arXiv:2304.12220v1 [math.ST] 24 Apr 2023

# 连续时间随机过程周期相关增量的估计问题

Maksym Luz*，Mikhail Moklyachuk†

2023年4月25日

**摘要**

我们研究基于连续时间随机过程过去观测值，对由该过程未观测值构成的线性泛函进行最优估计的问题，其中该过程具有周期相关增量。为解决这一问题，我们为该过程构造相应的随机函数序列，使其形成无穷维向量平稳增量序列。在已知平稳增量序列谱密度的情况下，我们得到计算泛函最优估计量的均方误差值和谱特征的公式。在给定可容许谱密度集合的情况下，推导出了确定最不利谱密度以及泛函最优线性估计的极小极大（鲁棒）谱特征的公式。

**关键词**：周期相关增量、极小极大鲁棒估计、均方误差

**AMS 2010学科分类**。主要分类：60G10、60G25、60G35；次要分类：62M20、62P20、93E10、93E11

## 引言

本文研究了具有周期相关增量的连续时间随机过程 $\xi(t)$、 $t \in \mathbb{R}$ $\xi^{(d)}(t, \tau T) = \Delta_{T\tau}^{d}\xi(t)$ 的预测问题，其阶数为 $d$、周期为 $T$，其中 $\Delta_s\xi(t) = \xi(t) - \xi(t-s)$。近期的研究，例如 Basawa 等人 [1], 、Dudek 等人 [4], 以及 Reisen 等人[28], ，表明人们一直关注非平稳模型和鲁棒估计方法。

*法国巴黎银行Cardif，乌克兰基辅，maksym.luz@gmail.com

†基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学概率论、统计学与精算数学系，乌克兰基辅 01601，moklyachuk@gmail.com

Kolmogorov [13], Wiener [32] 和 Yaglom [34] 为平稳随机序列和过程的插值、外推（预测）及滤波问题发展了有效的解法。对于特定问题，他们构造了一个估计量 $\widehat{x}(t)$，该估计量基于可获得的观测值，并在谱密度 $f(\lambda)$ 已准确知晓且固定的情况下，使均方误差 $\Delta(\widehat{x}(t)\ f) = \mathrm{E}|x(t)-\widehat{x}(t)|^2)$ 最小，其中平稳过程或序列 $x(t)$ 的谱密度为 $f(\lambda)$。本文将此类估计量称为最优线性估计。

所发展的经典估计方法在实践中并不直接适用，因为通常无法获得过程的精确谱结构。在这种情况下，可以将估计得到的谱密度视为真实谱密度。然而，Vastola 和 Poor [31] 通过具体实例表明，这种替代可能导致估计误差显著增加。因此，考虑称为极小极大稳健的估计量是合理的；这类估计量同时使给定可容许谱密度集合中所有谱密度对应的均方误差的最大值达到最小。Grenander [8] 提出了极小极大鲁棒外推方法，将泛函 $Ax = \int_0^1 a(t)x(t)dt$ 的估计视为$\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$两位参与者之间的一场博弈：其中一方通过 $A\zeta$ 使 $\Delta(Ax,\ f)$ 最小化，另一方通过 $f$使其最大化。在适当条件下，该博弈存在一个鞍点：

$$\max_f \min_{\widetilde{A}x} \Delta(\widetilde{A}x, f) = \min_{\widetilde{A}x} \max_f \Delta(\widetilde{A}x, f) = \nu.$$

更多详情请参阅 Franke 和 Poor [5] 的后续研究，以及 Kassam 和 Poor [11] 的综述论文。Moklyachuk [19, 20, 22]取得了大量研究成果。Moklyachuk 和 Masyutka [24]将这些成果推广到了向量值平稳过程及序列。

平稳性这一概念可以进行一些推广，其中两种推广的结合——平稳的 $d$ 阶增量和周期相关性——正是本文的研究范围。具有平稳 $d$ 阶增量的随机过程 $x(t)$ 由 Yaglom 和 Pinsker [27] 引入。由此类过程生成的增量序列 $x^{(d)}(t,\tau) = \Delta_\tau^d x(t)$ 按变量 $t$ 是平稳的，即，数学期望 $\mathrm{E}\xi^{(n)}(t,\tau)$ 和 $\mathrm{E}\xi^{(n)}(t+s,\tau_1)\xi^{(n)}(t,\tau_2)$ 不依赖于 $t$。Yaglom 和 Pinsker [27] 描述了此类过程的谱表示和谱密度的规范因子分解，并且还解决了这些过程的外推问题。Luz 和 Moklyachuk [16] 研究了具有平稳增量的随机过程的极小极大稳健外推、插值和滤波问题。

Dubovetska 和 Moklyachuk [3] 针对另一种平稳过程的推广形式——周期相关（循环平稳）过程，推导了经典估计和极小极大稳健估计。这类过程由 Gladyshev [7]提出。此类过程~~的~~相关函数 $K(t,s) = \mathrm{E}x(t)x(s)$ 是一个 $T$-周期函数：$K(t,s) = K(t+T, s+T)$，这意味着其谱随时间变化。周期相关过程广泛应用于信号处理和通信领域（关于循环平稳性及其应用的近期研究综述，参见 Napolitano [26] ）。

本文研究线性泛函 $A\xi = \int_0^\infty a(t)\xi(t)dt$ 和 $A_{NT}\xi = \int_{(N+1\ T\ a)}(t)\xi(t)dt$的均方最优估计问题。这些泛函取决于具有周期平稳 $d$ 阶增量的连续时间随机过程 $\xi(t)$的未观测值，估计依据是该过程在各点$t < 0$上的观测值。Kozak 和 Moklyachuk [14], 、Luz 和 Moklyachuk [17, 18]研究了离散时间过程的类似问题。第 2 节介绍如何将连续时间周期平稳过程表示为平稳 H 值序列。第 3.1 小节将这一方法推广至周期平稳增量。第 3.2 小节推导估计量的最大均方误差。第 3.3 小节求解经典预测（或外推）问题。特别是在谱确定性条件下，推导了计算泛函 $A\xi$ 和 $A_{NT}\xi$ 的最优线性估计的均方误差和谱特征的公式。第 4 节介绍本文关于所研究过程的极小极大稳健预测结果：确定最不利谱密度的关系，以及针对若干类谱密度推导出的极小极大谱特征。

# 1 连续时间周期相关过程及其生成的向量平稳序列

本节简要回顾周期相关过程，并介绍一种方法，以便在下一节中建立周期相关增量过程的谱理论。

定义 *1.1*（*Gladyshev* [7]）。若均方连续随机过程$\zeta$： $\mathbb{R} \to H = L_2(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 满足 $E\zeta(t) = 0$，则称其为周期相关（*PC*）过程，周期为 $T$；如果其相关函数 $K(t, s) = E\zeta(t)\zeta(s)$ 对所有 $t$、 $s \in \mathbb{R}$ 以及某个固定的 $T > 0$ 均满足以下条件：

$$K(t,s) = \mathsf{E}\zeta(t)\overline{\zeta(s)} = \mathsf{E}\zeta(t+T)\overline{\zeta(s+T)} = K(t+T, s+T).$$

对于周期相关随机过程 $\zeta(t)$，可以构造如下随机函数序列 [2], [23]

$$\{\zeta_j(u) = \zeta(u + jT), u \in [0, T), j \in \mathbb{Z}\}. \tag{1}$$

序列 (1) 构成一个 $L_2([0, T); H)$ 值平稳序列 $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$，其相关函数为

$$B_\zeta(l, j) = \langle \zeta_l, \zeta_j \rangle_H = \int_0^T \mathsf{E}[\zeta(u+lT)\overline{\zeta(u+jT)}]du = \int_0^T K_\zeta(u+(l-j)T, u)du = B_\zeta(l-j),$$

其中， $K_\zeta(t, s) = \mathsf{E}\zeta(t)\overline{\zeta(s)}$是 PC 过程 $\zeta(t)$ 的相关函数。如果我们在空间 $L_2([0, T)$ 中选择以下标准正交基； $\mathbb{R})$

$$\{\widetilde{e}_k = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}u/T}, k = 1, 2, 3, \ldots\}, \quad \langle \widetilde{e}_j, \widetilde{e}_k \rangle = \delta_{kj}, \tag{2}$$

平稳序列 $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 可以表示为以下形式

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{kj} \widetilde{e}_k,$$

其中

$$\zeta_{kj} = \langle \zeta_j, \widetilde{e}_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \zeta_j(v) e^{-2\pi i \{(-1)^k \left[\frac{k}{2}\right]\} v/T} dv.$$

序列 $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$，或与之对应的向量序列

$$\{\vec{\zeta_j} = (\zeta_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top, j \in \mathbb{Z}\},$$

称为由过程 $\{\zeta(t)\ t \in \mathbb{R}\}$ 生成的向量平稳序列。生成平稳序列的分量 $\{\zeta_{kj}\}$: $k = 1, 2, \dots$; $j \in \mathbb{Z}\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 满足以下关系 [10], [19]

$$\mathsf{E}\zeta_{kj} = 0, \quad \|\zeta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}|\zeta_{kj}|^2 \le P_\zeta = B_\zeta(0), \quad \mathsf{E}\zeta_{kl}\overline{\zeta}_{nj} = \langle R_\zeta(l-j)\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_n \rangle.$$

生成平稳序列 $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$的相关函数 $R_\zeta(j)$是相关算子函数。相关算子 $R_\zeta(0) = R_\zeta$ 是核算子，其核范数满足以下限制:

$$\|\zeta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\zeta z \widetilde{e}_k, \widetilde{e}_k \rangle \le P_\zeta.$$

生成平稳序列 $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 具有谱密度函数$f(\lambda) = \{f_{kn}(\lambda)\}_{k,n=1}^{\infty}$，它是变量 $\lambda \in [-\pi, \pi)$的正值算子函数；若其相关函数 $R_\zeta(j)$可表示为以下形式

$$\langle R_\zeta(j)\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} \langle f(\lambda)\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_n \rangle d\lambda.$$

我们通过以下陈述结束综述：对于几乎所有的 $\lambda \in [-\pi, \pi)$，谱密度 $f(\lambda)$ 都是一个具有可积核范数的核算子

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(\lambda)\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_k \rangle d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\zeta \widetilde{e}_k, \widetilde{e}_k \rangle = \|\zeta_j\|_H^2 \le P_\zeta.$$

# 2 周期相关 $d$ 阶增量随机过程的外推问题

## 2.1 周期相关 $d$ 阶增量随机过程

对于给定的随机过程 $\{\xi(t)\ t\in\mathbb{R}\}$，考虑随机的第 $d$ 个增量过程

$$\xi^{(d)}(t,\tau)=(1-B_\tau)^d\xi(t)=\sum_{l=0}^{d}(-1)^l\binom{d}{l}\xi(t-l\tau), \tag{3}$$

步长为 $\tau\in\mathbb{R}$，由随机过程 $\xi(t)$ 生成。这里 $B_\tau$ 是后移算子： $B_\tau\xi(t)=\xi(t-\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$。

为避免与均方误差的记号重复，我们倾向于使用记号 $\xi^{(d)}(t,\tau)$，而不是广泛使用的 $\Delta_\tau^d\xi(t)$。

**定义 2.1**。 随机过程 $\{\xi(t)\ t\in\mathbb{R}\}$ 称为具有周期平稳（周期相关）增量的随机过程，其步长为$\tau\in\mathbb{Z}$，周期为 $T>0$，如果数学期望

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\xi^{(d)}(t+T,\tau T) &= \mathsf{E}\xi^{(d)}(t,\tau T)=c^{(d)}(t,\tau T),\\ \mathsf{E}\xi^{(d)}(t+T,\tau_1 T)\xi^{(d)}(s+T,\tau_2 T) &= D^{(d)}(t+T,s+T;\tau_1 T,v_2 T)\\ &= D^{(d)}(t,s;\tau_1 T,\tau_2 T)\end{aligned}$$

对每个 $t,s\in\mathbb{R}$, $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{Z}$ 都存在，且对于某个固定的 $T>0$,

定义 2.1 中的函数 $c^{(d)}(t,\tau T)$ 和 $D^{(d)}(t,s;\ \tau_1 T,\tau_2 T)$ 分别称为具有周期平稳（周期相关）增量的随机过程 $\xi(t)$的均值和结构函数。

对于具有周期相关增量 $\xi^{(d)}(t,\tau T)$ 的随机过程 $\{\xi(t)\ t\in\mathbb{R}\}$ 以及整数步长 $\tau$，我们按照第 1 节所述的步骤构造随机函数序列

$$\{\xi_j^{(d)}(u):=\xi_{j,\tau}^{(d)}(u)=\xi_j^{(d)}(u+jT,\tau T),\ u\in[0,T),j\in\mathbb{Z}\}. \tag{4}$$

序列 (4) 构成一个 $L_2([0,T);\ H)$-值平稳增量序列$\{\xi_j^{(d)},j\in\mathbb{Z}\}$，其结构函数为

$$\begin{aligned}B_{\xi^{(d)}}(l,j) &= \langle\xi_l^{(d)},\xi_j^{(d)}\rangle_H=\int_0^T\mathsf{E}[\xi_j^{(d)}(u+lT,\tau_1 T)\overline{\xi_j^{(d)}(u+jT,\tau_2 T)}]du\\ &= \int_0^T D^{(d)}(u+(l-j)T,u;\tau_1 T,\tau_2 T)du=B_{\xi^{(d)}}(l-j).\end{aligned}$$

利用标准正交基 (2)，平稳增量序列$\{\xi_j^{(d)},j\in\mathbb{Z}\}$ 可表示为

$$\xi_j^{(d)}=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{kj}^{(d)}\widetilde{e}_k, \tag{5}$$

其中

$$\xi_{kj}^{(d)} = \langle \xi_j^{(d)}, \widetilde{e}_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \xi_j^{(d)}(v) e^{-2\pi i \{(-1)^k [\frac{k}{2}]\} v/T} dv.$$

我们将此序列 $\{\xi_j^{(d)}, j \in \mathbb{Z}\}$ 称为与之对应的向量序列

$$\{\vec{\xi}_j^{(d)} = (\xi_{kj}^{(d)}, k = 1, 2, \dots)^\top, j \in \mathbb{Z}\},$$

由增量过程 $\{\xi^{(d)}(t, \tau T)\ t \in \mathbb{R}\}$ 生成的无限维向量平稳增量序列。进一步地，我们将省略“生成的向量平稳增量序列”这一名称中的“向量”一词。

生成的平稳增量序列 $\{\xi_j^{(d)}, j \in \mathbb{Z}\}$ 的分量 $\{\xi_{kj}^{(d)}\}$： $k = 1, 2, \dots; j \in \mathbb{Z}$ 满足： [10], [19]

$$\mathsf{E}\xi_{kj}^{(d)} = 0, \quad \|\xi_j^{(d)}\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}|\xi_{kj}^{(d)}|^2 \le P_{\xi^{(d)}} = B_{\xi^{(d)}}(0),$$

and

$$\mathsf{E}\xi_{kl}^{(d)} \overline{\xi_{nj}^{(d)}} = \langle R_{\xi^{(d)}}(l - j; \tau_1, \tau_2) \widetilde{e}_k, \widetilde{e}_n \rangle.$$

生成的平稳增量序列 $\{\xi_j^{(d)}, j \in \mathbb{Z}\}$ 的结构函数 $R_{\xi^{(d)}}(j) := R_{\xi^{(d)}}(j;\ \tau_1, \tau_2)$ 是一个相关算子函数。相关算子 $R_{\xi^{(d)}}(0) = R_{\xi^{(d)}}$ 是一个核算子，其核范数满足以下限制：

$$\|\xi_j^{(d)}\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_{\xi^{(d)}} \widetilde{e}_k, \widetilde{e}_k \rangle \le P_{\xi^{(d)}}.$$

假设结构函数 $R_{\xi^{(d)}}(j)$ 可表示为

$$\langle R_{\xi^{(d)}}(j; \tau_1, \tau_2) \widetilde{e}_k, \widetilde{e}_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} (1 - e^{-i\tau_1 \lambda})^d (1 - e^{i\tau_2 \lambda})^d \frac{1}{\lambda^{2d}} \langle f(\lambda) \widetilde{e}_k, \widetilde{e}_n \rangle d\lambda.$$

那么 $f(\lambda) = \{f_{kn}(\lambda)\}_{k,\ n=1}^{\infty}$ 是所生成的平稳增量序列 $\{\xi_j^{(d)}, j \in \mathbb{Z}\}$ 的谱密度函数。它是变量 $\lambda \in [-\pi, \pi$ 的正值算子函数，对于几乎所有 $\lambda \in [-\pi, \pi$，它都是具有可积核范数的核算子

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{-i\tau_1 \lambda})^d (1 - e^{i\tau_2 \lambda})^d \frac{1}{\lambda^{2d}} \langle f(\lambda) \widetilde{e}_k, \widetilde{e}_k \rangle d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_{\xi^{(d)}} \widetilde{e}_k, \widetilde{e}_k \rangle = \|\zeta_j\|_H^2 \le P_{\xi^{(d)}}. \tag{6}$$

## 2.2 外推问题：均方误差的最大值

考虑泛函的均方最优线性估计问题

$$A\xi = \int_0^{\infty} a(t) \xi(t) dt, \quad A_{NT}\xi = \int_0^{(N+1)T} a(t) \xi(t) dt$$

这些泛函取决于具有周期相关 $d$增量的随机过程 $\xi(t)$ 的未知值。估计量基于过程 $\xi(t)$ 在点 $t<0$ 处的观测值。

**引理 2.1** (Luz 和 Moklyachuk [16])。 任意线性泛函

$$A\xi=\int_0^\infty a(t)\xi(t)dt$$

可表示为

$$A\xi=B\xi-V\xi,$$

其中

$$B\xi=\int_0^\infty b^\tau(t)\xi^{(d)}(t,\tau T)dt,\quad V\xi=\int_{-\tau Td}^0 v^\tau(t)\xi(t)dt,$$

$and$

$$v^\tau(t) = \sum_{l=\left[-\frac{t}{\tau T}\right]'}^{d}(-1)^l\binom{d}{l}b^\tau(t+l\tau T),\quad t\in[-\tau Td;0), \tag{7}$$

$$b^\tau(t) = \sum_{k=0}^{\infty}a(t+\tau Tk)d(k)=D^{\tau T}\mathbf{a}(t),\ t\geq 0, \tag{8}$$

其中 $[x]'$ 表示不小于 $x$ 的数中的最小整数，系数 $\{d(k)\colon\ k\geq 0\}$ 由以下关系确定

$$\sum_{k=0}^{\infty}d(k)x^k=\left(\sum_{j=0}^{\infty}x^j\right)^d,$$

$D^{\tau T}$ 是作用于任意函数 $x(t)$、 $t\geq 0$的线性变换，具体如下:

$$D^{\tau T}\mathbf{x}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(t+\tau Tk)d(k).$$

**推论 2.1**。 线性泛函

$$A_{NT}\xi=\int_0^{(N+1)T}a(t)\xi(t)dt$$

允许表示

$$A_{NT}\xi=B_{NT}\xi-V_{NT}\xi,$$

其中

$$B_{NT}\xi=\int_0^{(N+1)T}b^{\tau,N}(t)\xi^{(d)}(t,\tau T)dt,\quad V_{NT}\xi=\int_{-\tau Td}^0 v^{\tau,N}(t)\xi(t)dt,$$

*and*

$$v^{\tau,N}(t) = \sum_{l=\left[-\frac{t}{\tau T}\right]'}^{\min\left\{\left[\frac{(N+1)T-t}{\tau T}\right],d\right\}} (-1)^l \binom{d}{l} b^{\tau,N}(t+l\tau T), \quad t \in [-\tau T d; 0), \quad (9)$$

$$b^{\tau,N}(t) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{(N+1)T-t}{\tau T}\right]} a(t+\tau T k)d(k) = D^{\tau T,N}\mathbf{a}(t),\ t \in [0;(N+1)T], \quad (10)$$

线性变换 $D^{\tau T,\ N}$作用于任意函数 $x$（$t$），$t \in [0;\ (N+1)\ T]$，如下所示：

$$D^{\tau T,N}\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{(N+1)T-t}{\tau T}\right]} x(t+\tau T k)d(k).$$

令 $A\xi$ 表示根据过程 $\xi(t)$ 在点 $t < 0$ 处的观测值对泛函 $A\xi$ 的均方最优线性估计，令 $B\xi$ 表示根据随机 d 阶增量过程 $\xi^{(d)}(t,\tau T)$ 在点 $t < 0$处的观测值对泛函 $B\xi$ 的均方最优线性估计。

令 $\Delta(f;\ \widehat{A}\xi) = \mathsf{E}|A\xi - \widehat{A}\xi|^2$和 $\Delta(f;\ \widehat{B}\xi) = \mathsf{E}|B\xi - \widehat{B}\xi|^2$分别表示估计量 $A\xi$ 和 $B\xi$ 的均方误差。/由于已知 $\xi(t)$ 在点$t \in [-\tau T n;\ 0)$处的值，根据引理 2.1可得以下等式：

$$A\xi = B\xi - V\xi, \quad \widehat{A}\xi = \widehat{B}\xi - V\zeta, \quad (11)$$

and

$$\Delta\left(f;\widehat{A}\xi\right) = \mathsf{E}\left|A\xi - \widehat{A}\xi\right|^2 = \mathsf{E}\left|B\xi - V\xi - \widehat{B}\xi + V\xi\right|^2 = \mathsf{E}\left|B\xi - \widehat{B}\xi\right|^2 = \Delta\left(f;\widehat{B}\xi\right).$$

对于泛函 $A_{NT}\xi$，类似的关系也成立：

$$A_{NT}\xi = B_{NT}\xi - V_{NT}\xi, \quad \widehat{A}_{NT}\xi = \widehat{B}_{NT}\xi - V_{NT}\zeta, \quad (12)$$

and

$$\begin{aligned}\Delta\left(f;\widehat{A}_{NT}\xi\right) &= \mathsf{E}\left|A_{NT}\xi - \widehat{A}_{NT}\xi\right|^2 = \mathsf{E}\left|B_{NT}\xi - V_{NT}\xi - \widehat{B}_{NT}\xi + V_{NT}\xi\right|^2 \\ &= \mathsf{E}\left|B_{NT}\xi - \widehat{B}_{NT}\xi\right|^2 = \Delta\left(f;\widehat{B}_{NT}\xi\right).\end{aligned}$$

因此，为了求出泛函$A\xi$、 $A_{NT}\xi$的均方最优线性估计，我们必须求出泛函 $B\xi$、$B_{NT}\xi$的估计量。

泛函 $B_{NT}\xi$ 可以表示为

$$B_{NT}\xi = \int_0^{(N+1)T} b^{\tau,N}(t)\xi^{(d)}(t,\tau T)dt = \sum_{j=0}^{N}\int_0^T b_j^{\tau,N}(u)\xi_j^{(d)}(u)du,$$

其中

$$b_j^{\tau,N}(u) = b^{\tau,N}(u+jT), \quad \xi_j^{(d)}(u) = \xi_j^{(d)}(u+jT,\tau T),\ u \in [0,T).$$

利用所生成的平稳增量序列 $\{\xi_j^{(d)}, j \in \mathbb{Z}\}$ 的分解式（5）以及方程的解

$$(-1)^k \left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^m \left[\frac{m}{2}\right] = 0 \tag{13}$$

该二元方程的解（$k$, $m$）由对（1, 1）、（$2l+1$, $2l$）和（$2l$, $2l+1$）给出，其中 $l = 2$=3, ....., 泛函 $B_{NT}\xi$ 可以改写为如下形式 [23]

$$\begin{aligned}
B_{NT}\xi &= \int_0^{(N+1)T} b^{\tau,N}(t)\xi^{(d)}(t,\tau T)dt = \sum_{j=0}^{N}\int_0^T b_j^{\tau,N}(u)\xi_j^{(d)}(u)du \\
&= \sum_{j=0}^{N}\frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{kj}^{\tau,N} e^{2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}u/T}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\xi_{mj}^{(d)} e^{2\pi i\{(-1)^m\left[\frac{m}{2}\right]\}u/T}\right)du \\
&= \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{kj}^{\tau,N}\xi_{mj}^{(d)}\frac{1}{T}\int_0^T e^{2\pi i\left\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]+(-1)^m\left[\frac{m}{2}\right]\right\}u/T}du \\
&= \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} b_{kj}^{\tau,N}\xi_{kj}^{(d)} = \sum_{j=0}^{N}(\vec{b}_j^{\tau,N})^{\top}\vec{\xi}_j^{(d)} = B_N\vec{\xi},
\end{aligned}$$

其中，无限维向量 $\vec{\xi}_j^{(d)}$ 和 $\vec{b}^{\tau}{}_{j}^{N}$ 定义如下:

$$\vec{\xi}_j^{(d)} = (\xi_{kj}^{(d)}, k = 1,2,\dots)^{\top},$$

and

$$\vec{b}_j^{\tau,N} = (b_{kj}^{\tau,N}, k = 1,2,\dots)^{\top} = (b_{1j}^{\tau,N}, b_{3j}^{\tau,N}, b_{2j}^{\tau,N}, \dots, b_{2k+1,j}^{\tau,N}, b_{2k,j}^{\tau,N}, \dots)^{\top}.$$

Here

$$b_{kj}^{\tau,N} = \langle b_j^{\tau,N}, \widetilde{e}_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T b_j^{\tau,N}(v)e^{-2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}v/T}dv,$$

其中

$$b_j^{\tau,N}(u) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{(N+1)T-u-jT}{\tau T}\right]} a(u+jT+\tau Tl)d(l) = D^{\tau T,N}a(u),\ u \in [0;t),\ j = 0,1,\dots,N,$$

and

$$b_{kj}^{\tau,N} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-j}{\tau}\right]} a_{kj+\tau l}d(k),\ j = 0,1,\dots,N,$$

其中

$$a_{kj}=\langle a_j,\widetilde{e}_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T a_j(v)e^{-2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}v/T}dv,\quad k=1,2,\ldots,\ j=0,1,\ldots,N.$$

假设决定泛函$B_{NT}\xi$的系数 $\{\vec{b}_j^{\tau,N},j=0,1,\ldots,N\}$满足以下条件

$$\|\vec{b}_j^{\tau,N}\|<\infty,\quad \|\vec{b}_j^{\tau,N}\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|b_{kj}^{\tau,N}|^2,\quad j=0,1,\ldots,N. \tag{14}$$

由条件（14）可知，泛函

$$B_{NT}\xi=\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}b_{kj}^{\tau,N}\xi_{kj}^{(d)}=\sum_{j=0}^{N}(\vec{b}_j^{\tau,N})^{\top}\vec{\xi}_j^{(d)}=B_N\vec{\xi}$$

具有有限二阶矩。

我们来计算泛函 $B_{NT}\xi$的ˆ估计量 $B_{NT}\xi$的均方误差 $\Delta(\xi,\hat{}B_{NT})$的最大值。记 $\Lambda$为基于过程 $\xi(t)$在点 $t<0$处的观测得到的泛函 $B_{NT}\xi$的所有线性估计量的集合。

令$\mathbf{Y}$表示均方连续的PC增量过程 $\xi^{(d)}(t,\tau T)$的类，满足$\mathrm{E}\xi^{(d)}(t,\tau T)=0$, $\mathrm{E}|\xi^{(d)}(t,\tau T)|^2\le P_{\xi^d}$。令$\mathbf{Y}_R$表示满足条件$\|\xi_j^{(d)}\|_H^2\le P_{\xi^{(d)}}$的所有正则平稳序列的类。于是可以表述如下定理（见 [19, 21]）。

**定理2.1**。确定泛函ˆ $B_{NT}\xi$的系数 $\{\vec{b}_j^{\tau,N},j=0,1,\ldots,N\}$满足条件（*14*）。函数 $\Delta(\xi,\ B_{NT})$在集合$\mathbf{Y}\ \times\Lambda$上存在一个鞍点：

$$\min_{\hat{B}_{NT}\in\Lambda}\max_{\zeta\in\mathbf{Y}}\Delta(\xi,\hat{B}_{NT})=\max_{\zeta\in\mathbf{Y}}\min_{\hat{B}_{NT}\in\Lambda}\Delta(\xi,\hat{B}_{NT})=P_\xi\cdot\nu_N^2,$$

其中，$\nu_N^2$是空间 $\ell_2$中由矩阵 $\{Q_N(p,\ q)\}_{p,\ q=0}^{D}$确定的自伴紧算子 $Q_N$ 的最大特征值，该矩阵由分块矩阵 $Q_N(p,\ q)=\{Q_{kn}^D(p,\ q)\}_{k,\ n=1}^{\infty}$构成，其元素为

$$Q_{kn}^N(p,q)=\sum_{s=0}^{min(N-p,N-q)}b_{k,s+p}^{\tau,N}\cdot\overline{b_{n,s+q}^{\tau,N}}, \tag{15}$$

$$k,n=1,2,\ldots,\quad p,q=0,1,\ldots,N.$$

类 $\mathbf{Y}$ 中用于泛函 $B_{NT}\xi$ 最优估计的最不利随机序列 $\vec{\xi}_j^{(d)}$ 是一个阶数为 $N$的单边移动平均序列，其形式为

$$\vec{\xi}_j^{(d)}=\sum_{s=j-N}^{j}g(j-s)\vec{\varepsilon}(s),$$

其中 $g_N=(g(0)\ g(1)\dots\overline{g(N)})^\top$ 是与 $\nu_N^2$ 对应的特征向量，该特征向量由矩阵 $g(p)=\{g_{km}(p)\}_{k=\overline{1\infty}}^{m=1,\overline{M}}$，构造，并由条件 $\|g_N\|^2=\sum_{p=0}^{D}\|g(p)\|^2=P_\zeta$ 确定； $\vec{\varepsilon}(s)=\{\varepsilon_m(s)\}_{m=1}^{M}$ 是一个具有正交值的向量值平稳随机序列。

对于泛函 $B\xi$ [23]，可以得到类似的表示：

$$B\xi=\int_0^\infty b^\tau(t)\xi^{(d)}(t,\tau T)dt=\sum_{j=0}^{\infty}(\vec{b}_j^{\tau})^\top\vec{\xi}_j^{(d)}=B\vec{\xi},$$

其中，无限维向量 $\vec{\xi}_j^{(d)}$ 和 $\vec{b}_j^{\tau}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_j^{(d)} &= (\xi_{kj}^{(d)},k=1,2,\dots)^\top,\\ \vec{b}_j^{\tau} &= (b_{kj}^{\tau},k=1,2,\dots)^\top=(b_{1j}^{\tau},b_{3j}^{\tau},b_{2j}^{\tau},\dots,b_{2k+1,j}^{\tau},b_{2k,j}^{\tau},\dots)^\top.\end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned}b_{kj}^{\tau} &= \langle b_j^{\tau},\widetilde{e}_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T b_j^{\tau}(v)e^{-2\pi i\{(-1)^k[\frac{k}{2}]\}v/T}dv,\\ b_j^{\tau}(u) &= \sum_{l=0}^{\infty}a(u+jT+\tau Tl)d(l)=D^\tau a_j(u),\quad u\in[0,T),\ j=0,1,\dots,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}b_{k,j}^{\tau} &= \sum_{l=0}^{\infty}a_{k,j+\tau l}d(l),\quad k,j=0,1,\dots,\\ a_{kj} &= \langle a_j,\widetilde{e}_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T a_j(v)e^{-2\pi i\{(-1)^k[\frac{k}{2}]\}v/T}dv.\end{aligned}$$

假设决定泛函$B\xi$的系数 $\{b_j^{\tau},j=0,1,\dots\}$ 满足以下条件

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|\vec{b}_j^{\tau}\|<\infty,\quad \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\|\vec{b}_j^{\tau}\|<\infty,\quad \|\vec{b}_j^{\tau}\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|b_{kj}^{\tau}|^2. \tag{16}$$

由条件（16）可知，泛函

$$B\xi=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}b_{kj}^{\tau}\xi_{kj}^{(d)}=\sum_{j=0}^{\infty}(\vec{b}_j^{\tau})^\top\vec{\xi}_j^{(n)}$$

具有有限二阶矩。下述定理给出了估计量 $B\xi$ 对泛函 $B\xi$ （见[19, 21]）的均方误差 $\Delta(\xi,B)$ 的最大值。

**定理 2.2**。 设决定泛函 $B\xi$ 的系数 $\{b_j^\tau, j=0,1,\ldots\}$ 满足条件（*16*）。函数 $\Delta(\xi,\hat{B})$ 在集合 $\mathbf{Y}\times\Lambda$ 上具有鞍点：

$$\min_{\hat{B}\in\Lambda}\max_{\zeta\in\mathbf{Y}}\Delta(\xi,\hat{B})=\max_{\zeta\in\mathbf{Y}}\min_{\hat{B}\in\Lambda}\Delta(\xi,\hat{B})=P_\xi\cdot\nu^2,$$

其中， $\nu^2$ 是空间 $\ell_2$中自伴紧算子 $Q$的最大特征值，该算子由矩阵 $\{Q(p,\ q)\}_{p,\ q=0}^{\infty}$确定，而该矩阵由分块矩阵 $Q(p,\ q)=\{Q_{kn}(p,\ q)\}_{k,\ n=1}^{\infty}$ 构造，其元素为

$$Q_{kn}(p,q)=\sum_{s=0}^{\infty}b_{k,s+p}^\tau\cdot\overline{b_{n,s+q}^\tau},\tag{17}$$

$$k,n=1,2,\ldots,\quad p,q=0,1,\ldots$$

类$\mathbf{Y}$ 中使泛函 $B\xi$ 达到最优估计的最不利随机序列 $\vec{\xi}_j^{(d)}$ 是如下形式的单边移动平均序列

$$\vec{\xi}_j^{(d)}=\sum_{s=-\infty}^{j}g(j-s)\vec{\varepsilon}(s),$$

其中， $g=(g(0)\ g(1)\ldots)^\top$ 是对应于 $\nu^2$的特征向量， $\nu^2$由矩阵 $g(p)=\{g_{km}(p)\}_{m=1,\ k=\overline{1\ \infty}}^{m=1}$ ，构造，并由条件 $\|g\|^2=\sum_{p=0}^{\infty}\|g(p)\|^2=P_\zeta$确定； $\vec{\varepsilon}(s)=\{\varepsilon_m(s)\}_{m=1}^{M}$ 是一个具有正交值的向量值平稳随机序列。

## 2.3 经典外推问题

令谱密度 $f(\lambda)$ 满足 极小性条件

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\left[\frac{\lambda^{2d}}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}f^{-1}(\lambda)\right]d\lambda<\infty.\tag{18}$$

这是泛函 $A\xi$ 和 $A_N\xi$ 的估计量的均方 → → 误差不等于 0 的充要条件。

考虑由均值为零的随机变量 $\gamma$ 组成的希尔伯特空间 $H=L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$，其具有有限方差 $\mathrm{E}|\gamma|^2<\infty$，并赋予内积 $(\gamma_1;\gamma_2)=\mathrm{E}\gamma_1\overline{\gamma_2}$。对于生成的增量序列 $\{\xi_j^{(d)}\}$，可以将闭线性子空间 $H^{0-}\ \vec{\xi}^{(d)}=\overline{span}\{\xi_{kj}^{(d)}\quad k=1\ 2\ \ldots\ j=()\colon,,;;,,,\ -1\ -2\ -3\ \ldots\}$ 与之关联。

还需考虑以下闭线性子空间

$$L_2^{0-}(f)=\overline{span}\{e^{i\lambda j}(1-e^{-i\lambda\tau})^d(i\lambda)^{-d}\delta_n:n=1,2,\ldots,\infty,\ j\leqslant-1\},\quad \delta_n=\{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty},$$

它属于向量值函数的希尔伯特空间 $\underline{L_2(f)}$，并赋有内积 $\langle g_1;\ g_2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}(g_1(\lambda))^{\top} f(\lambda)g_2(\lambda)d\lambda$。这里， $\delta_{kn}$ 为克罗内克符号。关系

$$\xi_{kj}^{(d)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda j}(1-e^{-i\lambda\tau})^d \frac{1}{(i\lambda)^d} dZ_k(\lambda), \quad k=1,2,\ldots, \tag{19}$$

表示子空间 $H^0(\vec{\xi}^{(d)})$ 与 $L_2^0(f)$ 之间的一个映射。其中， $Z_k(\lambda)$ 是向量值随机过程 $\vec{Z}_{\xi^{(d)}}(\lambda) = \{Z_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$在 $[-\pi,\pi)$ 上具有不相关增量的分量，该过程通过关系与谱函数$F(\lambda)$相联系

$$\mathsf{E}(Z_k(\lambda_2)-Z_k(\lambda_1))(\overline{Z_n(\lambda_2)-Z_n(\lambda_1)}) = F_{kn}(\lambda_2)-F_{kn}(\lambda_1)$$

for

$$-\pi \le \lambda_1 < \lambda_2 < \pi, \quad k,n = 1,2,\ldots,\infty.$$

定义函数 $\lambda^{2d}|1-e^{i\lambda\tau}|^{-2d}f^{-1}(\lambda)$ 的傅里叶系数

$$F_{j,l}^{\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda(j-l)}\frac{\lambda^{2d}}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}} f^{-1}(\lambda)d\lambda, \quad j,l \ge 0.$$

定义向量

$$\vec{a}_j = (a_{kj}, k=1,2,\ldots)^{\top} = (a_{1j}, a_{3j}, a_{2j}, \ldots, a_{2k+1,j}, a_{2k,j}, \ldots)^{\top}.$$

于是，引理 2.1 表明

$$\vec{b}_j = \sum_{m=j}^{\infty} \mathsf{diag}_{\infty}(d_\tau(m-j))\vec{a}_m = (D^{\tau}\mathbf{a})_j, \quad j=0,1,2,\ldots, \tag{20}$$

其中 $\mathbf{a} = ((\vec{a}_0)^{\top}, (\vec{a}_1)^{\top}, (\vec{a}_2)^{\top}, \ldots)^{\top}$，系数 $\{d_\tau(k):\ k\ge 0\}$ 由以下关系确定

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_\tau(k)x^k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{\tau j}\right)^d,$$

$D^{\tau}$ 是由一个无限维矩阵确定的线性变换，其矩阵元素为 $D^{\tau}(k,j)$ $k,j=0,1,2,\ldots$，满足：若 $D^{\tau}(k,j) = \mathsf{diag}_{\infty}(d_\tau(j-k))$，且当 $0\le k\le j$ 时 $D^{\tau}(k,j) = \mathsf{diag}_{\infty}(0)$；$\mathsf{diag}_{\infty}(x)$ 表示一个无限维对角矩阵，其对角线上的元素为 $x$。

**定理 2.3**。设随机过程 $x(t)$， $t\in\mathbb{R}$其具有周期平稳增量，确定了一个生成的平稳 $d$阶增量序列 $\vec{\xi}_m^{(d)}$，其谱密度矩阵为 $f(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,\ j=1}^{\infty}$ 并满足极小性条件（*18*）。设由函数 $a(t)$生成的系数 $\vec{a}_j$， $j\geqslant 0$ $t\ge 0$满足条件（*16*），并考虑（*20*）。基于该过程的最优线性估计 $A\xi$ 为

基于区间 $t<0$ 上对过程 $\xi(t)$ 的观测值 $A\xi$ 的泛函，可由公式计算

$$\widehat{A\xi}=\int_{-\pi}^{\pi}(\vec{h}_\tau(\lambda))^\top d\vec{Z}_{\xi^{(d)}}(\lambda)-\int_{-\tau Td}^{0}v^\tau(t)\xi(t)dt, \tag{21}$$

其中，$\vec{h}_\tau(\lambda)=\{h_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ 是估计量 $\widehat{A\vec{\xi}}$ 的谱特征。最优估计 $A\xi$ 的谱特征 $h_\tau(\lambda)$ 和均方误差 $\Delta(f;\,A\xi)\widehat{\ }$的值分别由下列公式计算：

$$(\vec{h}_\tau(\lambda))^\top=(\vec{B}_\tau(e^{i\lambda}))^\top\frac{(1-e^{-i\lambda\tau})^d}{(i\lambda)^d}-\frac{(-i\lambda)^n}{(1-e^{i\lambda\tau})^d}(\vec{C}_\tau(e^{i\lambda}))^\top f^{-1}(\lambda). \tag{22}$$

*and*

$$\begin{aligned}\Delta\left(f;\widehat{A\xi}\right) &= \Delta\left(f;\widehat{B\xi}\right)=\mathsf{E}\left|B\xi-\widehat{B\xi}\right|^2\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(-i\lambda)^d}{(1-e^{i\lambda\tau})^d}(\vec{C}_\tau(e^{i\lambda}))^\top f(\lambda)\overline{\vec{C}_\tau(e^{i\lambda})}\frac{(i\lambda)^d}{(1-e^{-i\lambda\tau})^d}d\lambda\\ &= \left\langle D^\tau\mathbf{a},\mathbf{F}_\tau^{-1}D^\tau\mathbf{a}\right\rangle. \end{aligned}\tag{23}$$

分别为，其中

$$\vec{B}_\tau(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{\infty}\vec{b}_j^\tau e^{i\lambda j},\quad \vec{C}_\tau(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{\infty}(\mathbf{F}_\tau^{-1}D^\tau\mathbf{a})_j e^{i\lambda j},$$

$\mathbf{F}_\tau$ 是空间 $\ell_2$ 中的线性算子，由一个元素为 $(\mathbf{F}_\tau)_{j,l}=F_{j,l}^\tau$, $j,l\geq 0$ 的无限矩阵确定。

$\widehat{\ }$证明。估计量 $A\xi$ 的表示式 (21) 来自关系 (11)。泛函 $B\xi$ 具有如下谱表示：

$$B\vec{\xi}=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\vec{B}_\tau(e^{i\lambda})\right)^\top\frac{(1-e^{-i\tau\lambda})^d}{(i\lambda)^d}d\vec{Z}_{\xi^{(d)}}(\lambda).$$

$\vec{\ }$因此，谱特征 $h_\tau(\lambda)$ 由以下条件刻画，这些条件确定元素 $\vec{B}_\tau(e^{i\lambda})$ $(\frac{}{1-e^{-i\lambda\tau})^d(i\lambda)^d}$在子空间 $L_2^{0-}(f)$ 上的投影：

$$\vec{h}_\tau(\lambda)\in L_2^{0-}(f), \tag{24}$$

$$\left(\vec{B}_\tau(e^{i\lambda})\frac{(1-e^{-i\lambda\tau})^d}{(i\lambda)^d}-\vec{h}_\tau(\lambda)\right)\perp L_2^{0-}(f). \tag{25}$$

由条件 (25)，我们得到以下对所有 $j\leqslant -1$均成立的关系

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\vec{B}_\tau(e^{i\lambda})\frac{(1-e^{-i\tau\lambda})^d}{(i\lambda)^d}-\vec{h}_\tau(\lambda)\right)^\top f(\lambda)e^{-ij\lambda}\frac{(1-e^{i\tau\lambda})^d}{(-i\lambda)^d}d\lambda=0. \tag{26}$$

因此，估计量 $B\xi$ 的谱特征可表示为

$$(\vec{h}_\tau(\lambda))^\top = (\vec{B}_\tau(e^{i\lambda}))^\top \frac{(1-e^{-i\lambda\tau})^d}{(i\lambda)^d} - \frac{(-i\lambda)^n (\vec{C}_\tau(e^{i\lambda}))^\top}{(1-e^{i\lambda\tau})^d} f^{-1}(\lambda),$$

其中

$$\vec{C}_\tau(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{c}_j^\tau e^{ij\lambda},$$

系数 $\vec{c}_j^\tau = \{c_{kj}^\tau\}_{k=1}^\infty, j \geqslant 0$ 未知，需加以求解。

条件（24）意味着方程

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[ (\vec{B}_\tau(e^{i\lambda}))^\top - \frac{\lambda^{2d} (\vec{C}_\tau(e^{i\lambda}))^\top}{(1-e^{-i\lambda\tau})^d (1-e^{i\lambda\tau})^d} f^{-1}(\lambda) \right] e^{-ij\lambda} d\lambda = 0, j \geqslant 0. \quad (27)$$

利用引入的傅里叶系数 $F_{j,\,l}^\tau$，关系式（27）可表示为线性方程组

$$\vec{b}_l^\tau = \sum_{j=0}^{\infty} F_{l,j}^\tau \, \vec{c}_j^\tau, \quad l \geq 0,$$

从而可以写成矩阵形式

$$D^\tau \mathbf{a} = \mathbf{F}_\tau \mathbf{c}^\tau, \quad (28)$$

其中 $\mathbf{c}^\tau = ((\vec{c}_0^\tau)^\top, (\vec{c}_1^\tau)^\top, (\vec{c}_2^\tau)^\top, \ldots)^\top$。

注意，算子 $\mathbf{F}_\tau$ 可逆。在条件 (16) 下，对于每个非零向量系数 $\{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\}$，元素 $B\vec{\xi} \in H$ 在闭凸集 $H^0 - (\vec{\xi}_\tau^{(d)})$ 上的投影问题都有唯一解。因此，方程 (28) 对每个向量 $\mathbf{b}^\tau = D^\tau \mathbf{a}$ 都有唯一解，这意味着逆算子 $\mathbf{F}_\tau^{-1}$ 存在。现在可以得出，系数 $\vec{c}_j^\tau$、 $j \geq 0$ 可计算如下：

$$\vec{c}_j^\tau = \left(\mathbf{F}_\tau^{-1} D^\tau \mathbf{a}\right)_j, \quad j \geq 0, \quad (29)$$

其中， $\left(\mathbf{F}_\tau^{-1} D^\tau \mathbf{a}\right)_j$, $j \geq 0$ 是向量 $\mathbf{F}_\tau^{-1} D^\tau \mathbf{a}$ 的第 $j$ 个无限维向量元素。

推导出的表达式和系数 $\vec{c}_j^\tau$、 $j \geq 0$ 证明了谱特征 $h_\tau(\lambda)$ 的公式，以及 (22) 方误差值 (23) 的公式，其中估计量为 $A\xi$。

□

考虑泛函 $A_{NT}\xi$ 的外推问题。令 $(\vec{a}_j)^\top = 0$ 为 $j > N$，即可应用定理 2.3 的结果。由推论 2.1 可知

$$\vec{b}_j^d = \sum_{m=j}^{N} \mathsf{diag}_\infty(d_\tau(m-j))\vec{a}(m) = (D_N^\tau \mathbf{a}_N)_j, \, j = 0, 1, \ldots, N,$$

其中， $D_N^\tau$ 是由一个无限矩阵确定的线性变换，该矩阵的元素为 $(D_N^\tau)(k,j) = \mathrm{diag}_\infty(d_\tau(j-k))$（若 $0 \le k \le j \le N$），以及 $(D_N^\tau)(k,j) = 0$（若 $j < k$ 或 $j,k > N$）；$\mathbf{a}_N = ((\vec{a}_0)^\top, (\vec{a}_1)^\top, \dots, (\vec{a}_N)^\top, \vec{0}\dots)^\top$。

**定理 2.4**。设随机过程 $\xi(t)$， $t \in \mathbb{R}$ 其具有周期平稳增量，并确定一个生成的平稳 $d$阶增量序列 $\vec{\xi}_m^{(d)}$，其谱密度矩阵为 $f(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,\ j=1}^{\infty}$ 满足极小性条件（*18*）。基于区间 $t < 0$ 上对过程 $\xi(t)$ 的观测值，泛函 $A_{NT}\xi$ 的最优线性估计 $A_{NT}\xi$ 由下式计算

$$\widehat{A}_{NT}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} (\vec{h}_{\tau,N}(\lambda))^\top d\vec{Z}_{\xi^{(d)}}(\lambda) - \int_{-\tau Td}^{0} v^{\tau,N}(t)\xi(t)dt, \tag{30}$$

谱特征 $\vec{h}_{\tau,\ N}(\lambda) = \{h_{\tau,N,k}(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ 以及均方误差 $\Delta(f;\ A_N\xi)$ 的值分别由下式计算

$$(\vec{h}_{\tau,N}(\lambda))^\top = (\vec{B}_{\tau,N}(e^{i\lambda}))^\top \frac{(1-e^{-i\lambda\tau})^d}{(i\lambda)^d} - \frac{(-i\lambda)^n}{(1-e^{i\lambda\tau})^d}(\vec{C}_{\tau,N}(e^{i\lambda}))^\top f^{-1}(\lambda). \tag{31}$$

*and*

$$\begin{aligned}
\Delta(f, \widehat{A}_{NT}\xi) &= \Delta(f, \widehat{B}_{NT}\xi) = \mathsf{E}|B_{NT}\xi - \widehat{B}_{NT}\xi|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-i\lambda)^d}{(1-e^{i\lambda\tau})^d}(\vec{C}_{\tau,N}(e^{i\lambda}))^\top f(\lambda)\overline{\vec{C}_{\tau,N}(e^{i\lambda})}\frac{(i\lambda)^d}{(1-e^{-i\lambda\tau})^d}d\lambda \\
&= \left\langle D_N^\tau \mathbf{a}_N, \mathbf{F}_{\tau,N}^{-1} D_N^\tau \mathbf{a}_N \right\rangle.
\end{aligned} \tag{32}$$

分别，其中

$$\vec{B}_{\tau,N}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} (D_N^\tau \mathbf{a}_N)_j e^{i\lambda j}, \quad \vec{C}_{\tau,N}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{F}_{\tau,N}^{-1} D_N^\tau \mathbf{a}_N)_j e^{i\lambda j}$$

$\mathbf{F}_{\tau,\ N}$ 是空间 $\ell_2$ 中的线性算子，由一个矩阵确定，该矩阵的无限矩阵元素为 $(\mathbf{F}_{\tau,\ N})_{l,\ m} = F_l^\tau{}_{,\ m}$、 $l \ge 0$、 $0 \le m \le N$，以及 $(\mathbf{F}_{\tau,\ N})_{l,\ m} = 0$、$l \ge 0$、 $m > N$。

# 3 极小极大（鲁棒）外推方法

随机过程 $\xi(t)$的未观测值所决定的、关于泛函 $A\xi$ 和 $A_{NT}\xi$ 的极优估计量的均方误差值和谱特征，其中该随机过程确定了周期平稳随机增量过程 $\xi^{(d)}(t, \tau T)$，或与其对应的无限维向量平稳增量序列 $\{\vec{\xi}_j^{(d)} = (\xi_{kj}^{(d)}, k = 1, 2, \dots)^\top,$ $j \in \mathbb{Z}\}$ $f\ \lambda$ ，
其谱密度矩阵为（ ），可分别由公式

（22）、（23）和（31）、（32）计算，前提是随机过程 $\vec{\xi}(t)$的谱密度 $f(\lambda)$ 已知且准确。如果谱密度未知，但给定了一个可容许谱密度集合 $\mathcal{D}$ ，则可以采用极小极大方法来估计关于具有平稳增量的随机序列的未观测值的泛函。该方法 consiste 在寻找一个估计量，使其对于给定类别 $\mathcal{D}$ 的可容许谱密度中的所有谱密度，同时使均方误差的最大值最小。上述方法通过以下两个定义 [21] 进行了形式化。

**定义 3.1.** 对于给定的谱密度类 $\mathcal{D}$ ，谱密度$f_0(\lambda) \in \mathcal{D}$ 称为 $\mathcal{D}$ 中最优线性估计$\vec{}$泛函 $A\xi$ 的最不利谱密度，若以下关系成立：

$$\Delta(f_0) = \Delta(h_\tau(f_0); f_0) = \max_{f \in \mathcal{D}} \Delta(h_\tau(f); f).$$

**定义 3.2.** 对于给定的谱密度类 $\mathcal{D}$ ，泛函 $A\xi$ 的最优线性估计的谱特征 $h^0(\lambda)$ 称为极小极大稳健的，若满足以下条件

$$h^0(\lambda) \in H_{\mathcal{D}} = \bigcap_{f \in \mathcal{D}} L_2^{0-}(f),$$

$$\min_{h \in H_{\mathcal{D}}} \max_{f \in \mathcal{D}} \Delta(h; f) = \sup_{f \in \mathcal{D}} \Delta(h^0; f).$$

考虑到引入的定义和推导出的关系，我们可以验证以下引理成立。

**引理 3.1.** 满足极小性条件 *(18)* 的谱密度 $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}$ 是类 $\mathcal{D}$ 中最优线性外推泛函 $A\xi$ 的最不利谱密度；该外推基于过程 $\xi(t)$ 在区间 $t < 0$ 上的观测值，当由函数的傅里叶系数定义的算子 $\mathbf{F}_\tau^0$

$$\lambda^{2d} |1 - e^{i\lambda\tau}|^{-2d} f_0^{-1}(\lambda), \tag{33}$$

确定约束优化问题的一个解

$$\max_{f \in \mathcal{D}} \left( \left\langle D^\tau \mathbf{a}, \mathbf{F}_\tau^{-1} D^\tau \mathbf{a} \right\rangle \right) = \left\langle D^\tau \mathbf{a}, (\mathbf{F}_\tau^0)^{-1} D^\tau \mathbf{a} \right\rangle. \tag{34}$$

极小极大谱特征 $h^0 = h_\tau(f^0)$ 可通过以下公式计算：如果 $h_\tau(f^0) \in H_{\mathcal{D}}$。 *(22)*

为了更详细地分析最不利的谱密度和极小极大稳健谱特征的性质，我们注意到，极小极大谱特征 $h^0$ 与最不利的谱密度 $f_0$ 在集合 $H_{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$ [21]上构成函数 $\Delta(h; f)$ 的鞍点。鞍点不等式

$$\Delta(h; f_0) \geq \Delta(h^0; f_0) \geq \Delta(h^0; f) \quad \forall f \in \mathcal{D}, \forall h \in H_{\mathcal{D}}$$

当 $h^0 = h_\tau(f_0)$、 $h_\tau(f_0) \in H_{\mathcal{D}}$和 $f_0$是约束优化问题的解时成立

$$\widetilde{\Delta}(f) = -\Delta(h_\tau(f_0); f) \to \inf, \quad f \in \mathcal{D}, \tag{35}$$

其中，泛函 $\Delta(h_\tau(f_0);\ f)$ 通过以下公式计算

$$\Delta(h_\tau(f_0); f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-i\lambda)^d}{(1-e^{i\lambda\tau})^d}(\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda}))^\top f_0^{-1}(\lambda) f(\lambda) f_0^{-1}(\lambda)\overline{\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda})}\frac{(i\lambda)^d}{(1-e^{-i\lambda\tau})^d}d\lambda$$

其中

$$\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty}((\mathbf{F}_\tau^0)^{-1}D^\tau \mathbf{a})_j e^{i\lambda j}$$

.

约束优化问题（35）等价于无约束优化问题

$$\Delta_{\mathcal{D}}(f) = \widetilde{\Delta}(f) + \delta(f|\mathcal{D}) \to \inf,$$

其中， $\delta(f|\mathcal{D})$ 是集合 $\mathcal{D}$ 的指示函数，即当 $f \in \mathcal{D}$ 时， $\delta(f|\mathcal{D}) = 0$，当 $f \notin \mathcal{D}$ 时， $\delta(f|\mathcal{D}) = +\infty$ 。无约束优化问题的解 $f_0$ 的特征条件为 $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f_0)$，该条件是点 $f_0$ 属于凸泛函 $\Delta_{\mathcal{D}}(f)$ [5, 21, 29] 的最小值集合的充要条件。利用该条件，可以在某些特殊的谱密度类 $D$ 中找到最不利谱密度。

泛函的优化问题我们能够应用拉格朗日不定乘子法来研究约束优化问题（35）。

## 3.1 $\mathcal{D}_0$类中的最不利谱密度

考虑泛函 $A\xi$ 的外推问题，该泛函依赖于具有周期平稳增量的过程 $\xi(t)$ 的未观测值，并基于该过程在点 $t < 0$ 处的观测值；其中，可容许谱密度集合 $\mathcal{D}_0^k$、$k = 1$、2、3、4 的定义如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0^1 &= \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}} f(\lambda)d\lambda = P \right. \right\},\\
\mathcal{D}_0^2 &= \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}} \mathrm{Tr}\,[f(\lambda)]d\lambda = p \right. \right\},\\
\mathcal{D}_0^3 &= \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{|\lambda|^{2d}} f_{kk}(\lambda)d\lambda = p_k, k = 1, 2, 3, \dots \right. \right\},\\
\mathcal{D}_0^4 &= \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{|\lambda|^{2d}} \langle B_1, f(\lambda)\rangle\, d\lambda = p \right. \right\},
\end{aligned}$$

其中， $p$、 $p_k$、 $k=1$、2、3、.....为给定数值， $P$、 $B_1$ 为给定的正定厄米特矩阵。

由条件 $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f_0)$，我们得到以下方程，这些方程确定了给定可容许谱密度集合中的最不利谱密度。

对于可容许谱密度集合 $\mathcal{D}_0^1$，我们有方程

$$\left(\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda})\right)\left(\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda})\right)^* = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}}f_0(\lambda)\right)\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}^*\left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}}f_0(\lambda)\right), \quad (36)$$

其中 $\vec{\alpha}$ 是拉格朗日乘子向量 s.

对于可容许谱密度集合 $\mathcal{D}_0^2$，我们有方程

$$\left(\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda})\right)\left(\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda})\right)^* = \alpha^2\left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}}f_0(\lambda)\right)^2, \quad (37)$$

其中 $\alpha^2$ 是拉格朗日乘子。

对于可容许谱密度集合 $\mathcal{D}_0^3$，我们有方程

$$\left(\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda})\right)\left(\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda})\right)^* = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}}f_0(\lambda)\right)\left\{\alpha_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{\infty}\left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}}f_0(\lambda)\right), \quad (38)$$

其中， $\alpha_k^2$ 为拉格朗日乘子， $\delta_{kl}$ 为克罗内克符号。

对于可容许谱密度集合 $\mathcal{D}_0^4$，有方程

$$\left(\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda})\right)\left(\vec{C}_\tau^0(e^{i\lambda})\right)^* = \alpha^2\left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}}f_0(\lambda)\right)B_1^\top\left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}}f_0(\lambda)\right), \quad (39)$$

其中， $\alpha^2$ 为拉格朗日乘子。

以下定理成立。

**定理3.1.** 设极小性条件*(18)*成立。对于在区间 $t<0$ 上对过程 $\xi(t)$ 的观测值进行观测，并对泛函 $A\xi$ 作最优线性外推，在类别 $\mathcal{D}_0^k$, $k=1,2,3,4$中的最不利谱密度 $f_0(\lambda)$ 由方程(36)、(37)、(38)、(39)、约束优化问题*(34)*以及相应类别 $\mathcal{D}_0^k$, $k=1,2,3,4$中的谱密度限制确定。泛函 $A\xi$ 的最优估计的极小极大稳健谱特征由公式*(22)*确定。

## 3.2 $\mathcal{D}_{1\delta}$类中的最不利谱密度

考虑泛函 $A\xi$ 的外推问题。该泛函依赖于具有周期平稳增量的过程 $\xi(t)$ 的未观测值，并基于其在点 $t<0$ 处的观测值；条件是以下各组

可容许谱密度 $D_{1\delta}^{k}$、 $k=1$、2、3、4 定义如下:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{1\delta}^{1} &= \left\{ f(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f_{ij}(\lambda) - f_{ij}^{1}(\lambda) \right| d\lambda \le \delta_i^j, i,j = \overline{1,\infty} \right\}. \\
\mathcal{D}_{1\delta}^{2} &= \left\{ f(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathrm{Tr}(f(\lambda) - f_1(\lambda)) \right| d\lambda \le \delta \right\}; \\
\mathcal{D}_{1\delta}^{3} &= \left\{ f(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f_{kk}(\lambda) - f_{kk}^{1}(\lambda) \right| d\lambda \le \delta_k, k = \overline{1,\infty} \right\}; \\
\mathcal{D}_{1\delta}^{4} &= \left\{ f(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \langle B_2, f(\lambda) - f_1(\lambda) \rangle \right| d\lambda \le \delta \right\};
\end{aligned}$$

这里， $f_1(\lambda) = \{f_{ij}^{1}(\lambda)\}_{i,\ j=1}^{\infty}$ 是固定谱密度， $B_2$ 是给定的正定 Hermitian 矩阵， $\delta, \delta_k, k=1,\infty$, $\delta_i^j, \overline{i,j}=1,\infty$是给定的数。

由条件 $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f_0)$，我们得到以下方程，用以确定这些给定可容许谱密度集合对应的最不利谱密度。

对于可容许谱密度集合 $\mathcal{D}_{1\delta}^{1}$，我们有以下方程

$$\left(\vec{C}_{\tau}^{0}(e^{i\lambda})\right)\left(\vec{C}_{\tau}^{0}(e^{i\lambda})\right)^{*} = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}} f_0(\lambda)\right) \left\{\beta_{ij}\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^{\infty} \left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}} f_0(\lambda)\right), \tag{40}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f_{ij}^{0}(\lambda) - f_{ij}^{1}(\lambda) \right| d\lambda = \delta_i^j, \tag{41}$$

其中， $\beta_{ij}$ 是拉格朗日乘子，函数 $|\gamma_{ij}(\lambda)| \le 1$ 以及

$$\gamma_{ij}(\lambda) = \frac{f_{ij}^{0}(\lambda) - f_{ij}^{1}(\lambda)}{\left| f_{ij}^{0}(\lambda) - f_{ij}^{1}(\lambda) \right|} : \ f_{ij}^{0}(\lambda) - f_{ij}^{1}(\lambda) \neq 0, \ i,j = \overline{1,\infty}.$$

对于可容许谱密度集合 $\mathcal{D}_{1\delta}^{2}$，我们有以下方程

$$\left(\vec{C}_{\tau}^{0}(e^{i\lambda})\right)\left(\vec{C}_{\tau}^{0}(e^{i\lambda})\right)^{*} = \beta^2\gamma_2(\lambda)\left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}} f_0(\lambda)\right)^{2}, \tag{42}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathrm{Tr}\left(f_0(\lambda) - f_1(\lambda)\right) \right| d\lambda = \delta, \tag{43}$$

其中， $\beta^2$ 是拉格朗日乘子，函数 $|\gamma_2(\lambda)| \le 1$ 以及

$$\gamma_2(\lambda) = \mathrm{sign}\left(\mathrm{Tr}\left(f_0(\lambda) - f_1(\lambda)\right)\right) : \ \mathrm{Tr}\left(f_0(\lambda) - f_1(\lambda)\right) \neq 0.$$

对于可容许谱密度集合 $\mathcal{D}_{1\delta}^{3}$，我们有以下方程

$$\left(\vec{C}_{\tau}^{0}(e^{i\lambda})\right)\left(\vec{C}_{\tau}^{0}(e^{i\lambda})\right)^{*} = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}} f_0(\lambda)\right) \left\{\beta_k^2\gamma_k^2(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{\infty} \left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}} f_0(\lambda)\right), \tag{44}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_{kk}^{0}(\lambda)-f_{kk}^{1}(\lambda)\right|d\lambda=\delta_{k},\tag{45}$$

其中 $\beta_k^2$ 是拉格朗日乘子， $\delta_{kl}$ 是克罗内克符号，函数 $\left|\gamma_k^2(\lambda)\right|\leq 1$ 和

$$\gamma_k^2(\lambda)=\operatorname{sign}\left(f_{kk}^{0}(\lambda)-f_{kk}^{1}(\lambda)\right):\ f_{kk}^{0}(\lambda)-f_{kk}^{1}(\lambda)\neq 0,\ k=\overline{1,\infty}.$$

对于可容许谱密度集合 $\mathcal{D}_{1\delta}^{4}$ ，有以下方程

$$\left(\vec{C}_{\tau}^{0}(e^{i\lambda})\right)\left(\vec{C}_{\tau}^{0}(e^{i\lambda})\right)^{*}=\beta^{2}\gamma_{2}'(\lambda)\left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}}f_{0}(\lambda)\right)B_{2}^{\top}\left(\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2d}}{\lambda^{2d}}f_{0}(\lambda)\right),\tag{46}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\langle B_{2},f_{0}(\lambda)-f_{1}(\lambda)\rangle\right|d\lambda=\delta,\tag{47}$$

其中 $\beta^2$ 为拉格朗日乘子，函数 $|\gamma_2'(\lambda)|\leq 1$ ，且

$$\gamma_2'(\lambda)=\operatorname{sign}\ \langle B_2,f_0(\lambda)-f_1(\lambda)\rangle:\ \langle B_2,f_0(\lambda)-f_1(\lambda)\rangle\neq 0.$$

所得结果总结如下定理。

*定理 3.2.* 设极小性条件 *(18)* 成立。对于泛函 $A\xi$ 的最优线性外推，基于过程 $\xi(t)$ 在点 $t<0$ 处的观测值，在类别 $\mathcal{D}_{1\delta}^{k}$、$k=1$、*2*、*3*、*4* 中的最不利谱密度 $f_0(\lambda)=\{f_{ij}^{0}(\lambda)\}_{i,j=1}^{\infty}$ 分别由方程 *(40)–(41)* 、 *(42)–(43)* 、 *(44)–(45)* 、 *(46)–(47)*、约束优化问题 *(34)*，以及相应类别 $\mathcal{D}_{1\delta}^{k}$、$k=1$、*2*、*3*、*4* 中谱密度的限制确定。泛函 $A\xi$ 的最优估计的极小极大稳健谱特征由公式 *(22)* 确定。

# 4 结论

本文研究了具有周期相关 $d$阶增量的连续时间随机过程。这些随机过程构成了一类非平稳随机过程，兼具过程协方差函数的周期结构以及积分过程的特性。

我们推导了由具有周期相关 $d$阶增量的连续时间随机过程的未观测值构造的线性泛函的估计问题的解。估计基于对过程在点 $t<0$ 处的观测。我们将所研究的过程表示为具有平稳增量的向量值序列，并据此得到了估计量。基于这类序列问题的解，我们解决了所定义类别的连续时间随机过程中的相应问题。我们研究了谱确定性情形，此时序列的谱密度已知。针对这种情形，我们提出了一种基于希尔伯特空间投影法的方法。我们推导了计算谱特征和泛函最优估计均方误差的公式

。对于谱不确定情形，谱密度并非完全已知，而是给定了若干可容许谱密度集合，此时采用极小极大鲁棒方法。我们提出将均方误差表示为关于谱密度的线性泛函（在 $L_1$ 中），由此可以求解相应的约束优化问题，并描述泛函的极小极大稳健估计量。对于一系列具体的可容许谱密度类别，我们推导了确定最不利谱密度以及泛函最优线性估计量的极小极大稳健谱特征的公式。

# 参考文献


[1] I.V. Basawa、R. Lund 和 Q. Shao，具有周期变化参数的一阶季节自回归过程，《Statistics & Probability Letters》，第 67 卷，第 4 期，第 299–306 页，2004 年。[2] I. I. Dubovets'ka 和 M. P. Moklyachuk，周期相关随机过程的极小极大估计问题，《Journal of Mathematics and System Science》，第 3 卷，第 1 期，第 26–30 页，2013 年。[3] I. I. Dubovets'ka 和 M. P. Moklyachuk，利用带噪观测对周期相关过程进行外推，《Theory of Probability and Mathematical Statistics》，第 88 卷，第 67–83 页，2014 年。[4] A. Dudek、H. Hurd 和 W. Wojtowicz，基于周期系数傅里叶表示的 *PARMA* 方法，《Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics》，第 8 卷，第 3 期，第 130–149 页，2016 年。[5] J. Franke 和 H. V. Poor，极小极大鲁棒滤波与有限长度鲁棒预测器，载于：Robust and Nonlinear Time Series Analysis，Lecture Notes in Statistics，Springer-Verlag，第 26 卷，第 87–126 页，1984 年。[6] I. I. Gikhman 和 A. V. Skorokhod，随机过程理论。*I*。，柏林：Springer，574 页，2004 年。[7] E. G. Gladyshev，具有连续时间参数的周期相关与几乎周期相关随机过程，Theory Probab. Appl. 第 8 卷，第 173–177 页，1963 年。[8] U. Grenander，博弈论中的一个预测问题，Arkiv för Matematik，第 3 卷，第 371–379 页，1957 年。[9] Y. Hosoya，二阶平稳过程的鲁棒线性外推，Annals of Probability，第 6 卷，第 4 期，第 574–584 页，1978 年。

[10] G. Kallianpur 和 V. Mandrekar：平稳 *H* 值过程的谱理论，《多元分析杂志》，第 1 卷，第 1–16 页，1971 年。[11] S. A. Kassam 和 H. V. Poor，信号处理的鲁棒技术：综述，《IEEE 学报》第 73 期，第 433–481 页，1985 年。[12] K. Karhunen，概率计算中的线性方法，《芬兰科学院学报》。A I 系列，第 37 号，1947 年。[13] A. N. Kolmogorov，*A. N. Kolmogorov* 选集。第二卷：概率论与数理统计。*A. N. Shiryayev* 编。数学及其应用。苏联系列。第 *26* 卷。多德雷赫特等地 Kluwer Academic Publishers，1992 年。[14] P. S. Kozak 和 M. P. Moklyachuk，由具有周期平稳增量的随机序列构造的泛函的估计量，《Theory Probability and Mathematical Statistics》，第 97 卷，第 85–98 页，2018 年。[15] M. Luz 和 M. Moklyachuk，具有平稳增量的随机序列及协整序列的极小极大稳健预测问题，《统计、优化与信息计算》，第 3 卷，第 2 期，第 160–188 页，2015 年。[16] M. Luz 和 M. Moklyachuk，具有平稳增量的随机过程与协整序列的估计，伦敦：ISTE；新泽西州霍博肯：John Wiley & Sons，282 页，2019 年。[17] M. Luz 和 M. Moklyachuk，具有周期平稳长记忆多重季节性增量的序列的极小极大稳健预测，《统计、优化与信息计算》，第 8 卷，第 3 期，第 684–721 页，2020 年。[18] M. Luz 和 M. Moklyachuk，对具有周期平稳增量的序列的带噪观测进行极小极大预测，以及协整序列，载于：M. Moklyachuk（编）《随机过程：基础与新兴应用》。Nova Science Publishers，纽约，第 189–247 页，2023 年。[19] M. P. Moklyachuk，平稳随机过程的线性泛函估计与双人零和博弈，斯坦福大学技术报告，第 169 号，第 1–82 页，1981 年。[20] M. P. Moklyachuk，随机自回归序列与极小极大插值，《Theory Probability and Mathematical Statistics》，第 48 卷，第 95–103 页，1994 年。[21] M. P. Moklyachuk，随机过程泛函的鲁棒估计，基辅：Vydavnychyj Tsentr “Kyïvs’kyĭ Universytet”，320 页，2008 年。（乌克兰语）

[22] M. P. Moklyachuk, 《周期平稳随机序列的极小极大稳健估计问题》, 《统计学、优化与信息计算》, 第3卷, 第4期, 第348–419页, 2015年。[23] M. P. Moklyachuk 和 I. I. Golichenko, 《周期相关过程估计》, 萨尔布吕肯: LAP 兰伯特学术出版社, 308页, 2016年。[24] M.P. Moklyachuk 和 A.Yu. Masyutka, 《极小极大稳健估计技术: 平稳随机过程》, LAP 兰伯特学术出版社, 296页, 2012年。[25] M. Moklyachuk、M. Sidei 和 O. Masyutka, 《缺失观测下随机过程的估计》, 数学研究进展。纽约州纽约市: Nova Science Publishers, 336页, 2019年。[26] A. Napolitano, 《循环平稳性: 新趋势与应用》, 《信号处理》, 第120卷, 第385–408页, 2016年。[27] M. S. Pinsker 和 A. M. Yaglom, 《关于具有平稳增量的随机过程的线性外推》 *nth stationary incremens*, 《苏联科学院学报》, 新辑, 第94卷, 第385–388页, 1954年。[28] V. A. Reisen、E. Z. Monte、G. C. Franco、A. M. Sgrancio、F. A. F. Molin- ares、P. Bondond、F. A. Ziegelmann 和 B. Abraham, 《分数阶季节过程的鲁棒估计: 日平均二氧化硫浓度的建模与预测》, 《数学与计算机在模拟中的应用》, 第146卷, 第27–43页, 2018年。[29] R. T. Rockafellar, 《凸分析》, 普林斯顿数学地标系列。新泽西州普林斯顿: 普林斯顿大学出版社, 451页, 1997年。[30] C. C. Solci、V. A. Reisen、A. J. Q. Sarnaglia 和 P. Bondon, 《PAR模型鲁棒估计方法的实证研究及其在空气质量领域的应用》, 《统计学通讯: 理论与方法》, 第48卷, 第1期, 第152–168页, 2020年。[31] S. K. Vastola 和 H. V. Poor, 《谱不确定性对维纳滤波影响的分析》, 《自动化》, 第28卷, 第289–293页, 1983年。[32] N. Wiener, 《平稳时间序列的外推、插值与平滑: 工程应用》, 麻省理工学院技术出版社。纽约: John Wiley & Sons, Inc.; 伦敦: 查普曼与霍尔出版社, 1949年。[33] A. M. Yaglom, 《具有平稳增量的平稳及相关随机过程的相关理论》 *nth increments*, 《数学文集》, 第37卷, 第1期, 第141–196页, 1955年。[34] A. M. Yaglom, 《平稳及相关随机函数的相关理论。第1卷: 基本结果; 第2卷: 补充说明与参考文献》, 施普林格统计学系列, 施普林格出版社, 纽约等地, 1987年。