arXiv:2304.12179v1 [physics.class-ph] 21 Apr 2023

带有不等式约束的《经典力学》

Andrei Frolov*Simon Fraser University, Department of Physics, Burnaby BC Canada V5A 1S6

Valeri P. Frolov†Theoretical Physics Institute, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2E

本文讨论带有不等式约束的机械系统。我们将说明，如何通过适当修改描述原始无约束动力学的作用量，将此类约束纳入考量。为说明这一方法，我们考虑具有极限速度的模型中的谐振子。我们将此类振子的行为与相对论振子的行为进行比较，并证明当振子的振幅较大时，这两类振子的性质非常相似。我们还将简要讨论包含高阶导数的不等式约束。

I. 引言

对带有约束的机械系统的研究已有悠久历史（例如参见 [1, 2]）。对于此类系统，除了拉格朗日量 $L(q,\ \dot{q})$ 之外，还存在一个或多个约束关系 $\Phi_i = 0$，它们限制系统的运动。在最简单的情况下，当这些函数仅依赖于坐标 q 时，这些约束称为完整约束。通过求解这些约束，可以约化构型空间，并得到描述存在约束时系统运动的约化拉格朗日量。非完整约束的情况更为复杂，此时约束函数 Φ_i 不仅依赖于坐标 q，还依赖于速度 $\dot{q}$。已有许多论文专门讨论这一主题。例如，在 [3–5]中可以找到关于这一问题的讨论及相应参考文献。

研究具有非完整约束的机械系统的方法之一是在 [6] 中提出的。在这种方法中，通过将相应的拉格朗日乘子与约束一同加入拉格朗日量，对其进行“升级”。这种使用哈密顿驻定作用量原理推广形式的方法被称为非完整力学 [3–7]。对于具有一个约束的系统$\Phi(q,\ \dot{q}) = 0$，相应的“升级”拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = L(q,\dot{q}) + \chi\Phi(q,\dot{q})\,. \tag{1.1}$$

对拉格朗日乘子 χ 的作用量变分 $\Phi = 0$会重现约束方程，而对 q 的变分则给出除坐标之外还包含控制函数 $\chi(t)$的方程。这组方程决定了系统的受约束运动。

本文旨在讨论带有不等式约束的力学。这种约束是对坐标 q 和速度 $\dot{q}$ 施加的限制，其形式为 $\Phi(q,\ \dot{q}) \le 0$。我们将证明，描述系统运动的方程可以由以下拉格朗日量得到

$$\mathcal{L} = L + \chi(\Phi + \zeta^2)\,, \tag{1.2}$$

其中包含两个拉格朗日乘子，χ 和 ζ。对相应作用量关于 χ 和 ζ 进行变分可得

$$\Phi + \zeta^2 = 0, \qquad \chi\zeta = 0\,. \tag{1.3}$$

因此，系统的运动具有两种不同的状态。如果 $\Phi \le 0$，第一个方程给出ζ，而第二个方程意味着 $\chi = 0$。当第一个方程达到饱和且约束函数 Φ达到其临界值 $\Phi = 0$时，有 $\zeta = 0$，此时控制函数 χ 可以取非零值。这两种状态之间的转换发生在控制函数 χ 为零的点上。类似的方法曾在 [8]中讨论过。近期发表的文献 [9–12] 讨论了对曲率不变量施加不等式约束的模型，以及这些模型在黑洞和宇宙学奇点问题中的应用。

本文的组织如下。第二节研究具有一个自由度且带有不等式约束的系统的力学。第三节讨论不同状态之间的转换，并找出相应的条件。第四节将所发展的工具应用于研究速度受到不等式约束的谐振子。第五节将极限速度模型中振子的运动与相对论振子的运动进行比较，并说明这两个模型之间存在相似性。第六节简要讨论约束函数 Φ 包含高于一阶导数的坐标的情形。最后一节总结所得结果。

II. 带有不等式约束的拉格朗日力学

我们的出发点是以下作用量

$$S = \int dt\mathcal{L}, \tag{2.1}$$

* frolov@sfu.ca
† vfrolov@ualberta.ca

其中

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},\xi,\zeta) = L(q,\dot{q}) + \chi(\Phi(q,\dot{q}) + \zeta^2)\,. \tag{2.2}$$

此处及下文中，我们用点号表示时间导数。除动力学变量 $q(t)$外，该作用量还包含约束函数 $\Phi(q,\dot{q})$以及两个拉格朗日乘子$\chi(t)$和 $\zeta(t)$。对 $\chi(t)$和 $\zeta(t)$求 S 的变分可得

$$\Phi(q,\dot{q}) + \zeta^2 = 0, \qquad \chi\zeta = 0\,. \tag{2.3}$$

这些方程表明，系统的演化可以处于两种不同的状态:

- 亚临界阶段，此时约束函数$\Phi(q,\dot{q})$为负。在此状态下，（2.3）中的第一个方程定义了拉格朗日乘子 $\zeta(t)$，而第二个关系式则意味着 $\chi(t) = 0$。这意味着，在亚临界阶段，系统遵循标准的欧拉-拉格朗日方程。

- 超临界状态，此时 $\zeta = 0$。在该阶段，约束方程

$$\Phi(q,\dot{q}) = 0 \tag{2.4}$$

得到满足，控制参数 $\chi(t)$变为动力学变量。

如果由作用量（2.1）描述的系统在亚临界状态下开始运动，那么其运动由欧拉-拉格朗日方程描述

$$\frac{\delta L}{\delta q} = 0\,. \tag{2.5}$$

这里以及下文中，我们采用函数 $L(q,\dot{q})$ 的拉格朗日导数的以下标准定义

$$\frac{\delta L}{\delta q} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\,. \tag{2.6}$$

设 $q(t)$ 是该方程的一个解，则在轨迹上计算得到的约束函数 $\Phi(t) = \Phi(q(t)\ \dot{q}(t))$ 为负。如果在某个时刻 t_0 约束函数 $\Phi(t)$ 变为零，则超临界状态开始。

在此阶段，约束 $\Phi = 0$ 有效，对作用量（2.1）关于 q 的变分给出

$$\dot{\chi}\pi + \chi\frac{\delta\Phi}{\delta q} + \frac{\delta L}{\delta q} = 0\,. \tag{2.7}$$

这里记作

$$\pi \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}, \qquad \frac{\delta\Phi}{\delta q} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial q}\,. \tag{2.8}$$

此阶段的运动由时间的两个函数 $q(t)$ 和 $\chi(t)$ 指定。函数 $q(t)$ 可通过求解约束方程（2.4）得到，而方程（2.7）决定控制函数 $\chi(t)$ 的演化。这是关于 $\chi(t)$ 的一阶常微分方程；如果指定控制函数 χ 在某一时刻的值，就可以确定其解。

如果约束函数 Φ 在某个时刻 $t = t_0$达到其临界值 0，则 $\chi\ (t_0) = 0$。我们假设$\pi\ (t_0) \neq 0$，则带有该初始条件的方程（2.7）具有唯一解。如果控制函数 $\chi\ (t)$ 在稍后的某个时刻 $t_1 > t_0$再次变为零，系统可以返回其亚临界状态。

III. 状态变化的条件

让我们更详细地讨论超临界解能够返回到亚临界解的条件。为此，我们引入以下记号

$$p = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}, \quad E = p\dot{q} - L, \quad \epsilon = \pi\dot{q} - \Phi\,. \tag{3.1}$$

让我们证明，在超临界状态下，量

$$\mathcal{E} = E + \chi\epsilon\,, \tag{3.2}$$

是守恒的。

容易验证，以下关系式成立

$$\dot{E} = \frac{\delta L}{\delta q}\dot{q}, \qquad \dot{\epsilon} = \frac{\delta\Phi}{\delta q}\dot{q}\,. \tag{3.3}$$

利用 $\mathcal{E}$ 的定义和关系式（3.3），可得

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{E} + \chi\dot{\epsilon} + \dot{\chi}\epsilon \tag{3.4}$$

$$= \left(\frac{\delta L}{\delta q} + \chi\frac{\delta\Phi}{\delta q} + \dot{\chi}\pi\right)\dot{q} - \dot{\chi}\Phi\,. \tag{3.5}$$

$$\tag{3.6}$$

利用关系式（2.7）和约束方程 $\Phi = 0$可得 $\mathcal{E} = 0$。

所得等式意味着 $\mathcal{E}$ 是超临界解的守恒量。根据其构造，它表示由扩展作用量（2.1）-（2.2）描述的扩展系统的能量。它与无约束系统的能量 E 相差 $\chi\epsilon$。后者可解释为控制场 χ 对系统总能量的贡献。在亚临界状态下，$\chi = 0$ 且 $E = E_0$ =为常数，其中E 是无约束系统的通常能量。在转变点 $t = t_0$处，$\chi = 0$ 有 $\mathcal{E} = E_0$。

在超临界阶段，量 E 随时间变化，$E = E\ (t)$。容易看出，若存在一个更晚的时刻 $t = t_1$，使控制参数 χ 再次变为零，则必须满足以下条件

$$E(t_1) = E_0\,. \tag{3.7}$$

换言之，超临界解可以在总能量

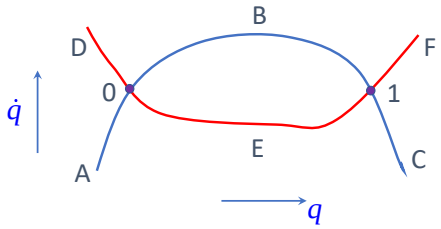

图1. 等能曲线、 E =const，以及约束 $\Phi = 0$ 在（q， $\dot{q}$）相平面上的曲线。

$\mathcal{E}$ 变得等于系统在初始亚临界阶段的能量 E_0 时，返回亚临界阶段。

图1 展示了具有不等式约束的系统运动。图中给出了等能曲线E 以及约束 $\Phi = 0$ 在（q， $\dot{q}$）相平面上的曲线。设 ABC 为 E =const曲线（E-曲线），并设 DEF 为约束曲线 $\Phi = 0$。这些曲线相交于点0和点1，它们是亚临界状态与超临界状态之间的过渡点。假设 Φ 在曲线 DEF上方为正。于是，系统从 A 运动，在到达转变点0后沿超临界轨迹 $0E1$运动。经过第二个转变点1后，它继续沿亚临界轨迹 $1C$运动。由于速度 $\dot{q}$ 在 $0E1$上的速度小于在$0B1$ 上的速度（对于相同的 q值），因此在0和1之间“行进”所需的时间

$$t_{01} = \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\dot{q}} \tag{3.8}$$

沿约束曲线的运动时间长于沿 E-曲线的相应运动时间。在相反情况下，即当 Φ 在曲线 DEF下方为正时，相应的轨迹为 $D0B1F$。

IV. 具有极限速度约束的谐振子

为了说明上一节所述的结果，我们考虑一个具有极限速度约束的谐振子模型。也就是说，我们讨论一个具有如下作用量的系统

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}\int d\tau \left[(dx/d\tau)^2 - \omega^2 x^2 + \chi\left((dx/d\tau)^2 - V^2 + \tilde{\zeta}^2\right)\right] . \tag{4.1}$$

其中， $x(\tau)$ 是振子在时间 τ 的位置，ω 是其频率。常数 V 是极限速度的值，并选取一个约束，使得不等式 $|dx/d\tau| \le V$ 有效。引入有量纲变量很方便

$$q = \omega x/V, \qquad t = \omega\tau, \qquad \zeta = \tilde{\zeta}/V \tag{4.2}$$

其中

$$\tilde{S} = \frac{V^2}{\omega} S ,$$
$$S = \frac{1}{2}\int dt \left[\dot{q}^2 - q^2 + \chi(\dot{q}^2 - 1 + \zeta^2)\right] . \tag{4.3}$$

这里的点表示对无量纲时间 t求导。

对 q、 χ 和 ζ 改变作用量 S，得到以下方程组

$$(\dot{q}\chi)^{\cdot} = -(\ddot{q} + q) , \tag{4.4}$$
$$\dot{q}^2 - 1 + \zeta^2 = 0 , \tag{4.5}$$
$$\zeta\chi = 0 . \tag{4.6}$$

在亚临界状态下 $\chi = 0$， $\zeta^2 = 1 - \dot{q}^2$，而方程（4.4）重现了非相对论简谐振子的标准运动方程

$$\ddot{q} + q = 0 . \tag{4.7}$$

在超临界状态下

$$\dot{q}^2 = 1 , \tag{4.8}$$
$$\dot{q}\dot{\chi} + \ddot{q}\chi = -(\ddot{q} + q) . \tag{4.9}$$

状态之间的转换发生在速度 $|\dot{q}|$ 达到其极限值 1 时。

我们选取亚临界状态下的一个解，其形式为

$$q = -q_0 \cos(t), \qquad q_0 > 0 . \tag{4.10}$$

随后，当满足以下条件时，会转入超临界状态

$$\dot{q} \equiv q_0 \sin(t) = \pm 1 . \tag{4.11}$$

只有当 $q_0 \ge 1$ 时，这个关系才能成立。这意味着，对于 $q_0 < 1$ ，解始终保持在亚临界状态，且不会达到极限速度。

对于 $q_0 > 1$ 解（4.10）首次达到临界速度$\dot{q} = 1$ 的时刻为 $t = t_0$

$$t_0 = \arcsin(1/q_0) . \tag{4.12}$$

振子在此时的位置为

$$q(t_0) = -q_c, \qquad q_c = \sqrt{q_0^2 - 1} . \tag{4.13}$$

此后，振子沿超临界轨迹运动

$$q(t) = -q_c + (t - t_0) . \tag{4.14}$$

方程（4.9）决定控制函数的演化，其形式为

$$\dot{\chi} = -q . \tag{4.15}$$

利用（4.14）并求解方程（4.15），结合初始条件 $\chi(t_0) = 0$ 可得

$$\chi = -\frac{1}{2}(t - t_0)^2 + q_c(t - t_0) . \tag{4.16}$$

控制函数在时间 $t = t_1 > t_0$ 再次变为零，其中

$$t_1 = t_0 + 2q_c\,. \tag{4.17}$$

之后，解返回到其亚临界状态，其中 $\chi = 0$ 且

$$q = q_0\cos(2(q_c + t_0) - t)\,. \tag{4.18}$$

这一亚临界运动持续到时刻 $t = t_2 > t_1$，此时速度达到临界值 $\dot{q} = -1$。对于 $t_2 < t < t_3$，振子以恒定的临界速度 $\dot{q} = -1$ 运动，直到在 $t = t_3$再次转变为亚临界状态。

极限速度模型中谐振子的相图如图 2 所示。内圆 $C_<$ 描述了振子以 $q_0 < 1$运动的情形。在此情况下，超临界状态不存在。外轨道 $C_>$ 描述了振子以$q_0 > 1$运动的情形。点 0、1、2 和 3 表示亚临界相与超临界相之间发生转变的状态。

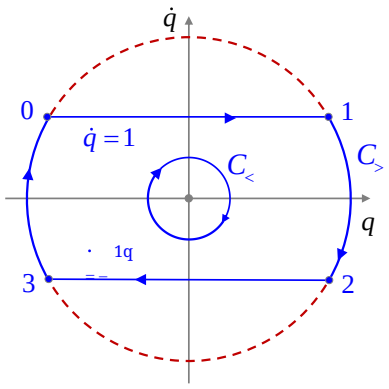

图 2. 极限速度模型中振子在（q，$\dot{q}$）平面上的运动相图。这些图分别对应振幅的两个取值 $q_0 = 0.5$（曲线 $C_<$）和 $q_0 = 2.0$（曲线 $C_>$）。

图3 显示了函数 $q(t)$的曲线：速度约束振子（实线）以及具有相同振幅的标准简谐振子（虚线）。$q_0 > 1$。

振子的运动是周期性的。对于 $q_0 < 1$，周期恒定，等于 2π。对于 $q_0 \geq 1$，周期为

$$T = 4\left[\arcsin(1/q_0) + \sqrt{q_0^2 - 1}\right]\,. \tag{4.19}$$

请注意，周期 T 始终大于 2π。对于 $q_0 \gg 1$，$T \sim 4q_0$。

利用三维相空间表示极限速度模型中振子的运动是很有启发性的，其中

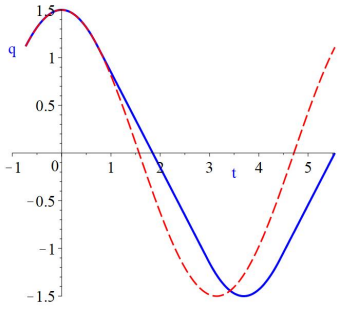

图 3. 极限速度模型中振幅为 $q_0 = 1.5$ 的振子的位置时间依赖性以实线表示。虚线表示无约束振子在振幅相同的情况下的 $q(t)$ q_0。

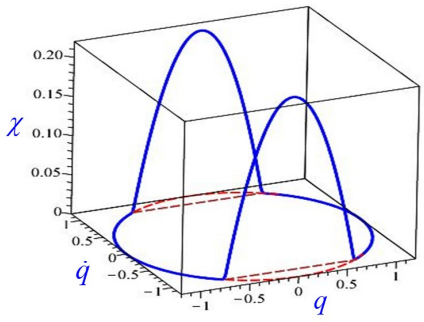

图 4. 表示极限速度模型中振子运动的三维相图。相应的三维坐标为 $(q,\ \dot{q},\ \chi)$。该图针对 $q_0 = 1.2$绘制。

坐标（q、$\dot{q}$、χ）。相轨迹如图 4 所示。对于系统的亚临界运动，控制函数 χ（t）为零，其相轨迹位于（q、$\dot{q}$）平面上。在此阶段，无约束谐振子的能量

$$E = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + q^2) \tag{4.20}$$

保持不变。势能的减少由动能的增加所补偿。

系统进入超临界状态后，以下量守恒

$$\mathcal{E} = E + \chi\dot{q}^2\,. \tag{4.21}$$

当系统的速度达到其极限值时，系统的动能变得“冻结”，而其势能则降低。因此，能量 E 降低。然而，在这一阶段，控制场χ 取非零值，并对系统的总能量 $\mathcal{E}$ 作出贡献。该贡献恰好补偿了 E的降低。因此，在超临界阶段，总能量 $\mathcal{E}$保持不变。在这种

描述中，场 χ 扮演着某种“隐变量”的角色。可以说，这个隐变量首先吸收振子的一部分能量，随后又将其释放出来。当所吸收的总能量返回给振子时，场 χ 消失，而总能量 $\mathcal{E}$与无约束振子 E的标准能量相一致。这发生在 χ 消失并转入亚临界状态时。

V. 极限速度振子与相对论振子

上一节中，我们描述了极限速度模型中谐振子的运动。本节将这一模型与相对论振子的情形进行比较。在相对论振子中，系统的速度自然受到一个普适常数 c（光速）的限制。采用与前文相同的量纲单位，并令 $c=1$，我们将这种相对论振子的作用量写为

$$S=\int dtL,\qquad L=-[\sqrt{1-\dot{q}^2}+\frac{1}{2}q^2]\,. \tag{5.1}$$

对于较小的速度，$|\dot{q}|\ll 1$ 拉格朗日量 L 化为

$$L_{nonrel}=\frac{1}{2}[\dot{q}^2-q^2]\,. \tag{5.2}$$

在这个关系式中，我们省略了一个不影响运动方程的常数项。与作用量 S 相应的欧拉-拉格朗日方程为

$$\dot{p}+q=0,\qquad p=\frac{dL}{d\dot{q}}=\frac{\dot{q}}{\sqrt{1-\dot{q}^2}}\,. \tag{5.3}$$

相对论振子的守恒能量为

$$E=p\dot{q}-L=\frac{1}{\sqrt{1-\dot{q}^2}}+\frac{1}{2}q^2\,. \tag{5.4}$$

该表达式中的第一项 $(1-\dot{q}^2)^{-1/2}$实际上就是相对论粒子的洛伦兹因子 γ；对于单位质量，它等于系统的总动能（包括静止质量能量），而第二项 q^2则是势能。

运动是有界的。对于给定的能量 E，将坐标 q 的最大值记为 q_0，则有

$$E=1+\frac{1}{2}q_0^2\,, \tag{5.5}$$

而方程（6.6）可写为

$$\gamma\equiv(1-\dot{q}^2)^{-1/2}=1+z,\qquad z=\frac{1}{2}(q_0^2-q^2)\,. \tag{5.6}$$

求解该方程可得 $\dot{q}$

$$\dot{q}=\pm\frac{\sqrt{z(2+z)}}{1+z}\,. \tag{5.7}$$

该关系可以绘制相对论振子在（q，$\dot{q}$）平面上的运动相图。该图见图5。

振子的速度在$q=0$处达到最大值

$$\dot{q}_0=\pm\frac{\sqrt{z_0(2+z_0)}}{1+z_0},\qquad z_0=\frac{1}{2}q_0^2\,. \tag{5.8}$$

容易验证 $|\dot{q}_0|<1$，且当 q_0取较大值时，它趋近于±1。

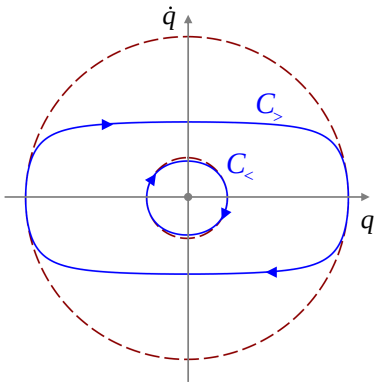

图5. 表示相对论振子运动的相图，位于（q，$\dot{q}$）平面上。图中展示了振幅分别为 $q_0=0.5$（$C_<$线）和 $q_0=2.0$（$C_>$线）的两条曲线。对于 $q_0=0.5$，相对论效应较小，振子的相轨迹 $C_<$（实线所示）接近半径为 0.5 的圆周（虚线所示）。当振幅 q_0 大于 1 时，相对论效应显著。因此，相轨迹在 $\dot{q}$ 方向上被压扁。振幅为 $q_0=2$ 时的这种压扁轨迹以实线 $C_>$ 表示。

通过积分一阶微分方程（5.7），可以求出振子在时刻 t、$q(t)$ 的位置。为展示其运动特性，我们在图 6 中给出了函数 $q(t)$，其中 $q_0=1.2$。作为比较，该图还显示了具有相同振幅的类似非相对论性振子的函数 $q(t)$（虚线）。

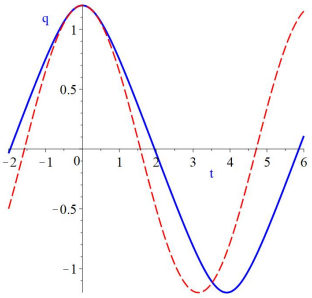

图6. 振幅为 $q_0=1.2$ 的相对论振子的位置随时间变化由实线表示。虚线表示具有相同振幅的非相对论性振子的位置。

相对论振子的运动是周期性的。相应的周期为

$$T_{rel} = 2\sqrt{2}\int_0^{z_0} \frac{dz(1+z)}{\sqrt{z(2+z)(z_0-z)}}\,. \tag{5.9}$$

利用以下结果可以解析地计算该积分

$$T_{rel} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{z_0+2}}\left[(z_0+2)E\left(\sqrt{\frac{z_0}{z_0+2}}\right) - K\left(\sqrt{\frac{z_0}{z_0+2}}\right)\right]. \tag{5.10}$$

其中， $E(x)$ 和 $K(x)$ 是完全椭圆积分。对于$q_0 \gg 1$

$$T_{rel} \sim 4q_0\,. \tag{5.11}$$

这一结果有一个简单的解释：对于较大的振幅 q_0 ，系统会非常快地达到接近光速的速度，而在我们的单位制中，光速为 1。

图 7 显示了周期 T 随相对论振子的振幅 q_0 的变化关系（实线）。图中的虚线表示极限速度模型中振子的周期随其振幅 q_0的变化关系。可以看出，在这两种情况下，相应的曲线非常相似。

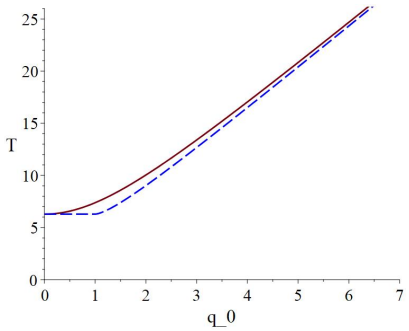

图 7. 相对论振子（实线）和极限速度模型中的振子（虚线）的周期随其振幅 q_0 的变化关系。

VI. 含高阶导数的不等式约束

到目前为止，我们考虑的是约束函数 Φ 仅依赖于 q 和 $\dot{q}$的情形。现在我们讨论一下，如果约束函数包含 q的二阶或更高阶导数，会发生什么。首先假设 Φ 包含 q 的二阶导数，且该导数是线性进入的。那么进入作用量（2.1）的拉格朗日量 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = L(q,\dot{q}) + \chi(\Phi+\zeta^2), \qquad \Phi = \ddot{q} - \varphi(q,\dot{q})\,. \tag{6.1}$$

这种约束意味着，加速度 $\ddot{q}$ 受数量 $\varphi(q,\ \dot{q})$ 的上限限制。如果一个亚临界解到达满足 $\ddot{q} = \varphi(q,\ \dot{q})$ 的点，它便进入超临界状态，在该状态下以下方程成立

$$\ddot{q} = \varphi(q,\dot{q})\,, \tag{6.2}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta q} \equiv \frac{\delta L}{\delta q} - \frac{\delta(\chi\varphi)}{\delta q} - \ddot{\chi} = 0\,. \tag{6.3}$$

轨迹 $q(t)$ 可以通过求解这些方程中的第一个方程得到。第二个方程定义了控制函数 χ的演化。它可以写成如下形式

$$\ddot{\chi} + \varphi_{,\dot{q}}\dot{\chi} + \frac{\delta\varphi}{\delta q}\chi = \frac{\delta L}{\delta q}\,. \tag{6.4}$$

这是一个二阶线性非齐次常微分方程。通过指定某一时刻的 χ 和 $\dot{\chi}$ 初始值，可以唯一确定其解。在亚临界状态下，控制函数 χ 恒等于零。方程（6.4）表明，如果φ、$\dot{q}$ 和 $\delta\varphi/\delta q$ 均为有限值，那么 χ 和 $\dot{\chi}$ 都不能发生跳变。因此，在转变点处有

$$\chi = \dot{\chi} = 0\,. \tag{6.5}$$

将约束方程 $q(t)$的一个解代入（6.4）的右端，并利用这些初始条件，可以求出超临界状态下控制函数随时间的变化。

可以验证，在超临界阶段，下列量保持不变

$$\mathcal{E} = E - \dot{q}\dot{\chi} + [\varphi - \varphi_{,\dot{q}}\dot{q}]\chi, \qquad E = \dot{q}L_{,\dot{q}} - L\,. \tag{6.6}$$

要证明 $\dot{\mathcal{E}} = 0$ ，只需使用方程（6.2）以及以下关系

$$\dot{E} = \frac{\delta L}{\delta q}\dot{q}\,. \tag{6.7}$$

与前文一样，可以将 $\mathcal{E}$ 视为能量的“升级版”。除了原始无约束系统的能量 E 外，它还包含与控制函数 $\chi(t)$相关的能量贡献。沿约束 $\Phi = 0$ 运动会导致 E发生变化，而控制参数变量对总能量的贡献会补偿这种变化。

我们来证明，在一般情况下，如果解已经进入超临界状态，就不可能再回到亚临界阶段。假设情况相反：在某个时刻 t_1 ，超临界解离开了约束。由于对于 $t > t_1$ ，控制函数 $\chi(t)$ 应恒等于零，因此在转变点有 $\chi = \dot{\chi} = 0$。如果 φ、$\dot{q}$ 和 $\delta\varphi/\delta q$ 有限，则方程 (6.4) 意味着函数 $\dot{\chi}(t)$ 和 $\chi(t)$ 不可能发生跳变。但是，对于在 $t = t_1$ 处为零的方程 (6.4) 的一般解，其一阶导数在该点不一定为零，因此条件 $\chi = \dot{\chi} = 0$ 并不成立。这一性质使得约束函数 Φ 含有二阶导数的情形，与先前讨论的含有 $\Phi(q,\dot{q})$ 的模型截然不同。

可以预期，这是含有 q 的二阶导数和／或高阶导数的不等式约束模型的一种普遍性质。换言之，如果解从亚临界状态进入超临界状态，那么它很可能会永远停留在超临界阶段。

VII. 极限加速度模型中的谐振子

为了说明含有二阶导数不等式约束的系统的性质，我们考虑一个带有极限加速度的简单非相对论简谐振子模型。具体而言，我们假设振子的加速度始终小于某个正数，并将其记为 a。我们选择相应的约束函数 Φ 如下

$$\Phi = \ddot{q} - a\,, \tag{7.1}$$

并将作用量写成如下形式

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q^2) + \chi(\Phi + \zeta^2)\right]\,. \tag{7.2}$$

我们假设振子在 $t = 0$处开始运动，初始条件为 $q = 0$，其速度为 $\dot{q} = -q_0$。那么，在亚临界状态下，这种无约束振子的运动方程为

$$q(t) = -q_0 \sin(t)\,. \tag{7.3}$$

其加速度 $\ddot{q} = q_0$sin(t) 随时间增大。如果 $q_0 < a$，振子的加速度始终小于临界值，因此其运动永远保持亚临界状态。

当 $q_0 > a$ 时，其行为则大不相同。用 t_0 表示满足以下条件的时刻

$$\sin(t_0) = a/q_0\,. \tag{7.4}$$

振子的坐标 q 和速度为

$$q(t_0) = -a, \qquad \dot{q}(t_0) = -\sqrt{q_0^2 - a^2},. \tag{7.5}$$

$t = t_0$ 之后，振子以恒定加速度 a 运动，因此有

$$q(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 - \sqrt{q_0^2 - a^2}(t - t_0) - a\,. \tag{7.6}$$

控制函数的方程（6.4） χ（t）的形式为

$$\ddot{\chi} = \ddot{q} + q\,, \tag{7.7}$$

其中 $q(t)$ 由7.6给出。方程7.7可以很容易地积分，得到

$$\chi(t) = \frac{1}{6}(t - t_0)^3 \left[\frac{1}{4}a(t - t_0) - \sqrt{q_0^2 - a^2}\right]\,. \tag{7.8}$$

这里使用了初始条件 $\chi(t_0) = \dot{\chi}(t_0) = 0$。

控制函数再次变为零的时刻为 $t = t_1$

$$t_1 - t_0 = \frac{4}{a}\sqrt{q_0^2 - a^2}\,. \tag{7.9}$$

然而，此时振子的速度并不为零，而是

$$\dot{\chi}(t_1) = \frac{8}{3}\left[(q_0/a)^2 - 1\right]^{3/2} \neq 0\,. \tag{7.10}$$

因此，条件 χ（t_1） $= 0$ 和 $\dot{\chi}$（t_1） $= 0$ 无法同时满足。这意味着，在具有极限加速度的模型中，振子从亚临界状态进入超临界状态后，将永远保持在超临界状态。

VIII. 总结

本文讨论了具有不等式约束的动力系统的性质。我们证明，可以通过适当修改无约束理论的原始作用量，将此类约束纳入考量。我们首先讨论了具有拉格朗日量$L(q, \dot{q})$和形式为 $\Phi(q, \dot{q}) \leq 0$的不等式约束的理论。此类系统的运动由扩展拉格朗日量 $\mathcal{L} = L + \chi(\Phi + \zeta^2)$ 描述，其中包含两个拉格朗日乘子 $\chi(t)$ and $\zeta(t)$。系统的运动有两种状态：亚临界和超临界状态。这两种状态之间的转变发生在相平面 $(q, \dot{q})$ 上，恒能量 E 线与约束曲线 Φ 的交点处。对于亚临界解以及转变点，控制参数 $\chi(t)$ 为零。在超临界阶段，能量 $E(q, \dot{q})$ 不守恒，而包含控制函数贡献的总能量 $\mathcal{E}(q, \dot{q}, \chi)$ 是一个运动积分。

为了说明带有不等式约束的动力系统的性质，我们考察了一个简单的谐振子模型，并施加了一个条件：它的速度不能超过某个固定值。采用无量纲单位时，可以将该速度设为 1。我们证明，若振子的振幅为 q_0，且小于 1，其周期运动不会出现超临界阶段；而当振幅为 $q_0 > 1$ 时，运动则同时包含亚临界和超临界阶段。我们比较了极限速度模型中的振子运动与相对论振子的运动，并表明二者的性质十分相似。从这个意义上说，带有极限速度约束的模型可以看作是狭义相对论的一个“平民版”。当然，该模型无意取代狭义相对论，而是作为一种唯象模型，用来捕捉狭义相对论的某些特征，尤其是光速具有极限这一点。

在本文末尾，我们讨论了包含动力学变量一阶导数以上的高阶导数的约束不等式

。对于此类系统，控制函数的微分方程中导数的阶数为二阶或更高阶，而从亚临界状态向超临界状态转变时，需要满足多个条件。这些条件既可能在从亚临界状态向超临界阶段转变时得到满足，也可能在逆向转变时得到满足。然而，可以预期，亚临界相与超临界相之间存在多次转变的情况相当特殊，并且需要一些额外条件。

我们的讨论聚焦于只有一个自由度和一个不等式约束的系统。这一分析可以扩展到自由度不止一个且具有多个不等式约束的更一般系统。可以预期，这类系统的行为会更加复杂。具体而言，除亚临界状态外，还可能存在多个超临界状态，且这些状态之间可能发生转变。研究这类系统是一个相当有趣的问题。

本文讨论的简单例子展示了具有不等式约束的模型的一些一般特征。它们有助于讨论更一般且在物理上更有趣的情形。例如，在最近的论文中 [9–12] 有人提出并讨论了极限曲率模型，将其与宇宙学中的奇点问题以及爱因斯坦引力中的黑洞问题联系起来。这一方法的基本思想是，寻找（尚未知晓的）引力理论的一些稳健预言，在该理论中曲率不可能无限增大。从这个意义上说，具有极限曲率的引力模型可作为唯象模型，用于研究更为基础的修正引力理论的预言。本文所考虑的具有不等式约束的模型相当简单，仅用于说明这类系统的一些简单性质。若将类似的方法应用于其他具有物理意义的问题，将会很有意义。

致谢

作者感谢加拿大自然科学与工程研究委员会提供经费支持。V.F. 也感谢 Killam Trust 提供经费支持。作者感谢 Andrei Zelnikov 博士协助准备部分图表。

[1] H. Goldstein、C. Poole 和 J. Safko， *Classical Mechanics* (Addison Wesley，2002)。[2] V. Arnold、K. Vogtmann 和 A. Weinstein， *Mathemat-ical Methods of Classical Mechanics*，数学研究生教材（Springer，1989）。[3] V. I. Arnold， *Dynamical systems III.*，第 3 卷（1988）。[4] P. Mann， *Lagrangian and Hamiltonian Dynamics*（牛津大学出版社，2018）。[5]Jaume Llibre 和 Rafael Ramirez， *Inverse problems in ordinary differential equations and applications*，数学进展，第 313 卷（Birkhauser，2016）。[6] V. V. Kozlov，《苏联物理学·科学院院刊》。《苏联科学院院刊》中物理学部分的译文 **28**，594–600（1983）。[7] J. Cortes、M. Le´on、D. Martin de Diego 和 S. Mart´ınez，《SIAM控制与优化杂志》**41**，1（2000）。[8] D. P. Bertsekas， *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods (Optimization and Neural Computation Series)* 1996 （Athena Scientific，）。[9] V. P. Frolov 和 A. Zelnikov，《高能物理学杂志》**2021**，154（2021）。[10] V. P. Frolov 和 A. Zelnikov，《物理评论D》**104**，104060（2021）。[11] V. P. Frolov 和 A. Zelnikov，《物理评论D》**105**，024041（2022）。[12] V. P. Frolov，《现代物理学国际杂志A》**37**，2243009（2022）。