infty &\iff |S| = |T| \text{ and } S \leq T, \\ &\iff v(a \mapsto XY, b \mapsto YX)_{S,T} \neq -\infty. \end{aligned}$$

因此，要证明 $u(a \mapsto XY, b \mapsto YX) = v(a \mapsto XY, b \mapsto YX)$，只需检查由 S、T 索引的矩阵项，其中 $|S| = |T|$ 且 $S \leq T$。

令 S、$T \in 2^{[n]}$ 满足 $|S| = |T|$ 和 $S \leq T$，我们要证明存在一条从 S 到 T、由 $u[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 标记的最大权路径，它位于$\mathcal{G}_{XY,\ YX}$ 中，且标记为 XY 的中央边是一个环。由此，我们可以通过将标记为 XY 的中央边与标记为 YX 的环互换，构造一条权相同、标记为 $v[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 的路径，从而证明 $u(a \mapsto XY, b \mapsto YX)_{S,\ T} \leq v(a \mapsto XY, b \mapsto YX)_{S,\ T}$。

考虑一条从 S 到 T、标记为 $u[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 的最大权路径 γ_1。对于 $i \in \mathbb{N}$，我们现在递归地定义 γ_i' 和 γ_{i+1}。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，写作 $\gamma_i = \alpha_i \circ \zeta_i \circ \beta_i$，其中 α_i 和 β_i 分别标记为 $q^h[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$，而 ζ_i 标记为 XY。令 A_i 为 α_i 中最后出现的最大权重节点，令 B_i 为 β_i 中最先出现的最大权重节点。

令 $\gamma_i' = \alpha_i' \circ \zeta_i \circ \beta_i'$，其中 α_i' 和 β_i' 分别通过取 α_i 和 β_i，将 α_i 中任意一个仅包含环的长度为 $|q|$ 的子路径替换为位于 A_i 处的 $|q|$ 个环，并将 β_i 中任意一个仅包含环的长度为 $|q|$ 的子路径替换为位于 B_i处的 $|q|$ 个环得到；对这些环进行标记，使得 α_i' 和 β_i' 被标记为$q^h[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$。注意，所有其他边均保留其标签，因为$\alpha_i$和 β_i 被标记为 $q^h[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$；因此，增加或移除$|q|$ 个连续的环会使这些边移动 $|q|$ 个位置，但仍对应同一个标签。备注

因为 $w(\gamma_i') \geq w(\gamma_i)$，而 A_i 和 B_i 分别是 α_i 和 β_i中的最大权重节点。

显然， A_i 和 B_i 是 γ_i'的节点。因此，对于 $i \in \mathbb{N}$，令 π_i 为 γ_i' 中位于 A_i 和 B_i 之间、且在 A_i 或 B_i处没有环的子路径，其中当 $A_i = B_i$时， π_i 是 A_i 处的空路径。我们按以下方式定义 γ_{i+1}。

(i) 如果 $A_i = B_i$，则令 $\gamma_{i+1} = \gamma_i'$。(ii) 如果 $A_i \neq B_i$ 且 $w(A_i) \leq w(B_i)$。然后，通过将推论 3.4(i)应用于 A_i 和 B_i，存在 $N_i \in [A_i, B_i]$，使得 $[A_i, N_i]$ 的链长至多为 n，并且对于所有 $M \in [A_i, N_i]$，

$$w(M) \leq w(N_i). \tag{2}$$

现在，将引理3.8应用于带有 N_i 的 π_i，得到三条路径： σ_i 从A_i 到 N_i，τ_i 从 N_i 到 B_i，以及 λ_i 从 N_i 到 N_i。于是，

$$w(\pi_i) + |\lambda_i| w(N_i) = w(\pi_i) + w(\lambda_i) \leq w(\sigma_i) + w(\tau_i)$$

由于 $w(N_i) = (XY)_{N,\ N} = (YX)_{N,\ N}$，因此 $w(\lambda_i) = |\lambda_i| w(N_i)$。

令 σ_i' 为 σ_i的最长简单散布子路径。注意， $[A_i, N_i]$ 的链长至多为 n，因此 σ_i' 的长度至多为$n-1$。由（2），对于 $M \in [A_i, N_i]$，有 $w(M) \leq w(N_i)$。因此，

$$\begin{aligned} w(\pi_i) &\leq w(\sigma_i) - |\lambda_i| w(N_i) + w(\tau_i) \\ &\leq w(\sigma_i') - |\sigma_i'| w(N_i) + w(\tau_i) \end{aligned}$$

由于 $|\lambda_i| = |\sigma_i|$ 且 $w(\sigma_i) \leq w(\sigma_i') + (|\sigma_i| - |\sigma_i'|) w(N_i)$。因此，

$$w(\pi_i) + |q| w(A_i) \leq w(\sigma_i') + (|q| - |\sigma_i'|) w(A_i) + w(\tau_i). \tag{3}$$

由于 $w(A_i) \leq w(N_i)$。

由于 q 以因子的形式包含每个长度为 $n-1$ 的单词，因此 q存在一个因子，记为 p_i，使得 σ_i' 由 $p_i[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 标记为$|\sigma_i'| < n$。令 $q = s_i p_i e_i$ = $s_i, e_i \in \{a, b\}^*$。设 δ_i 为从 A_i 到 N_i 、标记为 $q[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 的路径，其中在 A_i 处有 $|s_i|$ 个标记为 $s_i[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$的环，随后是简单路径 σ_i'，然后在 N_i 处有 $|e_i|$ 个标记为 $e_i[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$的环。

根据定理3.2], $[S, T]$ 的链长至多为 $h+1$ [6,。因此， γ_i'中至多有 h 条非环边。由于 $A_i \neq B_i$， $\zeta_i \circ \beta_i'$中存在一个非环。因此， γ_i' 在 A_i 处包含一段由 $q[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 标记的环子路径，因为 α_i'中至多有 $h-1$ 条非环边，并且根据构造，α_i' 中长度为 $|q|$ 的任何环子路径都位于 A_i 处。

我们通过以下方式构造 γ_{i+1}： 首先将 A_i 处由 $q[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 标记的前 $|q|$ 个环替换为 δ_i，将 π_i 替换为 τ_i，再将中间 A_i 处的所有环替换为 N_i处的环。

(iii) 类似地，若 $w(A_i) > w(B_i)$。那么，将推论3.4(ii)应用于 A_i和 B_i，可得存在 $N_i \in [A_i, B_i]$，使得 $[N_i, B_i]$ 的链长至多为 n，且对所有 $M \in [N_i, B_i]$，

$$w(M) \leq w(N_i). \tag{4}$$

现在，将引理3.8应用于 π_i，使用 N_i，得到三条路径： σ_i 从A_i 到 N_i、τ_i 从 N_i 到 B_i，以及 λ_i 从 N_i 到 N_i。然后，

$$w(\pi_i) + |\lambda_i| w(N_i) = w(\pi_i) + w(\lambda_i) \leq w(\sigma_i) + w(\tau_i)$$

正如 $w(N_i) = (XY)_{N,N} = (YX)_{N,N}$，因此 $w(\lambda_i) = |\lambda_i| w(N_i)$。

令 τ_i' 为 τ_i的最长简单散布子路径。注意， $[N_i, B_i]$ 的链长至多为 n，因此 τ_i'的长度至多为$n-1$。由 (4)，对于 $M \in [N_i, B_i]$，我们有 $w(M) \leq w(N_i)$。因此，

$$\begin{aligned} w(\pi_i) &\leq w(\sigma_i) + w(\tau_i) - |\lambda_i| w(N_i) \\ &\leq w(\sigma_i) + w(\tau_i') - |\tau_i'| w(N_i) \end{aligned}$$

如 $|\lambda_i| = |\tau_i|$和 $w(\tau_i) \leq w(\tau_i') + (|\tau_i| - |\tau_i'|)w(N_i)$。因此，

$$w(\pi_i) + |q| w(B_i) \leq w(\sigma_i) + w(\tau_i') + (|q| - |\tau_i'|) w(B_i). \tag{5}$$

如 $w(B_i) \leq w(N_i)$。

由于 q 包含每个长度为 $n-1$ 的单词作为因子，因此 q存在一个因子，记为 p_i，使得 τ_i'由 $p_i[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 标记为$|\tau_i'| < n$。令 $q = s_i p_i e_i$表示某个 $s_i, e_i \in \{a, b\}^*$。设 δ_i是从 N_i到 B_i、标记为 $q[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 的路径，其中包含在 N_i处标记为 $s_i[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$的 $|s_i|$ 个环，随后是简单路径 τ_i'，然后是在 B_i 处标记为 $e_i[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$的 $|e_i|$ 个环。

根据 $[6, \text{定理 } 3.2]$， $[S, T]$ 的链长至多为 $h+1$。因此，γ_i'中至多有 h 条非环边。由于 $A_i \neq B_i$，$\alpha_i' \circ \zeta_i$中存在一个非环。因此，γ_i' 包含一条位于 B_i、标签为 $q[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 的环子路径，因为 β_i'中至多有 $h-1$ 条非环边，并且根据构造， β_i' 中长度为 $|q|$ 的任何环子路径都位于 B_i。

我们通过以下方式构造 γ_{i+1}：首先将 π_i 替换为 σ_i，将 B_i 处最后 $|q|$个标签为 $q[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 的环替换为 δ_i，再将中间 B_i 处的所有环替换为 N_i处的环。

在上述任一种情形下，我们都有 $w(\gamma_i') \leq w(\gamma_{i+1})$。在情形 (i) 中，这显然成立；在情形 (ii) 和 (iii) 中，分别考察借助 (3) 和 (5) 构造的 γ_{i+1} 即可看出。因此， γ_{i+1} 是从 S到 T、标签为 $u[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 的最大权路径。

如果 $A_i \neq B_i$ 且 $w(A_i) \leq w(B_i)$，那么 N_i 是 γ_{i+1}的节点， $A_i < N_i$且 $w(A_i) \leq w(N_i)$。因此， $A_i < A_{i+1}$ 和 $B_{i+1} \leq B_i$，因为 B_i 是 γ_{i+1}的节点。类似地，如果 $w(A_i) > w(B_i)$，那么 $A_i \leq A_{i+1}$ 和 $B_{i+1} < B_i$。如果 $A_i = B_i$，那么根据 γ_{i+1}的定义， $A_i = A_{i+1}$ 和 $B_i = B_{i+1}$。

因此，如果 $A_i \neq B_i$，那么 $[A_{i+1}, B_{i+1}]$ 的链长严格小于 $[A_i, B_i]$的链长。因此，由于 $[S, T]$ 具有有限的链长，我们有存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $A_k = B_k$。

因此， $\gamma_k = \alpha_k \circ \zeta_k \circ \beta_k$ 是一个标记为 $u[a \mapsto XY$的最大权重路径， $b \mapsto YX]$ 使得 ζ_k是 $A_k = B_k$处一个标记为 XY的环，从而 $u(a \mapsto XY, b \mapsto YX)_{S,\ T} \leq v(a \mapsto XY, b \mapsto YX)_{S,\ T}$。

此外，利用对偶性可以证明，存在一条标记为 $v[a \mapsto XY, b \mapsto YX]$ 的最大权路径，其中间的边是一个标记为 YX 的环，这意味着 $u(a \mapsto XY, b \mapsto YX)_{S,\ T} \geq v(a \mapsto XY, b \mapsto YX)_{S,\ T}$。因此，由于 x、 $y \in [n]^*$ 是任意选取的，且 ρ_n 是 $\mathbb{P}_n$ 的忠实表示，半群恒等式 $u[a \mapsto ab, b \mapsto ba] = v[a \mapsto ab, b \mapsto ba]$ 由 $\mathbb{P}_n$ 满足。□

备注 4.2. 上述定理给出的 $\mathbb{P}_n$ 所满足的最短半群恒等式长度为 $O(2^{n-1}n^2)$，因为包含 $\{a, b\}^*$ 中长度为 $n-1$ 的每个单词作为因子的最短单词长度为 $O(2^{n-1})$。 $[11, \text{p.79}]$ $\mathbb{P}_n$ 先前已知的最短恒等式长度至少为 $O(2^{h+2})$

其中 $h = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$。因此，本文给出的恒等式对于所有 $n \geq 6$ 都比先前已知的恒等式更短。当 $n = 6$ 时，先前已知的最短恒等式长度为 2082，而现在最短恒等式的长度为 1298。

推论 4.3。令 $n \in \mathbb{N}$。存在一个由$\mathbb{P}_n$ 满足、但不由 $UT_{n+1}(\mathbb{T})$满足的半群恒等式。

证明。令 $q \in \{a, b\}^*$，以 b 开头，以 a^{n-1} 结尾，在 $\{a, b\}^*$ 中包含长度为 $n-1$ 的每个单词作为因子，但不包含 a^n 作为因子。令$u = q^h a q^h$ 和 $v = q^h b q^h$，其中 $h = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$。于是，根据定理 4.1，$u[a \mapsto ab,\ b \mapsto ba] = v[a \mapsto ab, b \mapsto ba]$ 由 $\mathbb{P}_n$ 满足。然而，根据 [1, 引理 3.1]，$u[a \mapsto ab, b \mapsto ba] = v[a \mapsto ab, b \mapsto ba]$ 不由 $UT_{n+1}(\mathbb{T})$ 满足，因为a^n 是 u 的因子，但不是 v 的因子。□

因此，我们现在可以得出结论：秩不同的插入单元幺半群生成不同的半群簇。

推论 4.4. 设 $n \in \mathbb{N}$。存在一个半群恒等式，$\mathbb{P}_n$ 满足该恒等式，但 $\mathbb{P}_{n+1}$不满足。

证明。根据推论 4.3，存在一个半群恒等式，$\mathbb{P}_n$满足该恒等式，而 $UT_{n+1}(\mathbb{T})$ 不满足。然而，根据定理 4.4]，$\mathbb{P}_{n+1}$ 满足的所有恒等式，$UT_{n+1}(\mathbb{T})$也都满足。于是，存在一个恒等式，$\mathbb{P}_n$满足该恒等式，而 $\mathbb{P}_{n+1}$不满足。□

推论 4.5. 设 $n \in \mathbb{N}$。如果 $\mathbb{P}_n$ 生成的半群簇与$UT_k(\mathbb{T})$生成的相同，那么 $k = n$。

证明。根据定理 3.4]，，对所有 $k < n$，存在一个恒等式，$UT_k(\mathbb{T})$满足该恒等式，但 $UT_n(\mathbb{T})$不满足；而根据定理 4.4]，，$\mathbb{P}_n$ 满足的每个恒等式，$UT_n(\mathbb{T})$也都满足。因此，对所有 $k < n$，存在一个恒等式，$UT_k(\mathbb{T})$满足该恒等式，但 $\mathbb{P}_n$不满足。最后，根据推论 4.3，对所有 $k > n$，存在一个恒等式，$\mathbb{P}_n$ 满足该恒等式，但 $UT_k(\mathbb{T})$不满足。□

已知，当 $n \leq 3$ 时，秩为 n 的插入单元幺半群生成的半群簇与 $UT_n(\mathbb{T})$ 生成的半群簇相同。因此，鉴于上述推论，我们提出以下问题。

问题 4.6：对于任意 $n \geq 4$，$\mathbb{P}_n$ 生成的半群簇是否与 $UT_n(\mathbb{T})$ 生成的半群簇相同?

References

[1] T. Aird。《热带矩阵半群的恒等式与秩 4 插入单式》。*International Journal of Algebra and Computation*，32(06)：1083–1100，2022。[2] A. J. Cain、R. D. Gray 和 A. Malheiro。插入代数的有限 Gr¨obner–Shirshov 基与插入单元幺半群的双自动结构。*Journal of Algebra*，423：37–53，2015。[3] A. J. Cain、G. Klein、L. Kubat、A. Malheiro 和 J. Okni´nski。关于插入单元幺半群以及上三角热带矩阵幺半群中的恒等式的注记。*arXiv preprint arXiv:1705.04596* 2017。。[4] N. Hage 和 P. Malbos。A 型插入单元幺半群的克努特相容表示。*Algebras and Representation Theory*，20(5)：1259–1288，2017。

[5] Z. Izhakian。热带 plactic 代数、cloaktic 幺半群与半群表示。 *Journal of Algebra*，524：290–366，2019。[6] M. Johnson 和 M.Kambites。热带表示与插入单元幺半群的恒等式。 *Transactions of the American Mathematical Society* 374 6 4423 4447, , （）：–。2021
[7] D. E. Knuth。排列、矩阵与广义杨表。 *Pacific Journal of Mathematics* 34 3 709 727, 1970 , （）：–。

[8] ˙L. Kubat 和 J. Okni´nski。插入单元幺半群的恒等式。 *Semigroup Forum*，90 1 100 112, 2015（）：–。[9] A. Lascoux 和 M.-P. Sch¨utzenberger。《plaxique 幺半群》¨法语 [。载于] *Noncommu-tative structures in algebra and geometric combinatorics* 109 *Quaderni de* , *“La Ricerca Scientifica”* 129 156, 1981
第 卷，页码 –，罗马，[10] 。¨V. Lopatkin。通过 Gr *Journal of Algebra and its Applications*obner–Shirshov 基研究插入单元幺半群代数的上同调环。[11] ，15(05)：1650082，2016。

Identities and bases in plactic hypoplactic sylvester and related D. C. Ribeiro。 *monoids* 2022 *Canadian Journal of* [12] , *Mathematics* 13 179 191, 1961 , 。博士论文，Faculdade de Ciˆencias e Tecnologia (FCT)，。C. Schensted。最长递增与递减子序列。：–。