关于替换复形上路径的确定性

И. А. Иванов-Погодаев

摘要。本文研究了由彼此边对边粘合的四边形组成的替换复形族的确定性组合性质。这些性质有助于构造具有有限个定义关系的代数结构。

特别是，该方法曾用于构造满足恒等式 $x^9 = 0$ 的有限定义无限幂零半群。这一构造回应了 Л. Н. Шеврина 和 М. В. Сапира 提出的问题。

本文研究了将整个复形族染成有限种颜色的可能性，使其满足弱确定性性质：如果已知某个四边形三个顶点的颜色，那么除四边形处于某些特殊位置的情况外，第四条边的颜色即可唯一确定。

即使较弱的确定性也足以构造有限定义的幂零半群；此外，使用这种构造可以缩短证明篇幅。

确定性的性质有助于在构造出的复形上经过的路径半群中正确引入定义关系。定义关系对应于等价的短路径对。

确定性的性质此前已在铺砌理论框架下得到研究。具体而言，Kari 和 Papazoglou 构造了一组方形瓦片，该瓦片组只允许平面的非周期铺砌，并具有确定性：根据两个相邻边的颜色，可以唯一确定其余两个边的颜色。

УДК 512.53，MSC：20M05

关键词：确定性、非周期铺砌、有限呈示半群、Burnside 型问题；确定性、非周期铺砌、有限呈示半群、Burnside 型问题。

arXiv:2304.12246v1 [math.RA] 24 Apr 2023

1. 引言

1961年，Hao Wang [1] 研究了边带有不同颜色的方形瓦片。不同的瓦片可以通过同色的边彼此拼接。人们提出了这样一个问题：是否存在这类瓦片的有限集合，使得利用它们只能构造出平面的非周期性铺砌。第一个这样的集合由罗伯特·伯格构造 [2], 其基本思想是，铺砌模拟了图灵机的运行过程。当时使用了数千种瓦片。后来，人们设计出了只包含少量瓦片的集合。例如，拉斐尔·罗宾逊的构造 [5]就很有趣。因此，通过规定有限数量的瓦片彼此之间禁止的邻接方式（局部条件），就可以保证全局性质（非周期性）。不久之后，R. 彭罗斯构造了他著名的镶嵌，随后人们又在自然界中发现了准晶体。关于非周期性铺砌已有大量文献（例如参见专著 [7]。）

莫斯科物理技术学院。

构造非周期性铺砌时会使用自相似性。对于某个有限集合中的每个瓦片（多边形），都规定一种划分方式，将其划分为更小的瓦片，这些瓦片是同一集合中瓦片的更小相似副本。反复进行这种划分，会（对于非平凡替换）产生非周期性铺砌。

铺砌理论中的一些基本定理（继发现非周期性之后）是著名的莫斯和古德曼-施特劳斯定理 [3, 4]。它们将局部规则的语言与替换系统的语言联系起来。设有一条替换规则，根据该规则，可以用若干类型的多边形砖块拼成更高一级的砖块。于是，可以用有限种颜色装饰多边形的边，使得所有遵守局部规则的铺砌（砖块只能沿颜色相同的边彼此拼接）都由该替换系统生成。因此，任何替换系统都可以通过局部规则来定义。

确定性这一性质具有根本意义，接下来需要做的便是为满足确定性条件的剖分，获得莫斯和古德曼-施特劳斯定理的类似结果。

对于四边形瓦片的情形，确定性意味着一块瓦片两条边的颜色可以唯一确定另外两条边的颜色（相邻两边的颜色给定时，至多存在一块满足条件的瓦片）。这一概念由 Curry 在研究与镶嵌相关的群时提出（此类构造最早由 J. Conway 提出 [6]）。考虑王氏方砖：其边用有限颜色集着色，只有颜色相同的边才能相邻放置。存在非周期瓦片集，只有以非周期方式才能用它们铺满平面。正如 Kari 和 Papasoglu 所证明的，也存在非周期且具有确定性的瓦片集，其中相邻两边的颜色可以唯一确定另外两边的颜色。如果构造这类瓦片集，使每块瓦片都与其对面的一块同时包含在集合中，那么这将解决 Gromov 关于是否存在不含 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的非双曲、非正曲率群的问题。

“确定性”这一概念不仅在非周期镶嵌理论中具有意义。通过局部规则给出替换镶嵌，以及确定性（包括弱确定性），有助于构造具有有限个定义关系的代数对象。半群或环中的字被视为特定构造的复形序列上的路径，这些复形由4-循环（瓦片）粘合而成。设在复形序列的顶点和边上引入一种着色，颜色的数量在全局上有界。边和顶点的颜色分别对应有限字母表中的字母，沿路径经过的顶点和边对应一个字。定义关系对应于长度为2的等价路径，这些路径由正方形的两条相邻边组成。对于环和半群，还要针对某些类型的禁行路径引入单项式关系。在此过程中，复形的几何性质对应于所得对象中的某些有用性质。这一方法可用于构造有限定义的伯恩赛德型对象，并已应用于构造有限定义的幂零半群。

此外，正如 С. П. Новиков 在其研讨会报告中所指出的，这一概念在差分格式理论中十分重要。在具备确定性时，会出现一些算子，使得能够根据网格单元中另外三个顶点处的函数值恢复第四个顶点处的函数值。由此，沿路径的函数值决定了

某个与铺贴瓷砖相关区域中的函数值。在构造幂零半群时，沿路径的顶点着色同样精确地决定了镶嵌区域。同时，可以用邻接语言组织一个能够保证获得所需结果的计算过程。

因此，获得带有确定性条件的莫泽斯-古德曼-施特劳斯定理的类似结论具有根本性意义。在本文中，我们将得到关于弱确定性的类似结论，该结论足以用于构造幂零半群。

考虑平面上由彼此边对边相邻的基本四边形划分而成的四边形。我们将其称为复形。设定了某个替代规则，它表示为一个划分图：将带有编号边的四边形划分为若干个较小的四边形，这些四边形的边也带有编号。于是可以考察一个复形序列，其中，1 级复形是普通四边形，而级别为 k 的复形则通过对级别为 $k-1$ 的复形中的所有基本四边形应用划分，并考虑边的方向而得到。从级别为k 的复形过渡到级别为 $k+1$ 的复形，包括添加若干顶点并绘制边。在级别为 k 的复形的边上添加的顶点称为侧面顶点，而不属于该复形的顶点称为内部顶点（它们被添加到每个基本四边形的内部）。

考虑将这些复形的顶点和边着色为有限颜色集中的颜色。定义确定性的概念，与方形瓦片中的定义相同：如果根据某个最小四边形（瓦片）中两条边上的路径的顶点和边的已知颜色，可以唯一确定同一四边形另外两条边上的路径颜色，则称复形序列的着色是确定的。

为了构造有限定义的代数对象，有必要推广确定性的概念。我们不仅可以研究将平面划分为方形瓦片的情形，还可以研究由拓扑正方形粘合而成的更一般的几何复形，其中相邻正方形边对边地粘合，并且一条边可以作为多个正方形的边。对于这类复形，同样可以考虑顶点着色的确定性：一个正方形中三个顶点的颜色可以唯一确定第四个顶点的颜色。确定性概念的第二种推广是同时对顶点和边进行着色。这样便可以讨论复形上的路径编码，即路径经过的顶点和边的序列。路径的确定性体现在：根据正方形相邻两条边上的路径编码，可以唯一恢复另外两条边上的路径编码。

确定性的另一种变体是弱确定性，即这种唯一恢复性并不适用于所有方阵，而是适用于几乎所有方阵，只排除某些特定排列的方阵。

如果对所有路径都适用，则称这种着色为弱确定的；但瓦片的第四个顶点位于某个子复形的边界上，而另外三个顶点不在边界上的情况除外。

本文的主要结果是：对于给定的替换系统，总能使用有限种颜色进行着色，并使其具有弱确定性。这一结果一方面是构造有限定义幂零半群所必需的，另一方面也是实现“强”确定性的第一步。

2. 定义

2.1. 复形的结构。考虑四边形 $ABCD$，其上、右、下、左边均已固定。设给定一个划分 $ABCD$，将其划分为有限个四边形，并满足以下条件：

1. 任意两个四边形要么没有公共点，要么有一个公共顶点，要么有一条公共边；

2. 对划分中的每个四边形，按顺时针方向依次指定其上、右、下、左边。

3. $ABCD$ 的所有边上四边形划分的顶点数相等，并且这些顶点将各边划分成相同长度的线段。

4. 划分中的每个四边形与边界相邻于 0、1、2 或 3 个顶点；如果与两个顶点相邻，则这两个顶点必须相邻。

设划分四边形的顶点 $A_1, \dots A_k$ 位于 ABCD 内部，而顶点 $U_1, \dots U_s$, $R_1, \dots R_s$, $D_1, \dots D_s$, $L_1, \dots L_s$ 依次位于上、右、下、左边 $ABCD$ 上。

可以将一个图与该划分联系起来，该图由顶点 $k + 4s$ 组成： $A_1, \dots A_k$, $U_1, \dots U_s$,R_1, $\dots R_s$, $D_1, \dots D_s$, $L_1, \dots L_s$，所画的边对应于划分中四边形的边界。

注意到，铺砖替换将带有编号边的四边形划分为更小的四边形，这些四边形同样带有编号边。

定义 2.1。我们将划分得到的四边形称为瓷砖或胞腔，并将上述四边形划分所对应的图称为铺砖替换。四边形 $ABCD$ 将被称为零 级复形。我们约定，划分中的边不会连接四边形周界上的两个顶点。

定义 2.2 （复形层级的归纳定义 n）。设有一个作为 n 级复形的四边形。将它划分成的四个四边形中的每一个，均对其应用铺砖替换，将其进一步划分为更小的四边形，其中使用带有编号边的相应四边形。所得的细分四边形将被视为 $n + 1$ 级复形。

因此，铺砖替换 T 确定了复形序列K_T。

定义 2.3。如果复形序列中所有复形的所有顶点的度都被某个自然数 N 所限制，则称铺砖替换及其生成的复形序列是局部有限的。

与复形相关的对象。
我们将不同子复形的边称为宏边。复形作为图的边（连接相邻顶点）仍称为边。

考虑 层级复形 n。其中包含以下类型的顶点 в:

1. 角点 2. 边界
点 3. 侧点。
4. 内部点。

根据构造，层级复形 n包含层级为 $n+1$ 及以上的复形中的所有宏边和顶点。每条宏边和每个顶点都属于从某个层级开始的所有复形。宏边和顶点的层级是指它们所属复形的最小层级。特别地，边界上的所有宏边均为零层级。每条边都属于某条宏边，我们规定其层级与该宏边的层级相同。

此外，每个层级为 n 的复形都包含较低层级的复形作为子图。特别地，层级为 n 的复形是 k 个层级为 $n-1$的复形的并，其中 k 是瓦片替换中剖分四边形的数量。

由铺砖替换的局部有限性可知，存在某个常数 $C(N)$，使得当给定顶点的层级为 k 时，从该顶点出发的边的层级不低于 $k-C(N)$。

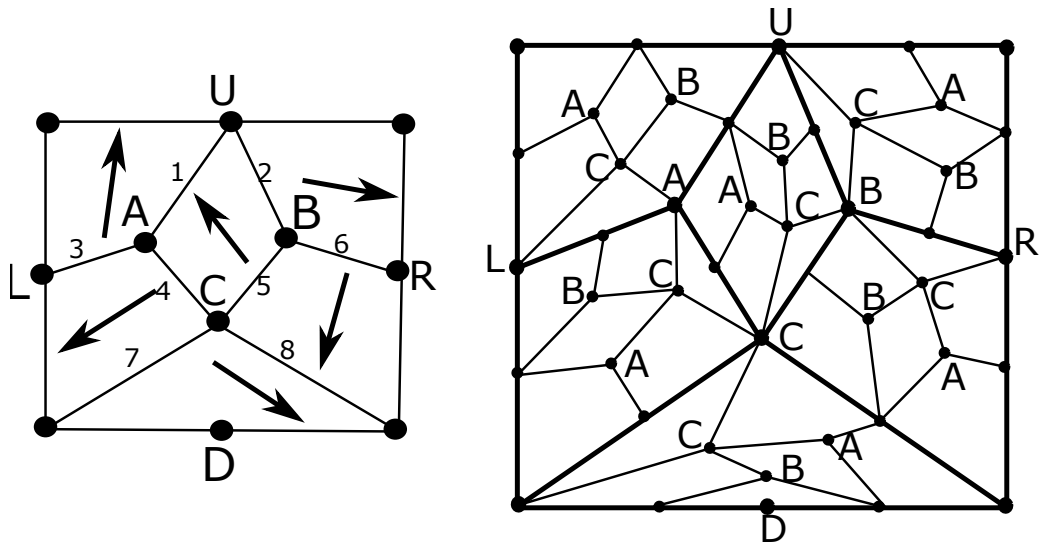

图 1. 铺砖替换示例以及带有顶点类型的第三层级复形

2.2. **复形序列中顶点和边的着色**。

定义 2.4（宏边的类型）。 考虑层级为 $n+1$ 的复形 K_{n+1}。它由 k 个层级为 n 的子复形的并组成，其中 k 是铺砖替换中的瓦片数量。那些不位于 K_{n+1} 的边界上、但位于某些 k 个子复形的边界上的宏边，称为属于 K_{n+1} 的内部宏边。

子复形边界上的宏边，即整个子复形位于包含该宏边的直线所确定的两个半平面之一中，我们称其为相对于该子复形的边界宏边。

将铺砖替换中不位于边界上的所有边从 1 到 r 编号。宏边的类型 就是以这种方式得到的编号。复形中的每条内部宏边都对应于铺砖替换中的某条边

。对于位于复形边界上的宏边，边的类型 指 4 个可能方向（上、下、右和左）中的一个。

对于非边界宏边，我们将边的类型 称为与该宏边相对应的平铺替换内部边之一的编号。实际上，若删去所有 $> n$级的宏边，并观察该宏边将成为平铺替换中的哪一条内部边，就可以确定 n 级宏边的类型。

内部边位于两个子复形的边界上。我们认为，平铺替换中的每条内部边都将平面分成两个半平面，并将它们排序，其中一个为第一侧，另一个为第二侧。我们将它们视为该宏边的两侧。每一侧对应于某个子复形的上、右、下或左边，而宏边是这两个子复形的公共边界。

定义 2.5（顶点类型）。 按照瓦片替换对复形 K_n 的每个胞腔进行细分时，会产生新的内部顶点以及新的侧边顶点和边界顶点（位于此前已经绘制的宏边内部）。注意，在进一步细分（ переход к 更高层级的复形）时，内部顶点仍保持为内部顶点，而侧边顶点和边界顶点则分别保持为侧边顶点和边界顶点。为任意复形 K_n 上的每个顶点指定一个顶点类型。

将瓦片替换中的内部顶点编号为 1 至 v，同时将每条边上的 s 个顶点编号。内部顶点对应于从 A_1 到 A_v 的顶点类型。侧边顶点位于某条宏边 l 上，该宏边分隔两个同一层级的子复形 U 和 V。为属于复形 K_n 的侧边顶点 B 指定其类型。 B 位于某条宏边上，该宏边的两侧已确定顺序。侧边顶点的类型定义为有序五元组（X，i，Y，$s-i$，r），其中 X、Y 是四条边（左、上、右、下）中的任意两条不同边，并且 X 对应于子复形 U 与宏边 l 相邻的一侧，而 Y 对应于 V 所邻接的一侧； i 是该侧边 X 上的顶点编号（按照 U 中的顺时针方向）， $s-i$ 是该侧边 Y 上的顶点编号（按照 V 中的顺时针方向）； r 是复形 l 中宏边的编号，该宏边可以是内部宏边，也可以是四条边界宏边之一。

定义 2.6（层级和括号定向）。 对于复形的每个顶点，我们同样定义其层级。考虑某个复形 K。它由复形 K' 经过细分操作得到。将此次细分中新增的所有顶点视为第一层顶点。对于复形 K' 而言，作为第一层顶点的顶点称为第二层顶点。其余顶点称为第三层顶点。换言之，刚刚新增的顶点属于第一层，在上一步新增的顶点属于第二层，其余顶点属于第三层。

对于侧顶点，我们引入括号定向。设某条宏边及其遍历方向已固定，也就是说，可以确定哪些顶点在左侧、哪些在右侧。设 X 是该宏边上的第一层侧顶点，即在最后一次细分中新增的顶点。在该宏边上与它相邻的顶点中，恰有一个顶点属于第二层。设该顶点为 Y。如果 Y 位于 X 的右侧，则称 X 包含左括号（开括号）；如果 Y 位于 X 的左侧，则称 X 包含右括号（闭括号）。

对于宏边内部的顶点，我们称它们同时包含左括号和右括号。因此，总共有三种可能的括号定向。

定义 2.7（顶点的前驱）。 设 K_n 层级复形 n。我们将其边界上的顶点（位于角点和边上）称为它的前驱。内部顶点的前驱是指其所属子复形的前驱。侧顶点的前驱是指包含该顶点所在宏边的子复形的前驱。注意，如果从对其胞腔进行 K_n 细分转到更高层级的复形，则其顶点的前驱不会改变。我们约定，所有 $4s+4$ 前驱均从左上角开始按顺时针方向编号。

定义 2.8（顶点颜色）。 顶点颜色 X 是指由顶点自身的类型 X、其层级和括号定向组成的有序集。

顶点的完整颜色 X 是指顶点颜色 X 与其前驱的 $4s+4$颜色的组合。

定义 2.9（主边）。 设顶点 A 位于某条宏边上。在这种情况下，从 A 引出的两条边也位于该宏边上。相对于宏边的半平面是有序的。我们将其中右侧为两个半平面中的第一个的那条边称为第一条主边 。另一条边称为第二条主边。

设顶点 A 是内部顶点，并属于层级为 n 的子复形 K。那么，主要边是指出自 A、同样具有层级 n 且属于同一子复形 K 的出射边。因此，从 A 出射的主要边数量，等于铺砌替换中相应 A 顶点的度。第一条主要边是指在铺砌替换中对应于编号最小的边的那条边。注意，从 A 还可能有其他边出射，而这些边将属于 K 的其他子复形。

定义 2.10（入射边和出射边）。考虑复形上某个固定类型的顶点 A。与 A 相邻的边及其另一端点称为顶点 A 的邻域。注意，由于局部有限性，存在某个 n，使得对于该类型且层级高于 n 的所有顶点，其邻域都相同。特别地，若取一个包含顶点 A 且层级足够高的复形，那么对其应用铺砌替换（并转到下一层复形）不会增加与 A 相邻的其他边。同样，由于局部有限性，与 A 相邻的边数是有界的，并且它们的层级与 A 的层级之差不超过某个有界数。设 A 的层级为 n，并且对于同类型且层级更高的顶点，其邻域已不再发生变化。我们从第一条主要边开始，按顺时针方向为所有与 A 相邻的边编号。

推论。 由定义可得以下性质：

1. 如果出边 AB 是非主边，那么作为入边的 A 它是主边。2. 如果出边 AB 是非主边，那么顶点 A 是 B的某个前驱，并且 A 的层级高于 B。3. 如果边 AB 是进入 A 和 B的主边，那么它们位于同一条宏边上，并且有相同的前驱。其中一个顶点可以是内部顶点。

定义 2.11 (路径编码)。 设有路径 ABC。我们将其编码 称为由完整顶点颜色 A, B, C以及进入边和出边AB （相对于 A 和 B）和 BC （相对于 B 和 C）组成的有序集。

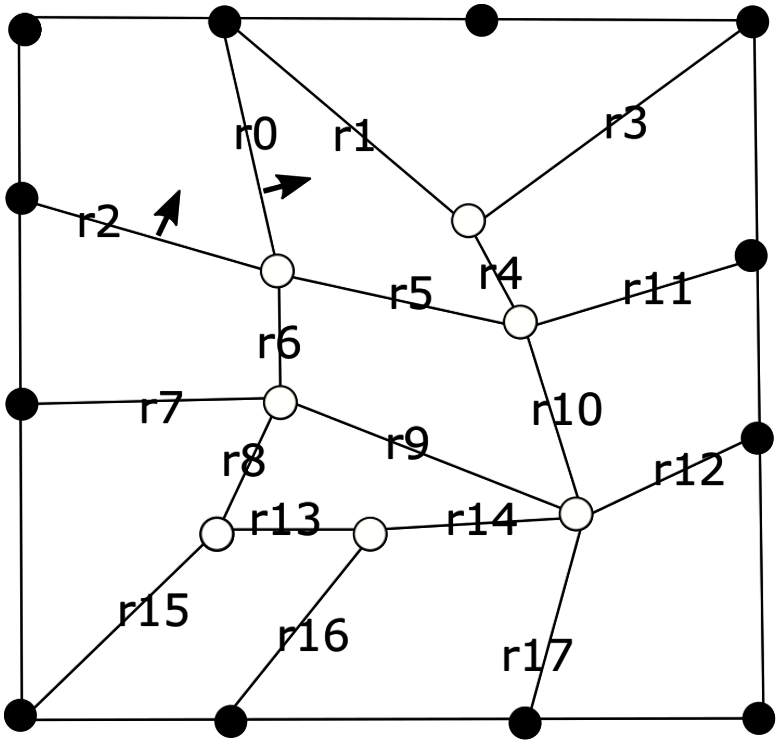

图2。内部点（白色）以及内部边的边的类型 r_0-r_{17}。箭头表示第一条边（例如，对于两条边）

定义2.12。 考虑序列中的某个复形的某个顶点 X，其中 X。设 X 属于一个基本四边形（胞腔）T。如果相对于 T，其层级严格高于其余顶点 T的层级，则称 X 为特殊的 。其余顶点称为非特殊顶点。

如果根据路径 ABC 沿某个胞腔的两条边 T 是否规则，也就是说，根据其编码，即根据顶点的颜色 A、 B、 C 以及沿路径 ABC 的入口边和出口边，可以唯一确定胞腔T 的第四个顶点 D 是否特殊，则称该路径为 ABC 。

如果对于任意规则路径 ABC，根据胞腔 T 的两条边和同一胞腔中的非特殊第四个顶点 D ，颜色 D 以及沿路径 ADC 的进入边和出边，都能由其余三个顶点 A、 B、 C 的颜色以及沿路径 ABC 的进入边和出边唯一确定，则称这种着色为弱确定性的。

注释。 特殊顶点对应于四边形的一个顶点落在复形边界上的情形。弱确定性与强确定性的区别在于，弱确定性不要求唯一地还原特殊顶点的颜色。由于一些特殊原因，对于应用（尤其是构造有限呈示的幂零半群）而言，弱确定性就足够了；这些原因将在附录中说明。

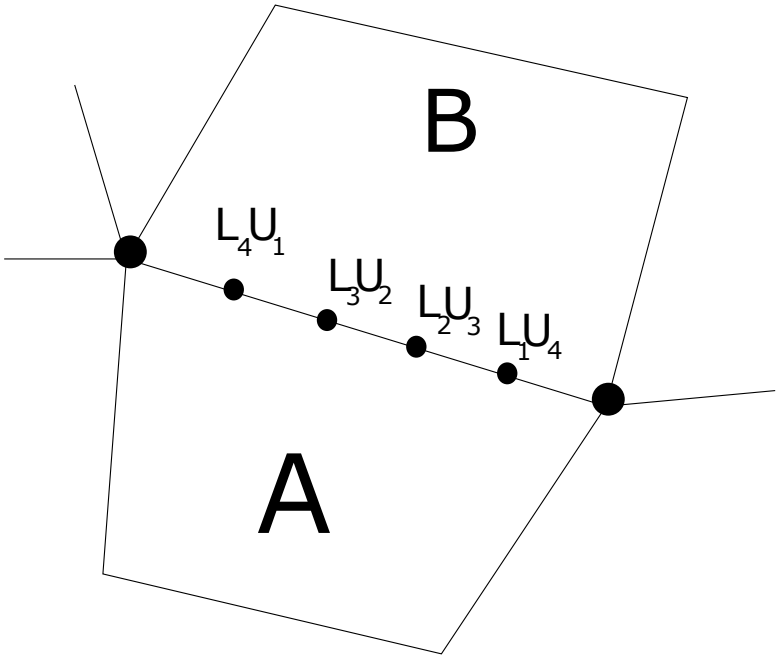

图3. 两个子复形沿一条内部边相邻；对于其中一个子复形，这条边是上边，对于另一个则是左边。相应地标记内部边上顶点的类型（对于这条边，复形 B 的一侧为第一侧，另一侧为第二侧）

3. 弱确定性

定理 3.1 (关于弱确定性)。 设给定铺砖替换 σ。那么，上文给出的对复形序列 K_T 的着色是弱确定的。

证明思路。 设已知某条路径 ABC 的编码，即顶点类型 A B C、边类型 AB, BC, 以及前驱类型 A, B 和 。需要确定这条路径是否是某个单元的两条相邻边；如果是，则需要确定顶点 D 的类型和前驱，以及边的类型 AD 和 DC。

定义 3.1 （关于瓦片类型编号）。 为瓦片替换中的所有可能的四边形单元编号。我们将它们称为单元类型。因此，任意层级复形上的每块瓷砖都属于这些类型之一。

辅助引理。

引理 3.1 （胞腔类型决定内部顶点的类型）。 设已知胞腔类型 T。则根据该类型可以唯一确定胞腔各角中作为内部顶点的那些顶点的类型。

证明。事实上，胞腔类型对应于铺砌替代中的某个胞腔；如果其各角不落在铺砌替代的边界上，则它们就是内部顶点，而其类型由铺砌替代确定。

引理 3.2 （胞腔类型恢复）。 考虑路径 ABC。已知顶点 B 的类型，以及从 A 和 C 一侧进入该顶点的边。于是，可以唯一确定路径 ABC 所在胞腔的类型。

已知沿路径 ABC 的顶点 A、 B、 C 的类型以及入边和出边。于是，可以唯一确定路径 ABC 是否沿某个胞腔的两条边经过，以及该胞腔的类型。

注意，对于路径 ABC леж于同一个胞腔内，必要且充分条件是进入 B 的边彼此相邻。如果 B 的类型为内部型，那么该胞腔可唯一确定为与该内部顶点相邻、且位于相应进入边之间的胞腔。同理，如果 B 的类型为侧边型或边界型，那么在拼片替换中，两条进入边便能完全确定与它们以及 B 相邻的胞腔。

引理 3.3 (关于确定前驱的引理)。 *1.* 设 K 是复形 T 的子复形，且 K 与 T 的层级相差一个取决于拼片替换的常数。那么，根据前驱的颜色组合 T，即可确定前驱的颜色组合 K。

2. 设 A 和 B 是复形上的相邻顶点，且 A 是 B 的前驱。已知 A 的完整颜色，以及 AB 的出边和 B 的顶点类型，则可唯一确定 B 的完整颜色。

1. 如果 K 和 T 的层级相差 1，则该断言直接由铺砖替换的结构得到。其余情况由关于常数的归纳法得到，因为 K是某个复形的子复形，而该复形的层级与 T相差 1。

2. 注意，根据出口边 AB 可以确定边 AB 的层级比顶点 A 的层级小多少（这是由复形序列具有局部有限性这一性质得到的）。但我们并不知道 A 本身的层级，它可以任意大。现在考虑包含边 AB 作为内部边的最小子复形 K。位于 K的边界上。

设 A 属于复形 T。注意，由于 A 位于 K的边界上，因此T 不等于 K，并且 K 是其 T 的子复形。于是， K 的层级比 T 的层级小一个常数，该常数取决于铺砖替换而与 T的层级无关，并且该常数由边 AB确定。于是，根据引理的第一部分，复形 K 的前驱可由 T的前驱唯一恢复。因此， B 的前驱是唯一确定的。

因此，根据已知路径 ABC 我们可以确定包含顶点 A、 B、 C的胞腔类型。

知道胞腔类型后，我们可以确定该胞腔中有多少个顶点位于包含它的最小子复形的周界上（从 0 到 3 个）。由此得到的情况通过以下引理进行分析。在每种情况下，我们都将沿路径 ADC恢复剩余顶点 D 以及入边和出边的颜色。颜色包括顶点类型和该顶点前驱类型的组合。

引理 3.4 （边界上没有顶点）。 设 T 为一个胞腔，其所有角均为内部顶点。设 ABC 为一条经过 T 两条边的正则路径，并且我们已知其编码（即顶点 A、 B、 C 的颜色，以及沿路径 ABC 的入边和出边）。

于是，路径编码 ADC 唯一确定，其中 D 是 T 的第四个顶点（也就是说， D 的完整颜色，以及沿路径 ADC 的入边和出边）。

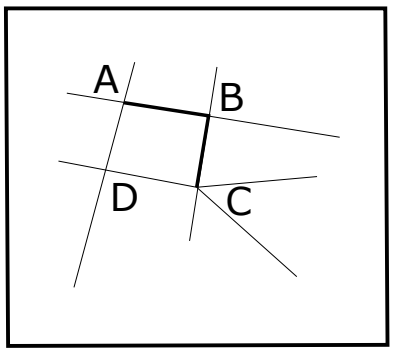

图4。边界上没有顶点的情形

证明。在这种情况下， T 与铺砌替换中的某个内部单元格重合，该单元格与边界没有公共顶点，因此最后一个顶点必定是内部顶点，其类型完全由其他顶点的类型确定。根据 T 在铺砌替换中的位置，沿路径 ADC 的入边和出边也完全确定。 D 的前驱颜色与其他顶点 A、B、 C 的颜色相同。

引理 3.5（边界上一个顶点）。 设 T 为一块瓷砖，其恰有一个角延伸至瓷砖替换的边界（相应地，也延伸至包含它的最小子复形的边界）。

设 ABC –为一条沿着 T 的两条边经过的正则路径，并且已知路径编码 ABC （即沿路径的顶点完整颜色 A、 B、 C，以及入边和出边 ABC）。

设 D–为 T 中的第四个顶点。那么，要么 D在 T 中是特殊的，要么由路径编码 ADC唯一确定，其中 D 是 T中的第四个顶点。也就是说，沿路径 ADC 的入边和出边，以及完整颜色 D，都被确定了。

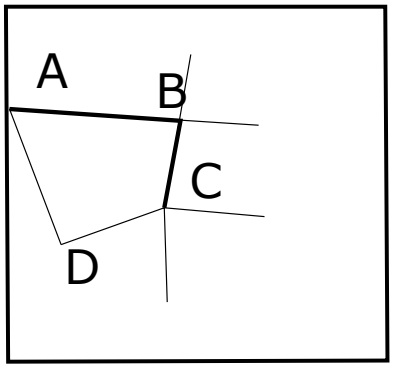

图5. 边界上有一个顶点的情形

证明总体上与边界上没有顶点的情形类似。如果我们已知恰好是那三个不在边界上的顶点，那么此时第四个顶点是特殊的。现在假设我们已知唯一的边界顶点 ，以及另外两个顶点 B 和 。

注意到，第四个顶点 D 的类型可以唯一确定，因为它是具有已知类型的胞腔 T的内部顶点。第 D 层是第一层。此外，边

沿路径 ADC 的进入边和出边可根据铺砖替换唯一确定。前驱的组合 D 与 B 和 C相同。

引理 3.6 (边界上的两个顶点**).** 设 T 是一块瓷砖，它恰有两个角位于瓷砖替换的边界上（因此也位于包含它的最小子复形的边界上）。

设 ABC – 是一条沿着 T的两条边经过的正则路径，它不是特殊路径，且已知其路径编码 ABC （即顶点 A、 B、 C的颜色，以及沿路径 ABC的入边和出边）。

那么，要么第四个顶点 D 在瓷砖 T 中是特殊的，要么路径编码 ADC （颜色 D，沿路径 ADC的入边和出边）可以唯一确定。

有两种情况：第一种，顶点 A、 B、 C 中有两个是内部顶点；第二种，其中有一个是内部顶点。

1. 根据瓷砖替换中砖片 T 位置的限制，砖片中的两个内部顶点必须相邻。不妨设 B、C 是内部顶点。那么 D 位于边界上，并且是 B 和 C的前驱（根据路径 ABC 在 T内部的方向，它在 A之后或之前沿顺时针方向）。也就是说， D 的颜色可以确定。从顶点 A出发的出边 AD ，是紧接在 AB之后或之前的出边。

设从 A 出发的 AD 边是主边。将同一条边视为进入 D的入边。如果这条边 AD 是进入 D 的非主边，那么 D相对于 T 是特殊的（其层级高于 A的层级，而 A 的层级高于 B 和）。

现在设 AD 从两侧都是主边。那么 D 和 A 具有相同的前驱，即对于 D ，它们与 A的前驱相同。因此， D 的顶点颜色已经确定，此外我们还知道入边 AD。另外，在这种情况下，出边 DC 是沿顺时针方向继 DA之后的下一条边。也就是说，我们已经确定了所需的一切。

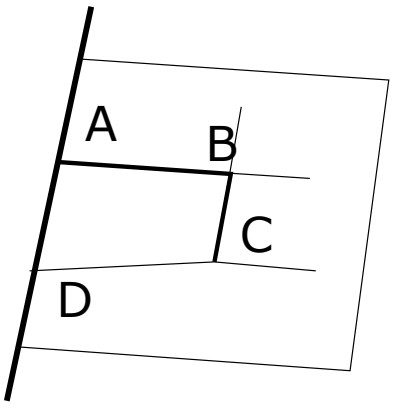

图6. 两个边界顶点的情形，AD 是从 A 出发的主出边

如果 AD 是非主边，那么 D 位于从 A出发的非主边上。在这种情况下，根据前驱定义引理确定 D 的前驱。

2. 因此，边界顶点也彼此相邻，设为 A 和 B，也就是说， C 和 D 是内部顶点。 D 的类型，以及沿路径 ADC 的入边和出边，均根据瓷砖 T 在瓷砖替换中的位置确定。 D 的层级为第一层。 D 的前驱颜色组合与 C的相同。

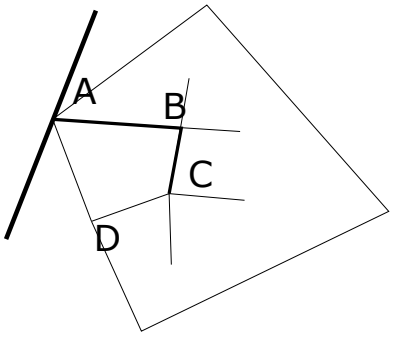

图7. 两个边界顶点的情形，AD 是从 A 出发的非主出边

引理3.7（边界上的三个顶点）。设 T 是一块瓷砖，它恰有三个角落在瓷砖替换的边界上（相应地，也在包含它的最小子复形的边界上）。

设 ABC –为沿着 T 的两条边经过的正则路径，并且我们已知路径 ABC 的编码，即顶点 A、 B、 C 的颜色，以及沿路径的入边和出边 ABC。

那么，如果 D 的最后一个顶点不是特殊顶点，则路径 ADC 的编码是唯一确定的，即 D 的颜色以及沿路径的入边和出边 ADC。

由于路径 ABC 是正则路径，我们可以确定 D 是否为特殊顶点。以下设 D 不是特殊顶点。

可能有三种情形：顶点 A、 B、 C 都是边界顶点； A 是内部顶点（ B 的情形与此对称）；以及 B 是内部顶点。

1. 设 A、 B、 C 都是边界顶点。那么 D 是内部顶点，其类型以及沿路径 ADC 的进入边和出边，均由T 在瓦片替换中的位置决定。 D 的层级为第一层。根据关于前驱确定性的引理，可确定 D的前驱颜色组合。

2. 设 C 是内部顶点。从顶点 A 出发的出边 AD，也是 AB 之后或之前的下一条出边（取决于路径 ABC在单元格 T中的方向）。

设 AD是从 A 出发的主边。顶点 D 的层级不能高于 A，因为否则 D 将是特殊的。那么 D 和 A 这两个顶点具有相同的前驱，也就是说， D 的前驱与 A的相同。此外， D 是 C 的前驱，而 C紧接在 A之后或之前，因此也能确定 D 的颜色。确定入边 AD。

设 D 是侧顶点或边界顶点。在这种情况下，入边 AD 是两条主边之一，具体是哪一条可以根据路径 ABC 的方向来确定。如果 D 是内部顶点，那么 A 是侧顶点或边界顶点。因此，类型 A 中包含有关 A 所在宏边类型的信息。根据边的类型，可以确定边 AD 究竟从何处进入 D。出边 DC 定义为沿顺时针方向紧接在边 AD 之后或之前的边（取决于 T 中 ABC 的方向）。

现在设 AD –为非主边。那么 D 位于从 A 引出的非主边上， D 是侧顶点或边界顶点。 D 是 C 的前驱，后者紧邻 A 之前或之后，因此 D 的颜色得以确定。根据关于确定前驱的引理，可以确定 D 的前驱。注意，作为进入 D 的边， AD 是主边

具体是哪一条由 ABC 在 T 中的方向决定。引出的边 DC 是紧随 AD 之后或之前的边。

3. 设 B 为内部的。完全类似于情况 2，根据边 AD是否为主边进行分析。

由上述引理可得弱确定性定理的证明。

Следствие из слабой детерминированности. Пусть плиточная подстановка представляет собой квадрат $n \times n$. В этом случае комплексы K_n будут представлять собой конечные подквадраты $n^k \times n^k$ квадратной решетки. Пусть задана слабодетерминированная раскраска. Выпишем все кодировки $AuBvC$ пути длины 4 на получившейся последовательности комплексов. Теперь объявим запрещенными все кодировки, не встречающиеся на последовательности комплексов K_n. Рассмотрим теперь произвольный квадрат T на квадратной решетке, вершины и ребра которой раскрашены в определенное нами множество цветов, причем правильным образом. То есть на квадрате не встречается запрещенных путей. Тогда T принадлежит некоторому комплексу K_m.

证明框架 对于正方形 2×2，结论显然。假设已对小于 $2m$ 的正方形证明了该结论。将正方形 $2m \times m$ 分成两个相同的正方形。根据归纳假设，它们中的每一个都属于某个复形。于是，考察边界并利用确定性，便可以“拼接”这两个正方形，从而得到一个同时包含这两个正方形的复形。

注记。 这一推论是方格网中古德曼—施特劳斯定理的一种变体。利用弱确定性，可以采用类似的方法证明任意复形也具有这一结论。

4. 附录

引入弱确定性概念的目的。 在通过复形序列构造有限定义半群时，会利用确定性来正确引入定义关系。也就是说，对于每一对端点相同、从瓷砖两侧绕行的路径，引入一个将它们的编码等同起来的关系。

弱确定性不同于通常确定性的路径，对应于对瓦片的遍历，其中一个角伸出到瓦片替换的边界上。我们将这类路径称为特殊路径。（也就是说，特殊路径不能翻到瓦片的另一侧，因为这样一来，边界上不属于特殊路径、但属于与其配对路径的顶点颜色就无法被唯一确定。）在引入定义关系时，我们还将较短的非最短路径置为零。对于某些类型的瓦片替换，可以证明：如果一条足够长的路径包含一个特殊子路径，那么可以将其局部变换为包含非最短区段的形式。也就是说，这样的路径仍然为零。这使我们能够不必为特殊路径引入定义关系，而只需采用弱确定性。

在本附录中，弱确定性性质扩展到带有粘接的复形类，这些复形用于构造有限呈示的幂零半群。

首先定义带有粘接的复形序列。第n 级复形将通过两种操作从前一级复形得到：除了划分之外，还将进行粘接——向复形中添加一块瓷砖，其三个角位于复形中，第四个角则是一个额外的新顶点。

设给定铺砖替换 σ。定义与该替换相关的复形序列。规定普通正方形为层级 0 的复形。将与铺砖替换 σ 重合的图视为层级 1 的复形。注意，剖分中的每个四边形都是有方向的（其上、左、右、下侧均已定义），并且可以对其应用铺砖替换，将其进一步细分为更小的四边形。所得图视为层级 2 的复形。

层级 0 的复形包含角，规定它们具有层级 0。还规定，层级 2 复形的顶点若不属于层级 1 复形的顶点，则属于该层级 2 复形；对于层级 1 和层级 0 的复形，同理。如果一个顶点属于层级 k 的复形，则其层级为 k。

定义 4.1。设 K_n –层级复形 n。考虑路径 ABC，使得 B具有层级 $n-1$，而顶点 A 和 C 具有层级 n。此外，设复形中不存在包含顶点 A、 B、 C 并将其作为角的胞腔。对于每条满足这些条件的路径，引入一个新顶点 D，并添加边 AD 和 DC，从而对于每条满足这些条件的路径 ABC，在复形中添加一个新的胞腔 $ABCD$。其中，我们将 AB 和 BC 分别视为新胞腔的左侧和上侧。顶点B 将被称为新粘接子复形的核 。根据定义，所得顶点 D 的层级为 n。

我们假设，在瓷砖替换上附加了如下条件：任意层级复形的左上角中，除上侧和左侧之外，不包含其他边。由此可知，从核到粘接复形内部没有边，只有沿其边界的边。

设 K'_n 为所得到的复形。它包含定向瓦片（既有来自 K_n的旧瓦片，也有后来粘接的瓦片）。对于每个定向瓦片，应用瓦片替换，将其分割成若干更小的瓦片，并添加新的顶点。将所得复形称为层级为 $n+1$的复形。我们将最近一次分割时添加的顶点视为属于该复形，并认为其层级为 $n+1$。

注。在转到更高层级的复形时，粘接的瓦片也会被进一步细分。路径 ABC 在进行粘接时完全可以这样选取：使得 C 位于粘接部分，而 A 和 B 位于平面部分。

此外，如果顶点 A 位于粘接子复形 K的边界上，且不是其核，那么它就是侧部顶点或边缘顶点；边界 K 位于包含 A的宏边上。如果 A 是 K的角，那么恰有一条主出边位于 K 的边界上；如果 A 不是 K 的角，那么从 A 出发的两条主出边也都位于 K的边界上。从 A 出发的非主出边仅当它们是通向相应粘接部分的边时，才位于 K 中。

我们将证明所得复形上的路径具有某种确定性变体。

因此，所得序列中的每个复形都由有限个平面子复形（如上所述）组成。根据定义，每个平面子复形都通过其相邻的两条宏边粘贴到整个复形的其余部分上。

考虑由上文所述的代换方式定义的 K_n —层级 n平面复形。设 $ABCD$ 是 K_n上的某个最小瓷砖。将路径 ABC 的一段替换为路径 ADC 的一段，称为路径的局部变换。如果路径 P' 可以通过若干次局部变换由路径 P 得到，则称它们等价。

在复形上，将由 V_1、 E_1、 V_2、 E_2 ..... V_{n-1}、E_{n-1}、 V_n组成的有限序列称为路径，其中 V_i 是顶点， E_j 是边。

考虑 P 上任意一条路径，其端点位于 K_n的边界上。如果对于任意这样的路径 P ，都可以将其局部变换为一条完全位于 K_n边界上的路径 P'，则称 K_n 为平面正规复形。

序列 平面正则复形的序列在文献中构造 [10] .

定义 4.2。 正则复形的定义。

1. 平面正 则复形的层级为 n ，将其视为正则复形 .

2. 设正则复形 R 和平面正则复形 K_n 的层级为 n ，且相邻的两条边 K_n 属于 R，并且这两个复形没有其他交集。那么并集 $R \cup K_n$ 也视为正则复形。

根据定义可知，正则复形由有限个平面正则子复形的并组成。设顶点 A 位于正则子复形 K 与平面子复形 K' 的交界处，而下一个顶点 B 位于 K' 内部（不在边界上）。那么我们将从 A 到 B 的边称为贴入边。

引理 4.1 （路径拉直）。 设路径 P 属于某个正则复形 K，且端点 P 属于某个平面子复形 K。ˆ那么存在一条 $P' \equiv P$ 完全位于 K 中。

证明。我们对路径进行标记。如果路径经过属于某个子复形的边，就在其处标记左括号；反之，如果路径从该子复形返回，则标记右括号。如果完全没有括号，那么路径已经完全位于子复形 K 中。我们按照路径中括号的总数进行归纳证明，设对于 k 个括号命题成立。

如果路径中出现一段以左括号开头、以右括号结尾的部分，那么路径在这部分上经过某个平面子复形，可以利用其正规性，将这段替换为沿该子复形边界经过的部分。这样，在新路径中，原来的两个括号至多变为一个。对于新路径，可以使用归纳假设。

如果不存在上述部分，那么先出现所有右括号，之后是所有左括号。所有括号不可能属于同一类型，因为这样终点就不可能位于同一个子复形中。标出第一个左括号和最后一个右括号。那么路径可表示为 $A)XBY(C$，其中 X， Y 是一些顶点，子路径 A 只包含右括号，而子路径 B 只包含左括号。考察从 X 到左边界的路径 u ，以及从 Y 到右边界的路径 v 。注意， u v 总是只进入粘接部分的内部。

考察分别包含 u 和 v 的子复形 K_u 和 K_v。K_v 和 K_u 只能在边界上相交。但是，我们原始路径的端点（即终止顶点 u 和 v）位于同一个平面子复形中，这意味着两条路径 u 和 v 都从边界 K_u 开始并在边界 K_v 结束，因此可以对它们应用归纳假设，从而减少括号的数量。

在本文的主体部分，我们展示了如何确定平面复形中的顶点和边的颜色。

按照构造，每个顶点恰好属于一个基本平面子复形；此外，它还可能位于多个粘接子复形的边界上。顶点 X 的基本子复形记作 K_X。

设 $P = A_1A_2 \dots A_k$ 是经过某个复形的一条路径。对于每条边 A_iA_{i+1}，都已确定该边是从粘接复形进入的边、进入粘接复形的边，还是平面边。根据复形序列的定义可知，两条连续的边不可能同时是进入复形的边或进入粘接复形的边。

定义 4.3（扇与顶点旗标）。设 $B(P)_{A_i}$ 是 A_i 的基本复形，而 $L(P)_{A_i}$ 和 $R(P)_{A_i}$ 是相应的粘接复形（当从 A_i 出发的边通向粘接部分时定义）。所有这些复形均相对于路径 P 定义。将有序三元组 B_{A_i}、L_{A_i}、R_{A_i}（其中后两个元素可以为空）称为 A_i 的关联 复形，并记作 $\Omega(P)_{A_i}$。

的顶点扇 称为有序五元组 $\Omega_{A_{i-2}}$、$\Omega_{A_{i-1}}$、Ω_{A_i}、$\Omega_{A_{i+1}}$、$\Omega_{A_{i+2}}$，也就是说，这是若干个作为顶点 A_{i-2}、A_{i-1}、A_iA_{i+1}、A_{i+2} 的基本复形或粘接复形的复形，其中某些复形可能相同。

设顶点 A_i 已固定。设复形 K 属于扇 A_i。设顶点 X 是与 A_i 相关联的某个复形中的前驱 A_i。我们不考虑其类型，而考察其 广义类型：相对于扇 A_i 中所有复形的类型 X 的有序集。

顶点的标志 A_i 是指相对于所有属于扇 A_i 的复形的有序颜色集合 A_i。

备注。因此，对于空间路径，在顶点 A_i 中存储的不仅是其在三个相关联复形中的颜色信息，还包括其在与连续顶点相关联的复形中的完整颜色信息，其中第三个顶点是 A_i。对于前驱 A_i，使用的不是普通的平面顶点类型，而是相对于扇 A_i 中所有复形的类型。

定义 4.4（关于路径编码）。我们认为，出边 AB 是相对于包含边 AB 的基本平面子复形定义的。

路径 $A_1 \dots A_k$ 的编码是指沿路径排列的顶点标记以及入口和出口边的有序序列。

引理 4.2 (关于确定单元**)**。设有一条路径 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，其中，若三个顶点依次相邻且位于同一个平面子复形中，则该子路径是正则的。那么，根据路径 $A_3A_4A_5$ 的编码，可以确定相应的顶点是否是复形某个单元中的三个顶点。

证明。如果从 A_4 出发的两条边都是平面的，那么这种情况就归结为已经讨论过的平面情形。如果 A_4A_3 和 A_4A_5 的两条边都通向附加部分，那么，

显然不存在所求的单元。为明确起见，设从 A_4 出发的边 A_4A_5 通向附加部分，而 A_4A_3 是平面的。

设 K_{A_4} 是顶点 A_4的基本平面子复形。假设，边 A_3A_4属于 K_{A_4}。在这种情况下， A_4 不可能是 K_{A_4}的核。如果这条作为 A_4一部分的边不是主边，则所求的胞腔不存在，因为沿着K_{A_4} 的边界经过一条宏边，而 A_4位于其上。

设作为 A_4 一部分的边 A_3A_4 是主边。那么 A_3A_4 位于K_{A_4}的边界上，整个路径 $A_3A_4A_5$ 也如此；因此，该子路径是正则的，我们便得到所求结果。

引理 4.3 （沿路径的确定性）。 设有一条路径 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，并满足以下条件：

1) A_3、 A_4、 A_5 是某个胞腔 T 的顶点；
2) 路径 $A_3A_4A_5$ 相对于包含胞腔 T 的平面子复形是正规的。

设 X 是该胞腔的第四个顶点。那么，根据已知的路径编码 $A_2A_3A_4A_5A_6$ ，可以唯一确定路径编码 $A_2A_3XA_5A_6$。

证明。情况 1。与 A_4 相邻的两条边都是平面的。在这种情况下，路径 $A_3A_4A_5$ 的片段是平面的。可以对其应用平面情形下的弱确定性定理，因此，根据基本复形中的颜色 A_3、 A_4、 A_5 ，可以唯一确定基本复形中的颜色 X 。定义旗标分量 X 的其余部分。假设从 A_5 出发的下一条路径边进入粘接复形 $K_{A_5A_6}$。实际上，需要确定相对于 $K_{A_5A_6}$ 的颜色 X 。注意， X 和 A_5 位于复形 $K_{A_5A_6}$ 与包含路径 $A_3A_4A_5$ 的基本复形所共有的一条大边上。那么，胞腔 $T = XA_3A_4A_5$ 以顶点 X 和 A_5 邻接这条大边。考虑包含胞腔 T 的最小平面子复形。那么， A_3 或 A_4 位于其中，而 X 是相应顶点的前驱；根据路径 $A_3A_4A_5$ 在 T 内部的取向，它按顺时针方向位于前一个或后一个位置。因此， X 相对于 $K_{A_5A_6}$ 的类型得以确定。 X 相对于 $K_{A_5A_6}$ 的前驱与 A_5 的前驱重合。

因此，顶点旗标 X 已完全确定。

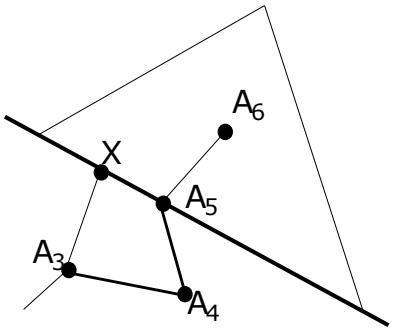

图 8. 恢复位于与粘合复形共用宏边上的 X

情况 2. 与 A_4 相邻的边中，有一条通向粘贴部分。我们将这条边记为 A_4A_5。考虑复形 K，它是相对于顶点 A_5 的基复形。那么， A_3 和 A_4 位于边界 K 上（否则，胞腔 T 就不存在）。将路径 $A_3A_4A_5$ 视为 K中的平面路径。于是，根据平面确定性定理， X 相对于 K的颜色可以唯一确定。注意，顶点扇 X 和 A_4

重合（除顶点 X 和 A_4本身外）。因此，顶点 X 的旗标完全可以像平面情形那样确定。

上述引理是弱确定性定理的空间类比。它用于为已经构造的替换复形序列引入半群定义关系。引入这些关系后，便可以变换与路径编码相对应的词。词的变换对应于转向等价路径。

参考文献

[1] *Wang Hao*. 通过模式识别证明定理——*II*，《贝尔系统技术杂志》40(1):1–41，1961[2] *R. Berger*，多米诺问题的不可判定性，博士论文，哈佛大学，1964年7月。[3] *S. Mozes* 铺砌、替换系统及其生成的动力系统，《J. Analyse Math》53（1989），第1期，139–186。[4]*C. Goodman-Strauss* 匹配规则与替换铺砌。《数学年刊》（第2辑）147（1998），第1期，181–223。41–82[5] *Robinson R. M.*，平面铺砌的不可判定性与非周期性，《数学创新》12（1971），177-209。[6] *Conway J.*、*Lagarias J.* 用多米诺骨牌铺砌与组合群论。《J. Combin. Theory Ser. A》1990，第53卷，第2期，183–208。[7] *Grunbaum B.*、*Shephard G. C.* 铺砌与图案，Freemann，纽约，1986。[8] 斯维尔德洛夫斯克手册：半群理论中的未解决问题。第*3*辑，1989年。——40页[9] *Kari J*、*Papasoglu*. 确定性的非周期铺砌集合。《GAFA》，《几何、函数与分析》第9卷（1999），353–369[10] *И.Иванов-Погодаев*、*А.Канель-Белов*，有限定义幂零半群：具有一致椭圆性的复形，《俄罗斯科学院学报：数学辑》，2021年，第85卷，第6期，第126–163页[11] *И.Иванов-Погодаев*、*А.Канель-Белов*，复形族的确定性着色，《基础与应用数学》，2022年，已录用待刊[12] *А.Я.Белов-Канель*、*И.А. Иванов-Погодаев*，无限有限定义幂零半群的构造，《俄罗斯科学院报告：数学、信息学与控制过程》101:2（2020），81–85