arXiv:2304.12211v1 [math.MG] 24 Apr 2023

完美　　美与近乎完美齐性多胞体

˘V.N. BERESTOVSKII，YU.G. NIKONOROV

Abstract. 本文研究欧几里得空间中的完美和近乎完美齐性多胞体。我们对所有正多胞体以及除阿基米德多面体和两个四维Gosset多胞体之外的所有半正则多胞体中的完美多胞体和近完美多胞体进行了分类。此外，我们构造了一些非正齐性多胞体，其中有些是完美的，有些则不是，并提出了一些尚未解决的问题。

2020年数学主题分类：52A20、52A40、53A04。

关键词与短语：近乎完全多胞体、凸多胞体、齐性多胞体、格、线性群表示、L¨öwner—John椭球、完全多胞体。

Dedicated to Professor Anatoly Georgievich Kusraev
on the occasion of his 70th birthday

1. Introduction

有限度量空间（M， d）称为齐性的，如果其等距群 Isom（M）在（M， d）上的作用传递地作用于 M。欧几里得空间中的有限齐性度量子空间表示一个紧凸多胞体的顶点集，该多胞体的等距群在顶点集上传递；在每种情况下，所有顶点都位于一个球面上。在 [4, 6, 7],中，作者从正规齐性和 Clifford—Wolf 齐性的角度，对欧几里得空间中正多胞体和半正则多胞体的顶点集的度量性质进行了完整描述；另见综述 [8]，其中介绍了关于具有正规齐性或 Clifford—Wolf 齐性顶点集的多胞体的其他结果，以及 [5] ，其中介绍了关于正规齐性和 Clifford—Wolf 齐性黎曼流形的相应结果。在 m中讨论了欧几里得空间中[9]点齐性有限子空间的某些性质。

我们考虑欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$（带有标准内积（x, y）$=\sum_{i=1}^n x_i y_i$），其原点为 O，单位超球面为 $S:=S(O,1)\subset\mathbb{R}^n$。下文中，我们将使用相应的欧几里得范数$\|\cdot\|=\sqrt{(\cdot,\cdot)}$。

回顾一下，如果一个多胞体 P位于 $\mathbb{R}^n$ 中，且其对称（等距变换）群在其顶点集上传递地作用，则称该多胞体是齐性的（或顶点传递的）。因此，一个凸多胞体$P\in\mathbb{R}^n$ 是齐性的，当且仅当其顶点集关于度量 d是齐性的，其中该度量由 $\mathbb{R}^n$中的欧几里得度量诱导。

由于在任意欧几里得空间中，具有相同质量的质点有限系统的重心在该系统的任意双射（尤其是任意等距变换）下保持不变，我们得到以下结果。

命题1（[4]）。设 $M=\{x_1,\ldots,x_q\}$、 $q\geq n+1$ 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$、 $n\geq 2$ 的有限齐性度量子空间。那么， M 是凸多胞体 P 的顶点集，

该凸多胞体位于 $\mathbb{R}^n$ 中的某个球面上，其半径为 $r>0$，中心为 $x_0=\frac{1}{q}\cdot\sum_{k=1}^{q}x_k$。特别地，$\mathrm{Isom}(M,d)\subset O(n)$。

这一结果表明凸多面体理论对于研究欧几里得空间中的有限齐次子空间至关重要，参见 [10, 12, 16]。

我们回顾一下近乎完全多胞体的定义，该定义首次出现于[7]。

定义 1. 若一个非退化齐次多面体 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是近乎完美的，则称之为近乎完全多胞体；如果 $\mathbb{R}^n$中的每个二次超曲面都包含 P 的所有顶点，且关于 P的中心对称，那么该超曲面必与 P的外接超球面重合。

定义 2. 若一个非退化齐次多面体 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是完美的，则称之为完美齐次多面体；如果 $\mathbb{R}^n$ 中的每个二次超曲面都包含 P的所有顶点，那么该超曲面必与 P的外接超球面重合。

显然，每个完美齐次多面体都是近乎完美的。

引理 1（[7]）。齐性多胞体 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是（几乎）完美的，当且仅当任何包含 P 所有顶点、且中心与 P 的中心重合的 $\mathbb{R}^n$ 中的椭球 E，都与 P 的外接超球面重合。

解释如下。不失一般性，我们可以假设原点 O 是齐性多胞体 P 的中心。那么，P 的所有顶点都满足条件 $\|x\|^2-r^2=0$，其中 r 是 P 的外接超球面的半径。若有一个二次曲面 $F(x)=0$ 包含 P 的所有顶点，且不同于上述超球面，那么 P 的所有顶点也都位于任意形如 $\|x\|^2-r^2+\varepsilon\cdot F(x)=0$ 的二次曲面上，其中 $\varepsilon\in\mathbb{R}$。显然，当 $|\varepsilon|>0$ 足够小时，该二次曲面是有界的（因此是一个椭球）。此外，若原点 O 是二次曲面 $F(x)=0$ 的中心，那么它也是上述单参数族中所有二次曲面的中心。

引理2. 设 P 是 $\mathbb{R}^n$中的一个非退化齐性（有界）多胞体，$n\geq 2$关于原点 $O\in\mathbb{R}^n$中心对称。那么，$\mathbb{R}^n$中任何包含 P中所有顶点的二次超曲面，都关于中心 O对称。

证明. 假设 $\mathbb{R}^n$中一个包含 P中所有顶点的二次超曲面由以下方程定义：

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c=0, \tag{1}$$

其中，对所有指标，a_{ij}、b_i、$c\in\mathbb{R}$和 $a_{ij}=a_{ji}$。

设 $v=(v_1,\ldots,v_n)$ 是 P 的任意一个顶点。那么 $-v$ 也属于 P 的顶点，且 $0=F(v)-F(-v)=2\Sigma_{i=1}^{n}b_iv_i$，因此向量 $(b_1,\ldots,b_n)$ 与向量 v 正交。由于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个向量都可以表示为 P 的某些顶点 v 的线性组合，因此 $b_1=\cdots=b_n=0$。所以，由方程 (1) 定义的曲面关于原点 O 对称。∎

推论1. 如果 $\mathbb{R}^n$ 中的齐性多胞体 $P, n \geq 2$ 是近乎完美的，并且关于其中心中心对称，那么 P 是完美的。

除了齐性多胞体具有完美或近乎完美的性质本身就值得研究之外，这些性质还为研究齐性多胞体的其他性质提供了一些工具。例如，关于近乎完美多胞体顶点集上的克利福德—沃尔夫平移，其结构受到相当严格的限制，见[7]中的命题11。

齐性多胞体的重要例子包括正多胞体和半正多胞体。

任意一维多胞体都是一个以两个端点为界的闭线段，按定义它是正的。二维正多胞体是欧几里得平面上的正多边形。对于其他维数，正多胞体采用归纳方式定义。若一个凸 n维多胞体 $n \geq 3$ 是齐性的，且其所有面都是彼此全等的正多胞体，则称其为正多胞体。这个定义等价于正凸多胞体的其他定义。

我们还回顾一下半正凸多胞体的定义。对于 $n = 1$ 和 $n = 2$，半正多胞体定义为正多胞体。对于$n \geq 3$ ， n维凸多胞体称为半正的，如果它是齐性的，且其所有面都是正多胞体。关于欧几里得空间中的正多胞体和半正多胞体的更详细论述，可以在各种资料中找到，例如 [12]。

下面的问题非常自然。

问题1。在正多胞体和半正则多胞体中，找出所有完全多胞体和所有近乎完美多胞体。

本文的主要结果如下。

定理1。设 P 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$中的一个正多胞体 $n \geq 2$。则以下断言成立。

1. P 当且仅当属于以下情形时是完全多胞体： $\mathbb{R}^2$ 中的正 m边形，其中 $m \geq 5$； $\mathbb{R}^3$中的十二面体和二十面体； $\mathbb{R}^4$中的24胞体、120胞体和600胞体。2. P 不是完全多胞体，但当且仅当它是 $\mathbb{R}^2$中的正三角形时，是近乎完美多胞体。3. P 不属于近乎完美多胞体，当且仅当属于以下情形： $n \geq 2$中的 n维立方体和 n维正交多胞体； $n \geq 3$中的 n维正单纯形。

该定理的证明可直接由众所周知的正多胞体分类得出，见例 2 和4、命题 2 和3以及下文的定理 2 和 3 。另请回想，二维立方体和二维正交多胞体都是正方形。

至于半正则多胞体，我们尚未对阿基米德立体和两个四维 Gosset 多胞体进行深入研究，也还不知道它们是完美还是近乎完美。我们希望，对完美和近乎完美的半正则多胞体作出完整分类，将有助于发现新的有趣现象，并推动相关问题的解决。

本文安排如下。在第2 节中，我们考察一些自然的完美和近乎完美齐性多胞体的例子，以及一些不具备这些性质的多胞体的例子

。特别地，我们在命题2中从这一角度全面描述所有正多边形。

第3 节致力于研究多胞体等距群的可约性、其勒夫纳—约翰椭球与（几乎）完美性之间的各种关系。¨

在最后一节4中，我们给出了更复杂的完美多胞体例子，以及一些部分分类。特别是，我们在定理2 和3中描述了所有（几乎）完美的三维和四维正多胞体，并证明维数为6、7和8的Gosset半正多胞体是完美的。

为获得这些结果，我们采用了多种与相应多胞体相关的工具，包括其等距子群在环境欧几里得空间中的自然线性表示、其勒夫纳—约翰椭球、二次曲面、内接于其中的最大体积立方体、以顶点为球心且经过其顶点集的距离球面，以及格 $\mathbb{R}^8$ 中的格堆积，其中该格为 E_8。

致谢。第一作者的工作是在俄罗斯科学院西伯利亚分院数学研究所国家合同项目FWNF-2022-0006 框架内完成的。

2. Some natural examples

本节收集欧几里得空间中一些完美多胞体和近乎完全多胞体的例子，以及不具备这些性质的多胞体例子。

引理3。在欧几里得平面上，给定的圆 S 与任意一条不同于 S的 Q二阶曲线的交集至多包含4个点。

证明。不妨设 $S = \{(x, y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ 且$(-1, 0) \notin Q$。于是，我们可以将 $S \setminus \{(-1, 0)\}$ 参数化如下：$(x, y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right), t \in \mathbb{R}$。曲线 Q 由方程 $F(x, y) = 0$确定，其中 $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c$，且 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$ 为某些值。利用上述参数化，我们得到 $S \cap Q$上各点所满足的方程$(1 + t^2)^2 \cdot F\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = 0$。显然，这个四次代数方程至多有4个（实）解。

■

我们回顾一下，欧几里得空间中的所有正凸多胞体和半正凸多胞体都是齐性的，详情见[7, 8]。首先，我们考虑正多边形。

命题2。设 P 是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$中的正 m边形。则以下断言成立：

1. P 对于 $m = 3$是近乎完美的，但不是完美的；2. P 对于 $m = 4$不是近乎完美的；3. P 对于任意 $m \geq 5$都是完美的。

证明。 最后一个断言由引理 3得出。

让我们考虑 $m = 4$ 的情况。任取一个 $L \in \mathbb{R}$，则二次曲线$Lx^2 + (2 - L)y^2 = 1$包含四个形如 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{R}^2$ 的点，也就是一个边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形的顶点。这个正方形的外接圆在 $L = 1$ 处得到。因此，该正方形并非近乎完美。

另一方面，正三角形是近乎完美的。事实上，任何包含正三角形顶点且关于其中心 O 对称的二次曲线，也包含关于 O 与其顶点对称的点，也就是说，它包含一个正六边形的顶点，因此与外接圆重合。要证明三角形并非完美，只需注意到顶点 $(0,-2\sqrt{3})$、$(-3,\sqrt{3})$ 和 $(3,\sqrt{3})$ 既位于圆 $x^2+y^2=12$ 上，也位于抛物线 $y=x^2/\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ 上。

■

例 1. 我们来考虑点 $B_i\in\mathbb{R}^3$, $1\le i\le 4$ 的凸包 P，其中 e

$$B_1=(1,0,0),\ B_2=(0,1,0),\ B_3=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ B_4=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

容易看出，P 是一个齐性四面体，$\|B_1\|=\|B_2\|=\|B_3\|=\|B_4\|=1$（因此，$P$ 的所有顶点都位于球面 S 上，该球面的中心在原点，半径为 1），
$\|B_1-B_2\|=\|B_3-B_4\|=\sqrt{2}$，且 $\|B_1-B_3\|=\|B_1-B_4\|=\|B_2-B_3\|=\|B_2-B_4\|=\sqrt{3}$。

我们来找出 $\mathbb{R}^3$ 中所有经过点 B_i（其中 $i=1$ 分别为 2、3、4；回想一下，$B_i\in S$）的二次曲面。任意一个二次曲面 E 都由以下方程确定：

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0,$$

其中（x，y，z）$\in\mathbb{R}^3$，a_{ij}，b_i，i，$j=1$、2、3 和 c 是一些实数。条件$B_i\in E$，$i=1$、2、3、4 等价于以下条件：

$$b_1=-a_{11}-c,\quad b_2=-a_{22}-c,\quad b_3=a_{13}+a_{23},\quad a_{12}=-\frac{3}{2}a_{11}-\frac{3}{2}a_{22}-a_{33}-4c.$$

因此，我们得到一个包含 P 的所有顶点的 6 参数二次曲面族。特别地，多胞体 P 不是近乎完美的（因为我们可以取 $a_{13}=-a_{23}\neq 0$ 和 $a_{11}=a_{22}=-c$）。

例2。设 ψ_i 是关于 $\mathbb{R}^n$，$i=1$，……，n 中的超平面 $x_i=0$ 的反射。由这些反射生成的群 $G=(\mathbb{Z}_2)^n$ 在由点（$\pm b_1$，$\pm b_2$，……，$\pm b_n$）组成的集合 B 上是传递的，其中 $b_i>0$，$i=1$，……，n。显然，$P:=\mathrm{conv}(B)$ 是一个（矩形）平行多面体。考虑一个满足以下方程的椭球E

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n^2}=1,$$

其中 $a_i>0$、$i=1$、……、n 为某些常数。条件 $B\subset E$ 等价于以下条件：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i^2}=1.$$

这给出了一个包含集合 B 的（$n-1$）参数椭球族。特别地，多胞体 P 对于 $n\ge 2$ 不是近乎完美的。若 $b_1=b_2=\cdots=b_n$，我们将得到一个 n 维超立方体。

~例 3。考虑前一个例子中的集合 B 的子集 B，它由所有 $(\pm b_1,\pm b_2,\ldots,\pm b_n)$ 形式且负号个数为偶数的点组成。这个子集~是齐性的。事实上，群 $G=(\mathbb{Z}_2)^n$ 的一个子群 G 包含这些等距变换

~ ~含有偶数个反射，并且在集合 B 上传递。显然， B 与前一个例子中包含 B 的那些椭球属于同一组。特别地，多胞体$P=\operatorname{conv}\left(\widetilde{B}\right)$ 对于 $n\geq 2$ 而言并非近乎完美。对于 $n=3$，此类多胞体是单纯形（此外，如果 $b_1=b_2=b_3$，则得到一个正三维单纯形）。如果 $b_1=b_2=\cdots=b_n$，则得到一个 n维半超立方体。

我们根据命题2可知，正三角形是近乎完美的。因此，下面的问题很自然。

问题1（[7]）。 n维正单纯形对于$n\geq 3$而言是近乎完全多胞体吗?

下面的命题对这个问题给出了否定的答案。

命题 3。 n维正单纯形对于 $n\geq 3$而言不是近乎完美的 .

证明。 情形 $n=3$ 由例 3可知。事实上，顶点为 (1,1,1), $(1,-1-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ 的单纯形具有这样的性质：任意形如 $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$ 的二次曲面，其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha+\beta+\gamma=1$，都包含它的所有顶点。因此，三维正单纯形 T_3 并非近乎完美。

假设 k 维正单纯形 T_k 不是近乎完美的，并证明T_{k+1} 也具有这一性质。我们可以假设 T_k 的所有边长均为 1， $\mathbb{R}^k$ 中的原点 O 是 T_k的中心，二次曲面 $f(x)=0$ 以 O 为中心，包含 T_k 的所有顶点，且不同于 T_k的外接球面。此外，我们还可以假设 $f(O)\neq 0$。事实上，若 $f(O)=0$，且 r是 T_k的外接球半径，则对于任意 $\varepsilon>0$，我们可以用 $f(x)+\varepsilon\left(\|x\|^2-r^2\right)$ 替换 $f(x)$。

我们将使用嵌入 $\mathbb{R}^k\ni x\mapsto(x,0)\in\mathbb{R}^{k+1}$。取一个正数$\mu\in\mathbb{R}$。对于 T_k的任意顶点 A_i, $i=1,\ldots,k+1$，我们考虑点 $B_i=(A_i,-\mu)$。再考虑点 $B_{k+2}=(0\ldots,0,(k+1)\mu)$。显然，以 B_i, $i=1,\ldots,k+2$ 为顶点的 $\mathbb{R}^{k+1}$ 中的多胞体，其重心是原点 O。此外，存在（且仅存在）一个 $\mu>0$，使得该多胞体是（$k+1$）维正单纯形。取这个特殊的 μ值。现在，考虑 $\mathbb{R}^{k+1}$中的二次曲面 $F(x)=0$，其中

$$F(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})=\frac{x_{k+1}^2}{\mu^2}-\frac{k(k+2)}{C}f(x_1,\ldots,x_k)-1,\quad C=f(0,0,\ldots,0)\neq 0.$$

显然，这个二次曲面不是球面，但原点是该二次曲面的中心。也容易验证，对于所有的 $i=1,\ldots,k+2$，都有 $F(B_i)=0$。因此，根据归纳法，命题得证。 ■

例4. 固定一个数 $d>0$，并在 $\mathbb{R}^n$ 中考虑所有这样的点组成的集合：每个点恰有一个坐标 $\pm d$，其余 $n-1$ 个坐标均为零。这个集合的凸包是一个 n维正交多胞体 P。我们来找出 $\mathbb{R}^n$ 中所有包含 P的全部顶点的二次曲面。任意这样的二次曲面都具有形式 $F(x)=0$，其中

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c, \tag{2}$$

其中 a_{ij}、 b_i、 $c \in \mathbb{R}$，且对所有指标均有 $a_{ij} = a_{ji}$。比较关于原点 O互为对称的每一对顶点，可轻易得出，对所有 $1 \leq 1 \leq n$均有 $b_i = 0$ 和$a_{ii}d^2 + c = 0$。因此，$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = -c \cdot d^{-2}$。 $i \neq j$ 对应的 a_{ij} 值并不重要。因此，我们得到一个依赖于 $n(n-1)/2+1$ 个参数的二次曲面族。特别地，当 $n \geq 2$时， n维正交多胞体并非近乎完美。回想一下， $n = 2$ 时得到的是正方形， $n = 3$时得到的是八面体。

3. The reducibility, Löwner — John ellipsoids, and the almost perfectness

我们回顾一下，任意正 n单纯形 T_n 对 $n \geq 2$ 都不是完美的，而对 $n \geq 3$ 则不是近乎完美的，这由命题3得出。的对称群是对称群S_{n+1}，它在 $\mathbb{R}^n$上不可约地作用。注意， S_3 只有一个真子群（3 阶循环群），它在三角形 T_2的顶点集上传递作用。

另一方面，给定多胞体的近完美性意味着其对称群的任意传递子群都不可约。

考虑一个有限正交群 $\Gamma \subset O(n)$，它有若干轨道，其凸包均非退化。我们用 $O_\Gamma(u)$ 表示群 Γ 经过点 $u \in \mathbb{R}^n$的轨道。

命题 4. 如果存在非零的 $u \in \mathbb{R}^n$，使得多胞体 $P := \mathrm{conv}(O_\Gamma(u))$ 是退化的，那么 Γ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可约地作用。

证明。显然， P 和 $\mathrm{Lin}(P)$ 在群 Γ 的作用下是不变的。由于 P 是退化的，因此有 $1 \leq \dim(\mathrm{Lin}(P)) < n$。因此， Γ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可约地作用。■

我们将研究关于 Γ 的一些条件，这些条件可以推出该群的轨道的凸包具有近乎完美（或不具有近乎完美）的性质。

命题 5. 如果 Γ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可约地作用，那么 Γ 的任意一个不位于某个超平面内的轨道的凸包都不是近乎完美的。

证明。考虑 $\mathbb{R}^n$ 的分解 $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$，将其表示为子空间 V_i 的正交直和，其中 Γ 不可约地作用。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们考虑相应的和 $x = \sum_{i=1}^s x_s$，其中 $x_i \in V_i$。固定一个非零的 $u \in \mathbb{R}^n$，则对于每个 $a \in \Gamma$，都有 $\|a(u)\| = \|u\|$。同样容易看出， $a(u) = \sum_{i=1}^s a(u_i)$。由于 Γ 在每个 V_i 上不可约地作用，我们有 $a(u_i) = (a(u))_i$，并且对于每个 $a \in \Gamma$，都有 $\|u_i\| = \|a(u_i)\|$（回忆 $\Gamma \subset O(n)$）。令 $r_i := \|u_i\|$ 且令 $d_i = \dim(V_i)$，于是对于任意 $a \in \Gamma$ 和任意 $1 \leq i \leq s$，得到 $\|(a(u))_i\| = \|a(u_i)\| = \|u_i\| = r_i$。因此，对于任意 $a \in \Gamma$，有 $\sum_{i=1}^s r_i^2 = \sum_{i=1}^s \|(a(u))_i\|^2$。

现在，取一些数 $\alpha_i > 0$、 $1 \leq i \leq s$。那么，对于任意 $a \in \Gamma$，有 $\sum_{i=1}^s \alpha_i \|(a(u))_i\|^2 = \sum_{i=1}^s \alpha_i r_i^2$，也就是说，对于群 Γ 通过点 u 的轨道 $O_\Gamma(u)$ 中的任意 v，都有 $\sum_{i=1}^s \alpha_i \|v_i\|^2 = \sum_{i=1}^s \alpha_i r_i^2$。因此，我们找到了一个 s 参数族的椭球，其中每一个都包含 $O_\Gamma(u)$ 的所有点。因此多胞体 $\mathrm{conv}(O_\Gamma(u))$ 并非近乎完美。■

注 1. 如果 P 是上述命题中在 Γ 的作用下某点轨道的凸包，那么 Γ 是 P 的对称群的一个子群，并且该子群

在顶点集上传递。另一方面， P 的对称群可能比 Γ 更大。例如，在由所有坐标超平面上的反射生成的群 $\mathbb{Z}_2^n$ 的作用下，点 $(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ 的轨道的凸包是标准的 n 维立方体。其对称群为 $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$。

命题 6. 若多胞体 P 在 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ 中存在交换等距子群 Γ，且该子群在 P 的顶点集上传递，则 P 并非近乎完美。

证明。 由命题 5 及已知事实可知，有限群 Γ 的每个实线性表示都是完全可约的（见 [18]第 2.3 节推论），且当 Γ 为交换群且该表示不可约时，该表示是一维或二维的（见 [18]第 1 章末练习 7）。 ■

命题 7. 在 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ 中，每个齐性直棱柱（特别是立方体），在 $\mathbb{R}^3$ 中的每个直反棱柱，以及在 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ 中的正单纯形、正交多胞体或半超立方体，都不是近乎完美的。

证明。 设 P 为直棱柱、直反棱柱或正正交多胞体。于是存在两个超面，它们包含 P的所有顶点。此外，这两个超面彼此平行。因此，无论哪种情况， P 都存在一个等距子群，它保持这两个超面的并集不变，并且在 P的顶点集上传递。这意味着命题 5 的假设均得到满足，因此上述多胞体都不是近乎完美的。

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的正单纯形或半超立方体， $n \geq 3$存在一个交换等距子群 Γ，它在顶点集上传递（对于单纯形，该子群是阶为 $n+1$的循环群）。根据命题 6，正单纯形和半超立方体都不是近乎完美的。 ■

注 2。 事实上，命题 7中的任何多胞体（ $\mathbb{R}^n$ 中的直棱柱除外的情况除外， $n \geq 4$, 例如命题 12中的棱柱），都具有一个交换等距子群，该子群在其顶点集上传递。

注 3. 例 1 中的齐性单纯形存在一个交换等距子群 Γ，该子群在其顶点集上传递。这个群 Γ 由两个相互交换的对合等距变换生成： g_1 和 g_2，其中 $g_1 = (B_1B_2)(B_3B_4)$， $g_2 = (B_1B_3)(B_2B_4$。

问题2. 如果一个齐性多胞体 P 属于 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$，且不存在在其顶点集上传递的可约等距子群，那么 P 是否近乎完美?

由于任何阿基米德半正多面体 $\mathbb{R}^3$ 都不存在在其顶点集上传递且顶点“足够多”的可约等距群，我们认为以下猜想成立。

猜想1. 任何阿基米德多面体都是完美的。

回顾一下，对于 $\mathbb{R}^n$ 中给定的凸体（有界闭子集） A，其 L¨owner—John 椭球 E 是包含 A 的最小体积椭球，参见例如 [2, 3]。显然， E 在 P 的每个等距变换下都保持不变。特别地，容易验证，超立方体的 L¨owner—John 椭球就是外接超球面。

命题8。设 $\mathbb{R}^n$ 中的 P 是一个非退化齐性多胞体。那么， P 的 L ¨owner—John 椭球要么与 P 的外接球重合，要么 P 的对称群在 $\mathbb{R}^n$ 上可约地作用。

证明。无妨设 P 的外接球为 $S(O,1) \subset \mathbb{R}^n$。我们分别用 E 和 Γ 表示 L¨owner—John 椭球及 P 的对称群。

设 O_1 为 E 的中心。由于 P 的 L¨owner—John 椭球是唯一的，因此对任意 $\gamma \in \Gamma$，都有 $\gamma(E) = E$，从而 $\gamma(O_1) = O_1$。

若 $O_1 \neq O$，则直线 OO_1 在 Γ 的作用下是不变的，因此 Γ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可约地作用。

现在，假设 $O_1 = O$。那么存在唯一的对称正定算子 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得 $E = (Ax, x) = 1$。

由于 E 是 Γ-不变的， A 的所有特征子空间也都是 Γ-不变的。因此，若 A 不是恒等算子的倍数，则 Γ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可约地作用。

否则，对于某个 $a > 0$， $A = a \cdot \mathrm{I}$，并且 E 应与 $\mathbb{R}^n$中的单位超球面重合。事实上，E 包含 P，并且在具有此性质的超球面中体积最小，但 P 的顶点位于球面 $S(O, 1)$上。 ■

我们立即从命题5 和8中得到以下结果。

推论2. 设 P 为齐性多胞体， E 为其在 $\mathbb{R}^n$中的L ¨owner — John椭球。如果 E 不与 P的外接球重合，则 P 的全等距群是可约的，并且 P 不是近乎完美的。

例5. 一个平凡的例子是 $\mathbb{R}^n$中的矩形平行多胞体 $n \geq 2$，它不是立方体。事实上，如果 E 是多胞体 P 的L¨owner — John椭球，并且$\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个仿射映射，那么椭球 $\alpha(E)$就是多胞体 $\alpha(P)$的L¨owner — John椭球。

4. Examples of perfect polytopes

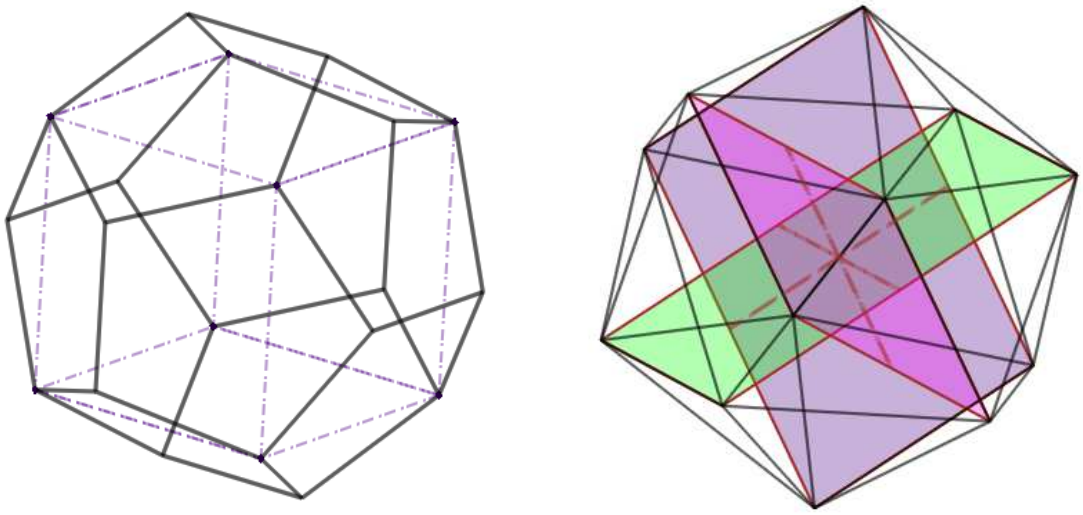
以下结果为证明某些类型多胞体的完美性提供了有力工具。

命题 9. 设 P是点集 $(\pm d_1, \pm d_2, \ldots, \pm d_n) \in \mathbb{R}^n$的凸包，其中$d_i > 0, i = 1, \ldots, n$。假设存在二次曲面 $F(x) = 0$，包含 P的所有顶点。那么存在一些实数 $A_i > 0, i = 1, \ldots, n$，使得

$$F(x) = A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 + \cdots + A_nx_n^2 - \sum_{i=1}^{n} A_i d_i^2.$$

证明。 回想一下，例 2 给出了一个 $(n-1)$-参数族的椭球，它们包含 P的顶点集。现在，我们假设该二次曲面的形式为 (1)。显然， P 关于原点 O. 中心对称。由引理 2可得，$b_i = 0$ 对所有指标都成立。还需证明 $a_{ij} = 0$ 对所有 $i \neq j$都成立。

现在，固定某个 i，并证明对于所有 $j \neq i$， $a_{ij} = 0$ 成立。考虑顶点$G = (\pm d_1, \pm d_2, \ldots, \pm d_n)$，其中第 i个坐标的符号为“+”，而当 $j \neq i$ 时，第 j个坐标的符号为“–”当且仅当 $a_{ij} < 0$。我们还考虑



a) *b)*

FIGURE 1. 插图：a）例 6；b）命题 10。

顶点 $\widetilde{G}$, t它与 G 的区别仅在于第 i个坐标（它取 $-d_i$ 而不是 d_i）。我们得到 t

$$0 = F(G) - F(\widetilde{G}) = 4d_i \sum_{j \neq i} |a_{ij}| d_j.$$

这意味着 $a_{ij} = 0$ 若 $i \neq j$。因此，我们可以取 $A_i = a_{ii}$，命题得证。

■

推论3. 设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有以下性质的齐性多胞体：

1. 存在一个 n维立方体 C，其顶点集是 P的顶点集的真子集，而 C 的中心与 P的中心重合；

2. l 的 C存在一条棱，使得一个与该棱正交、 L P的支撑超平面不包含 P 的两个顶点，而这两个顶点之间的距离等于 l的长度。

于是 P 是完美的。

证明。 由于 P和 C 的球心重合，我们可以认为原点 O 是这两个多胞体的共同中心。不失一般性，我们可以假设 $C = [-b, b]^n$，其中 $b > 0$。考虑任意一个二次曲面 $F(x) = 0$ 在 $\mathbb{R}^n$中，该二次曲面包含 P的所有顶点。因此，根据命题 C，它包含 F和x（$= \sum_{i=1}^n A_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n A_i \cdot b^2$） $A_i \in \mathbb{R}$，其中 $i = 1$，……，n。 9。

考虑一个正对称算子 A： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，满足 $F(x) = (Ax, x) - \operatorname{trace}(A)b^2$。我们看到，算子 A 在与立方体的棱平行的向量所组成的基（ C 的标准基）下具有对角形式。根据命题 $\mathbb{R}^n$9，对于任意形如 $a(C)$的立方体，其中 a 是 P 的等距变换，该性质同样成立。

不失一般性，我们可以假设棱 l 平行于向量 $(0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$，且超平面 L 的方程为 $x_n = \mu$，其中 $\mu < -b$。

现在，我们考虑超平面 L 上 P 的一个顶点 V。由于 P 是齐性的，因此存在 P 的一个等距变换 a，使得 $a(V_0) = V$，其中 $V_0 = (-b, -b, \ldots, -b)$。

显然， $a(C) \neq C$。我们来考虑 C （以及 P）的以下顶点： V_i, i =1, . . . n，使得 V_i 的所有坐标均为 $-b$，但第 i 个坐标为 b。

根据推论的假设，任何形如 $\overrightarrow{Va\ V_i}(\,) = \overrightarrow{a\ V_0\ a\ V_i}(\,)(\,)$ 的向量，其第 n 个坐标均为正。显然，向量 $\overrightarrow{V_0V_n}$ 是算子 A 的特征向量，其特征值为 A_n（参见 $F(x)$ 的表达式）。另一方面，根据命题 9，所有向量 $\overrightarrow{Va\ V_i}(\,) = \overrightarrow{a\ V_0\ a\ V_i}(\,)(\,)$、 $i = 1$、.....、 n 也都是算子 A 的特征向量。这些向量中的每一个与向量 $\overrightarrow{V_0V_n}$ 的数量积都为正，这意味着这些向量的特征值都相同，均为 A_n（与向量 $\overrightarrow{V_0V_n}$ 的特征值相同）。这意味着 $F(x) = A_n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot b^2\right)$，二次曲面 $F(x) = 0$ 与 P 的外接球重合。因此， P 是完美的。 ■

例6。十二面体 D 是一个完全多胞体。事实上，十二面体任意五边形面的每条对角线，都是某个立方体的一条棱，且该立方体的顶点来自此十二面体的顶点集，参见例如 [16, P. 76]。对于 D的任意支撑平面，即垂直于该立方体的一条棱的平面，恰好包含 D的两个相邻顶点，参见图1 a)。因此，根据推论 3，十二面体是完全多胞体。

命题10。二十面体是一个完全多胞体。

证明。如果我们取经过二十面体 I 的中心和其任意一条棱的截面，就会得到一个中心对称六边形，其四个顶点确定一个矩形，边长比例为 1： φ，其中 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618033988$ 被称为黄金比例。此外，给定的一条棱是该矩形的一条短边（另一条短边也是 I的一条棱），而且 I 还有另外两条棱与它正交，并且彼此正交，参见图 1 b)。

因此，不妨设坐标系满足：原点 O 与 I 的中心重合，且坐标轴与 I的某些棱平行。

设二次曲面 $F(x) = 0$ 包含 I的每个顶点。显然，

$$F(x) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{3} b_ix_i + c$$

对于某些 a_{ij}、 $b_i \in \mathbb{R}$、 $a_{ij} = a_{ji}$、 i、 $j = 1$, 2、3。

上述讨论表明，对于 $x_3 = 0$ ，我们得到一个顶点来自 I的顶点集的矩形。注意， $F(x_1,\ x_2,\ 0) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$。现在，命题 9 表明 $a_{12} = b_1 = b_2 = 0$。对于 $x_2 = 0$ 和 $x_1 = 0$，可以重复相同的论证。从这些平面截面中，我们分别得到 $a_{13} = b_1 = b_3 = 0$ 和$a_{23} = b_2 = b_3 = 0$ 。因此，我们有

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + c. \tag{3}$$

在任何以 O 为原点、坐标轴平行于 I 的某三条棱的坐标系中，我们都能得到相同的结果。

现在，回想一下， I 中具有公共顶点的所有棱彼此并不正交。考虑所有棱 v_1、 v_2、 v_3、 v_4、 v_5 ，它们属于 I 且具有公共顶点 V ，并对每个坐标系应用上述论证，其中第一条轴平行于 v_i、 $i = 1$、.....、5。对于所有这些坐标系，我们得到（3）。这意味着

二次型 $\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$ 在每个这样的坐标系中都有对角形式。但这只有在 $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ 时才可能。因此，$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + c$，而二次曲面 $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ 是外接球面。因此，二十面体 I 是完美的。

■

下面的定理给出了关于正多面体成为完美或近乎完美多胞体的分类，其中 $\mathbb{R}^3$。

定理2。四面体、立方体和八面体都不是近乎完美的，而十二面体和二十面体是完美的。

证明。 证明可由命题3、例2、例4、例6以及命题10得到。

■

下面考虑另一个简单但有用的结果。

命题11。设 P 中的齐性多胞体 P_1 是非退化的，具有同一个中心 O，且 P_1 的任意顶点都是 P的顶点。那么，如果 P_1 是（近乎）完美的，则 P 也是（近乎）完美的。

证明。若 P的所有顶点都位于某个关于 O对称的二次曲面 E上，则 P_1 的所有顶点都位于 E上。由于 P_1 是（近乎）完美的，因此 E 是 P_1的外接超球面，同时也是 P的外接超球面。因此，P是（近乎）完美的。

■

现在，我们将讨论四维正多胞体。关于这些多胞体的所有必要细节都可以在 [6] 的第3节中找到。我们可以用四元数来描述这些多胞体（我们通过映射 $x = x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k} \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 将四元数这一非交换除环 $\mathbb{H}$ 与 $\mathbb{R}^4$ 相对应）。

定理3。设 P 是一个四维正多胞体。则以下断言成立：

1. 若 P 是四维单纯形、立方体或正交多胞体，则 P 并非近乎完美；2. 若 P 是24胞体、120胞体或600胞体，则 P 是完美的。

证明。 我们已经知道，四维单纯形、立方体和正交多胞体都不是近乎完美的。因此，只需考虑 24胞体、120胞体和 600胞体。只需检查推论3中的条件，其中 P 是这些多胞体中的任意一个。

24胞体可以构造为以下单位四元数有限子集的凸包（该子集构成二元四面体群 BT，即单位四元数群的一个子群）：

$$BT = \left\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}, \frac{1}{2}\left(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}\right)\right\},$$

显然，该集合恰好包含 24 个点，而四元数集合$\left\{\frac{1}{2}\left(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}\right)\right\}$构成一个四维立方体（超立方体、四维超立方体） C。

此外，考虑棱 l，它与四元数 C 平行，以及支撑超平面 $\mathrm{Re}(u) = -1$ (四元数 u 的实部为 -1)。我们看到，该超平面内 24胞体的唯一顶点是 $-\mathbf{1}$。因此，由推论 3 可知，24胞体是完美的。

回顾一下，二元二十面体群 BI 是群 BT 与由四元数通过坐标的偶置换（所有可能的组合）得到的单位四元数组成的集合的并集

$$\left(0 \pm \mathbf{i} \pm \varphi^{-1}\mathbf{j} \pm \varphi\,\mathbf{k}\right),$$

其中 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ 是黄金比例。这样的四元数总共有 96 个，因此$|BI| = 120$。集合 BI 中元素的凸包（该集合含有 120 个元素）在 $\mathbb{R}^4$ 中形成 600胞体（六百胞体）。由于 $BT \subset BI$ 且 24胞体是完美的，根据命题 11，可知 600胞体也是完美的。

让我们考虑 120胞体顶点集在坐标中的表示，如 [12, P. 156–157]所示。假设原点 O 是 120胞体的中心，且外接球的半径为 $\sqrt{8}$，则得到以下各点：

$$(\{0,0,\pm 2,\pm 2\}),\quad ([0,\pm\varphi^{-1},\pm\varphi,\pm\sqrt{5}]),\quad (\{\pm\varphi,\pm\varphi,\pm\varphi,\pm\varphi^{-2}\}),$$
$$(\{\pm 1,\pm 1,\pm 1,\pm\sqrt{5}\}),\quad (\{\pm\varphi^{-1},\pm\varphi^{-1},\pm\varphi^{-1},\pm\varphi^{2}\}),$$
$$([0,\pm\varphi^{-2},\pm 1,\pm\varphi^{2}]),\quad ([\pm\varphi^{-1},\pm 1,\pm\varphi,\pm 2]),$$

其中 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ 是黄金比例，符号 $\{\cdots\}$ 和 $[\cdots]$ 分别用于表示其中元素的所有排列和所有偶排列。上述各集合分别包含 24、96、120、120、120、96、24 个点（总计正好是 120胞体的 600 个顶点）。

还很容易看出，顶点 $(\{0,0,\pm 2,\pm 2\})$ 也确定一个24胞体，见 [12,P. 156]。因此，根据命题11，120胞体是完美的。定理得证。 ■

备注4。类似的论证表明，斜方截角288胞体是完美的。事实上，它可以表示为二元八面体群 BO 的凸包，该群包含BT 作为子群。值得注意的是，斜方截角288胞体是齐性多胞体，但既非正多胞体，也非半正多胞体，详见 [6] 的第3节。

备注5。众所周知，600胞体的某些顶点构成了120胞体的顶点集，见 [1] 中的定理1。

[1] 中的定理1在其他一些方面也很有意思。我们将用略有不同的措辞来陈述它。

定义3。一个元素为 ± 1 的 $(n\times n)$-矩阵 A, $n \geq 2$，满足 $AA^T = nI_n$，其中 I_n 是单位 $(n\times n)$-矩阵，称为 Hadamard 矩阵（阶数为 n）。这等价于矩阵 A 的不同列或不同行之间的正交性。

Hadamard 矩阵的阶必须为 $n = 2$ 或 $n = 4k$。“阿达马猜想”指出，对于每个阶$n = 4k.$，都存在一个 Hadamard 矩阵。目前，尚未知晓是否存在 Hadamard 矩阵的最小阶为 n，即 $668 = 4\cdot 167$。

定理 4（[1]）。对于自然数 $n \geq 2$，以下条件等价：

1. 存在一个阶为 n的 Hadamard 矩阵；2. 任意正$n-1$维单纯形的顶点集都是某个正$n-1$维立方体顶点集的子集；3. 任意正 n维正交多胞体的顶点集都是某个 n 维立方体顶点集的子集。

其他正多胞体的顶点集之间只有在维数为$k = 2$、3、4时才存在真包含关系。对于 $k = 3$，任意立方体的顶点集都是某个正十二面体顶点集的子集。对于 $k = 4$，正多胞体的顶点总数可能为5、8、16、24、120或600。只有对于120胞体（有600个顶点），单纯形的顶点集才是其顶点集的子集。其他任意多胞体的顶点集，都是顶点数量更多的任意多胞体的顶点集的子集。

命题12。 存在一个直 n维齐性棱柱 P，位于 $\mathbb{R}^n$， n =3，4，5，其全等距群 Γ_P 是可约的，且勒¨让德—约翰椭球与 P的外接球重合。相似意义下，至少存在四个这样的棱柱 P，对于 $n = 5$。根据命题7，所有这样的 P 都不是近乎完美的。

证明。设 M 是以下任意一个（$n - 1$）维多胞体：二维正八边形、三维正十二面体、四维正24胞体、120胞体或600胞体，或者齐性偏斜288胞体。每个这样的多胞体 M 的顶点集都包含一个同维立方体 C_0 的顶点集，且该立方体的中心与 C_0 的中心重合。现在取 P为 $\mathbb{R}^n$ 中的直棱柱，其底面为 M，高为 a，等于 C_0的棱长。于是， P 的顶点集包含一个棱长为 a 的立方体 C 的顶点集，且该立方体的中心与 C 的中心重合。显然，P 是齐性的，且 P 的全等距群是可约的。同时， P 的勒让德—约翰椭球与 P的外接球 S 重合。这是因为 S 也是 C的外接球和勒让德—约翰椭球，而任何包含 P 的椭球也包含 C。最后这两个结论显然成立。

■

注6。 最后一个命题中的棱柱 P 表明，推论3 中的第一个条件不足以推出其结论。特别是，第一个条件并不蕴含第二个条件。

有理由相信，以下猜想是正确的。

猜想2。设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个齐性多胞体，具有以下性质：1. 存在一个 n维立方体 C，其顶点集是 P的顶点集的真子集；

2. P 的对称群不存在这样的子群：它在 P 的顶点集上传递，并且在 $\mathbb{R}^n$上可约地作用。

则 P 是完美的。

现在讨论 $\mathbb{R}^n$ 中的半正则非正则多胞体，其中 $n \geq 4$。它们只存在于 $4 \leq n \leq 8$ 中，被称为Gosset多胞体[17], [15], [7]。在相似变换意义下，存在三个四维Gosset多胞体，以及$\mathbb{R}^n$ 中唯一的Gosset多胞体 $n \in \{5, 6, 7, 8\}$，我们将其记为Goss$_n$。关于Gosset多胞体的详细描述可见 [7]的第5—9节。

Goss 格森多胞体$_5$ 是半超立方体，根据例 3，它并非近乎完美。格森多胞体 Goss$_n$，$n \geq 5$，分别有 16、27、56 和 240 个顶点，其维数为 $n = 5$，6，7，8，这些顶点数均少于 n 维立方体的顶点数，即 2^n。因此，推论 3 无法应用于这些格森多胞体。

$\mathbb{R}^4$ 中的格森多胞体是完全截角，也就是说，它们分别是四维正则单纯形和600胞体各棱中点的凸包，以及扭棱24胞体。它们的顶点总数分别为10、720和96。

问题3：四维立方体的顶点集是否是扭棱24胞体或截角600胞体的顶点集的子集?

有趣的是，除两个之外，所有Gosset多胞体的顶点集都可以统一描述为格 E_8 中的某些子集 $\mathbb{R}^8$. 根据[11], 第14章第1节，在 $\mathbb{R}^8$ 中以格 E_8的点为球心的格堆积里，有240个球与一个球相切，56个球分别与两两相切的一对球中的任意一个相切，27个球与两两相切的三球组中的每个球都相切，16个球与两两相切的四球组中的每个球都相切，10个球与两两相切的五球组中的每个球都相切，还有6个球与两两相切的六球组中的每个球都相切。上述240、56、27、16、10和6个球的球心，分别构成 Goss_8、Goss_7、Goss_6、Goss_5, 四维正单纯形的完全截断以及 $\mathbb{R}^3$.中的八面体的顶点集

最后一个陈述还意味着，Goss_8 的顶点图形是 Goss_7，Goss_7 的顶点图形是 Goss_6，Goss_6 的顶点图形是 Goss_5，Goss_5的顶点图形是四维正则单纯形的完全截断，而最后一个多胞体的顶点图形是八面体。特别地，四维正则单纯形的完全截断的顶点集可以看作标准五维超立方体中所有恰有两个坐标等于 -1的顶点所组成的集合。

现在，我们将考虑一个六维完全多胞体的例子，即 Goss_6。这一结果可以通过简单的线性代数方法证明（参见[14, 13]中的讨论）。关于 Goss_6 是近乎完美这一事实的一个简单证明可见于 [7,定理 6]。在下一个例子中，我们将考虑一些论证，以证明 Goss_6 的完美性，而无需进行计算机计算。

例7。我们来简要明确地描述一下 Goss_6。这个多胞体可以用不同的方式实现。我们取顶点在$\mathbb{R}^6$中的坐标，如 [15]所示。令 $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 和 $b=\frac{\sqrt{6}}{12}$。我们定义点 $A_i\in\mathbb{R}^6$,$i=1,\ldots,27$，如下所示:

$$
\begin{array}{lll}
A_1=(0,0,0,0,0,4b), & A_2=(a,a,a,a,a,b), & A_3=(-a,-a,a,a,a,b),\\
A_4=(-a,a,-a,a,a,b), & A_5=(-a,a,a,-a,a,b), & A_6=(-a,a,a,a,-a,b),\\
A_7=(a,-a,-a,a,a,b), & A_8=(a,-a,a,-a,a,b), & A_9=(a,-a,a,a,-a,b),\\
A_{10}=(a,a,-a,-a,a,b), & A_{11}=(a,a,-a,a,-a,b), & A_{12}=(a,a,a,-a,-a,b),\\
A_{13}=(-a,-a,-a,-a,a,b), & A_{14}=(-a,-a,-a,a,-a,b), & A_{15}=(-a,-a,a,-a,-a,b),\\
A_{16}=(-a,a,-a,-a,-a,b), & A_{17}=(a,-a,-a,-a,-a,b), & A_{18}=(2a,0,0,0,0,-2b),\\
A_{19}=(0,2a,0,0,0,-2b), & A_{20}=(0,0,2a,0,0,-2b), & A_{21}=(0,0,0,2a,0,-2b),\\
A_{22}=(0,0,0,0,2a,-2b), & A_{23}=(-2a,0,0,0,0,-2b), & A_{24}=(0,-2a,0,0,0,-2b),\\
A_{25}=(0,0,-2a,0,0,-2b), & A_{26}=(0,0,0,-2a,0,-2b), & A_{27}=(0,0,0,0,-2a,-2b).
\end{array}
$$

Gosset多胞体 Goss_6 是这些点的凸包。容易验证，对于 $2\le i\le 17$， $d(A_1,A_i)=1$；对于 $18\le i\le 27$， $d(A_1,A_i)=\sqrt{2}$。

显然，点 A_2-A_{17} 是五维半超立方体的顶点（相应的超立方体有 32 个形如（$\pm a$， $\pm a$， $\pm a$， $\pm a$， $\pm a$， b）的顶点），而点 $A_{18}-A_{27}$ 是五维超八面体（正交多胞体）的顶点，它是多胞体 Goss_6 的一个面（位于超平面 $x_6=-2b$ 上）。

原点 $O=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\in\mathbb{R}^6$ 是以 Goss_6 为中心、半径为 $4b=\sqrt{2/3}$ 的外接超球面的中心。

设存在一个二次曲面 Q 位于 $\mathbb{R}^6$ 中，并且包含 Goss_6的所有顶点。不妨设 Q 由方程 $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=0$确定，其中

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{6}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{6}b_ix_i+c, \tag{4}$$

a_{ij}、 b_i、 $c\in\mathbb{R}$ 和 $a_{ij}=a_{ji}$ 对所有指标均成立。容易验证

$$0=F(A_2)+F(A_5)+F(A_7)+F(A_{13})-F(A_3)-F(A_4)-F(A_8)-F(A_{10})=16a^2\big(a_{14}+a_{23}\big).$$

由于我们可以自由地对前五个坐标作任意置换，类似的论证表明，对于所有 $1\leq i$、 j、 k、 $l\leq 5$ 两两不同时，有 $a_{ij}+a_{kl}=0$。特别地，如果$\{i,j,k,l,m\}=\{1,2,3,4,5\}$，则有 $a_{km}=-a_{ij}=a_{kl}$。这意味着，在矩阵 $\big(a_{ij}\big)_{ij=1}^{5}$ 的每一行或任意一列中，所有非对角元素都是相同的（回忆 $a_{ij}=a_{ji}$）。于是，由 $a_{ij}+a_{kl}=0$ 可知，该矩阵的所有非对角元素均为零。

还要注意， $0=F(A_{18})-F(A_{23})=4a\cdot\big(b_1-4a_{16}b\big)$ 且 $0=F(A_{18})+F(A_{23})=2a\cdot\big(c-2b\cdot b_6+4b^2\cdot a_{66}+4a^2\cdot a_{11}\big)$。由于我们可以对前五个坐标作任意替换，类似的论证表明，对所有 $i=1$，.....，5， $b_i=4b\cdot a_{i6}$ 且 $4a^2\cdot a_{ii}=2b\cdot b_6-c-4b^2\cdot a_{66}$。特别地，$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=a_{55}$。

由于 $0=F(A_2)+F(A_7)+F(A_3)+F(A_4)=4a\cdot\big(2(a_{15}+a_{14}+a_{23})a+b_1+2b\cdot a_{16}\big)=4a\cdot\big(b_1+2b\cdot a_{16}\big)$，于是得到 $b_1=-2b\cdot a_{16}$，并且（通过替换前五个坐标）当 $i=1$，.....，5 时有 $b_i=-2b\cdot a_{i6}$。由此以及 $b_i=4b\cdot a_{i6}$，很容易得到对所有 $1\leq i\leq 5$， $b_i=a_{i6}=0$。

还应注意到 $0=F(A_1)=c+4b\cdot b_6+16b^2\cdot a_{66}$和 $0=\sum_{i=2}^{17}F(A_i)-F(A_1)=12b\cdot b_6+2\sum_{i=1}^{5}a_{ii}+15c=0$。上述论证表明， $b_6=0$、$c=-1$以及 $a_{ii}=\frac{3}{2}$、 $1\leq i\leq 6$。

最后，我们得到 $F(x)=\frac{3}{2}\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2\big)-1$。因此，Gosset多胞体 Goss_6 是完美的。

注 7. 如果我们知道对所有 $i=1$，.....，5， $b_i=0$，就可以修改关于 $i\neq j$ 的$a_{ij}=0$ 证明。事实上，由于 $F(x)=\sum_{i,j=1}^{6}a_{ij}x_ix_j+c$，我们可知，对所有形如 $A=(\pm a,\pm a,\pm a,\pm a,\pm a,b)$ 的点， $F(A)=0$；这些点构成超平面 $x_6=b$ 中的一个五维立方体。利用命题 9，我们很容易证明，对所有$i,j=1$, ..., 5， $a_{ij}=0$ $i\neq j$。

命题13. 设 P 是 $\mathbb{R}^n$中的一个非退化齐性多胞体， $n\geq 3$具有顶点集 V，且顶点 $v\in V$ 在 V中至少有两个不同的距离球面，其凸包是$(n-1)$维完美多胞体。那么 P是完美的。

证明。经过相似变换，我们可以假设 S 的外接球 P 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面，其中心位于原点 O，且 $v=(0,\ldots,0,1)$。如果 σ_1、 σ_2 是上文提到的 V 中 v_1 的距离球面，而 P_1、 P_2 是 σ_1、σ_2的凸包，那么 P_1、 P_2 的外接球 S_1、 S_2 分别位于 $\mathbb{R}^n$ 中的某些超平面 $x_1=a_1$、 $x_1=a_2$ 上，其中 $-1<a_1<a_2<1$。

现在设 E 是 $\mathbb{R}^n$中的任意二次超曲面，它包含 P的所有顶点。由于 P_1 和 P_2 是完美的，因此 E 与 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面 $x_1 = a_1$、 $x_1 = a_2$ 的交分别是 P_1、 P_2 的外接球面 S_1、 S_2 。

上述考虑表明， E 与 $\mathbb{R}^n$中包含 x_1轴的任意二维平面 Σ^2 的交集，是 Σ^2 中的一条二阶曲线 c ，其中包含以下五个点： $Q_5 = \{v_5\} \bigcup \big(S_1 \cap \Sigma^2\big) \bigcup \big(S_2 \cap \Sigma^2\big)$。由于以 O 为中心的单位圆 S^1 在 Σ^2 中也包含 Q_5，因此根据引理3， $c = S^1$ 。所以， E 包含超曲面 S ，该超曲面位于 $\mathbb{R}^n$中，是由这类圆S^1 绕 x_1轴旋转得到的，因此 $E = S$。另一方面， S 是 P的外接球。因此， P 是完美的。 ■

定理5。Goss $_7$ 和Goss $_{8,}$ 、正二十面体以及正十二面体均为完美多胞体。完全截角正四维单纯形和Goss $_5$ 并非近乎完美。

证明。关于 Goss $_7$ 和 Goss $_8$ 的详细信息可见于 [7]。我们回顾一些信息，这些信息足以满足后续讨论的需要。

多胞体 P_7 = Goss $_7$ 和 P_8 = Goss 8，以及二十面体 I 关于各自的中心对称；对于某些相对的顶点 v 和$-v$ ，它们的顶点图形是两个多胞体，分别为相应顶点集 v 中两个不同距离球面的凸包，并分别全等于 P_6 = Goss 6、 P_7和正五边形 Q_5。由于 P_6 和 Q_5 分别由例7和命题2证明为完美，因此由命题13可知 P_7 和 I 是完美的。再次将命题13应用于 P_8，可得 Goss $_8$ 也是一个完全多胞体。

十二面体 D 关于其中心对称 O。令 v 和 $-v$ 为顶点集 V 中 D 的两个相对顶点， σ 为 v 三个面（正五边形）中以原点为端点的所有对角线端点的集合 D ，其中一个顶点是 v。显然， σ和 $-\sigma$ 是 v 在 V 中的两个不同距离球面，但它们不是正六边形，而是关于 v 在 D的全等距群中的各向同性子群的某些轨道。这些六边形的所有顶点都位于它们的外接球面上，因此根据引理 3，它们是完全多胞体。现在， D 由命题 13可知是一个完美多胞体。

我们在上文将 Goss 的顶点集描述为 $_5$ 标准立方体顶点集的某些子集，并将四维正则单纯形的完全截断也描述为其中的某些子集，见 $\mathbb{R}^5$。从这些描述很容易看出，交换群 $\mathbb{Z}_2^5$的某些子群在这两个多胞体的顶点集上传递作用。因此，根据命题6，它们并非近乎完美。 ■

References

[1] Adams J.、Zvengrowski P.、Laird P. 正多胞体的顶点嵌入 //《数学展望》，2003，V. 21，N 4，P. 339–353，MR2022003，Zbl.1042.52010。[2] Ball K. 现代凸几何初等导论，载于：Levy, Silvio（编），《几何学的风味》。剑桥：剑桥大学出版社，《数学科学研究所出版物》31，1997，P. 1–58，MR1491097，Zbl.0901.52002。[3] Barvinok A.、Blekherman G. 轨道的凸几何。载于：Goodman, Jacob Eli（编）等，《组合与计算几何》，51–77，《数学科学研究所出版物》52，剑桥大学出版社，剑桥，2005，MR2178312，Zbl.1096.52002。

[4] Berestovskii V. N.、Nikonorov Yu. G. 有限齐次度量空间 //《西伯利亚数学杂志》，2019，V. 60，N 5，P. 973–995（俄文）。英文译文：《Siberian Math. J.》，2019，V. 60，N 5，P. 757–773，MR4055423，Zbl.1431.51008。DOI：10.1134/S0037446619050021[5]Berestovskii V. N.、Nikonorov Yu. G. 黎曼流形与齐次测地线，Springer数学专著。Cham：Springer，2020，MR4179589，Zbl.1460.53001。DOI：10.1007/978-3-030-56658-6[6] Berestovskii V. N.、Nikonorov Yu. G. 欧几里得空间中的有限齐次子空间 //《数学论文集》，2021，V. 24，N 1。P. 3—34（俄文）。// 英文译文：《Siberian Advances in Mathematics》，2021，V. 31，N 3，P. 155–176，Zbl.07656933。DOI：10.1134/S1055134421030019[7] Berestovskii V. N.、Nikonorov Yu. G. 半正则Gosset多胞体 //《俄罗斯科学院院刊，数学辑》，2022，V. 86，N 4，P. 51–84（俄文）。英文译文：《Izv. Math.》，2022，V. 86，N 4，P. 667–698。DOI：10.1070/IM9169[8] Berestovskii V. N.、Nikonorov Yu. G. 关于有限齐次度量空间 //《弗拉季高加索数学杂志》，2022，V. 2，N 2，P. 51–61，MR4448043，Zbl.07598648。DOI：10.46698/h7670-4977-9928-z[9] Berestovskii V. N.、Nikonorov Yu. G. 关于欧几里得空间中的 m点齐性多胞体 //《Filomat》，2023，V. 37，N 25（已录用），另见 arXiv:2206.13096。[10] Bonnesen T.、Fenchel W.《凸体理论》，BCS Associates，Moscow，ID，1987。译自德文，由 L. Boron、C. Christenson 和 B. Smith 编辑，MR0920366，Zbl.0628.52001。[11] Conway J. H.、Sloane N. J. A. 球堆积、格与群，《数学科学基础》，第290卷，Springer-Verlag，纽约，1988，MR0920369，Zbl.0634.52002；俄文译本，第1、2卷，Mir，莫斯科，1990。[12] Coxeter H. S. M.《正多胞体》，第3版。纽约：Dover，1973，MR0370327。[13] Dutour Sikiri´c M. 七维完美德洛内多胞体与德洛内单纯形，《加拿大数学杂志》，2017，V. 69，N 5，P. 1143–1168，MR3693151，Zbl.1381.11054。[14] Dutour Sikiri´c M.、Erdahl R.、Rybnikov K. 低维完美德洛内多胞体，《Integers》，2007，7，A39，49页，MR2342197，Zbl.1194.52018。[15] Elte E. L. 超空间的半正则多胞体，1912，格罗宁根：格罗宁根大学，https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ABR2632.0001.001，29.03.2023。[16] Fejes T´oth L.《正图形》。《纯粹与应用数学国际专著丛书》47。牛津等地：Pergamon Press，1964，MR0165423，Zbl.0134.15705。[17] Gosset Th. 关于空间中的正图形和半正则图形 //《数学通讯》，1900，V. 29。P. 43–48。 n Vinberg E. B.《群的线性表示》，莫斯科：Nauka，1985（俄文）。英文译文：Springer Basel AG：2010。Birkh[18] auser-Verlag，巴塞尔，1989年版重印，MR2761806，Zbl.1206.20008。

Berestovskiĭ Valeriĭ Nikolaevich
Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, RUSSIA,
Principal scientific researcher电子邮件地址:
valeraberestovskii@gmail.com

Nikonorov Yuriĭ Gennadievich
Southern Mathematical Institute of VSC RAS
53 Vatutina St., Vladikavkaz, 362025, RUSSIA,
Principal scientific researcher电子邮件地址:
nikonorov2006@mail.ru