电网络的几何描述与 Faddeev–Jackiw量子化

A. Parra-Rodriguez[1,2] 和 I. L. Egusquiza[3,4]

[1]Institut Quantique 和 D´物理学系，舍布鲁克大学，舍布鲁克，魁北克省 J1K 2R1，加拿大[2]基础物理研究所 IFF-CSIC，Calle Serrano 113b，28006 马德里，西班牙[3]物理学系，巴斯克地区大学 UPV/EHU，Apartado 644，48080 毕尔巴鄂，西班牙[4]EHU量子中心，巴斯克地区大学 UPV/EHU，Apartado 644，48080 毕尔巴鄂，西班牙

arXiv:2304.12252v5 [quant-ph] 5 Sep 2024

在集总元件电路理论中，将介质存在时求解麦克斯韦方程组的问题化约为两组方程：一组是本构方程，用于封装受限能量密度的局部几何与动力学；另一组是基尔霍夫方程，在更大尺度的拓扑层面上施加电荷与能量守恒。我们将一般集总元件电路的动力学发展为一种新的系统性几何描述，将其表示为可由拉格朗日量和瑞利耗散函数导出的 一阶微分方程。通过Faddeev-Jackiw方法，我们识别并分类了在寻求一般网络的哈密顿描述时出现的奇异性。我们解决方案的核心在于正确识别约化流形，在该流形中可以表达电路状态，例如由磁通和电荷自由度组成的混合状态，其中还包括紧致自由度的存在。我们将这一完全可编程的方法应用于获得非线性和非互易电路的（可正则量子化的）哈密顿描述；如果以纯节点磁通或回路电荷变量作为起始构型空间，这些描述的推导将十分繁琐，甚至会出现奇异性。我们还为能量元件的支路变量提出了一种特定的拓扑赋值方案；将其作为该过程的输入后，所得结果既与经典描述一致，也与更复杂量子电路的谱一致。这项工作统一了电网络理论中各种已有的几何图景，并将有助于自动计算超导量子芯片的恰当哈密顿描述。

1 引言

麦克斯韦方程组的集总元件模型，也称为准静态近似，在描述电路的低能动力学方面取得了极大的成功 [1，2]，，包括发展迅速的超导量子电路领域 [3–5]。在此过程中，分布式偏微分场方程（无限维状态空间）被约化为常微分方程（有限维状态空间），并在这一映射中内置了一个固有的高频截断 [6]。

集总电路与机械动力系统之间的类比自该领域诞生之初便已为人所知，因此，集总元件电路理论也会定期关注，尤其是在综合 [7–15], 问题中，分析力学方法的适用性。因此，早在1938年，Wells [16, 17] 就指出，众所周知，可以为某些类别的电路 [18–21] 构造拉格朗日量。哈密顿方法也一直得到定期采用 [22–24]，，尤其是从端口哈密顿视角 [25, 26]出发的方法。

近来，处于量子区间的超导电路技术爆发式发展，推动了对其拉格朗日量和哈密顿量形式 [27–32]的研究。最初，以（回路）电荷变量 [4, 33, 34], 进行描述占据主导地位，但后来（节点）磁通表述取而代之 [27, 35–56]。目前正在发展一种混合变量描述，同时采用网络的有效回路电荷和有效节点磁通 [30, 31, 57, 58]。事实证明，对于非互易电路 [62–69] 的一般处理而言，这是必要的 [31, 32, 59–61] 。

分析力学是一种高度几何化的理论，因此，自 Brayton 和 Moser [70, 71] 以及 Smale [72]的工作以来，几何考量就一直被纳入这些描述之中。这促成了诸多研究方向，其中包括应用于电路 [75]的狄拉克结构这一深刻概念[73, 74] 。其主要原因在于，电路的动力学并非仅仅由各个元件（电容器和电感器）的能量学决定。相反，元件之间的连接受到电荷守恒和能量守恒的约束 [76]。鉴于约束动力学是力学的几何方法的核心研究对象，我们认为，几何方法对于进一步发展电路理论的这一方面，以及实现我们对超导电路进行量子力学描述的目标，都是必不可少的。此外，在这一背景下，某些变量可能是紧致的，例如超导岛的磁通，此时拓扑考量也会发挥作用。

A. Parra-Rodriguez： adrian.parra.rodriguez@gmail.comI.L. Egusquiza： inigo.egusquiza@ehu.es

本文探讨电路理论中的核心问题：能否构造集总元件电路的拉格朗日量和哈密顿量描述，这些电路由非线性电感器、电容器、电压源和电流

已于 Quantum 2024-09-03 接收，点击标题进行验证。根据 CC-BY 4.0 许可发布。

源、变压器和回转器任意连接而成？我们的构造性回答是肯定的。我们采用几何语言，确保将紧致变量自然地纳入考虑。这样一来，我们大幅拓展了可采用这些描述的电路范围，并可直接应用于正则电路量子化 [12] —— [11], 例如，将黑箱量子化方法扩展至多端口非互易线性系统 [4, 27。此外，在经典物理框架内，我们通过引入瑞利耗散函数，将线性多端口电阻元件纳入该方法。

我们系统化的方法可以在计算机代数系统或数值软件中实现算法化，相较于现有方法具有显著改进 [77–80]。我们采用一阶拉格朗日量，并使用 Faddeev–Jackiw 方法（FJ）进行辛约化 [81–84], , 为随后采用正则方法和路径积分形式进行量子化做好准备。在出现哈密顿描述障碍的情况下，我们的方法能够检测并刻画这些阻碍 [85, 86]。

作为一种方法，这种几何方法的有效性独立于支路变量实际具有紧致性还是扩展性的特征。尽管如此，我们推测储能元件的支路变量具有具体的拓扑属性（扩展或紧致），并分析其后果。该提议与我们所知的所有实验结果相容。特别是，对于由经典系统元件构成的适定电路，按照我们的提议，最终的有效物理将由扩展变量描述。fluxonium 也是如此 [87], , 这与库珀对盒的紧致节点相位 [88]相对。

本文组织如下。在下一节中，我们将介绍所研究电路类别的几何描述，并根据需要引入微分几何概念。我们假设为电容性、电感性和源支路赋予退化二形式。随后，在第 3 节中，我们将证明，对能量函数和二形式施加约束后得到的动力系统，恰好就是与该电路相对应的系统。一旦证明几何视角适用，我们便可以识别奇异动力系统，并在第4节提出应用 Faddeev-Jackiw方法。

着眼于将该方法应用于集总元件超导电路的量子化，我们在第5 节提出了对储能元件进行拓扑赋值的方案，并分析了其影响，例如 fluxonium 或 dualmon [89] 电路中相位的（经典）去紧化。在第 6 节中，我们给出了更为复杂的示例；对于这些示例，几何方法能够提供系统性的描述，而截至目前尚未提出其他系统化的处理程序。我们将更为详细的证明，以及对其他几何概念和 Faddeev-Jackiw方法的概述，留待附录讨论。我们还在附

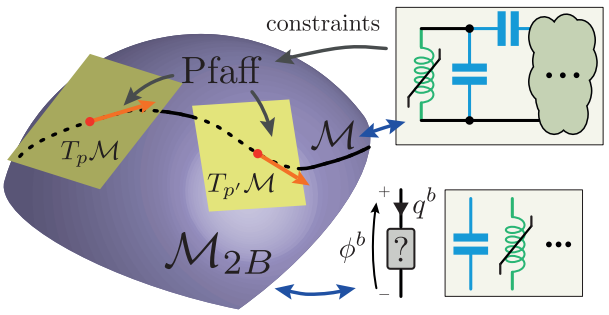


图1：几何图景示意图。每条支路对应两个变量，它们张成 $\mathcal{M}_{2B}$。在电路中连接各支路会产生约束，这些约束汇集成一个普法夫系统，从而确定$\mathcal{M}_{2B}$上每个点处的可能方向。对这些方向进行积分得到积分流形$\mathcal{M}$ ，它描述了受约束的物理过程。

录中介绍了该方法在源方面的应用，尤其是随时间变化的磁通量及其对应的电动势。附录G中还提供了其他电路示例，最后一个附录H讨论了经典奇异电路。附录A中给出了微分几何、辛几何和正则量子化的简要综述。

2 经典电路的几何描述

在传统电路理论中， [90]电路的状态由每个端口/支路 b上的电压降 v^b 和电流强度 i^b 的数值决定。这些变量分别是线性的，并且每条支路的变量空间具有 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$的形式。我们研究磁通-电荷元件，其状态由支路磁通 ϕ^b 和电荷 q^b给出，它们的时间导数分别为 v^b 和 i^b 。我们不考虑蔡氏分类 [91],中的其他元件，因为涉及更高阶积分或导数的元件会系统性地导致奥斯特罗格拉德斯基奇点，即能量不稳定性 [92, 93]。每条支路的状态流形具有 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$作为其切空间，并具有彼此不同的电压方向和电流强度方向。因此，磁通和电荷作为变量的唯一可能取值为 $\mathbb{R}$ 和 S^1 ，或它们的区间 [94]。在传统电路理论中，紧变量并未受到考虑，但超导电路的引入带来了紧磁通（存在超导岛时）或紧电荷（对于量子相滑移）。因此，电路的模型将具有如下形式的状态流形：$\mathcal{M}_{2B}=\mathbb{R}^{2B-k}\times(S^1)^k$，其中$k$ 为紧变量的数量， B 为电路图中支路的数量。在下文中，我们将使用记号$\mathbb{T}^k$ （k维环面）表示$(S^1)^k$。

共轭变量的概念存在于物理学的多个支路中，而“共轭”所表示的含义各不相同。然而，这些不同的含义并非完全无关。在电路的语境下，电荷、电流和电压之所以互为共轭，是因为

人们会考察其中一个变量因另一个变量发生变化而产生的响应（阻抗），并且这一点也体现在能量论证中。由于我们的目标是量子化，我们关注的是力学共轭。由于我们使用的是这些电学变量的积分形式，并且根据下文的方程 （2），我们预期每条支路的磁通与电荷之间存在共轭关系，因此 $\mathcal{M}_{2B}$ 应被构造为相空间或其前身。然而，其中存在约束。最重要的是，电压和电流的基尔霍夫约束构成了一形式 [95]上的 $T^*\mathcal{M}_{2B}$ 中的 Pfaff方程组，

$$\sum_{b\in\mathcal{N}} \mathrm{d}q^b = 0\,(\mathrm{KCL})\,, \qquad \sum_{b\in\mathcal{P}} \mathrm{d}\phi^b = 0\,(\mathrm{KVL})\,, \quad (1)$$

其中 $b\in\mathcal{N}$ 表示与节点相连的所有支路 $\mathcal{N}$ 而$b\in\mathcal{P}$ 表示回路中的所有支路$\mathcal{P}$。微分几何的简要回顾见附录 A。此处及下文中，按照惯常的宽泛记法，我们用 $\mathrm{d}z$ 表示 z 坐标一形式，即使相应的流形是 S^1，尽管它并非恰当形式。

这组方程的秩为 B，即独立方程的数量为 B。这是由标准图论结果得出的，该结果最初由 Weyl [96]应用于电路。此类方程的另一项性质是，它们的所有线性组合都是闭合的。因此，Frobenius 兼容性 [95] 条件自动满足，系统因而可积。这意味着，$\mathcal{M}_{2B}$ 中的每个点都属于且仅属于一个维数为 B 的流形，该流形是该系统的一个解。就实际应用而言，这意味着要找到一个含有 B个参数的参数化，以表示方程的解。当约束仅为基尔霍夫约束时，磁通变量和电荷变量可分别用磁通参数和电荷参数表示，而标准的节点磁通分析为我们提供了实现这一点的方法。此外，若$\mathcal{M}_{2B}$ 中不存在紧致方向，基尔霍夫普法夫方程便退化为一组代数线性方程，这与通常的表述一致。下文将通过示例展示非平凡拓扑对此构造的影响。

此外，为了描述线性时不变（LTI）无源多端口器件的正则表示，还需要考虑陀螺器、环行器和变压器等理想非互易元件。在超导技术的术语中， [5], 这类多端口描述通常被称为“黑盒” [45, 47, 49], ，因为它们不会揭示内部的微观动力学。这些附加元件会对支路电压和电流配置施加进一步的线性限制 [7, 8, 12, 97]。因此，这些元件对应于额外的普法夫方程，其中既涉及其端口的支路变量，也涉及其他元件的支路变量。

总之，约束，包括基尔霍夫约束和约束元件产生的约束，均施加于支路电压和电流上，并由一个在流形上保持不变的矩阵F表示；该矩阵湮灭微分状态向量 $\mathrm{d}\zeta^T = (\mathrm{d}\phi^T, \mathrm{d}q^T)$，即 $\mathrm{F}\,\mathrm{d}\zeta = 0$。如果基尔霍夫约束仅通过理想变压器扩展，则约束方程会分解为磁通子集和电荷子集，解也分别用磁通参数和电荷参数表示，尽管不再能直接通过节点磁通分析得到。然而，回转器的存在会[1] 混合磁通和电荷。无论如何，由于矩阵F保持不变，我们可以得出结论：约束系统再次变得可积。

即使将范围限定在仅包含基尔霍夫约束的情形，电荷型变量和磁通型变量的数量也不一定相等，从而使积分流形无法被理解为某个底层构型空间 $\mathcal{X}$的相空间$T^*\mathcal{X}$。因此，在以集总元件构造电路哈密顿量的所有方法中，都以某种方式存在这些问题。然而，我们知道，大类电路确实具有哈密顿描述。经过反思可以发现，这些描述的构造与特定图结构上不同类型能量元件的特定分布有关，并且与电路的拓扑密切交织 [28, 29]。

因此，我们考虑这样的电路：每条支路均属于以下类别之一，且均为理想元件：线性和非线性电容器（$\mathcal{C}$）与电感器（$\mathcal{L}$）、电压（$\mathcal{V}$）源和电流（$\mathcal{I}$）源、线性电阻器（$\mathcal{R}$），以及变压器（$\mathcal{T}$）和回转器（$\mathcal{G}$）支路。从动力学角度来看，只有无功支路（$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{L}$）与源支路（$\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{V}$）实际上呈现变量的共轭对，而耗散性的 $\mathcal{R}$ 集合以及 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{G}$ 集合将构成约束。电容性 $c\in\mathcal{C}$ 支路和电感性 $l\in\mathcal{L}$支路的本构关系为

$$\dot{\phi}^c = v^c = \frac{\partial h_c}{\partial q^c}\,, \qquad \dot{q}^l = i^l = \frac{\partial h_l}{\partial \phi^l}\,, \quad (2)$$

其总能量函数为

$$H = \sum_{l\in\mathcal{L}} h_l(\phi^l) + \sum_{c\in\mathcal{C}} h_c(q^c). \quad (3)$$

请注意，该能量函数取决于流形 $\mathcal{M}_{2B}$ 中的点，但我们始终用坐标系中的坐标来表示它。

至于外部电压（$v_v(t)$）源和电流（$i_i(t)$）源，它们将由以下（随时间变化的）能量项描述

$$H_d(t) = \sum_{v\in\mathcal{V}} q^v v_v(t) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \phi^i i_i(t). \quad (4)$$

下文中，我们将用 $H_T = H + H_d(t)$ 表示总能量贡献，其中结合了无源组件和有源组件。

两组关系 （2）似乎分别构成哈密顿对的一半，其中电容性元件和电感元件的符号相反。因此，我们在其上关联一个退化二形式

[1]在整篇稿件中，我们使用回转器作为理想非互易（NR）元件的代表。

已于 2024-09-03接收，点击标题进行验证。根据 CC-BY 4.0 发布。

$\mathcal{M}_{2B}$ 对应于电路的实际内容

$$\omega_{2B} = \frac{1}{2}\left[\sum_{l\in\mathcal{L}} \mathrm{d}\phi^l \wedge \mathrm{d}q^l + \sum_{c\in\mathcal{C}} \mathrm{d}q^c \wedge \mathrm{d}\phi^c\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{d}\phi^i \wedge \mathrm{d}q^i + \sum_{v\in\mathcal{V}} \mathrm{d}q^v \wedge \mathrm{d}\phi^v\right]. \tag{5}$$

我们再次说明，如有必要，我们会对记号作通常的滥用：对于一个S^1变量中的绕数一形式，将其写成坐标图中角度α的形式，即记作$\mathrm{d}\alpha$。我们还引入一个编码耗散的退化对称二阶协变张量场

$$g_{2B} = \frac{1}{2}\sum_{r\in\mathcal{R}} \mathrm{d}q^r \mathrm{d}\phi^r\,, \tag{6}$$

以及一个源一形式 σ，形式上为

$$\sigma = H_d(t)\mathrm{d}t\,, \tag{7}$$

在扩展流形$\mathcal{M}_{2B}\times\mathbb{R}$中，以通过源描述外部时间依赖性。

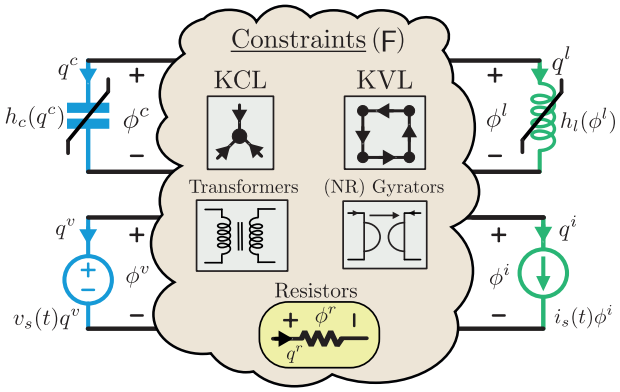


图2：所考虑的集总理想元件。外围为由能量函数确定的动力学元件。从右上方开始逆时针依次为电感器（$\mathcal{L}$）、电容器（$\mathcal{C}$）、电压源（$\mathcal{V}$）和电流源（$\mathcal{I}$）。云状区域中，各种约束支配着动力学元件的连接，包括基尔霍夫电流定律（KCL）和基尔霍夫电压定律（KVL）、变压器（$\mathcal{T}$）、回转器（$\mathcal{G}$）以及线性电阻（$\mathcal{R}$）。多端约束元件的本构方程可以用散射矩阵形式S表示为关于电荷和磁通的线性微分方程组，$R\,[\mathrm{P}_{\alpha b}+\mathrm{S}_{\alpha b}]\mathrm{d}q^b = [\mathrm{P}_{\alpha b'}-\mathrm{S}_{\alpha b'}]\mathrm{d}\phi^{b'}$，其中P是投影到相关支路上的投影算子。

由连接各元件产生的约束$\mathcal{R}$、$\mathcal{T}$和$\mathcal{G}$，连同基尔霍夫约束，构成一个外部 Pfaff 系统，该系统同样是可积的。将 ω_{2B} 限制（通过浸入映射 $\imath:\mathcal{M}\to\mathcal{M}_{2B}$ 拉回）到 Pfaff 系统的积分流形$\mathcal{M}$ 上，所得为一个（可能退化的）齐次闭二形式，

$$\omega = \imath^*\omega_{2B} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathrm{d}z^\alpha\wedge\mathrm{d}z^\beta, \tag{8}$$

其坐标为受限子流形$\mathcal{M}$中的 z^α。为清楚起见，对于任意局部坐标系，若将嵌入表示为 $\zeta^\mu(z^\alpha)$，则.....的拉回

$$\omega_{2B} = \frac{1}{2}\tilde{\omega}_{\mu\nu}\mathrm{d}\zeta^\mu\wedge\mathrm{d}\zeta^\nu \tag{9}$$

is

$$\omega = \frac{1}{2}\tilde{\omega}_{\mu\nu}\frac{\partial\zeta^\mu}{\partial z^\alpha}\frac{\partial\zeta^\nu}{\partial z^\beta}\mathrm{d}z^\alpha\wedge\mathrm{d}z^\beta\,. \tag{10}$$

由于我们有一组线性齐次约束，计算受限流形需要求出 F 的核，例如通过高斯消元，正如我们马上将看到的那样。最终流形 $\mathcal{M}$ 的维数 $\dim(\mathcal{M}) = B - r_P \le B$取决于 r_P，即电阻器、变压器和回转器约束系统相对于基尔霍夫约束的相对秩。本文的第一个核心结果是，在不存在耗散的情况下，由标准电路理论得到的运动方程，即在施加约束后由本构方程得到的运动方程，与以下拉格朗日量的欧拉–拉格朗日运动方程相同（采用爱因斯坦求和约定）

$$L = L_\omega - H - S_\alpha(t)z^\alpha\,, \tag{11}$$

其中 $L_\omega = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}z^\alpha\dot{z}^\beta$ 具有 z^α 个坐标，这些坐标位于受限子流形 $\mathcal{M}$ 中；$\omega_{\alpha\beta}$ 是该坐标系中受限二形式的矩阵元。类似地，通过将外部驱动能量 $H_d(t)$ 限制在 $\mathcal{M}$ 上，构造了 $S_\alpha(t)$。一般而言，z^α 个坐标不必严格地是节点磁通或回路电荷。事实上，在存在具有特性阻抗参数的非互易元件时，它们将是二者的混合。对约束的积分流形解的选择，实际上可理解为对积分常数的选择。就我们的研究目标而言，此时必须记住，我们还有一个能量函数，而受限能量函数一般将取决于积分流形的选择。因此，在这一阶段我们通常会得到一族模型。然而，动力学不依赖于能量函数的齐次平移，因此其中许多模型是等价的。此外，一个至关重要的判据是，初始哈密顿量的临界点应包含在所选择的积分流形中。更实际地说，决定积分流形的积分常数只会通过能量函数 H 出现，因此通常可以将其选择为使坐标原点成为能量最小值。

如果存在耗散，则方程由该拉格朗日量以及由g_{2B}的限制所确定的瑞利耗散函数共同推导得到。

3 证明总结

前一个结果的证明取决于约束的 Tellegen 性质。原始的 Tellegen 定理指出，对于描述电气电路的任意网络，基尔霍夫约束确保，无论实际动力学如何，独立地

于实际动力学，$\sum_b \imath^b v^b = 0$。从图论的角度看，这源于一个同调陈述（“边界没有边界”）；从代数角度看，则源于关联矩阵与约束之间的关系。因此，它独立于本构关系，并且对所有动力学都成立。就我们的目的而言，该定理等价于以下陈述：对包含基尔霍夫约束的 Pfaff外系统的一个积分流形，$\tau_{2B} = \sum_{b=1}^{B} \mathrm{d}\phi^b \mathrm{d}q^b$ 这一对称 2-协变张量的限制恒等于零，$\imath^* \tau_{2B} = 0$。如果某个限制满足这一最后的方程，我们就称其具有全局特勒根性质。因此，如果该限制源自基尔霍夫约束及其他约束，那么它就具有全局特勒根性质。应当注意，任意一组基尔霍夫约束与全局特勒根性质结合起来，都会蕴含另一组基尔霍夫约束。然而，全局特勒根性质本身并不蕴含基尔霍夫定律。我们只考虑包含基尔霍夫定律的约束系统，因此其解必然满足全局特勒根性质。相比之下，局部特勒根性质涉及对受限支路集合求和的 2-协变张量，$\tau_{\mathcal{S}} = \sum_{s\in \mathcal{S}} \mathrm{d}\phi^s \mathrm{d}q^s$。从 $\mathcal{M}_{2B}$ 到 $\mathcal{M}$ 的限制，如果满足 $\imath^* \tau_{\mathcal{S}} = 0$，则称其相对于集合 $\mathcal{S}$ 具有局部特勒根性质。关键在于，由基尔霍夫约束、线性电阻器约束、变压器约束和回转器约束所确定的普法夫外微分系统的积分流形，同时满足全局特勒根性质，以及相对于 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{G}$的局部特勒根性质。一旦可积性和特勒根性质得到确立，证明就是代数性的，即将电路运动方程与由拉格朗日量（以及用于描述耗散的瑞利函数）导出的方程进行对应。

明确地，利用集体支路坐标 $\boldsymbol{\zeta}^T = (\boldsymbol{q}^T, \boldsymbol{\phi}^T)$、电流-电压源向量 $\boldsymbol{s}^T(t) = (\boldsymbol{I}^T, \boldsymbol{V}^T)(t)$（仅在与源支路对应的位置具有非零值）以及投影算子 $\mathsf{P}^{\mathcal{S}}$（用于选取集合 $\mathcal{S}$ 中的支路），电容器、电感器和源的本构方程可以紧凑地写成

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{C}} + \mathsf{P}^{\mathcal{V}} \\ \mathsf{P}^{\mathcal{L}} + \mathsf{P}^{\mathcal{I}} & 0 \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \nabla_{\boldsymbol{\zeta}} H + \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{V}} \\ \mathsf{P}^{\mathcal{I}} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{s} \,. \tag{12}$$

另一方面，约束方程的解由矩阵 K 给出，该矩阵将最终变量 $\boldsymbol{z}$ 的导数与 $\boldsymbol{\zeta}$ 的导数联系起来，构成如下二元组

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \mathsf{K}\dot{\boldsymbol{z}}, \\ \nabla_{\boldsymbol{z}} f &= \mathsf{K}^T \nabla_{\boldsymbol{\zeta}} f. \end{aligned} \tag{13}$$

也就是说，K 是实现拉回 $\imath^*$的矩阵，而 K^T则是实现推前 $\imath_*$的矩阵。正如前文所述，我们通过将所有线性约束编码为 $\mathsf{F}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = 0$，并计算 F 的核来求得它。在此处，

$$\mathsf{F}^T = \begin{pmatrix} \mathsf{F}_{\mathrm{Kir}}^T & \mathsf{F}_T^T & \mathsf{F}_R^T & \mathsf{F}_G^T \end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中基尔霍夫约束具有众所周知的结构（例如参见 [28]）

$$\mathsf{F}_{\mathrm{Kir}} = \begin{pmatrix} \mathsf{F}_{\mathrm{cut}} & 0 \\ 0 & \mathsf{F}_{\mathrm{loop}} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

其中 $\mathsf{F}_{\mathrm{cut}}$ ($\mathsf{F}_{\mathrm{loop}}$) 分别为消去电流（电压）的基本割集（回路）矩阵。F_T、F_R 和 F_G 分别描述一般 Belevitch 变换器、电阻器的（多）端口网络以及一般非互易元件的线性关系。于是，该核的一组基作为矩阵 K的列收集，即 $\mathsf{F}\mathsf{K} = 0$。关于其显式构造的更多细节，请参见附录 B。

因此，系统（12）在施加约束后变为

$$\begin{aligned} \mathsf{K}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P} \\ -\mathsf{P} & 0 \end{pmatrix} \mathsf{K}\dot{\boldsymbol{z}} = \nabla_{\boldsymbol{z}} H + \mathsf{K}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{V}} \\ \mathsf{P}^{\mathcal{I}} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ + \frac{1}{2} \mathsf{K}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{R}} \\ \mathsf{P}^{\mathcal{R}} & 0 \end{pmatrix} \mathsf{K}\dot{\boldsymbol{z}} \,, \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\mathsf{P} = \mathsf{P}^{\mathcal{C}} + \mathsf{P}^{\mathcal{V}} + \left(\mathsf{P}^{\mathcal{R}} + \mathsf{P}^{\mathcal{G}}\right)/2$ 以及全局（基尔霍夫）和局部（$\mathcal{T}$和 $\mathcal{G}$）Tellegen 性质均已得到应用。这些是带有瑞利耗散函数的拉格朗日函数（11）所对应的运动方程

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \sum_{r\in\mathcal{R}} \dot{q}^r(z) \dot{\phi}^r(z) = \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta \\ &= \frac{1}{4} \dot{\boldsymbol{z}}^T \mathsf{K}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{R}} \\ \mathsf{P}^{\mathcal{R}} & 0 \end{pmatrix} \mathsf{K}\dot{\boldsymbol{z}} \,. \end{aligned} \tag{17}$$

也就是说，方程（（16）恰好就是方程组

$$\omega_{\alpha\beta} \dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} + S_\alpha + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \dot{z}^\beta \,. \tag{18}$$

为完整起见，我们指出，拉格朗日量中的源项为

$$S_\alpha z^\alpha = \boldsymbol{z}^T \mathsf{K}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{V}} \\ \mathsf{P}^{\mathcal{I}} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{s} \,, \tag{19}$$

由此可以读出函数 $S_\alpha(t)$。更多详情请参阅附录 C。

4 退化形式、Faddeev-Jackiw 方法与量子化

我们重点讨论无耗散或源的情形，详见附录D 以了解更多细节。附录中汇总了一些微分几何与辛几何的基本概念，供参考。A附录中阐述了微分二形式的秩和非退化性概念。A.2 。

拉格朗日量（11）中出现的二形式在构造上是齐次的，因此具有齐次秩。如果它是满秩的，即非退化的，那么就可以将其求逆，并通过辛 Gram–Schmidt 找到一个局部达布基 [98]。如果它是全局的，并且对应于

已于 Quantum 2024-09-03 接收，点击标题进行验证。本文以 CC-BY 4.0 许可协议发表。

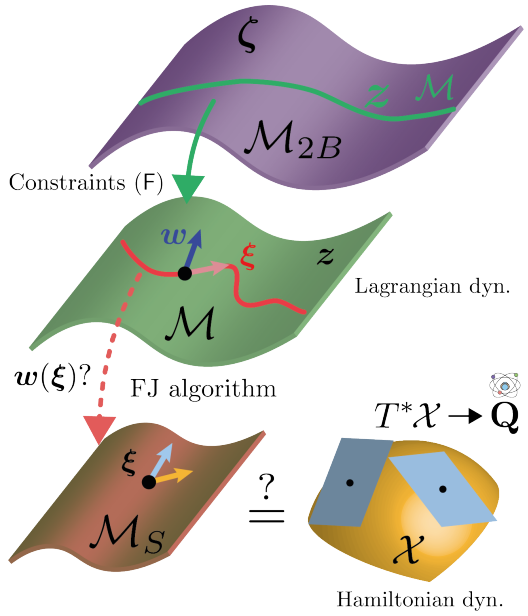


图3：采用 Faddeev-Jackiw方法进行几何约化的示意图。支路$\mathcal{M}_{2B}$ 的（电荷和磁通）变量初始流形首先通过求解矩阵 F 中编码的约束（基尔霍夫电流定律等）所对应的几何线性方程，约化为子流形$\mathcal{M}$ 。第二步中，我们可能需要应用 Faddeev-Jackiw方法，以移除拉格朗日量（11）的零模（这些零模同时来自二形式和能量项），从而在定义良好的辛流形中获得经典哈密顿动力学。最后，为了进行正则量子化，我们还要求该辛流形与余切丛微分同胚。

一个余切丛，则可以进行标准的正则量子化。然而，一般情况下，二形式并不是满秩的。因此，我们选择了一阶拉格朗日量形式，即（11）式，以便应用 Faddeev 和 Jackiw [81–83]的方法。

因此，一旦我们获得了 ω 约束普法夫方程解上的二形式，方程（8），我们的任务就是计算其核，即求出一组线性无关的向量 $W = \{\boldsymbol{W}_I\}_{I=1}^{|W|}$，其基数为$|W| = B - r_P -$ 秩(ω)。在分量表示下，这些向量中的每一个都满足 $W_I^\alpha \omega_{\alpha\beta} = 0$。因此，在无耗散（（18）的情况下，将这些向量分别与方程$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = 0$）和源（$S_\alpha = 0$）两边进行缩并，我们得出：如果方程成立，那么必有

$$W_I(z) = W_I^\alpha \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} = 0\,. \tag{20}$$

反过来看这一结果，我们将 $|W|$ 方程（20）视为一致演化所要求的条件，因而将其视为动力学约束。

其中一些可能是规范约束（即恒等满足的约束），从而揭示描述中的冗余。如果仅使用基尔霍夫定律和变压器关系得到 ω，规范向量就完全沿电荷方向或磁通方向，而对于维数—性约束则并非如此。电荷（磁通）规范约束表明存在一个有效回路（节点割集[2]），其中仅有电感性（电容性）元件参与。

在将该方法应用于电路的第一轮处理中，零模向量 $\boldsymbol{W}_I$ 彼此对易，因为 ω 是齐次的，因此 $\boldsymbol{W}_I$也是齐次的。我们称这组向量是可积的，因为存在在这些向量作用下保持不变的子流形。换言之，我们可以使用形如 $z \to \{w^I\} \cup \{\xi^\mu\}$的流形坐标化，其中 w^I 与零模向量相关。

如果函数 $\{W_I(z)\}_{I=1}^{|W|}$ 是无穷可微的，并且雅可比矩阵 $W_{IJ}(z) = \partial^2_{w^I w^J} H$处处可逆，则存在一个满足约束的子流形$\mathcal{M}$ 。现在，我们将二形式拉回到这个约化子流形上，并重复分析。如果新的二形式具有齐次的满秩，那么这一过程就完成了。最后，如果它是齐次的但不满秩，我们就计算其零模并重复这一过程。新的向量不再必然是齐次的，可积性也不再是必然成立的。如果新的二形式的秩不是齐次的，那么我们遇到的是另一类障碍。重复这一过程，直到发现障碍，或达到齐次满秩为止。在以下各节中，我们将 $\mathcal{M}_S \subseteq \mathcal{M}$ 称为最终的辛子流形，其二形式具有齐次的满秩。最后，为了进行正则量子化，我们要求该辛子流形与某个底流形$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}_S$的余切丛微分同胚，即 $\mathcal{M}_S = T^*\mathcal{X}$，见图3。需要注意的是，这一最终要求会直接排除诸如$\mathcal{M}_S = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ 且满足 $n < m$的偶数维辛流形。比如，二维环面（$\mathbb{T}^2$）不是余切丛，因此不允许进行标准正则量子化[3]。对于特定的障碍，可能存在专门的方法 [86]。

总而言之，存在三类对量子化具有不同影响的障碍。第一类是缺乏全局达布坐标，或相空间具有非平凡拓扑，例如 $0 - \pi$ 量子比特 [101]，，从而产生不等价的量子化 [102, 103]。第二类是ω的秩的不齐次性。如先前在 [85] 的对偶 Dirac–Bergmann 分析中所指出的，这源于底层经典系统发生分岔；该系统允许局部哈密顿量描述，因此在某些情况下量子化可能是可行的。第三类是动力学约束的不可积性，因此不存在经典哈密顿量描述。

[2]图中的割集是这样一组边：移除这些边后，连通分量的数量增加。节点割集是与某个节点相连的所有边构成的集合；移除这些边后，连通分量的数量恰好增加一个。

[3]对于并非余切丛的辛流形，已有一种称为几何量子化 [99, 100], 的正则量子化替代方法被提出。本文不讨论这种方法。

5 超导电路量子化：支路变量的预正则流形

在上一节中，我们描述了对电路的经典系统动力学执行正则量子化的一般方法，并进一步讨论了这一过程中可能遇到的一些问题，即在约化子流形中构造一致的哈密顿动力学时所面临的障碍。我们再次强调，我们的一般流程适用于预正则流形$\mathcal{M}_{2B}$的任意给定拓扑，也就是说，该方法与这一选择无关（只要它属于$\mathbb{R}^{2B-k}\times\mathbb{T}^k$的族）。然而，在实际应用中，用户必须作出这样的选择，因此可能得到不同的经典辛子流形（可能是余切丛）及其正则量子化（在适用时）。

如前所述，获得正则量子化描述的主要动机来自电路量子电动力学领域 [5]，因此，我们现在将重点放在超导电路的集总元件描述上，其中电荷（磁通）的基本单位是$2e$，即两个电子的电荷（$\Phi_Q=h/2e$，即超导磁通量子）。具体而言，我们针对无源储能元件的支路变量拓扑提出了一种特定选择，该选择与节点磁通和回路电荷拓扑的典型现象学假设相匹配。例如，表示超导岛相位变量的量子算符具有紧致连续谱$\sigma(\hat{\varphi}_{\text{island}})=S^1$，而其共轭算符（岛中多余的库珀对数）具有整数谱$\sigma(\hat{n}_{\text{island}})=\mathbb{Z}$。有趣的是，最终相空间的拓扑一直是关于含有或不含超导岛和闭合回路的约瑟夫森结或相滑移结电路量子化的长期争论核心 [89, 104–115]。事实上，有人提出，相位变量的紧致化只不过是一种有效观点，因为交流响应 [110, 111] 与另一种假设似乎无法区分，在后一种假设中，两个算符都具有实谱$\sigma(\hat{\varphi}_{\text{island}})=\sigma(\hat{n}_{\text{island}})=\mathbb{R}$[4]。现在我们将展示：如果表示超导岛之间（超导回路之间）相位差（回路电荷）的变量被视为紧致的，应当如何进行处理；这在数学上比将所有初始变量都视为属于$\mathbb{R}^{2B}$更为复杂。这是因为，如果假设$\mathcal{M}_{2B}=\mathbb{R}^{2B}$，由矩阵F给出的线性约束的第一次约化便显然是一个子流形$\mathbb{R}^{2B-n}$，其中有$n\geq B$。

我们首先考虑仅包含四种元件的电路，即线性电感器和电容器、非线性

[4]为解决这一表面上的歧义，有人提出了一项极具挑战性的实验 [114]，旨在区分这两种观点。从本质上说，这需要切断一根超导导线，使其形成两个超导岛。

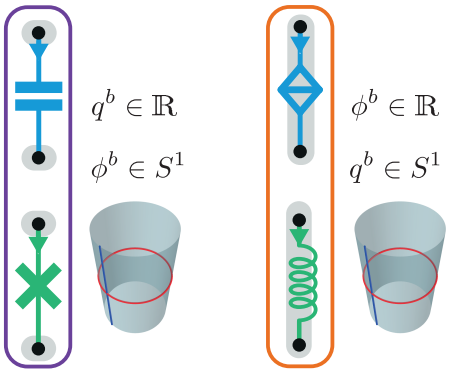


图4：图2中无源元件的支路变量流形的推测拓扑。电容器和纯约瑟夫森结非线性（双岛元件）的电荷（磁通）变量应位于实直线（圆）上。反之，相滑移结和线性电感器（单岛元件）的磁通（电荷）变量应位于实直线（圆）上。这是唯一可能的分配方式，能够使约化流形$\mathcal{M}$（仅含基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律约束的电路中的节点磁通和回路电荷）具有通常假定的拓扑 [30, 111]。

约瑟夫森结 [116]和相滑移结 [113,117]，见图4。这四种元件此前已根据它们如何出现在预正则二形式（5）和局部能量项（3）中进行了分类（颜色）。具体而言，电感器、约瑟夫森结、电容器和相滑移结由以下能量函数描述

$$h_L(\phi_L)=\frac{(\phi_L)^2}{2L},\ h_J(\phi_J)=-E_J\cos\left(\frac{2\pi\phi_J}{\Phi_Q}\right),\qquad h_C(q_C)=\frac{(q_C)^2}{2C},\ h_P(q_P)=-E_P\cos\left(\frac{\pi q_P}{e}\right). \tag{21}$$

现在，我们基于四种上述元件的支路变量的固定初始拓扑，对一般非线性电感和电容器的表征进行公理化扩展。具体而言，我们规定电容器和约瑟夫森结的支路变量分别存在于$q^b=\{q_C,q_J\}\in\mathbb{R}$和$\phi^b=\{\phi_C,\phi_J\}\in S^1$中；对于电感器和相滑移结，则对偶地规定为$q^b=\{q_L,q_P\}\in S^1$和$\phi^b=\{\phi_L,\phi_P\}\in\mathbb{R}$，见图4。预正则流形的这一拓扑选择，根本上受参考文献 [30, 104]中关于电容分流和电感分流约瑟夫森结的量子化描述所提出的论证启发。现在，我们将探究这一选择如何与我们的几何约化方法相结合，使我们重新获得关于约化流形M（节点磁通和回路电荷）的典型拓扑假设，并在适用且必要时获得关于M_S的典型拓扑假设。

考虑图5（a）中的线性LC振荡器。起点是一个4维空间$\mathcal{M}_{2B}=\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}^2$，其中$\{\phi_C,\ q_L\}\in S^1$以及$\{q_C,\ \phi_L\}\in\mathbb{R}$。按照我们提出的方法，预正则二形式（5）为

$$\omega_{2B}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}q_C\wedge\mathrm{d}\phi_C+\mathrm{d}\phi_L\wedge\mathrm{d}q_L\right) \tag{22}$$

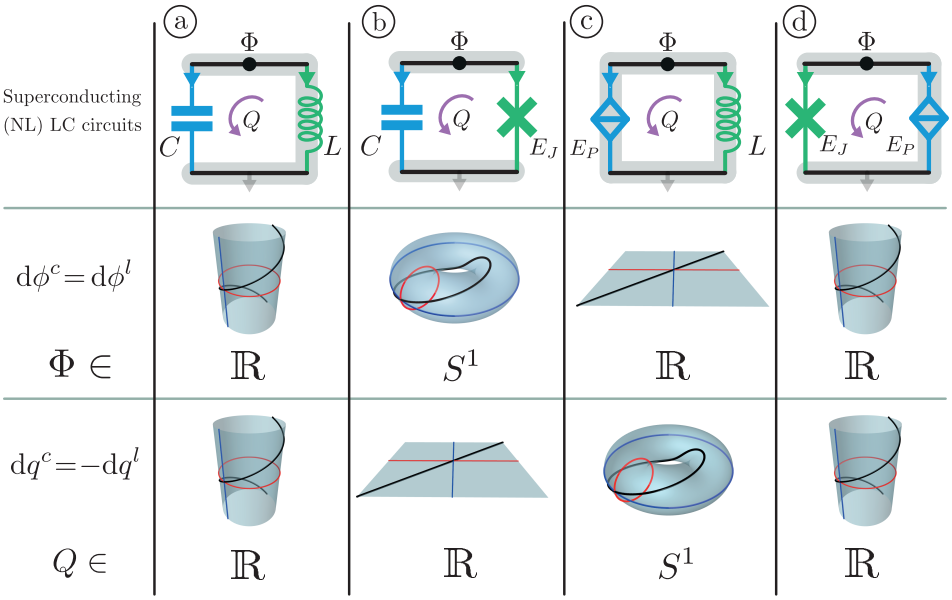


图5：根据前面图4 中为支路变量流形 $\mathcal{M}_{2B}$给出的规定，约化子流形 $\mathcal{M}(\equiv \mathcal{M}_S) = \{\Phi, Q\}$ 的拓扑是约束的几何方程的结果。对于线性 LC 振荡器（a）和纯非线性约瑟夫森/相滑电路（d），两个变量均已去紧化，因此子流形为$\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$。对于电容分流约瑟夫森结（b）和电感分流相滑移（c），一个变量仍保持紧致，也就是说，约化子流形为$\mathcal{M} \in S^1 \times \mathbb{R}$，这随后使得电荷量子算符 $\hat{Q}$ （b）和磁通量子算符 $\hat{\Phi}$ （c）具有离散谱。

该电路仅具有基尔霍夫约束，用矩阵$\mathbf{F}_{\text{Kir}}$表示，即$\mathbf{F}_{\text{Kir}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = 0$，其核K为我们提供了电路的（回路）电流和（节点）电压$\mathrm{d}\boldsymbol{z}^T = (\mathrm{d}Q,\ \mathrm{d}\Phi)$的一个基。具体而言，

$$\mathrm{d}\phi_C - \mathrm{d}\phi_L = 0, \tag{23a}$$
$$\mathrm{d}q_C + \mathrm{d}q_L = 0. \tag{23b}$$

对这些普法夫方程系统的积分为我们提供了一组（回路）电荷和（节点）磁通的基

$$q_C = Q, \qquad q_L = Q \mod 2e, \tag{24a}$$
$$\phi_L = \Phi, \qquad \phi_C = \Phi \mod \Phi_Q, \tag{24b}$$

此时两个变量都扩展为$\{Q, \Phi\} \in \mathbb{R}$，并且积分常数设为零，见图5（a）。有趣的是，如果施加$\mathcal{M}_{2B} = \mathbb{R}^3 \times S^1$或$\mathcal{M}_{2B} = \mathbb{R}^4$，$\mathcal{M}$ 的拓扑也会是$\mathbb{R}^2$。

执行浸入映射后，我们得到一个典范二形式

$$\omega = \imath^* \omega_{2B} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}\Phi - \mathrm{d}\Phi \wedge \mathrm{d}Q\right) \tag{25}$$

以及最终的拉格朗日表达式（11），其由典范一阶项组成

$$L_\omega = \frac{1}{2}\left(Q\dot{\Phi} - \Phi\dot{Q}\right), \tag{26}$$

以及能量函数（3），此时它就是哈密顿量，

$$H = h_C(q_C(Q)) + h_L(\phi_L(\Phi)) = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}. \tag{27}$$

共轭变量满足典范泊松括号 $\{\Phi,\ Q\} = 1$，由方程（26）可得。在标准情形下，将经典系统变量提升为算符，并将泊松括号替换为对易子 $[\hat{\Phi},\ \hat{Q}] = i\hbar$。

理解了这一情形后，立即可以得到图 5 中其他示例的结果。例如，具有纯约瑟夫森结和电容器的第二个电路（b）的几何方程为

$$\mathrm{d}\phi_C - \mathrm{d}\phi_J = 0, \tag{28a}$$
$$\mathrm{d}q_C + \mathrm{d}q_J = 0. \tag{28b}$$

初始前典范流形仍为 $\mathcal{M}_{2B} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$，但现在 $\{\phi_C,\ \phi_J\} \in S^1$ 以及 $\{q_C,\ q_J\} \in \mathbb{R}$。对方程进行积分可得到一个由磁通和电荷变量参数化的子流形，使得

$$q_C = q_J = Q \in \mathbb{R}, \tag{29a}$$
$$\phi_C = \phi_J = \Phi \in S^1, \tag{29b}$$

其中现在 $Q \in \mathbb{R}$ 和 $\Phi \in S^1$，即经典相空间是一个无限圆柱面。注意，积分常数目前同样被设为零。其余过程完全类似，最终得到经典 CPB哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= h_C(q_C(Q)) + h_J(\phi_J(\Phi)) \\ &= \frac{Q^2}{2C} - E_J \cos(2\pi\Phi/\Phi_Q). \end{aligned} \tag{30}$$

众所周知，对圆上有质量粒子的经典系统动力学进行正则量子化会得到

不等价哈密顿量 [101]（具有不等价的谱）。在这种情况下，对电荷进行 c 数平移 Q_g（不同的积分常数，即 $q_C = Q - Q_g$）会导致等价的经典动力学，但可以被理解为不等价量子动力学的标志 [109]。将电荷与磁通变量无量纲化为 $n = Q/(2e)$ 和 $\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_Q$，并依据电荷数与相位对易关系将共轭经典变量提升为量子算符，即 $[\hat{n},\ e^{i\hat{\varphi}}] = ie^{i\cdot\varphi}$，我们得到量子哈密顿量的最终族

$$H = 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J\cos(\hat{\varphi}), \tag{31}$$

其中 $E_C = e^2/2C$ 由位移 $n_g = Q_g/2e$ 参数化。

对图 5(c) 中的电路应用相同的步骤，我们得到约化相空间 $\mathcal{M} = \{\Phi, Q\} = \mathbb{R}\times S^1$。这种情况 (c) 与 (b) 完全对偶，即量子化的哈密顿量

$$H = 4E_L(\hat{\varphi} - \varphi_g)^2 - E_P\cos(2\pi\hat{n}), \tag{32}$$

其中正则对易子为 $[\hat{\varphi}, e^{i\hat{n}}] = e^{i\hat{n}}$，此时具有整数谱的算符为 $\hat{\varphi}$，用于计数超导回路中的磁通量子数。

另一方面，对图 5(d) 中电路的几何约化，也称为 *dualmon* [89]，，再次导致电荷和磁通变量的去紧化（$\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$），与 LC 振荡器的情况类似。实际上，这与其背后的微观物理相符，因为其中既没有超导回路，也没有两个超导岛。重复该方法的相同步骤，我们得到量子化的哈密顿量

$$H = -E_P\cos(2\pi\hat{n}) - E_J\cos(\hat{\varphi}), \tag{33}$$

此时，$\hat{n}$ 和$\hat{\varphi}$均为具有实谱的自伴算子，且对易子 $[\hat{n},\ \hat{\varphi}] = i$。

现在考虑图6中的三支路示例，这是用于构建 fluxonium [87] 和 blochnium 量子比特的典型电路 [118]。基尔霍夫约束现在写为

$$\mathrm{d}q_C = -\mathrm{d}q_J - \mathrm{d}q_L, \tag{34a}$$
$$\mathrm{d}\phi_C = \mathrm{d}\phi_J = \mathrm{d}\phi_L, \tag{34b}$$

因此，对它们进行积分可得

$$q_C = Q, \qquad q_J = -(Q + Q'), \qquad q_L = Q', \tag{35a}$$
$$\phi_L = \Phi + \Phi_e, \qquad \phi_C = \phi_J = \Phi \mod \Phi_Q, \tag{35b}$$

其中 $Q \in \mathbb{R}$、$Q' \in \mathbb{R}$ 和 $\Phi \in \mathbb{R}$，并且我们明确写出了一个积分常数 Φ_e（穿过超导回路的恒定外部磁通）。在本例中，该常数同时对经典系统和量子动力学发挥作用。按照该方法，二形式的拉回再次写为

$$\omega = \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}\Phi, \tag{36}$$

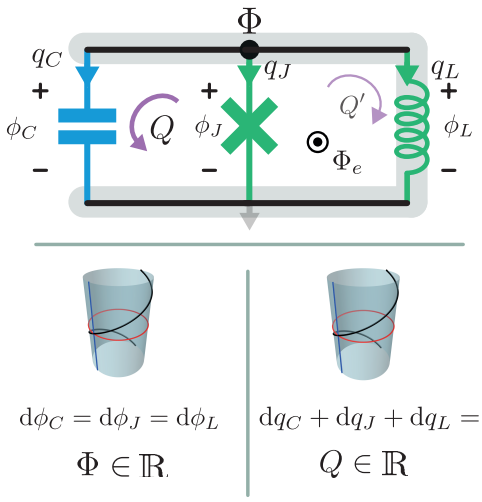


图 6：遵循图 4中的规定，对电感分流的约瑟夫森结求解几何方程，可得到最终的约化（余切空间）子流形 $\mathcal{M}_S = \{Q, \Phi\} \in \mathbb{R}^2$。也就是说，电感器使节点磁通 解紧，参见其与图 5（b）中的双岛电路，即库珀对盒 [88]之间的差异$\mathcal{M} = \{\Phi,\ Q,\ Q'\}$。注意，在第一次约化中，$Q'$ 是一个可以任意固定的规范回路电荷。

即，Q 和 Φ 再次构成正则共轭变量，最终的哈密顿量具有如下形式

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{L}(\Phi + \Phi_e)^2 - E_J\cos(2\pi\Phi/\Phi_Q). \tag{37}$$

请注意，此处 Q' 是一个可以任意固定以完成约化的规范荷。(37)的动力学的正则量子化类似于LC 振荡器的量子化，即算符 Φ 和 Q 具有实谱。值得一提的是，如果超导准环路中的外部磁通随时间变化，该方法要求断开回路，并添加一个外部电压源，以考虑所有可能的规范 [119]。关于时变磁场的一般理论，见附录E；附录G.4 和H.2中给出了相关示例。

既然我们已经讨论了用于超导电路建模的四个主要无源元件，现在简要说明存在电压源和电流源时的几何约化，并通过图7（c）和（d）中的简单示例，分析外部经典力在几何约化中所起的作用。在此过程中，我们假设电压源（电流源）支路与电容器（电感器）具有相同的拓扑结构[5]。在包含电压源（c）的情况下，串联连接可概括为以下方程：

$$\mathrm{d}\phi_C = \mathrm{d}\phi_L + \mathrm{d}\phi_V, \tag{38a}$$
$$\mathrm{d}q_C = -\mathrm{d}q_L = -\mathrm{d}q_V. \tag{38b}$$

[5]在电路理论中，通常将电压源视为无限大的电容器，其电压与流经它的电流无关，即 $\lim_{q^v,\ C_v\to\infty} \frac{q^v}{C_v} = V_s(t)$。同样的观点也适用于电流源和电感器。

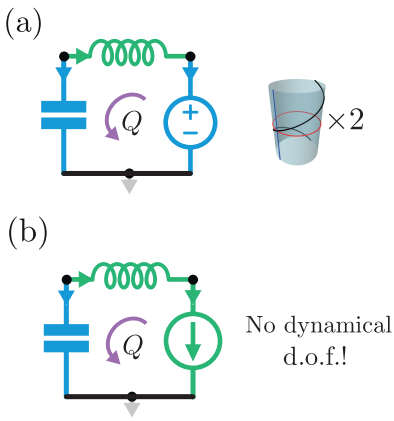


图7：含电压源（a）和电流源（b）的几何约化。电压源和电流源要么不影响几何约化，如（a）所示；要么使动力学变得平凡，如（b）所示。自然地，对偶电路（将串联连接换成并联连接，并将元件换成对偶元件）具有对偶性质。.

几何解为

$$q_C = Q, \quad q_L = -Q \bmod (2e), \quad q_V = -Q, \tag{39a}$$

$$\phi_C = \Phi', \quad \phi_L = \Phi, \quad \phi_V = (\Phi' - \Phi) \bmod (\Phi_Q), \tag{39b}$$

其中 $\{Q,\ \Phi\} \in \mathbb{R}$，以及 $\Phi' \in S^1$，使得二形式可用延拓变量表示，即 $\omega = \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}\Phi$，且总含时哈密顿量为

$$H_T = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} - QV_s(t). \tag{40}$$

现在，让我们如图7（d）所示，将电压源替换为电流源，并推导出这一系统不具有动力学自由度这一已知结果。约束方程与方程（38）相同，只需将下标 $V \to I$ 替换掉；但在给定假设的拓扑结构（电流源支路变量与电感器的变量相同）的情况下，其解为

$$q_C = Q, \quad q_L = q_I = -Q \bmod (2e), \tag{41a}$$

$$\phi_C = \Phi + \Phi', \quad \phi_L = \Phi, \quad \phi_I = \Phi', \tag{41b}$$

其中 $\{Q、\ \Phi、\ \Phi'\} \in \mathbb{R}$。用该子流形的参数化表示的二形式为 $\omega = \mathrm{d}Q \wedge (\mathrm{d}\Phi + \mathrm{d}\Phi')$，它不是典范形式。能量项写作

$$H_T = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} + \Phi' I_s(t). \tag{42}$$

进行坐标变换 $\bar{\Phi} = \Phi + \Phi'$ 后，我们得到正则二形式 $\mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}\Phi$，而能量则变为

$$H_T = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} + (\bar{\Phi} - \Phi) I_s(t). \tag{43}$$

然而请注意，磁通 Φ是二形式的零模，因此，为了与运动方程保持一致，方程（$\partial_\Phi H = \Phi/L - I_s(t) = 0$。将其解重新代入方程（43），最终得到随时间变化的哈密顿量

$$H_T = \frac{Q^2}{2C} + \bar{\Phi} I_s(t), \tag{44}$$

其经典动力学是平凡的。

至此，我们结束关于用于构建超导网络的主要集总元件的支路变量所具有的猜想中的内禀拓扑的讨论。我们注意到，在假设紧变量存在并采用图4中所提出的赋值的情况下，仍需开展进一步工作，以将约化方法中的拓扑分析更一般地扩展到电路，包括理想变压器、非互易元件和电阻器的约束。

6 其他电路示例

下面进一步通过将系统方法应用于两个电路示例来说明如何获得哈密顿量；在纯节点-磁通 [27] 或回路电荷方法中，这两个电路会是奇异的或有缺陷的，[30]，见图8。带有电压源（用于模拟随时间变化的外部磁通 [119]）和电阻的其他典型示例，以及非线性奇异电路 [85, 86] ，将在附录G中讨论。

6.1 非线性星形电路

考虑图 8（a）中的电路：圆周上有 3 个节点，它们通过电容器连接形成一个闭环，并且每个节点都通过电感器连接到位于中心的第四个公共节点。我们首先将本方法应用于该电路的线性化版本。仅使用节点磁通变量 Φ_i （回路电荷变量~ Q_i）作为构型空间坐标时，动能矩阵 C （L）是奇异的，拉格朗日量存在缺陷 [27, 30]，，无法通过勒让德变换得到哈密顿量。

按照我们的方法，可以找到电压和电流（一形式 $\mathrm{d}\Phi_i$ 和$\mathrm{d}Q_i$）的一组完备基，它们构成$\mathsf{F}_{\mathrm{Kir}}$的核。在上一节引入的电感器和电容器支路变量所采用的拓扑假设下（见图4），我们可以对$\mathbb{R}^6 \times \mathbb{T}^6$ 中的几何方程进行积分，从而得到由节点磁通$\mathbb{R}^6$ 和回路电荷 Φ_i 作为坐标的子流形 Q_i。无论子流形的拓扑结构如何，预正则二形式（5）的拉回$\omega = \imath^* \omega_{2B}$变为

$$\begin{aligned}\omega = &\mathrm{d}Q_1 \wedge (\mathrm{d}\Phi_1 - \mathrm{d}\Phi_2) + \mathrm{d}Q_2 \wedge (\mathrm{d}\Phi_2 - \mathrm{d}\Phi_3) \\ &+ \mathrm{d}Q_3 \wedge (\mathrm{d}\Phi_3 - \mathrm{d}\Phi_1)\,.\end{aligned} \tag{45}$$

其具有零向量，

$$\mathbf{W}_l = \frac{\partial}{\partial\Phi_1} + \frac{\partial}{\partial\Phi_2} + \frac{\partial}{\partial\Phi_3}, \tag{46a}$$

$$\mathbf{W}_c = \frac{\partial}{\partial Q_1} + \frac{\partial}{\partial Q_2} + \frac{\partial}{\partial Q_3}, \tag{46b}$$

与坐标 w_c 和 w_l相关联。在进行相应的变量替换（见附录 G.2）后，我们得到 $\omega = \mathrm{d}Q_a \wedge \mathrm{d}\Phi_a + \mathrm{d}Q_b \wedge \mathrm{d}\Phi_b$，即 $\{\Phi_\alpha, Q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$。如果所有元件均为线性的，则达布基 $\{\xi^\mu\} \cup \{w^I\} \equiv (Q_a, Q_b, \Phi_a, \Phi_b, w_c, w_l)$ 中的能量函数可写为

$$\begin{aligned} H =& \frac{(Q_a + w_c)^2}{2C_1} + \frac{w_c^2}{2C_2} + \frac{(Q_b + w_c)^2}{2C_3} \\ &+ \frac{(w_l + \Phi_b)^2}{2L_1} + \frac{(w_l + \Phi_a + \Phi_b)^2}{2L_2} + \frac{w_l^2}{2L_3}. \end{aligned} \tag{47}$$

消去约束（求解线性方程 $\mathbf{W}_l(H) = \mathbf{W}_c(H) = 0$）后，我们得到最终的哈密顿量

$$H = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Q}^T \mathsf{C}^{-1} \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathsf{L}^{-1} \boldsymbol{\Phi}\right), \tag{48}$$

其中 C^{-1} 和 L^{-1} 现在是满秩的 2×2 矩阵，计算的全部细节见附录 G.2。自然地，在利用星形-网格等效 [120], 并随后约化其中一个变量后，该线性电路适用于节点磁通（回路电荷）量子化。值得强调的是，这一线性约化等效以及所有其他线性约化等效都已内在地集成到该方法中。

接下来，令第三个电容器和第一个电感器为非线性元件，其能量函数分别为 $h_c(q_{c3})$ 和 $h_l(\phi_{l1})$，其中 q_{cj} 为第 j 个电容器的支路电荷，ϕ_{lj} 为第 j 个电感器的支路磁通。现在暂且仍用磁通和电荷的同一旋转基 $\{\xi^\mu\} \cup \{w^I\} \equiv (Q_a, Q_b, \Phi_a, \Phi_b, w_c, w_l)$ 来描述动力学，以便写出典范二形式，而不为这些变量指定特定拓扑。与前述线性情形不同，现在有两个非线性零模方程 $\mathbf{W}_c(H) = \frac{Q_a+w_c}{C_1} + \frac{w_c}{C_2} + h_c'(Q_b + w_c) = 0$和 $\mathbf{W}_l(H) = \frac{w_l+\Phi_a+\Phi_b}{L_2} + \frac{w_l}{L_3} - h_l'(-(w_l + \Phi_b)) = 0$，它们实现电荷守恒与能量守恒，从而将动力学一致地约化为两个自由度。在满足条件 $h_c''(x) + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} > 0$ 和$h_l''(-y) + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} > 0$时，这些方程可给出变量 w_c 和 w_l 的显式解，从而得到具有两个自由度的简化哈密顿量和典范二形式，并可进一步进行正则量子化。若条件不满足，则该情形属于更一般的一类奇异性，目前仍在积极研究中 [85, 86]，参见附录 H。对这一非线性情形的分析假定积分子流形具有相同的拓扑。事实上，很容易看出，如果非线性电容器和电感器恰好分别是相滑移元件和

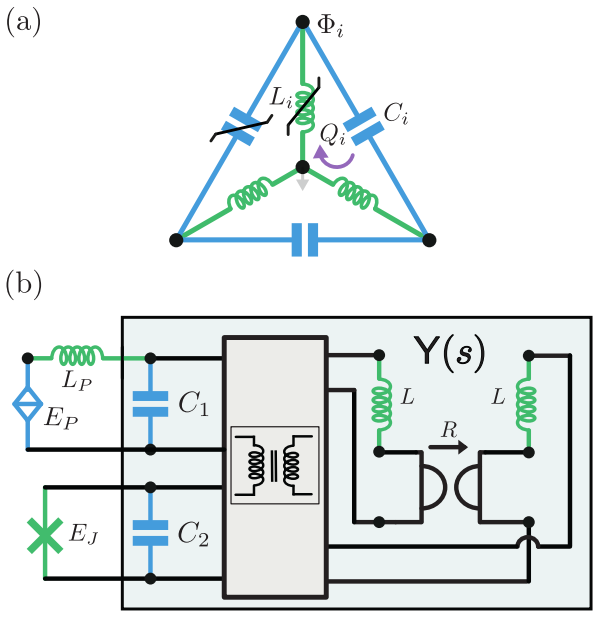


图 8：（a）星形电路：一种典型的奇异电路。电流守恒（内部节点）和电压守恒（外环路）可能导致变量约化。各元件从带有标签的元件开始，按顺时针方向依次命名，索引为 $i \in \{1、2、3\}$。（b）约瑟夫森结和相滑移结耦合到一个由导纳矩阵 $\mathsf{Y}(s)$ 描述的二端口非互易线性系统；该矩阵可正则分解为由电感器、电容器、回转器和变压器构成的网络。

约瑟夫森结，那么按照图 4中支路变量所假定的拓扑对普法夫方程进行积分，所得结果仍是一个子流形 $\mathbb{R}^6$（其坐标仍由节点磁通和回路电荷$\{\Phi_i,\ Q_i\}$给出）。

6.2 非互易黑箱导纳量子化

作为第二个示例，我们的方法能够自然地将高效的黑箱量子化方法扩展 [45, 47, 49] 到具有多个端口和极点的非互易环境中。需要指出的是，这里我们不考虑初始流形的任何拓扑赋值 $\mathcal{M}_{2B}$，而只考虑局部解。考虑图 8(b) 中的电路：一个具有导纳矩阵$\mathsf{Y}(s) = \mathsf{D}_\infty s + (\mathsf{D}_1 s + \mathsf{E}_1)/(s^2 + \Omega_1^2)$ [14] 的典型非互易二端口线性系统，该系统的端口处分别耦合了一个约瑟夫森结和一个相滑移结。按照我们系统的方法，我们发现二形式（$\omega = \imath^* \omega_{2B}$）是退化的，具有一个规范零模。系统地消去该零模后，我们得到哈密顿量

$$\begin{aligned} H =& \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Q}^T \mathsf{C}^{-1} \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathsf{L}^{-1} \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{Q}^T \mathsf{G}\, \boldsymbol{\Phi}\right) \\ &+ h_P(Q_1) + h_J(\Phi_2), \end{aligned} \tag{49}$$

其中包含三对共轭变量 $\{\mathbf{\Phi},\ \boldsymbol{Q}^T\} = \mathbb{1}$，可用于正则量子化。具体计算在附录 G.3 中明确给出。值得注意的是，通过采用 [32] 中提出的代数方法，并结合一种临时消去变压器约束的方法，随后对非互易零模进行威廉姆森约化 [121]，也可以经过更多工作得到这一哈密顿量。

7 结论与展望

本文提出了一种全新且系统的方法，该方法完全可编程，可用于在一致的、完全几何化的描述框架下，将一般集总元件电路的动力学，即基尔霍夫方程和本构方程，表示为一阶拉格朗日函数和瑞利耗散函数的形式。利用 Faddeev-Jackiw方法，我们识别并分类了奇异性。对于所有非奇异电路以及若干重要类别的奇异电路，我们给出了哈密顿描述。我们的解法建立在对电路状态自由度进行正确识别的基础上，这些自由度由磁通变量和电荷变量混合构成，同时包括紧致变量和扩展变量。我们通过包含非互易元件和非线性元件的教学性电路展示了该方法，并重点讨论了那些无法在纯节点磁通/回路电荷构型空间方法中处理，或在该方法中表现为奇异的电路。此外，我们提出了一种为基本储能元件的支路流形赋予拓扑结构的方案。该方案受到现象学和微观层面论证的启发，并与我们所知的所有实验结果相一致。

在这一框架下，未来还需将非线性耗散纳入电路的经典动力学 [19]。此外，还需扩展第5节为多端口超导量子电路的几何约化所提出的具体假设集合，这些电路部分由理想变压器约束和非互易约束描述。最后，将其推广至准集总元件电路 [78, 122],，并为量子化电网络构建完全量子力学的耗散模型（例如，采用卡尔代拉-莱格特形式体系） [3, 27, 28, 123],，只需对本文得到的模型取适当的连续极限，这应当是顺理成章的 [31, 56]。

注：在完成本文期间，我们注意到参考文献 *[124]*（后来发表于 *[125]*），该文针对范围更窄的一类电路得出了一些本文所述的结果，即仅包含无耗散（互易）二端元件的电路。

致谢

A. P.-R. 感谢加拿大首席研究卓越基金和胡安·德拉·谢尔瓦奖学金 FJC2021-047227。I. L. E. 感谢巴斯克政府通过 IT1470-22 号拨款以及由 MICIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PCI2022-132984 项目提供的支撑。以及欧盟 NextGenerationEU/PRTR。

A 数学元素

由于所研究系统的特殊性质，本文只需要用到微分几何和辛几何中的一些非常基础的概念。尽管如此，我们仍会对这些概念作简要回顾。适合物理学家的微分几何入门读物有 [94] 或 [126]。对于经典力学语境下的辛几何，我们推荐 [127] 或 [128]。

A.1 微分几何

微分几何的研究对象是（光滑）可微流形 $\mathcal{M}$，它们在局部同胚于 $\mathbb{R}^n$（其中 n 为维数），并且这些局部描述彼此兼容，即转移函数是（无穷次）可微的。在流形的每个点处，（切）向量被定义为在该点相切的曲线的等价类。不过，也存在其他等价的定义。就我们的目的而言，最相关的定义是：它们是该点处（可微函数的芽的代数）上的导子。给定一个局部坐标系 x^i，点 p 处的向量 $\boldsymbol{V}_p$ 作用于函数上为

$$\boldsymbol{V}_p(f) = V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\,, \tag{50}$$

其中 V^i 是切向量的分量。这一定义可推广到向量场，即将不同点处的切向量光滑地拼接在一起。这可以严格理解为切丛 $T\mathcal{M}$ 的一个截面；切丛是有序对 $(p, \boldsymbol{V}_p)$ 构成的空间。我们将向量场局部写为

$$\boldsymbol{V} = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{51}$$

我们称一个向量场处处不为零（没有临界点），如果在每个坐标图中，其分量不同时为零。在这种情况下，它为流形上的每个点提供了一个方向，因此也为我们提供了一个局部坐标 v使得 $\boldsymbol{V}(f) = \partial f/\partial v$。

两个向量场的对易子可直接构造为 $([\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}])(f) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{W}(f)) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{V}(f))$。向量场对易的情形是对合的一个特例，即对易子在每个点都属于两个切向量的张成空间，并且对易子是一个向量场。如果我们有对合的向量场，那么底流形上存在局部坐标，这些坐标分为两类：一类对应于对合中的向量场，另一类在这些向量场的作用下保持不变。简而言之，局部地，我们有如下形式的坐标$\{v, w\} \cup \{\xi^\alpha\}$，使得对合中的向量场只涉及前两个坐标。也就是说，我们得到局部适应坐标。

在流形的每一点，我们都可以考虑切向量向量空间的对偶。它们就是对偶

向量、余切向量（余向量），或者更适合当前语境地说，一形式。设 θ 是点 p 处的一个一形式，$\boldsymbol{V}_i = \partial/\partial x^i$ 是某个坐标系中该点处的坐标切向量。那么 $\langle \theta, \boldsymbol{V}_i \rangle = \theta_i$ 是该一形式在该坐标系中的分量；在局部范围内，我们可以写成 $\theta = \theta_i \mathrm{d}x^i$，其中 $\mathrm{d}x^i$ 构成 $\boldsymbol{V}_i$ 的对偶基。通过类比向量场，这可以平滑地扩展为微分1-形式或余向量场 θ，并且这一过程还可以扩展到张量场。一个具有 r 个协变、q 个逆变的张量场，其分量在局部坐标中分别带有 r 个下标和 q 个上标，并分别按照一形式和切向量的方式变换。

不过，除了向量和余向量之外，我们还将考虑的张量场只有两类。即 r 阶协变的完全反对称张量场，或称微分形式，以及 2 阶协变对称张量场。令V_p 表示该点处切向量的向量空间。点 p 处的线性 r 阶微分形式，将 r重张量积$V_p \otimes V_p \otimes \cdots \otimes V_p$（含有 r 个因子）线性地映射为数。外r形式是完全反对称的线性 r 形式。我们用 Ω^r_p表示 p 处外 r形式的向量空间。外积或楔积以显然的方式将外形式的 $\Omega^r_p \times \Omega^q_p$映射到 $\Omega^{(r+q)}_p$。因此，两个 1-形式 θ_1 和 θ_2 的楔积作用于张量积$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ 上时为

$$(\theta_1 \wedge \theta_2)(\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}) = \theta_1(\boldsymbol{V})\theta_2(\boldsymbol{W}) - \theta_1(\boldsymbol{W})\theta_2(\boldsymbol{V}) . \tag{52}$$

相应的张量场是微分形式，其中 $T^*\mathcal{M}$的余切丛，即流形 $\mathcal{M}$的余切丛，是由形如（p, θ）$_p$ 且 $\theta_p \in \Omega^1_p$的点对组成的空间，并且光滑相连，其他丛也以类似方式定义。我们可以使用记号 $\Omega^r(\mathcal{M})$表示 $\mathcal{M}$上的光滑 r 阶微分形式空间，因此 $\Omega^1(\mathcal{M}) = T^*\mathcal{M}$。如果流形的维数为 n，则向量空间 Ω^r_p 的维数为 $\binom{n}{r}$。注意，对于 $r > n$ Ω^r_p 为空，因此 $\Omega^r(\mathcal{M})$也为空。

还需要提及一个重要概念，即外微分。这是一个映射 $\mathrm{d} : \Omega^r(\mathcal{M}) \to \Omega^{r+1}(\mathcal{M})$，它作用于具有局部表达式的形式

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 i_2 \cdots i_r} \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \tag{53}$$

（隐式求和）后得到 $r+1$ 微分形式

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \cdots i_r}}{\partial x^j} \, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} . \tag{54}$$

关键在于，$\mathrm{d}^2 = 0$。如果一个微分形式 θ 的外微分恒等为零，即 $\mathrm{d}\theta = 0$，我们就称其为闭合的 。如果一个微分形式 θ 等于另一个形式的外微分，即存在 β 使得$\theta = \mathrm{d}\beta$，我们就称其为恰当的 。这些定义是几何性的，即与坐标的选择无关。显然，所有恰当的微分形式都是闭合的，但并非所有闭合的微分形式都必然是恰当的。闭合但不恰当的微分形式是否存在，是德拉姆上同调研究的主题，并且取决于底流形的拓扑。

对我们而言，最重要的例子是圆 S^1。我们无法用单个坐标图覆盖整个圆，否则会出现不连续性。然而，在圆的每个点上，我们都有一个一形式 θ，它与局部平移生成元对偶，在坐标中表示为 ∂_φ。这个一形式局部上是角坐标的外微分$\mathrm{d}\varphi$，但它并不恰当。不过，它必然是闭合的，因为 $\Omega^2(S^1) = \emptyset$。

微分形式的引入以及用符号 d 表示外微分，都与流形上的积分概念密切相关。就本文而言，最相关的一点是：通过将单个系数函数的勒贝格积分或黎曼积分与 $\int_{\mathcal{M}} \omega$ 相匹配，可以良好地定义在一个 n 维可定向流形 $\mathcal{M}$ 上对 n形式 ω 的积分。特别是，我们需要关注沿光滑曲线对一形式的积分，其中闭合回路尤为重要。因此，考虑在 S^1 上对 $\mathrm{d}\varphi$ （作为 θ 的局部表达式）进行积分：结果为 2π。如果一个一形式沿流形上所有可能闭合回路的积分都为零，那么它就是恰当形式。这正是斯托克斯定理和高斯定理的根本依据。为了刻画流形的拓扑（限于本文涉及的情形），我们必须关注非平凡圈是否存在，即那些无法通过光滑变形收缩到一点的回路。我们也用“非平凡圈”指称每个由同伦等价的环路构成的相应等价类。例如，环面上有两个独立的非平凡圈。虽然我们不会着重阐述这一视角，但识别施加约束后所得流形中的非平凡圈，是全面理解最终动力学的关键。

一个微妙的话题是嵌入与浸入。设$\mathcal{M}$ 是一个维数为 m 的流形，$\mathcal{N}$ 是一个维数为 $n < m$的流形。并非所有从$\mathcal{N}$到$\mathcal{M}$ 的光滑映射 f，都能使 $f(\mathcal{N})$从 $\mathcal{M}$ 继承的微分结构与其自身所具有的微分结构相一致。举例来说，设想将 S^1 映射到平面上，使得 S^1 的像存在自交，尽管它是一条闭合曲线，且其他方面都光滑。这意味着，当我们沿着 S^1 上的一条轨迹前进时，也会沿着 S^1的像上的一条轨迹光滑地前进，即使经过自交点也如此。由于向量是经过一点的轨迹的等价类，S^1 上的切向量会被光滑地映射到 $\mathbb{R}^2$ 在S^1 各点处的切向量。我们称这是 S^1 在平面中的浸入。然而，由于 S^1 上至少有两个点在平面上的像相同，因此回到 S^1 及其切丛时会产生歧义。如果不存在这种歧义，也就是说，在这个例子中，像没有自交，那么我们就说$\mathcal{N}$ 嵌入了$\mathcal{M}$，且 $f(\mathcal{N})$是$\mathcal{M}$的子流形。每当我们谈及流形$\mathcal{M}$的子流形时，意思是它们可以理解为另一个流形$\mathcal{N}$的嵌入 $f(\mathcal{N})$，或者等价地说，该子流形与$\mathcal{N}$微分同胚。可以想象，子流形不会有

已于 2024-09-03 接收，点击标题进行核实。根据 CC-BY 4.0 协议发布。

自交。

A.2 辛几何

在分析力学的发展过程中，人们认识到切丛和余切丛是拉格朗日量与哈密顿量作用其上的空间。与此相关的是，人们需要一种将向量场映射为微分形式的映射。这些映射由二阶协变张量场给出，因为它们将成对的向量场映射为底流形上的函数。完全对称的二阶协变张量（若为正定且非退化，则称为度量）在这一语境下并不那么重要，关注的对象是微分二形式。特别是闭非退化微分二形式，其专名为辛形式。这些结构自然地存在于余切空间上，但并不限于余切空间。

并非所有微分二形式都是辛的。闭合性和非退化性这两个条件都必须满足。实际上，非退化性的分析是在坐标中进行的。也就是说，给定一个微分二形式和一个坐标图，我们可以得到一个关于坐标的矩阵函数。通常，对于二形式及其相关的矩阵函数会使用相同的符号，这是因为隐含地假定了某个特定的坐标；矩阵本身会在变量替换下发生变化。另一方面，相似变换下的矩阵不变量将保持不变，因此它们是二形式固有的性质。特别是秩。因此，微分二形式在某一点的退化性问题与坐标系无关，而任意一组坐标中矩阵函数在该点的行列式都能反映这一点。我们交替使用“满秩”和“非退化”这两个术语。

二形式的满秩概念与线性算子的满秩概念直接对应，表示在底层流形的所有点上，二形式都没有零向量。具体来说，在流形的每个点，二形式取两个向量（该点切空间中的两个元素），并将这一对向量映射为一个数。点 p 处的向量 $\boldsymbol{W}_p$ 是二形式的零向量，当且仅当对该点处所有 $\boldsymbol{V}_p$ 向量，均有 $\omega(\boldsymbol{W}_p,\ \boldsymbol{V}_p) = 0$。点 p 处二形式的秩，等于流形的维数减去该点处二形式的核的维数。请注意，秩是一个局部量；一般而言，秩可能是非齐次的。

现在来描述余切丛 $T^*\mathcal{M}$的自然辛结构。余切丛本身也是流形，并且总可以选取局部坐标 $\{q^i, p_j\}$，其中 q^i 是构型空间 $\mathcal{M}$ 的坐标，而p_i 是$\mathcal{M}$在相应余向量基下该点处一形式的分量。典范一形式 θ 的局部表达式为 $p_i\mathrm{d}q^i$，其外微分为 $\omega = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$，该外微分是闭合的（因为它是恰当的），并且是非退化的。

配备辛形式的偶维流形$\mathcal{M}$若存在辛形式 ω，则该流形连同这一特定形式称为辛流形。并非所有辛流形都微分同胚于余切丛。例如，环面$S^1 \times S^1$ 是辛流形，其辛形式为 $\theta^1 \wedge \theta^2$，其中θ^i是相应紧致方向上的一形式。事实上，所有可定向二维流形都可以配备辛形式。然而，紧致流形不能是余切丛。另一方面，所有辛流形都存在局部坐标，使得辛形式在局部可以表示为 $\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$。我们将这些坐标称为达布坐标。

辛形式是哈密顿动力学的核心，因为它为每个光滑函数 H 在$\mathcal{M}$上指定一个向量场 $\boldsymbol{X}_H$，其积分曲线是解动力系统 H，并由 ω 确定。该向量场由以下条件定义：

$$\langle \mathrm{d}H, \boldsymbol{V}\rangle = \omega(\boldsymbol{X}_H, \boldsymbol{V}) \tag{55}$$

对于所有向量场 $\boldsymbol{V}$均成立。非退化性的条件是必需的，以便函数 H能够完全确定该向量场。达布坐标中的运动方程就是哈密顿方程，

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}\,. \end{aligned} \tag{56}$$

这个从函数到向量场的映射还允许在$\mathcal{M}$上的光滑函数空间上构造一种特殊的代数结构，其定义为泊松括号

$$\{f, g\} = \omega(\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g)\,. \tag{57}$$

ω的反对称性保证了$\{f,\ g\} = -\{g,\ f\}$。对于 g 函数、 θ 微分1-形式和 $\boldsymbol{V}$向量场，$\mathrm{d}(gh) = g\mathrm{d}h + h\mathrm{d}g$ 这一事实，连同$\langle g\theta,\ \boldsymbol{V}\rangle = g\langle\theta,\ \boldsymbol{V}\rangle$，确保泊松括号的作用如同导数，

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}\,. \tag{58}$$

泊松括号的最后一个性质，即雅可比恒等式，在此定义中源于辛形式是闭合的。

A.3 关于正则量子化

在本文中，我们将正则量子化视为一类量子力学模型的构造：其输入数据是余切丛上的哈密顿函数 $T^*\mathcal{M}$。即使在这一受限情形下，也可能出现许多微妙之处 [129], 因此，实际上我们还将讨论范围进一步限定为与 $\mathbb{R}^n \times \left(S^1\right)^k$微分同胚的构型空间。在这种情况下，暂且不考虑排序问题和 Groenewald-van Hove 定理，就我们的目的而言，只需考察 T^*S^1。我们的观点是，所构造的量子模型应当反映经典

模型的关键性质。首先，我们所出发的经典哈密顿量是圆柱面上的一个函数，其具体函数形式取决于描述该圆柱面时所使用的坐标。其次，存在一个向量场生成绕轴的旋转。利用自然辛结构生成该向量场的圆柱面上的函数，实际上就是沿轴方向的坐标函数。在经典情况下，绕轴的完整旋转必须使系统保持不变。在量子力学中，我们必须允许这种旋转产生相位的可能性，因为理论必须能够预测的概率是由干涉振幅计算得到的。因此，我们必须考虑一个可观测量，它承担生成旋转的作用，并且能够与单值化联系起来。存在一个自然的候选族：作用在区间 $(\varphi_0, \varphi_0+2\pi)$ 上函数的 $-i\partial_\varphi$ 的自伴延拓。该族由群 $U(1)$ 参数化，这正是我们通常通过广义周期性条件 $\psi(\varphi_0+2\pi) = \exp(-i\gamma)\psi(\varphi_0)$ 表示的单值化。注意，对于 $\exp(i\gamma)$ 的确定值，这些可观测量具有离散谱，$\sigma(\hat{}n_\gamma) = \mathbb{Z} - \gamma/2\pi$。在量子电路语境中，通常将 $n_\gamma = \gamma/2\pi \in [0,1$ 称为门电荷。圆上的量子化意味着使用该算符，并在相应的基中展开函数；或者通过幺正变换，使用 $\hat{}n_0 - \gamma/2\pi$，其中 $\hat{}n_0$ 是严格周期性边界条件下的自伴延拓，并在周期基中展开。注意，圆柱面上的函数在使用相应坐标化时，也必须用适当的周期基表示。

这个例子说明了许多问题。首先，重点不应放在希尔伯特空间上，因为希尔伯特空间无法区分开区间与圆，而应放在可观测量上。其次，运动学对称性是确定量子模型中核心可观测量的指导原则。第三，如果经典模型包含紧致方向，即使对于最简单的可观测量，也必然会出现不等价量子化。

本工作的核心目标之一，是提出一种系统化流程：如果存在这样的描述，则确定如何将电路动力学的经典描述表述为切丛空间上的哈密顿量系统；否则，确定这种描述存在的障碍。在本工作中，我们不讨论替代性的量子化规定，也不讨论不等价量子化的可能性或正则方案的微妙之处。

B 约束、几何与代数

这里我们明确说明嵌入矩阵 K 的构造，并通过一个简单例子加以说明。此外，该例子还将展示我们稍后希望强调的这一过程中的其他要点。

首先考虑只有基尔霍夫约束的情形。自基尔霍夫本人开展相关工作以来 [76], ，代数构造一直以来都以一对相关矩阵的形式确立下来：基本回路矩阵 F_L（请注意，我们按照电路文献中的惯例使用“回路”一词，来称呼图论数学文献中所谓的“圈”）和基本割集矩阵 F_C；此外，它们还满足特尔根性质，即 $\mathrm{F}_L\mathrm{F}_C^T = 0$。为求得这两个矩阵，首先要对节点编号，索引为 n，并对支路编号，索引为 b；还要确定表示该集总元件电路的图中各支路的方向（将图论引入分析可追溯至 Weyl [96]）。图的关联矩阵 A_{nb}的秩为 $\min(N, B) - N_C = N - N_C$，其中 N 是节点数，B 是支路数，N_C 是图的连通分量数。若该图对应一个非平凡电路，则至少存在一个回路，这意味着 $B \geq N$。基本割集矩阵 F_C 是对关联矩阵进行高斯消元后得到的简化行阶梯形，同时舍弃 N_C 个恒为零的行。对于不熟悉这些代数构造的读者，可以注意到，它们等价于找出一组最小的节点磁通，使其能够确定所有支路电压降。采用这种典范形式的优势在下一步中显而易见：这意味着可以直接构造 F_C 的核。取该核空间的一组基，其向量属于 $\mathbb{R}^B$。将基向量按行排列，即得到基本回路矩阵 F_L，而特尔根性质$\mathbf{i}\cdot\mathbf{v} = 0$ 随之成立。

基尔霍夫约束采用与本文记号相衔接的格式写出时，表示为

$$\mathsf{F}_{\mathrm{Kir}}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \mathsf{F}_C & 0 \\ 0 & \mathsf{F}_L \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = 0\,, \tag{59}$$

这是一个普法夫外微分系统。求解这些约束意味着我们要得到 $\mathsf{F}_{\mathrm{Kir}}$ 的核空间的一组基，并将其向量排列为矩阵 K 的各列，即 $\mathsf{F}_{\mathrm{Kir}}\mathsf{K} = 0$。由于我们已为基尔霍夫约束选取了典范形式，如果这些是仅有的约束，就可以显式写出 K，即

$$\mathsf{K}_{\mathrm{Kir}} = \begin{pmatrix} \mathsf{F}_L^T & 0 \\ 0 & \mathsf{F}_C^T \end{pmatrix}. \tag{60}$$

不过请注意，也存在其他算法，而且可以系统地实现；如果不从典范形式出发，就可以采用这些算法。由于基尔霍夫约束分为两组，一组是电流守恒约束，即基尔霍夫电流定律（KCL），另一组是基尔霍夫电压定律，因此仅受$\mathsf{F}_{\mathrm{Kir}}$ 约束的流形显然具有彼此分离的电流方向和电压方向。以图9所示电路对应的图为例。很容易构造其典范形式下的基本矩阵，

$$\mathsf{F}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\mathsf{F}_L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

描述由图中拓扑结构构成的所有 可能电路所需的最小变量集合。

已于 2024-09-03 接收，点击标题进行验证。根据 CC-BY 4.0 发布。

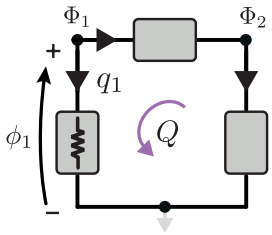


图 9：三个二端集总元件的串联连接。

9 因此，一个端口元件由一个回路电荷和两个节点磁通组成，我们可以显式写出$\mathsf{K}_{\mathrm{Kir}}$，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{q} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}Q \\ \mathrm{d}\Phi_1 \\ \mathrm{d}\Phi_2 \end{pmatrix} . \tag{63}$$

即使仅加入变压器约束，这种分离结构仍然保持不变，因为变压器根据电流确定电流，并根据电压确定电压；也就是说，存在一对矩阵 T 和 T'，使得 $\mathsf{T}'\mathsf{T}^T = 0$（局部特勒根性质）。使用正文（MT）中引入的投影算符记号进行连接，注意到

$$\mathsf{T}\mathsf{P}^{\mathcal{T}} = \mathsf{T} \tag{64}$$

这是必需的，对于 T' 也同样如此。它们给出的普法夫系统为

$$\mathsf{F}_T \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \mathsf{T} & 0 \\ 0 & \mathsf{T}' \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = 0 . \tag{65}$$

因此，在仅包含基尔霍夫约束和变压器约束的系统中，普法夫系统再次划分为电流集合和电压集合；通过注意到在这种情况下

$$\ker\left(\mathsf{F}_{\mathrm{Kir}}\right) \cap \ker\left(\mathsf{F}_{\mathrm{T}}\right) = \ker\left(\mathsf{F}_{\mathrm{cur}}\right) \oplus \ker\left(\mathsf{F}_{\mathrm{vol}}\right) , \tag{66}$$

其中

$$\mathsf{F}_{\mathrm{cur}} = \begin{pmatrix} \mathsf{F}_C \\ \mathsf{T} \end{pmatrix} \qquad \text{and} \tag{67a}$$

$$\mathsf{F}_{\mathrm{vol}} = \begin{pmatrix} \mathsf{F}_L \\ \mathsf{T}' \end{pmatrix} \tag{67b}$$

作用于 $\mathbb{R}^B$，不同于作用于 $\mathbb{R}^{2B}$ 的 $\mathsf{F}_{\mathrm{Kir}}$ 和 F_T。因此，在这些条件下，我们将系统描述为由有效 回路电荷和磁通节点组成的系统（参见 [49]）。我们着重研究有效回路电荷，再次对 $\mathsf{F}_{\mathrm{cur}}$ 应用高斯消元，以确定这些电荷，使其化为简化行阶梯形式（舍弃可能存在的零行），

$$\mathsf{F}_{\mathrm{cur}} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{B-\tilde{L}} & \tilde{\mathsf{A}} \end{pmatrix} . \tag{68}$$

这里 $\tilde{\mathsf{A}}$ 是一个 $\left(B-\tilde{L}\right) \times \tilde{L}$ 矩阵，所有电流都由 L 有效回路电荷 $\{Q_i\}_{i=1}^{L}$ 独立确定，

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathsf{A}} \\ \mathbb{1}_{\tilde{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \vdots \\ \dot{Q}_{\tilde{L}} \end{pmatrix} . \tag{69}$$

其含义是，由于变压器的存在，图的独立回路数减少了，最终剩下一个有效独立回路集合。对于有效节点磁通，也可以进行类似的构造。

基尔霍夫约束和变压器约束中电流约束与磁通约束的可分离性，体现在这两种情形由纯数决定：基尔霍夫情形由关联关系决定，而变压器情形由匝数比决定。另一方面，电阻器约束和回转器约束都必须包含具有阻抗维数的参数，因为它们会混合电流和电压。

作为一个简单的例子，设想这样一种情况：在例子中，其基尔霍夫约束由公式（63）实现，第一条支路是一个电阻器，其本构方程为 $R\mathrm{d}q_1 = \mathrm{d}\phi_1 = \mathrm{d}\Phi_1$，见图9。于是，公式（63）被替换为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{q} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ R & 0 \\ 0 & 1 \\ R & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}Q \\ \mathrm{d}\Phi_2 \end{pmatrix} . \tag{70}$$

更一般地，如果存在电阻元件，K 中就会出现具有阻抗或导纳维数的矩阵元。然而，如果不存在非互易元件，最终的坐标可以选择为纯回路电荷坐标或纯磁通-节点坐标，正如我们在该例中所看到的。

事实上，约束元件（电阻器、变压器和回转器）可以用散射矩阵形式以统一方式描述，下面我们对此作简要总结。如 MT 中所述，我们将电路图的支路划分为带有标签$\mathcal{S} \in \{\mathcal{C},\mathcal{L},\mathcal{V},\mathcal{I},\mathcal{R},\mathcal{T},\mathcal{G}\}$的不同集合，依次表示电容器、电感器、电压源、电流源、电阻器、变压器和回转器。约束元件集合为$\mathcal{R} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{G}$。于是，对 $T\mathcal{M}_{2B}$ 齐次作用时，对于约束元件集合的子集$\mathcal{S}$，普法夫系统为

$$\mathsf{F}_S \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \left(R\left(\mathsf{P}^{\mathcal{S}} + \mathsf{S}^{\mathcal{S}}\right) \quad | \quad \left(\mathsf{S}^{\mathcal{S}} - \mathsf{P}^{\mathcal{S}}\right)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = 0 . \tag{71}$$

R 是特性阻抗，而 $\mathsf{S}^{\mathcal{S}}$ 散射矩阵是无量纲的。$\mathsf{P}^{\mathcal{S}}$ 是到$\mathcal{S}$集上的投影算子。散射矩阵 $\mathsf{S}^{\mathcal{S}}$ 满足

$$\mathsf{P}^{\mathcal{S}}\mathsf{S}^{\mathcal{S}} = \mathsf{S}^{\mathcal{S}}\mathsf{P}^{\mathcal{S}} = \mathsf{S}^{\mathcal{S}} . \tag{72}$$

如果散射矩阵是酉矩阵，则该约束是无损的；如果散射矩阵是对称的，则该约束是互易的。理想变压器是无损且互易的，因此，相应散射矩阵（在其支撑

空间 $\mathcal{S}$）的特征值要么为 1，要么为 -1，这意味着可以使用前文提到的 T 矩阵和 T′ 矩阵对其进行恰当描述，并满足局部特尔根性质。 $+1$ 特征子空间与 -1 特征子空间的分离意味着阻抗参数从变压器约束中消失。另一方面，理想回转器对应于无损散射矩阵的纯非互易部分，因此会混合电压和电流变量，并且需要阻抗参数。然而，由于它是无损的，所以满足局部特尔根性质。具有两条支路的最简单回转器约束为

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{73}$$

或者，更紧凑地写成，

$$\mathbf{i}_G = \mathsf{Y}_G \mathbf{v}_G = \frac{1}{R}\, i\sigma^y\, \mathbf{v}_G\,, \tag{74}$$

其中 σ^y 是虚泡利矩阵。更一般地，回转器约束矩阵的典范形式为

$$\mathsf{F}_G = \begin{pmatrix} \mathsf{P}^{\mathcal{G}} & | & -\mathsf{Y}_G \end{pmatrix}, \tag{75}$$

其中导纳矩阵 Y_G 为实矩阵，满足 $\mathrm{P}^{\mathcal{G}}\mathrm{Y}_G = \mathrm{Y}_G\mathrm{P}^{\mathcal{G}} = \mathrm{Y}_G$，并且在其支撑上是反对称的。

借助散射矩阵形式，我们可以将所有这些理想线性约束统一为一个散射矩阵和一个阻抗参数；这种方法可能有助于实现我们的规定自动化。然而，从概念角度出发，并着眼于证明一般性结论，将变压器、回转器和线性电阻约束分别呈现更为方便。

因此，我们所考虑的完整 Pfaff 外微分方程组将具有如下结构

$$\mathsf{F}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \mathsf{F}_{\mathrm{Kir}} \\ \mathsf{F}_T \\ \mathsf{F}_R \\ \mathsf{F}_G \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = 0\,. \tag{76}$$

和之前一样，任务是计算 F 的核，并将一个基作为列向量收集到矩阵 K 中。于是 $\mathsf{FK} = 0$ 成立，我们通过以下方式表示所得积分流形 $\mathcal{M}$（其坐标为 z^α）的嵌入：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \mathsf{K}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\,, \tag{77}$$

相应地，对于向量

$$\nabla_{\boldsymbol{z}} = \mathsf{K}^T \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}\,. \tag{78}$$

这些坐标通常既不像回路电荷坐标，也不像节点磁通坐标，而是将二者适当地混合起来。

在完成了用一组表面上相互独立的变量 z^α 对所有支路变量 ζ 的描述后，现在可以利用 K 矩阵来完成构造 ω 的任务。正如我们将要看到的，这仅仅意味着

$$\omega_{\alpha\beta} = [\mathsf{K}]_{b\alpha}\,[\omega_{2B}]_{bb'}\,[\mathsf{K}]_{b'\beta}\,, \tag{79}$$

使用坐标。

全局和局部 Tellegen 性质是以下陈述：

$$\begin{aligned} \mathsf{K}^T\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathsf{K} &= \mathsf{K}^T\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{T}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathsf{K} \\ &= \mathsf{K}^T\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{G}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathsf{K} = 0, \end{aligned} \tag{80}$$

连同它们的转置。第一个只是如下陈述：$\mathbf{i}\cdot\mathbf{v}$，对于所有满足基尔霍夫约束的可能$\mathbf{i}$ 和$\mathbf{v}$ 而言。至于第二个性质，注意到我们在上文引入的矩阵T 可以写成标准的右 Belevitch [12, 130] 形式$\mathsf{T} \to \begin{pmatrix} \mathsf{N} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$，其仅作用于$\mathcal{T}$中的支路；类似地$\mathsf{T}' \to \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathsf{N}^T \end{pmatrix}$ 仅作用于$\mathcal{T}$中的支路。这里的N 是匝数比矩阵。因此，$\mathcal{T}$中各支路的电流和电压必须具有如下形式：

$$\mathsf{P}^{\mathcal{T}}\mathbf{i} \to \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -\mathsf{N} \end{pmatrix}\tilde{\mathbf{I}} \qquad \text{and} \tag{81}$$

$$\mathsf{P}^{\mathcal{T}}\mathbf{v} \to \begin{pmatrix} \mathsf{N}^T \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}\tilde{\mathbf{V}}\,, \tag{82}$$

˜ ˜对于某些$\mathbf{I}$和$\mathbf{V}$而言；它们不一定是一般的，因为还必须满足其他约束。由此结构可得 $(\mathsf{P}^{\mathcal{T}}\mathbf{i})\cdot(\mathsf{P}^{\mathcal{T}}\mathbf{v}) = 0$。$\mathcal{G}$ 的局部 Tellegen 性质可由 Tellegen 引入的定义类似地推出 [97], , 这些定义要求理想元件不存在耗散。或者，也可以由散射矩阵 S 的幺正性推出$^{\mathcal{G}}$。

C 代数证明

二形式 ω_{2B} 在方程（5）中可更紧凑地写为

$$\begin{aligned} \omega_{2B} &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{q}^T \wedge \left(\mathsf{P}^{\mathcal{C}} + \mathsf{P}^{\mathcal{V}} - \mathsf{P}^{\mathcal{L}} - \mathsf{P}^{\mathcal{I}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\phi} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}^T \wedge \mathsf{E}_{2B}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}\,, \end{aligned} \tag{83}$$

with

$$\mathsf{E}_{2B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{C}} + \mathsf{P}^{\mathcal{V}} - \mathsf{P}^{\mathcal{L}} - \mathsf{P}^{\mathcal{I}} \\ -\mathsf{P}^{\mathcal{C}} - \mathsf{P}^{\mathcal{V}} + \mathsf{P}^{\mathcal{L}} + \mathsf{P}^{\mathcal{I}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{84}$$

它是以下表达式的反对称部分

$$\tilde{\mathsf{E}}_{2B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{C}} + \mathsf{P}^{\mathcal{V}} \\ \mathsf{P}^{\mathcal{L}} + \mathsf{P}^{\mathcal{I}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{85}$$

恰好是本构方程（12）中出现的矩阵。对于反对称矩阵，变换 $\mathsf{A} \to \mathsf{K}^T\mathsf{A}\mathsf{K}$ 是通过浸入映射 $\imath : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{2B}$将二形式拉回后在分量表示下的表达式。因此，我们看到，作用于 $\dot{\boldsymbol{z}}$ 方程（16）左端的矩阵是

$$\mathsf{K}^T\mathsf{E}_{2B}\mathsf{K} = \mathsf{K}^T\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P} \\ -\mathsf{P} & 0 \end{pmatrix}\mathsf{K}\,, \tag{86}$$

其中 $\mathsf{P} = \mathsf{P}^{\mathcal{C}} + \mathsf{P}^{\mathcal{V}} + \left(\mathsf{P}^{\mathcal{R}} + \mathsf{P}^{\mathcal{G}}\right)/2$ 得益于全局（基尔霍夫）和局部（$\mathcal{T}$与$\mathcal{G}$）Tellegen 性质，即方程（80）及其转置。

作为补充参考，我们提醒读者，拉格朗日函数 $L(\{q^i, \dot{q}^i\})$ 和瑞利耗散函数$\mathcal{F}(\{\dot{q}^i\})$ 可以为我们提供运动方程 [131]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}^i}\,. \tag{87}$$

D Faddeev 和 Jackiw 的方法

Faddeev 和 Jackiw 的原始论文 [82] 以及 Jackiw 后来撰写的极具教学性的介绍 [84]，都是理解该方法的良好资料。不过，在此我们将简要介绍该方法，以支持其在电路分析中的应用。这里先采用局部表述，即明确使用坐标，随后再用微分几何术语重新表述。

出发点是一阶拉格朗日量，我们将其写作

$$L = A_\alpha(z)\dot{z}^\alpha - H(z)\,. \tag{88}$$

由该拉格朗日量导出的欧拉-拉格朗日运动方程为

$$\omega_{\alpha\beta}(z)\dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha}\,, \tag{89}$$

with

$$\omega_{\alpha\beta}(z) = \frac{\partial A_\beta}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z^\beta}\,. \tag{90}$$

通常，使用微分形式来思考会很方便，在这种情况下，我们有

$$A = A_\alpha(z)\mathrm{d}z^\alpha\,, \tag{91a}$$
$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathrm{d}z^\alpha \wedge \mathrm{d}z^\beta\,, \tag{91b}$$
$$\omega = \mathrm{d}A\,. \tag{91c}$$

再看方程 (89)，注意，如果$\det(\omega) \neq 0$处处成立，那么我们便有由哈密顿量推导出的哈密顿方程 H，而泊松括号由矩阵 ω的逆给出，

$$\left\{z^\alpha, z^\beta\right\} = \omega^{\alpha\beta}\,, \tag{92}$$

约定

$$\omega^{\alpha\beta}\omega_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma\,. \tag{93}$$

然而，正如我们将在电路示例中看到的，$\det(\omega) = 0$ 在某些区域内并不成立，这种情况很常见。在我们关注的示例中，该方法的第一步将具有 ω 齐次秩，而非齐次秩则可能在后续步骤中出现。

无论如何，如果 $\det(\omega) = 0$ 在某处（或处处）为零，则运动不一定是哈密顿的。下面让我们考虑 ω 在奇点 p 处的零模（在下文需要时，这一点是隐含的），$\{\mathbf{W}_I\}$。这些是在 p 处的向量场，使得对于同一点处的所有 向量场 $\mathbf{V}$，我们有

$$\omega_p\left(\mathbf{W}_I, \mathbf{V}\right) = 0\,. \tag{94}$$

用坐标表示，我们有

$$\left(W_I\right)^\alpha \omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}\left(W_I\right)^\beta = 0\,. \tag{95}$$

因此，二形式的零模对应于一个约束，因为利用方程 (95) 和方程 (89) 可得约束

$$W_I = \left(W_I\right)^\alpha \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} = 0 \tag{96}$$

在该点处，其中我们定义值 W_I；并且，如果$\det(\omega) = 0$在一个具有齐次秩的区域内成立，则将W_I视为该区域上的函数。

此时会产生这样一个问题：是否可以通过施加约束来降低问题的维数。假设 ω 具有齐次秩。那么，在局部范围内，可以找到坐标 $z \to \left\{w^I\right\} \cup \{\xi^\mu\}$，使得约束为

$$\frac{\partial H(\xi, w)}{\partial w^I} = 0\,, \tag{97}$$

而一形式为

$$A = \frac{1}{2} f_{\mu\nu}\xi^\mu \dot{\xi}^\nu\,, \tag{98}$$

且 $f_{\mu\nu}$ 具有满秩。如果 H 是 w^I的非线性函数，则可以利用式（97）求解 w^I。因此，在此处，适合尽可能多地进行求解并降低维数。请注意，这些坐标的存在性仅在局部范围内得到保证，对于具有非平凡拓扑的 M，可能存在无法进行全局约化的障碍。此外，如果哈密顿量线性地依赖于 w^I，则有必要执行额外步骤。

另一种方法是，不像上述做法那样约化动力系统的维数，而是以相同方式处理所有约束，并为每个约束引入一个新坐标。维数的约化将以迂回方式实现，即在最终的哈密顿运动中识别守恒量。有些应用会同时采用维数约化和维数增加来研究同一个模型。这一方法的重要应用领域之一是圈量子宇宙学和圈量子引力 [132]。通常，人们会作出均匀性或各向同性等假设，并将其转化为模型的对称性，相应地约化动力系统的维数。另一方面，微分同胚不变性是广义相对论的关键要素，这意味着通常所理解的哈密顿量实际上是一个约束，用以确定一个轨迹。这意味着并不存在真正的演化。另一方面，该理论又应当具有预测能力，

已被 Quantum 2024-09-03接受，点击标题进行验证。根据 CC-BY 4.0 许可协议发表。

例如，应能描述与宇宙热历史相关的现象，因此需要以时间演化的形式呈现。为此，需要通过引入一个与哈密顿约束对偶的坐标——闵可夫斯基时间变量——来增加维数。

如果在迭代过程中的某一点， ω 不是齐次秩的，那么增加和约化过程都会失败。如果所研究的系统是一个物理模型，那么当模型的有效性遭到破坏时，就会出现这种情况。

现在让我们考察与约束相关的维数增加。这一过程通过为每个约束关联一个新的维数，以及一个与其切空间对偶的一形式 $\mathrm{d}\lambda^I$ 来实现。然后，我们将一形式 A 修改为

$$A \to A + W_I \mathrm{d}\lambda^I \,, \tag{99}$$

从而得到

$$\omega \to \omega + \mathrm{d}W_I \wedge \mathrm{d}\lambda^I \,. \tag{100}$$

如果这个扩展后的二形式是非退化的，我们就实现了为动力学建立哈密顿描述的目标。本文没有采用增加维数的路线，但不排除它在未来对特定的电路模型有用。我们应当指出，在量子宇宙学等语境中，系统不会与其他系统耦合，而我们所考虑的电路则可以通过多种方式进行探测。因此，我们认为最小动力学描述更为可取，并据此采用约化过程。

E 随时间变化的外部磁通和源

关于在研究超导电路时纳入外部磁通，文献中已有一些讨论（例如， [119]）。主要问题似乎在于，目前并不存在唯一的规定，而这也引发了人们对其描述唯一性的疑虑。在这里，我们从自己的角度研究这一问题。首先，结果表明，正如过程中的许多其他步骤一样，确实存在一定自由度；然而，由于底层的几何结构，在所有选择下物理学都是等价的。其次，规范变量可能会出现，并且可以作为我们过程的一部分将其消除。

需要指出的核心问题是，一个外部磁通与电路中的一个回路存在唯一对应关系。因此，用电压源描述外部磁通的规定（如图10所示）如下：

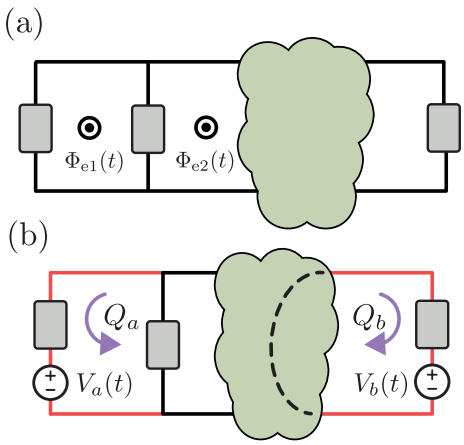


图10：a）磁通 Φ_1^e 和 Φ_2^e 穿过一个电路；b）用电压源 V_a 和 V_b 表示这些磁通，电压源对应于回路电荷，其中外部磁通根据一个循环分解被划分到各个源中。

1. 在施加变压器和回转器约束之前，选择一棵树及其对应的弦集，以进行基尔霍夫约束分析。每条弦对应一个唯一的回路，任意回路都可以表示为这些弦回路的线性叠加。

2. 具体而言，选择一棵树意味着基本割集矩阵已经确定，并已写成高斯-若尔当形式 $(\mathbb{1}\ \mathsf{A}_{\mathrm{chord}})$。特别是，这还意味着支路已按这样的方式排序：弦是最后编号的支路。回路基由以下列矩阵给出：

$$\mathsf{B}_{\mathrm{loop}} = \begin{pmatrix} -\mathsf{A}_{\mathrm{chord}} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} . \tag{101}$$

将这些列向量记为 $\mathbf{c}_i$，其中 i的值域为从 1 到弦支路的数量。

3. 给定一个外部磁通，与之关联的回路由一条边序列给出。这些边按照磁通符号确定方向；如果相应的边位于该磁通回路中，则用条目为 ± 1 的列向量表示该磁通回路，否则条目为 0。令 $\mathbf{l}$ 为该列向量。如果存在多个外部磁通，则令 e 为磁通的索引， $\Phi^e(t)$，并将相应的回路向量记为$\mathbf{l}_e$。

4. 现在计算$\mathbf{l}_e$ 在基 $\{\mathbf{c}_i\}$中的系数，

$$\mathbf{l}_e = {L_e}^i \mathbf{c}_i \,. \tag{102}$$

现在可以看到，我们能够将 磁通向量 $\Phi^e\mathbf{l}_e$在回路基中展开，

$$\Phi^e \mathbf{l}_e = \tilde{\Phi}^i \mathbf{c}_i = \Phi^e {L_e}^i \mathbf{c}_i \,, \tag{103}$$

利用这一点定义它在该基中的分量， $\tilde{\Phi}^i = \Phi^e {L_e}^i$。

5. 从描述电路 C 的前一个有向图 G 出发，我们现在通过将每条弦支路拆分为两条边（即为每条弦支路插入一个新节点），从而得到一个新图G' （以及一个新电路 C'）；其中一条边保留其原有属性（电容性、电感性、变压器支路.....），而

另一条边变为电压源，其电压函数为 $V_i(t) = \tilde{\Phi}^i$。我们讨论的是极大情形，即所有 $\tilde{\Phi}^i$ 均不为零。如果其中存在零值，则不拆分相应的弦支路，后续计数也必须进行适当修改，但结果在本质上不会改变。我们将仅在极大情形下继续进行描述。请注意，还存在其他方案。例如，与其拆分一条弦支路，有时将一个节点拆分为两个节点，并使新连接的支路成为源支路，会更加方便（且等价）。实际上，我们将在后面的一个示例（第 14节 G.4）中采用这一替代方案。

6. 按照这一过程，我们创建了一个具有新支路数 B' 和新节点数 N' 的新电路，因此将初始流形的维数增加到了 $2B'$。分量数 P 没有变化。设初始电路的弦数为 C_h，相应地，所得电路的弦数为 C'_h。于是，我们得到由该过程产生的以下关系组：

$$\begin{aligned} C_h &= B - N + P\,, \\ B' &= B + C_h = 2B - N + P\,, \\ N' &= N + C_h = B + P\,, \\ C'_h &= B' - N' + P = C_h\,. \end{aligned} \tag{104}$$

7. 初始二形式 ω_{2B} 的秩也发生了变化，即

$$\operatorname{rank}(\omega_{2B'}) = \operatorname{rank}(\omega_{2B}) + 2(B - N + P)\,,$$

因为我们为每个（断开的）弦引入了一个共轭对。

8. 然而，显然会存在冗余：用适用于基尔霍夫约束的语言来说，我们并未增加回路电荷的数量，该数量仍为 C_h，但将节点磁通的数量增加到了 $N' - P$。因此，在施加线性约束时，现在线性约束施加于 $\mathcal{M}^{2B'}$ 上，所得的预辛形式可能会具有额外的零模。更进一步，其中一些零模将是规范模。我们的意思是，对于零模 $\mathbf{v}$，构造为 $\Omega_v = \mathbf{v}\cdot\nabla_z H$ 的约束函数在约束上恒等为零。

9. 需要注意的是，对于初始电路中树和弦支路的其他选择，也会出现这些规范模。从物理角度来看，该过程的结果与用于施加基尔霍夫约束的树和弦支路的选择无关。事实上，我们对该过程的描述完全独立于被拆分的弦支路的性质。诚然，某些选择下规范模的数量会更少：如果弦支路具有电感性，就会出现一个规范模；但对于电容性情形则不会出现。尽管如此，该过程是系统性的，并且能够识别出这些规范模。

最后需要指出的是，还存在其他处理方式，其中基尔霍夫约束被改写为不再是线性的，而是仿射的。这一观点同样可以应用于接触几何分析。然而，正如我们将在下一节中展示的那样，与所考虑的这类电路相关的动力系统具有特殊性，因此不需要接触几何；由此，我们给出了这种保持基尔霍夫约束为线性的处理方法。

F 存在源和耗散时的动力学约束

在本文中，我们研究了集总元件电路的运动方程。该电路的储能元件为电容器和电感器，电阻为线性电阻，并且可能包含理想变压器和回转器；我们已经证明，这些运动方程可以写成由一阶拉格朗日量和二次瑞利耗散函数导出的形式，

$$L = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} z^\alpha \dot{z}^\beta - H - S_\alpha z^\alpha\,, \tag{105a}$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_{r\in\mathcal{R}} \dot{q}^r \dot{\phi}^r = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\dot{z}^a \dot{z}^\beta\,, \tag{105b}$$

其中瑞利函数的系数为

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\mathsf{K}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}^{\mathcal{R}} \\ \mathsf{P}^{\mathcal{R}} & 0 \end{pmatrix} \mathsf{K}\right]_{\alpha\beta}\,. \tag{106}$$

如上文所述并通过示例所示，通常情况下，ω 是退化的，由此产生的约束可以在不存在源和耗散时通过 Faddeev–Jackiw 方法进行分析。在本文中，我们将扩展对存在源和耗散时动力学约束的分析。

为此，注意到运动方程可以写成如下形式

$$(\omega_{\alpha\beta} - \mathcal{F}_{\alpha\beta})\ \dot{z}^\beta = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[H + S_\beta z^\beta\right]\,. \tag{107}$$

因此，若（采用显然的记号）矩阵 $\omega - \mathcal{F}$ 可逆，则我们得到一个常微分方程组；若 S_β 依赖于时间，该方程组就是非自治的，并且所有变量 z^α 都是动力学变量。注意，若 ω 退化且 $\omega - \mathcal{F}$ 可逆，则只有通过扩展相空间，该系统才可用哈密顿量加耗散的描述来处理。

另一方面，若 $\omega - \mathcal{F}$ 不可逆，则我们会得到（随时间变化的）约束，必须一致地加以施加。具体而言，设 W^α 为 $\omega - \mathcal{F}$的左零向量的分量，

$$W^\alpha\left(\omega_{\alpha\beta} - \mathcal{F}_{\alpha\beta}\right) = 0\,. \tag{108}$$

那么，以下条件是方程系统中的动力学约束，见方程 (107)：

$$W^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[H + S_\beta z^\beta\right] = 0\,, \tag{109}$$

以代替 FJ约束(96)。局部坐标化仍将以退化的w）和非退化的ξ）方向来表示，而动力学约束要求总能量函数 $H + S_\beta z^\beta$ 与退化方向无关。如果约束是可解的，我们将得到一个约化的动力系统。一般而言，这个动力系统不是哈密顿的，因此需要采用非哈密顿方法进行进一步分析。无论如何，我们的描述能够识别电路描述中的实际动力学内容。

现在我们来关注带源的非耗散情形。在这种情形下，可以对 Faddeev–Jackiw 方法进行扩展，但存在一些微妙之处。文献已从 Dirac–Bergmann [133–135]和 Faddeev–Jackiw[136] 两种视角考察了时变约束问题。我们先给出一般性描述，再结合我们的背景计算几个简单的例子，最后对非耗散电路的 FJ 约化进行一般性讨论。出发点是定义在$\mathcal{M} \times \mathbb{R}$上的（前）接触结构，其中实直线是时间参数，

$$\Omega_c = \omega + \mathrm{d}\left(H + S_\alpha(t) z^\alpha\right) \wedge \mathrm{d}t\,. \tag{110}$$

对于所研究的系统，其运动方程为

$$\omega_{\alpha\beta}\dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} + S_\alpha(t)\,, \tag{111}$$

二形式 Ω_c 是一个积分不变量。若存在一组时不变约束，使得子流形$\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ 在任意时刻均被确定，那么接触形式的拉回具有相同的结构，其中 ω 的拉回与时变能量函数彼此独立。然而，若存在时变约束，则 Ω_c的拉回中会出现一项额外项，其形式为 $B \wedge \mathrm{d}t$；除非 B 模 $\mathrm{d}t$是闭形式，否则我们无法将这种演化理解为哈密顿演化。更具体地说，用坐标表示的嵌入为 $z^\alpha(\xi^\mu, t)$。那么一形式 B 为

$$B = -\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial z^\alpha}{\partial t}\frac{\partial z^\beta}{\partial \xi^\mu}\mathrm{d}\xi^\mu\,. \tag{112}$$

因此，明确地说，$\mathrm{d}B$ 是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}B = &\frac{\partial}{\partial \xi^\nu}\left[\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial z^\alpha}{\partial t}\frac{\partial z^\beta}{\partial \xi^\mu}\right]\mathrm{d}\xi^\mu \wedge \mathrm{d}\xi^\nu \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial z^\alpha}{\partial t}\frac{\partial z^\beta}{\partial \xi^\mu}\right]\mathrm{d}\xi^\mu \wedge \mathrm{d}t\,,\end{aligned} \tag{113}$$

这意味着，如果第一项为零，则 B 在模 $\mathrm{d}t$ 的意义下是局部闭的。如果 B 在模 $\mathrm{d}t$ 的意义下是局部闭的，并且不存在全局障碍（在存在紧变量时可能会出现这种情况），那么我们可以确定一个函数 K，使得 $B = \mathrm{d}K$ 模 $\mathrm{d}t$。进一步假设 ω 的拉回是非退化的。那么，在约束下的演化是哈密顿的，其完整哈密顿量为 $H + S_\mu\xi^\mu + K$。

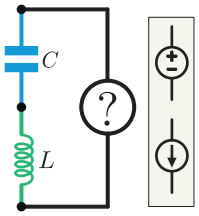


图11：由电压源或电流源驱动的串联LC振荡器。通过施加一个约束，可以用由该方法推导出的时变哈密顿量来描述这些系统。

让我们展示一个不存在这些问题的简单示例，即电压驱动的 LC 振荡器。电路图是一个具有三个支路和三个节点的环，如图 11 所示。应用我们的系统化方法，我们得到三个变量 $\boldsymbol{z} = (Q、\ \Phi、\ w)^T$，其二形式为

$$\omega = \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}\Phi \tag{114}$$

以及总能量函数 $h_1(Q) + h_2(\Phi) + QV(t)$。零模坐标 w 不会出现在任何地方，相应的约束 $\partial_w(H + QV) = 0$ 会自动满足，因此我们得到一个具有正则坐标的哈密顿系统。

如果使用的是电流源而非电压源，情况会稍微复杂一些。在这种情况下，二形式的零方向仍然是一个坐标 w 并且(114) 仍然成立。然而，总能量函数为$h_1(Q) + h_2(w - \Phi) - wI(t)$。因此存在一个非平凡约束，即 $I(t) = h_2'(w - \Phi)$，需要对其求解以得到 w。然后，将 w 替换为其受约束的值后，系统便是哈密顿系统。

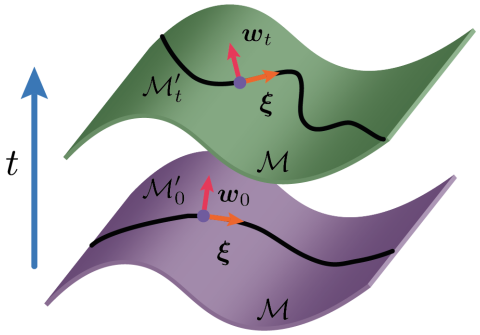


图12：流形 $\mathcal{M}$ 受时变约束限制，在时刻 t 缩减为子流形 $\mathcal{M}'_t$。通过将 w^I 表示为 ξ^μ 和 t 的函数，约束得以明确。由于 ω 是齐次且与时间无关的，坐标 ξ^μ 在任意时刻 t 都能描述 $\mathcal{M}'_t$。

现在让我们说明，第 D 节中所解释的 FJ约化可直接应用于我们的语境。有关几何设置的示意图，请参见图 12。简而言之，在电路的语境中， B 恒等为零，因而是平凡闭合的。在我们所关注的系统中，如上文所述，ω 由我们的算法构造，并且是齐次的。如果它是奇异的，其零方向对应于坐标

，且 w^I在与坐标 ξ^μ相关的方向上是非退化的。换言之，

$$\omega = \frac{1}{2} f_{\mu\nu} \mathrm{d}\xi^\mu \wedge \mathrm{d}\xi^\nu \,, \tag{115}$$

具有齐次 $f_{\mu\nu}$。约束为

$$\frac{\partial}{\partial w^I} \left(H(\xi, w) + S_\mu \xi^\mu + S_I w^I \right) = 0 \,, \tag{116}$$

并确定 $w^I(\xi, t)$ 因此，若可能的话，坐标 ξ^μ 是自由的，实际上也是 $\mathcal{M}'_t$ 的坐标（在每个时刻）。因此 $B = 0$。由此可知，若能根据约束 w^I 求解 (116)，便可在此情形下进行哈密顿约化。

G 示例

本节中，我们运用所提出的方法，系统地构造包含正文中介绍的所有集总元件的电路的（扩展）拉格朗日量和哈密顿动力学。为此，我们重新得到基于磁通-节点 [27, 28] 或回路电荷分析 [30],的标准结果，以及更一般的（非互易）黑箱分析结果 [45, 49, 59, 61]。

G.1 RLC 电路

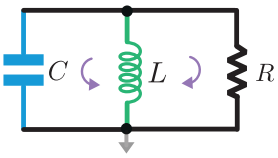


图13：并联 RLC 电路。在经典系统的图示中，通常涉及两个回路和一个有源节点。电阻器被视为约束，因此可以仅使用一组配对的共轭变量来建立动力学方程。

我们所介绍的形式体系包含了对线性电阻器的系统处理，并采用瑞利耗散函数形式体系 [58]。为了说明这一点并给出一个非常简单的示例，我们现在考虑图13所示的并联 RLC 电路。我们按照电容器/电感器/电阻器的顺序排列这三个并联支路。割集矩阵和电阻器约束矩阵为

$$\mathsf{F}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{117}$$

$$\mathsf{F}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{118}$$

以构造 F，其核为

$$\mathsf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -R & -R \\ -R & -R \\ -R & -R \end{pmatrix} \tag{119}$$

使得我们有两个独立的电荷 $z^T = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}^T$，而典范二形式仅为

$$\mathsf{E}_{2B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{120}$$

映射到约化流形，

$$\mathsf{E} = \mathsf{K}^T \mathsf{E}_{2B} \mathsf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -R \\ R & 0 \end{pmatrix} \tag{121}$$

或者等价地，$\{Q_1, Q_2\} = R$。哈密顿量为

$$H = \frac{Q_1^2}{2C} + R^2 \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2L} \,, \tag{122}$$

而在这些坐标下，耗散函数为

$$\mathcal{F} = \frac{R}{2} \left(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \right)^2 . \tag{123}$$

由于不存在源，运动方程的矩阵形式为

$$\mathsf{E}\dot{z} = \nabla_z H + \nabla_{\dot{z}} \mathcal{F} \,, \tag{124}$$

因此可得

$$-R\dot{Q}_2 = \frac{Q_1}{C} + \frac{R^2}{L} (Q_1 + Q_2) + R \left(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \right) , \tag{125}$$

$$R\dot{Q}_1 = \frac{R^2}{L} (Q_1 + Q_2) + R \left(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \right) . \tag{126}$$

为达到这一点，我们作出了一些选择，即节点和支路的排序，以及 F 的核的基。显然，在采用不同选择的情况下，也能恢复实际的动力学，因为在这方面，该规定是唯一的。事实上，这正是采用哈密顿描述的主要原因，即扩大可用变量的集合，从而获得更多工具来理解动力学，并在可能的情况下求解动力学。为了使这一点更加明显，让我们进行另一项变量替换，

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ \Phi \end{pmatrix} . \tag{127}$$

用这些新变量，我们可以直接得到简谐振子哈密顿量

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}, \tag{128}$$

正则对易子 $\{\Phi, Q\} = 1$，以及耗散函数

$$\mathcal{F} = \frac{\dot{\Phi}^2}{2R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{Q} & \dot{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} \times \dots \tag{129}$$

$$\dots \times \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix},$$

使得运动方程，即方程（12），可以直接由最终的哈密顿量、泊松括号和耗散函数计算得到，

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{Q}} = \frac{Q}{C}, \tag{130}$$
$$\dot{Q} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\Phi}} = -\frac{\Phi}{L} - \frac{\dot{\Phi}}{R}.$$

自然地，我们得到了阻尼谐振子的基本 RLC 描述，这正是预期的结果。类似于对图 5(a) 所示电路的分析，在图 4 中所作假设下，并且与电阻器中支路变量的任何拓扑赋值无关，最终子流形为 $\mathbb{R}^2$。

G.2 星形电路

图 8(a) 中星形电路的割集矩阵为 $N = 4$ 个节点和 $B = 6$ 条支路

$$\mathsf{F}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{131}$$

其中，前（后）三列分别对应于其核为的电容器（电感器）支路

$$\mathsf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{132}$$

因此，二形式矩阵表示为

$$\mathsf{E} = \mathsf{K}^T \mathsf{E}_{2B} \mathsf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{133}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{134}$$

其中第二行是在坐标的线性（点）变换下以达布基表示的。其零空间分别对应于外回路中的电压约束和内节点中的电流约束的 E 的特征子空间，由

$$\mathbf{W}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{135}$$

或者，我们可以从图 8(a) 所示的回路电荷和节点磁通出发，因为我们知道它们足以表示所有支路电荷和磁通，并得到二形式

$$\begin{aligned} \omega = {} & \mathrm{d}Q_1 \wedge (\mathrm{d}\Phi_1 - \mathrm{d}\Phi_2) \\ & + \mathrm{d}Q_2 \wedge (\mathrm{d}\Phi_2 - \mathrm{d}\Phi_3) \\ & + \mathrm{d}Q_3 \wedge (\mathrm{d}\Phi_3 - \mathrm{d}\Phi_1), \end{aligned} \tag{136}$$

带有零向量

$$\mathbf{W}_l = \frac{\partial}{\partial \Phi_1} + \frac{\partial}{\partial \Phi_2} + \frac{\partial}{\partial \Phi_3}, \tag{137a}$$
$$\mathbf{W}_c = \frac{\partial}{\partial Q_1} + \frac{\partial}{\partial Q_2} + \frac{\partial}{\partial Q_3}. \tag{137b}$$

上面的达布基对应于变量替换

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_a + w_c, & \Phi_1 &= -(w_l + \Phi_b) \\ Q_2 &= w_c, & \Phi_2 &= -(w_l + \Phi_a + \Phi_b) \\ Q_3 &= Q_b + w_c, & \Phi_3 &= -w_l, \end{aligned} \tag{138}$$

使得 $\omega = \mathrm{d}Q_a \wedge \mathrm{d}\Phi_a + \mathrm{d}Q_b \wedge \mathrm{d}\Phi_b$。与正文中一样，考虑到所有元素都是线性的，该达布基下的哈密顿量 $\{\xi^\mu\} \cup \{w^I\} \equiv (Q_a, Q_b, \Phi_a, \Phi_b, w_c, w_l)$ 可写为

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{(Q_a + w_c)^2}{2C_1} + \frac{w_c^2}{2C_2} + \frac{(Q_b + w_c)^2}{2C_3} \\ & + \frac{(w_l + \Phi_b)^2}{2L_1} + \frac{(w_l + \Phi_a + \Phi_b)^2}{2L_2} + \frac{w_l^2}{2L_3}. \end{aligned} \tag{139}$$

现在我们可以求解零模约束（97）w_l 并w_c，得到可量子化哈密顿量

$$H = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Q}^T \mathsf{C}^{-1} \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathsf{L}^{-1} \boldsymbol{\Phi}\right), \tag{140}$$
$$\mathsf{C}^{-1} = \frac{1}{C_*^2}\begin{pmatrix} C_2 + C_3 & -C_2 \\ -C_2 & C_1 + C_2 \end{pmatrix}, \tag{141}$$
$$\mathsf{L}^{-1} = \frac{1}{L_*^2}\begin{pmatrix} L_1 + L_3 & L_1 \\ L_1 & L_1 + L_2 \end{pmatrix}, \tag{142}$$

其中 $C_*^2 = C_1C_2 + (C_1 + C_2)C_3$ 和 $L_*^2 = L_1L_2 + (L_1 + L_2)L_3$，有两对可正则量子化的坐标$\{\Phi_\alpha, Q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$，且动能矩阵和势能矩阵均为正定矩阵，也就是说，存在两个正则频率。请注意，尽管基尔霍夫

约束最多允许三个自由度，但实际上只有两个动力学自由度。对于图示形式的电容/电感划分，其中一个自由度会消失，因为电容器周边存在稳恒电流这一非动力学可能性，同时外部节点磁通还具有整体平移对称性。

尽管到目前为止我们只给出了线性电路的最终结果，但这些陈述具有更一般的适用性。具体而言，设一个电容器（例如第三个）和一个电感器（例如第一个）是非线性的，其能量函数为 $h_c\,(Q_3) \;=\; h_c\,(Q_b + w_c)$ 以及 $h_l\,(\Phi_1) \;=\! h_l\,(-\,(w_l + \Phi_b)\,)$，见图 8（a）。则约束为

$$\begin{aligned} h_c'(Q_b + w_c) + \frac{w_c}{C_2} + \frac{Q_a + w_c}{C_1} = 0\,, \\ -h_l'(-(w_l + \Phi_b)) + \frac{w_l + \Phi_a + \Phi_b}{L_2} + \frac{w_l}{L_3} = 0\,. \end{aligned} \tag{143}$$

在以下条件下

$$\begin{aligned} h_c''(x) + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} > 0 \qquad \text{and} \\ h_l''(-y) + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} > 0, \end{aligned} \tag{144}$$

对于 h_c'' 的自变量的所有取值， h_l''我们都可以显式求解 w_c 和 w_l，由方程 (143) 给出，并将所得解代入哈密顿量，从而得到具有两个自由度的约化哈密顿量和典范二形式。事实上，出于能量稳定性的考虑，我们在方程 (144) 中规定其符号为正，但为了确保可逆性，只需符号保持不变即可。请注意，这个非线性例子不适用于 Y-△ 变换，而该变换有助于求解线性情形

用磁通表示。然而，即使条件 (144)不成立，约束 (143)仍可通过参数化求解。在这种情况下，我们可能得到一个非齐次二形式，并且可能出现以非齐次秩形式表现的奇点。我们将在小节H中看到类似的情形。

在搁置这个例子之前，我们指出，对偶电路是纯电荷和纯磁通规范向量情形的一个很好的说明。在该电路中，三个电容器均位于内部支路上，而电感器位于周边。具体而言，该情形的二形式 ω 将为（-1）乘以公式 （136）中的二形式，而零向量与 （137）中的完全相同。然而，正是由于纯电感回路和纯电容割集，它们现在会产生规范约束。

最后需要指出，前面的分析并未对流形$\mathcal{M}_{2B}$进行显式积分。这里我们指出，在图4所示的假设下，无论是线性情形还是非线性情形，积分子流形$\mathcal{M}$ 均为 $\mathbb{R}^6$；其中，非线性电感和电容器分别为约瑟夫森结和相滑移结。显然，这一结果与所述两种情形中既不存在岛，也不存在闭合的超导回路这一事实相符。

G.3 导纳黑箱电路

现在我们考察正文图3(a)所示的电路。方程（76）中的 F 矩阵对电路约束进行了编码。支路元件（列）按以下顺序排列：相滑移结 E_P 及其串联电感 L_P、约瑟夫森元件 E_J、矩阵端口处的电容器 C_i、贝列维奇变压器的左侧支路$T_{\text{left, i}}$、贝列维奇变压器的右侧支路$T_{\text{right, i}}$、两个内部电感器 L 以及回转器支路 G_i。我们得到（非典范形式）

$$\mathsf{F}_C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{145}$$

$$\mathsf{F}_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{146}$$

变压器约束写作

$$\mathsf{F}_T = \left(\begin{array}{c|c} \mathsf{F}_{T,\text{cut}} & 0 \\ 0 & \mathsf{F}_{T,\text{loop}} \end{array}\right), \tag{147}$$

$$\mathsf{F}_{T,\text{cut}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \mathbb{1} & \mathsf{N} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{148}$$

$$\mathsf{F}_{T,\text{loop}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & -\mathsf{N}^T & \mathbb{1} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{149}$$

with

$$\mathsf{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}, \tag{150}$$

Belevitch变压器比，而回转器约束则写作

$$\mathsf{F}_G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & \mathbb{1} & 0 & \dots & -\mathsf{Y}_G \end{array}\right), \tag{151}$$

其中 $\mathsf{Y}_G = (1/R) i\sigma_y$ 为纯回转器矩阵。基本的割集矩阵和回路矩阵尚未写成

典范形式，正是为了充分利用变压器和回转器约束的典范形式。对所有约束（$\mathsf{F}\mathrm{d}\zeta = 0$）以及普法夫方程进行局部积分，得到由四个电荷和三个磁通组成的电路状态的完整基，$\boldsymbol{z} = (Q_1,\ w,\ Q_a,\ Q_2,\ \Phi_1,\ \Phi_a,\ \Phi_2)^T$。关于该子流形拓扑（整体积分）的更深入分析，将基于第5 节中的假设留待今后研究。具体而言，储能元件的支路变量可用该基表示为

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_P \\ q_{L_P} \\ q_J \\ q_{C_1} \\ q_{C_2} \\ q_{L_1} \\ q_{L_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_1 \\ w \\ Q_a \\ Q_2 \\ \frac{(Q_2+w)n_{12}-(Q_1+Q_a)n_{22}}{\Delta_{\mathsf{N}}} \\ \frac{(Q_1+Q_a)n_{21}-(Q_2+w)n_{11}}{\Delta_{\mathsf{N}}} \end{pmatrix}, \tag{152}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_P \\ \phi_{L_P} \\ \phi_J \\ \phi_{C_1} \\ \phi_{C_2} \\ \phi_{L_1} \\ \phi_{L_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_a \\ \Phi_2 \\ (\Phi_1 + \Phi_a) \\ \Phi_2 \\ \Phi_1 + \Phi_a \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \tag{153}$$

其中 $\Delta_{\mathsf{N}} = \det(\mathsf{N}) = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}$。按照此处所述的方法，我们得到二形式

$$\begin{aligned} \omega = &\mathrm{d}Q_1 \wedge \mathrm{d}(\Phi_1 - R/\Delta_{\mathsf{N}}(Q_2 + w)) \\ &+ \mathrm{d}Q_a \wedge \mathrm{d}(\Phi_a + \Phi_1 - R/\Delta_{\mathsf{N}}(Q_2 + w)) \\ &+ \mathrm{d}Q_2 \wedge \mathrm{d}\Phi_2. \end{aligned} \tag{154}$$

为了将其化为典范形式，我们对变量 Φ_1 和 Φ_a 进行变换，

$$\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 - R/\Delta_{\mathsf{N}}(Q_2 + w), \tag{155a}$$

$$\tilde{\Phi}_a = \Phi_a + \Phi_1 - R/\Delta_{\mathsf{N}}(Q_2 + w), \tag{155b}$$

而其余变量保持不变，从而得到

$$\omega = \mathrm{d}Q_1 \wedge \mathrm{d}\tilde{\Phi}_1 + \mathrm{d}Q_a \wedge \mathrm{d}\tilde{\Phi}_a + \mathrm{d}Q_2 \wedge \mathrm{d}\Phi_2. \tag{156}$$

此处，动力学共轭对与零模之间的分离 w 显而易见。这确实是一个规范模，可以将其固定为任意值，因为它不会出现在方程（157）中。用自然的电路状态变量表示能量函数，我们得到哈密顿量

$$\begin{aligned} H = &\frac{(\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_a)^2}{2L_{PS}} + h_P(Q_1) + \frac{Q_2^2}{2C_2} + h_J(\Phi_2) + \frac{Q_a^2}{2C_1} \\ &+ \frac{\left(n_{11}\tilde{\Phi}_a + n_{21}\Phi_2 + n_{21}\frac{R}{\Delta_{\mathsf{N}}}(Q_1 + Q_a)\right)^2}{2L} \\ &+ \frac{\left(n_{12}\tilde{\Phi}_a + n_{22}\Phi_2 + n_{22}\frac{R}{\Delta_{\mathsf{N}}}(Q_1 + Q_a)\right)^2}{2L}, \end{aligned} \tag{157}$$

其中相滑移和约瑟夫森能量函数$h_P(Q_1) = -E_P\cos(2\pi Q_1/(2e))$，以及 $h_J(\Phi_2) = -E_J\cos(2\pi\Phi_2/\Phi_Q)$，从而可以将其改写为以下形式

$$\begin{aligned} H = &\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Q}^T\,\mathsf{C}^{-1}\,\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\Phi}^T\,\mathsf{L}^{-1}\,\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{Q}^T\,\mathsf{G}\,\boldsymbol{\Phi}\right) \\ &+ h_P(Q_1) + h_J(\Phi_2). \end{aligned} \tag{158}$$

G.4 超导量子干涉器件中的时变外部磁通

这里我们重新推导穿有随时间变化磁通的（集总）超导回路量子化这一众所周知的结果，详见 [119, 137, 138]。我们将考察图14所示的电路。我们将仅穿过内部回路的随时间变化的外部磁通映射为一个电动势源 $V_e(t) = \Phi_e(t)$，如前文（第E节）所述。接下来，我们依次执行目前已成为标准的约束矩阵F/嵌入矩阵K/二形式矩阵E （或 ω）序列，

$$\mathsf{F}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{159}$$

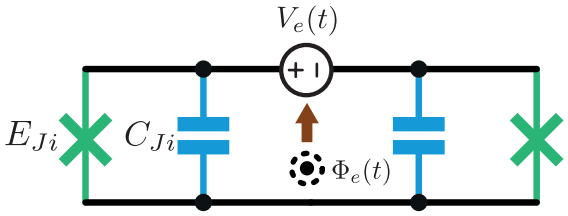


图14：一个由时变磁通穿过的超导量子干涉器件回路，该磁通被时变电压源（电动势）所替代。

$$\mathsf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{160}$$

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{161}$$

经过这一过程后，总能量函数为

$$H_T(t) = H + S_\alpha(t) z^\alpha = \frac{(Q_1+Q_2+w_1)^2}{2\,C_{J2}} + h_1(\Phi_1) + h_2(\Phi_2) + \frac{w_1^2}{2\,C_{J1}} - (Q_1+w_1)V_e\,, \tag{162}$$

而约束 $\partial H_T/\partial w_1 = 0$ 实际上就是回路周围的电压约束，

$$-V_e + \frac{Q_1+Q_2+w_1}{C_{J2}} + \frac{w_1}{C_{J1}} = 0. \tag{163}$$

从约束 w_1 中求解，将其代入总能量函数 (162)，并进行变量替换

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q} = \mathsf{O}\,\boldsymbol{Q}, \tag{164}$$

并且，对偶地， $\boldsymbol{\phi} = \mathsf{O}\,\boldsymbol{\Phi}$，我们推导出能量函数on

$$H_T(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}^T\,\mathsf{C}^{-1}\,\boldsymbol{q} + 2\,\boldsymbol{q}^T\,\boldsymbol{s}(t)) + h_1(Q_1(\boldsymbol{q})) + h_2(Q_2(\boldsymbol{q})), \tag{165}$$

with

$$\mathsf{C}^{-1} = \frac{2}{C_\Sigma}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{166}$$

其中 $C_\Sigma = C_{J1} + C_{J2}$。注意，未计入不影响动力学的额外项。

在此阶段，演化由哈密顿量描述，具有两个正则变量对，而总能量函数就是哈密顿量。然而，运动方程表明，真正具有动力学意义的部分只有一个自由度，其有效哈密顿量为

$$\tilde{H}_T(t) = \frac{q_1^2}{C_\Sigma} + q_1 V_e(t)\left(\frac{2\tilde{C}-1}{\sqrt{2}}\right) + h_1\left(\frac{\phi_1 + \Phi_e/\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + h_2\left(\frac{\phi_1 - \Phi_e/\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \tag{167}$$

˜其中 $C = C_{J1}/C_\Sigma$。读者可能会注意到，在参数取特定值 [119] 时，该方程（167）与参考文献 $m_l = 1/\sqrt{2} = -m_r$中的方程（14）等价，因此 $m_\triangle = m_l - m_r = \sqrt{2}$，同时结的对应关系为 $J_l \leftrightarrow J_1$ 和 $J_r \leftrightarrow J_2$。具体而言，$\{\phi_2,\ q_2\}$ 变量对的方程为

$$\dot{\phi}_2 = \frac{V_e(t)}{\sqrt{2}}, \tag{168}$$

$$\sqrt{2}\dot{q}_2 = h_2'\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{\sqrt{2}}\right) - h_1'\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{\sqrt{2}}\right). \tag{169}$$

这些方程表明，这两个变量受外部磁通和另一对变量 $\{\phi_1,\ q_1\}$ 的约束。我们可以对第一个变量进行积分，并将 ϕ_2 代入总能量函数。代入后，总能量函数中会出现一些与时间有关的项，它们对 ϕ_1 和 q_1的动力学没有影响。我们将这些项舍去，从而得到有效哈密顿量（167）。

注意，在外部磁通恒定的情况下，电动势 V_e 为零，并且存在一个可忽略坐标，因此总能量函数（式（162），代入 w_1后）中存在一个守恒量。在存在随时间变化的外部磁通时，这个可忽略坐标与守恒量的耦合成为受从属约束的一对变量。最后我们注意到，在第$\mathcal{M}_{2B}$ 5节中关于初始流形$\mathcal{M}_S = \{q_1,\ \phi_1\}$ 的假设下，最终的约化子流形 $S^1 \times \mathbb{R}$ 具有通常在现象学上所假定的拓扑。

H 非线性奇异电路

本文提出了一种系统方法，用于推导集总元件电路的拉格朗日量和哈密顿动力学。我们的方法以几何描述为基础，并结合 Faddeev-Jackiw分析，以揭示潜在的隐式约束。在前一节中，我们给出了电路的具体示例，包括线性电路和非线性电路，以及在线性约束起作用的情况下的显式解。然而，在处理非线性星形电路时，我们面临着一个更具普遍性的挑战，即在存在非线性约束的情况下构建约化模型。

本节将更全面地考察具有非线性奇异性的电路。这类电路中可能会出现非线性约束，例如涉及非齐次秩（奇异）二形式时。我们选取了近期两项旨在为（近似）奇异电路寻找量子力学模型的研究，即文献 [85] 和 [86], ，并从我们的方法出发审视其中的一些发现。

H.1 重新审视 Rymarz-DiVincenzo 的奇异电路

现在让我们开始分析图 15(a) 中的电路，我们已经在式（63）中求解了其约束。我们在那里观察到，该系统通常由一个回路电荷和两个节点磁通描述。因此，二形式ω 必然是退化的，我们必须考虑约化，或通过 Faddeev–Jackiw 增维来增加维数。请注意，该系统可视为图 15(b) 中电路的一种极限情形，其中并联在第二个（NL）电感器上的电容器趋于零。

按照上述步骤，我们计算F矩阵的核，其中元素的排列方式使得投影算子写为

$$\mathsf{P}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathsf{P}^{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{170}$$

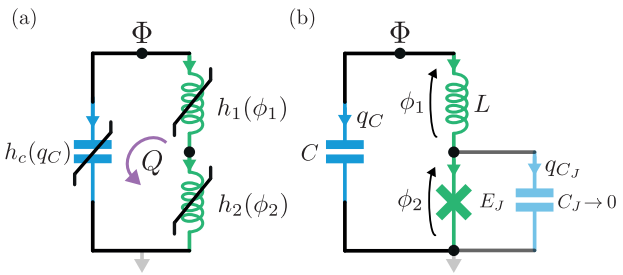


图15：（a）一个包含两个非线性电感元件和一个非线性电容元件的电路。从仅含磁通-节点/回路-电荷变量的二阶拉格朗日量出发获得哈密顿描述时，可能会出现势能奇异性。（b）参考文献中研究的（a）中奇异电路的一个特例。 [85] 带有电容器的约瑟夫森结 $C_J \ll C$ 有时会被近似为开路（$C_J \to 0$） [85, 86]。

由此得到二形式矩阵

$$[\omega_{\alpha\beta}] = \mathsf{K}^T \, \mathsf{E}_{2B} \, \mathsf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{171}$$

按 Q、ϕ_1 和 ϕ_2 的顺序。

注意，我们也可以直接将基尔霍夫约束写成微分形式，从而得到相同的结果

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q = \mathrm{d}q_C = -\mathrm{d}q_1 = -\mathrm{d}q_2 \\ \mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\phi_C = \mathrm{d}\phi_1 + \mathrm{d}\phi_2, \end{aligned}$$

计算 $\omega = \mathrm{d}Q \wedge (\mathrm{d}\phi_1 + \mathrm{d}\phi_2)$，由此可以读出矩阵 $\omega_{\alpha\beta}$；请注意，关于二形式表达式定义矩阵时的 2 因子。唯一的零模是

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{172}$$

相应的约束函数$\mathbf{W}(H) = W(\Phi_1, \ \Phi_2)$ 为

$$\begin{aligned} W(\phi_1, \phi_2) &= \frac{\partial H}{\partial \phi_1} - \frac{\partial H}{\partial \phi_2} && \text{(173a)} \\ &= h_1'(\phi_1) - h_2'(\phi_2) = 0\,, && \text{(173b)} \end{aligned}$$

因为用回路电荷和节点磁通表示的哈密顿量是 $H(Q, \ \phi_1, \ \phi_2) = h_1(\phi_1) + h_2(\phi_2) + h_3(Q)$。

这一约束是一个很好的例子，有助于我们更好地理解形式体系所产生的一类约束。具体而言，在本例中，它仅仅表示流经两个电感器的电流必须相同。这与G.2中的示例所涉及的约束形成对比；后者反映了电容器中可能存在非动力学电流。

我们将使用这个例子来说明由于能量函数与拓扑之间的相互作用而导致的哈密顿描述障碍。为此，我们必须考察通过动力学约束进行约化的过程（173b）的更多细节。

根据支路变量初始流形的结构，以及第一次约化就是基尔霍夫约化这一事实，我们知道三维状态流形为$\mathbb{R}^{3-k} \times \mathbb{T}^k$，即 $\mathbb{R}^3$，$\mathbb{R}^2 \times S^1$，$\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ 或 $\mathbb{T}^3$。我们只考虑前两种情况，它们在经典系统 中分别对应于回路电荷和其中一个电感器的支路磁通（在下文的详细分析中为线性电感器）的扩展（$\mathbb{R}$）变量，以及另一个支路磁通（以下具体化情形中的约瑟夫森结）的紧致（S^1）变量。在所有情况下，由于截至此处唯一的约束是基尔霍夫约束，总流形是电荷子流形与磁通子流形的乘积。因此，式(173b) 中的动力学约束是在二维磁通流形中对一条曲线的隐式定义：我们始终假设支路能量函数是光滑的，因此式 $W(\phi_1, \ \phi_2)$ 中的(173)也是光滑的。因此，根据隐函数定理，在除磁通能量极值点之外的所有点处，都存在用一个变量表示另一个变量的局部表达式。如果约束只有一个连通分支，我们就可以对其进行参数化求解，从而得到约化后的二维动力学流形的描述。剩下的任务是确定受限二形式，并检验它是否为辛的。

如果取 $h_1(\phi_1) = \phi_1^2/2L$，我们可以作出更强的断言。由于在此情况下 h_1'' 永不为零，我们可以用ϕ_1 表示 ϕ_2，因此可以得到满足约束条件的曲线的显式表达式，并且 ϕ_2 可用于描述所关注的约化二维流形，其坐标为（$Q, \ \phi_2$）。具体而言，我们可以将方程（173b）求解为

$$\phi_1 = L h_2'(\phi_2)\,, \tag{174}$$

运动方程的约化元为

$$\begin{aligned} \omega &= [1 + L h_2''(\phi_2)] \ \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}\phi_2\,, && \text{(175a)} \\ H &= h_c(Q) + h_2(\phi_2) + \frac{L}{2} \left[h_2'(\phi_2)\right]^2. && \text{(175b)} \end{aligned}$$

运动方程为

$$\begin{aligned} [1 + L h_2''(\phi_2)] \, \dot{\phi}_2 &= h_c'(Q) \\ \dot{Q} &= -h_2'(\phi_2) \end{aligned} \tag{176}$$

这是一个二维自治动力系统，对于该系统，积分因子始终存在 [139], ，并且可以直接计算出第一积分

$$E(Q, \phi_2) = h_c(Q) + h_2(\phi_2) + \frac{L}{2} \left[h_2'(\phi_2)\right]^2. \tag{177}$$

这个第一积分的等值集是相空间中的轨迹 $(\phi_2, \ Q)$，即动力学系统 (176)的解。因此，存在一个具有典范泊松括号的经典等价哈密顿系统，使得

运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial E}{\partial Q} = h_c'(Q)\,, \tag{178a}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial E}{\partial \phi_2} = -h_2'(\phi_2)\left[1 + L h_2''(\phi_2)\right]\,. \tag{178b}$$

现在我们必须总结这一过程。重要的结论是，系统的经典动力学已经被写成哈密顿形式，如方程(178)所示。不过，其中仍有一些细节需要考虑。首先，系统约化将我们带到了方程(175b)。要使 ω 成为方程 (175a) 中的辛形式，我们要求它是非退化的。然而，如果存在满足 $1 + L h_2''(\phi_2) = 0$的直线，它就会退化。积分因子可以消除 存在时的经典奇点。由坐标 ϕ_2 和Q 所描述的流形确实允许一个典范辛形式，而 $E(Q,\ \phi_2)$ 的等值集就是相空间图。即便如此，在许多情况下，我们并不只是希望得到一个哈密顿描述，而是希望用某些首选变量来表述哈密顿描述，而这完全是另一回事。

H.1.1 奇异性及其他

如上所述，对于情况 $h_1(\phi_1) = \phi_1^2/2L$ 及光滑性条件，我们可以像方程（178）那样，以回路电荷 Q和可能为非线性的电感器ϕ_2的支路磁通为变量，得到哈密顿描述。然而，在大多数我们感兴趣的情况下，我们更希望以总磁通$\Phi = \phi_1 + \phi_2$为变量来描述哈密顿量。由于 ϕ_1 已用 ϕ_2表示，我们有关系式 $\Phi = \phi_2 + L h_2'(\phi_2)$，它使 Φ 的演化受制于 ϕ_2。但是，如果我们希望只用 Φ 来描述，就必须对该关系求逆。在能量函数满足光滑性条件的前提下，可逆性条件为：$1 + L h_2''(\phi_2)$在 ϕ_2的值域内 $\neq 0$，即具有单调性。请注意，这意味着方程（175a）中的二形式ω是非退化的。在这种情况下，很容易看出，方程（176）等价于哈密顿方程

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= h_c'(Q)\,, \\ \dot{Q} &= -V'(\Phi)\,, \\ V(\Phi) &= h_2\left[\phi_2(\Phi)\right] + \frac{L}{2}\left\{h_2'\left[\phi_2(\Phi)\right]\right\}^2\,, \end{aligned} \tag{179}$$

其中 V（Φ）是等效电感器的能量。我们可以从方程（175）中识别出这一结果，并注意到 $\omega = \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}\Phi$。

现在考虑可逆性条件不满足时会发生什么。形式上，检查方程 (179)，我们看到，演化是哈密顿的，其共轭变量为 Φ和 Q，而有效势必须以参数形式表示。人们特别强调了这样一个事实：如果可逆性条件不成立，这个有效势作为 Φ 的函数会具有多支结构。然而，经典运动是完全确定性的，相图是明确无歧义的。即便如此，对以参数形式描述的系统进行量子化仍值得进一步研究。现在我们将给出可逆和不可逆情形的具体例子，并始终将分析限定在经典模型上。

H.1.2 案例 1：两个线性电感器的直接约化

现在考虑两个电感器均为线性的，即 $h_i(\phi_i) = \phi_i^2/2L_i$。此时可以求解约束，并将约束曲面坐标化为

$$\phi_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2}\Phi\,, \tag{180a}$$

$$\phi_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2}\Phi\,, \tag{180b}$$

因此，Q 和 Φ 的运动方程由一阶拉格朗日量导出

$$L = Q\dot{\Phi} - h_3(Q) - \frac{\Phi^2}{2(L_1 + L_2)}\,. \tag{181}$$

自然地，这一过程为我们提供了串联线性电感器的标准约化。

为了明确接下来的思路，让我们重新表述一下这里所做的工作：我们应用了所提出的过程，并在约化相空间中获得了一个有效的哈密顿量。线性电感器和电容器的标准约化公式正是如此：它们是一套用于在更少变量中构造有效能量函数的方案，并且可以直接从该形式体系中得到。

H.1.3 案例 2：使用线性电感器和约瑟夫森结的直接约化

正如我们反复声明的那样，我们在此提出的形式体系涵盖了传统的电路分析方法。因此，形如$\mathbf{W}(H) = 0$的二形式的零向量所对应的动力学约束，在许多情况下都可以很容易地理解为源自电流守恒或能量守恒。对于获得哈密顿系统的对偶方法，即狄拉克-贝格曼[85]，也可以作同样的说明。因此，将总磁通 Φ 表示为某个参数的函数的函数的可逆性问题，已有相关文献[85, 86]对此进行了讨论。在此背景下，从一个非退化的二次拉格朗日量出发进行正则化的思想也已被提出 [85],，并特别强调了在函数具有可逆性或不具有可逆性的情况下推导有效拉格朗日量。

为明确起见，我们令第一个电感器为线性的（$h_1(\phi_1) = \phi_1^2/2L$），而第二个电感器为约瑟夫森结，其能量函数为 $h_2(\phi_2) = -E_J\cos(2\pi\phi_2/\Phi_0)$，其中 Φ_0 为标准磁通量子，见图15（b）。在分析之前已取 $C_J \to 0$ 的极限。为了便于与先前的文献进行比较，我们对磁通和电荷变量分别进行标准变换，将其转换为相位和库珀对数变量，即 $n = Q/2e$，以及 $\varphi_\alpha = 2\pi\phi_\alpha/\Phi_0$，

如果令 $\hbar = 1$，则该变换是辛变换。此时经典拉格朗日量为

$$L = \hbar n(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) - H(n, \boldsymbol{\varphi}), \tag{182}$$

$$H(n, \boldsymbol{\varphi}) = 4E_C n^2 - \frac{E_L}{2}\varphi_1^2 - E_J \cos(\varphi_2), \tag{183}$$

其中 $E_C = (e)^2/2C$、$E_L = (\Phi_0/2\pi)^2/L$，以及 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$。再次将零模向量作用于能量项，我们由约束求出 φ_1，即

$$\varphi_1 = \beta \sin(\varphi_2), \tag{184}$$

其中 $\beta = L_1 E_J (2\pi/\Phi_0)^2 = E_J/E_L$，以下始终假设其为正。约化后，（电容器处的）总相位 $\varphi = \Phi/\Phi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$ 表示为

$$\varphi = \varphi_2 + \beta \sin(\varphi_2)\ . \tag{185}$$

只有当满足以下条件时，我们才能对函数 $\varphi(\varphi_2)$ 求逆

$$\beta < 1\,. \tag{186}$$

在这个特定情况下，式（182）中的拉格朗日量变为 [85]

$$L = \hbar n\dot{\varphi} - H(n, \boldsymbol{\varphi}(\varphi)), \tag{187}$$

可以进行量子化；唯一需要注意的是，对于紧致的 φ_2，不等价量子化会出现在 [101–103]。换言之，此时必须考虑存在门电荷参数的可能性。

H.1.4 情形 2 的多值性和奇异性

尽管或正因为存在我们现在将要考察的状态 $\beta \geq 1$ 的问题，它引起了研究人员的好奇心 [85, 86], ，而且与正则化模型的联系也正在积极讨论中。现在，我们内在地研究这一状态，即不将其与正则化电路联系起来。

为明确起见，我们考虑 φ_2 为以下两种情况：i) 扩展变量（$\varphi_2 \in \mathbb{R}$）；ii) 紧变量（$\varphi_2 \in [0, 2\pi)$）。注意，总磁通 φ 继承了这种扩展或紧的特性，尽管其值域并不具备这一特性。

我们重新列出上述元件的方程组 (176)：

$$\hbar\left[1 + \beta\cos(\varphi_2)\right]\dot{\varphi}_2 = h_3'(n) = 8E_C n, \tag{188a}$$

$$\hbar\dot{n} = E_J \sin(\varphi_2)\,. \tag{188b}$$

该系统具有一个第一积分

$$E_1 = 4E_C n^2 - E_J\left[\cos\varphi_2 + \frac{\beta}{4}\cos(2\varphi_2)\right]\,. \tag{189}$$

对于扩展情形，该第一积分关于 φ_2 以 2π为周期。在区间 $[0, 2\pi)$ 内，极值点为 0、φ_*（$1 + \beta\cos\varphi_2 = 0$ 在区间 $(\pi/2, \pi)$ 内的解）、π 和 $2\pi - \varphi_*$，当 $\beta > 1$ 时。$\varphi_2 = 0$ 始终是势能的一个极小值。然而，当 $\beta < 1$ 时，$\varphi_2 = \pi$ 是极大值；对于 $\beta > 1$，它变为极小值。φ_* 和 $2\pi - \varphi_*$ 仅在 $\beta > 1$ 时出现，并且在这种情况下它们是极大值。参数 β 是经典分岔参数。

为后续使用，我们研究 φ_* 作为 β 的函数。显然，$\varphi_*(1) = \pi$，并且当 $\beta \to \infty$ 时 $\varphi_* \to \pi/2$。容易计算得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_*}{\mathrm{d}\beta} = \frac{-1}{\beta\sqrt{\beta^2 - 1}}\,. \tag{190}$$

注意，φ_* 是β的单调递减函数。直接计算还表明，在接近 $\beta = 1$处有 $\varphi_* = \pi - \sqrt{2(\beta - 1)} + O\left[(\beta - 1)^2\right]$。现在考虑支撑在 $[0, 2\pi$中的 φ_2 紧集。$\varphi(\varphi_2) = \varphi_2 + \beta\sin(\varphi_2)$ 的极值将出现在 φ_2 区间的端点处，或出现在方程 $1 + \beta\cos(\varphi_2) = 0$的解处（如果解存在）。因此，对于 $\beta < 1$，φ 的值域也将是$(0, 2\pi)$。另一方面，对于$\beta \geq 1$，我们必须评估 $\varphi(\varphi_*) = \varphi_* + \sqrt{\beta^2 - 1}$ 和$\varphi(2\pi - \varphi_*) = 2\pi - \varphi_* - \sqrt{\beta^2 - 1}$。当 β略大于1时，φ 的值域仍将是$(0, 2\pi)$, 直到达到临界值 $\beta_c \approx 4.6033$，使得$2\pi = \varphi_*(\beta_c) + \sqrt{\beta_c^2 - 1}$。从该点开始，$\varphi$ 的值域将是$(\varphi(2\pi - \varphi_*)\ \varphi(\varphi_*))$。渐近地，当 β较大时，$(-\beta, \beta)$。

让我们从总相位的角度定性地考察该系统 φ。根据方程(188b)，电流始终有界，并且 $\dot{\varphi} = 8E_C n$ 演化并不奇异。问题在于，如果 φ_2 达到 φ_* 或 $2\pi - \varphi_*$（在扩展情形下模 2π），则 φ_2 的速度必须为无穷大，以补偿 $\dot{\varphi} = 8E_C n/\hbar$ 为有限值这一事实。这对应于两个电感支路中的电压降均为无穷大，尽管总电压降是有限的。我们可以用势能和总相位的参数表达式来描述这一运动，

$$\varphi = \sigma + \beta\sin\sigma\,,$$

$$V = -E_J\left[\cos\sigma + \frac{\beta}{4}\cos(2\sigma)\right]\,. \tag{191}$$

此前已有关于此类系统及其量子化的讨论（例如 Shapere 和 Wilczeck [140]的工作），而模型的这一方面留待今后的研究。

势能的参数化表达使我们能够对较小和较大的 β 进行定性分析，从而为量子分析提供指引。较小的 β 对应于线性电感器的电感趋于 0，这意味着不存在相位降落，系统仅由电容器和非线性电感构成。这一物理描述与有效势的极限相符。从物理上说，较大的 β 意味着线性电感器中没有电流流过，因此系统不再具有动力学性质，所有能量都将是电容器的静电能。也就是说，物理预期是，在这一极限下，有效势将是平坦的。考虑紧致的 φ_2。那么 φ 也是紧致的，其值域（在 β 较大的

情形下）为 $(\varphi(2\pi-\varphi_*)\ \varphi(\varphi_*))$。因此，当 $\beta\to\infty$、$|\varphi|/\beta<1+\pi/\beta$ 时，φ/β 一致有界。在整个值域内无法进行反演。不过，给定一个较大的固定 Φ，对于所有 $|\varphi|<\Phi$，当 $\beta\to\infty$ 时，可以进行反演，$\sigma=\varphi/\beta+O(\beta^{-2})$。由此可得

$$V\approx -E_J\left[1+\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{\beta}+O(\beta^{-2})\right], \tag{192}$$

如预期，在固定值域（$-\Phi$，Φ）内实际上是平坦的。对于扩展的 φ_2，论证略有不同。存在一个整数 N 使得 $\sigma=2\pi N+\zeta$，其中 ζ 在$[0,2\pi$内）。于是 ζ将会很小，$\zeta=(\varphi-2\pi/N)/\beta+O(\beta^{-2})$，应用之前相同的论证，我们再次看到，当 $\beta\to\infty$时，V变得平坦，这与物理论证相符。

需要注意的是，在大 β 极限下，如果变量 φ 一开始具有有限值域，那么它实际上会去紧化，同时其势能在远离边界处变得平坦。因此，在进行量子化时，紧变量与扩展变量的行为截然不同，但在这两种情况下，我们都会得到近似的连续谱。这个论证也可以用另一种方式表述：在大 β 极限下，所有能量都在电容器中，这是由其电荷造成的，而该电荷不再需要离散化。

H.1.5 情形 2 的正则化问题

为了更好地理解这些电路的量子化，Rymarz 和 DiVincenzo [85]从正则化经典电路哈密顿量入手展开分析（该哈密顿量由图15（b）在约瑟夫森电容有限时得到C_J）。进行正则量子化后，他们开展了 Born–Oppenheimer 分析，$C_J\to 0$ 并预期能够实现清晰的尺度分离。

采用与上文相同的重新定义，并使用相应图中的记号，再按照我们的方法（注意，此处标准的磁通-节点分析 [27]给出的结果相同），可得哈密顿量

$$H=4E_C(n_C^2+rn_{C_J}^2)+\frac{E_J}{2\beta}(\varphi_C-\varphi_2)^2-E_J\cos\varphi_2, \tag{193}$$

以及附加参数 $r=C/C_J$，以及正则括号 $\{\varphi_C,n_C\}=\{\varphi_2,n_{C_J}\}=1$。回顾定义 $\beta=E_J/E_L$。分析 [85] 的主要目标是对其进行量子化和尺度分离。在这里，我们将仅对其进行经典系统分析，包括绝热展开，即经典系统的尺度分离。特别是，我们希望讨论极限 $\beta\to\infty$ 或 $\beta\to 0$ 与极限 $r\to\infty$ 是否可以交换。一方面，从物理上看，当 $\beta\to 0$ 时，上述论证成立：在严格极限下，通过线性电感器不会有相位降落。因此，该电路将等效于一个带有并联总等效电容 $C=C+C_J$ 的˜约瑟夫森结，与 C_J 的取值无关。现在，在进行一次辛变换后，让我们根据运动方程检验这一直觉。

变量替换

$$\begin{aligned} n_C&=\frac{1}{2}n_a+n_b, & n_{C_J}&=\frac{1}{2}n_a-n_b,\\ \varphi_C&=\varphi_a+\frac{1}{2}\varphi_b, & \varphi_2&=\varphi_a-\frac{1}{2}\varphi_b, \end{aligned} \tag{194}$$

采用显而易见的记号，φ_a 和 n_a 构成一组共轭对，φ_b 和 n_b 构成另一组，因此质量矩阵不再是对角矩阵，

$$\begin{aligned} H=E_C&\left[4(1+r)n_b^2+4(1-r)n_an_b+(1+r)n_a^2\right]\\ &+\frac{E_J}{2\beta}\varphi_b^2-E_J\cos\left(\varphi_a-\varphi_b/2\right). \end{aligned} \tag{195}$$

这意味着，唯一包含β 参数的运动方程是 $\dot{n}_b=-\partial H/\partial\varphi_b$，由此我们得出

$$\varphi_b=\beta\left[\frac{1}{2}\sin\left(\varphi_a-\frac{\varphi_b}{2}\right)-\frac{1}{E_J}\dot{n}_b\right]. \tag{196}$$

因此，一阶绝热消去为 $\varphi_b=0$，为保持一致性，$\dot{\varphi}_b=\partial H/\partial n_b=0$ 确定了 $n_b=(r-1)n_a/2(r+1)$，从而得到一个约化系统，即自由度减少了一个的系统，其总电荷数 n 与约瑟夫森结的相位共轭，且势能就是约瑟夫森结的势能。明确地，$H=4E_Crn_a^2/(r+1)-E_J\cos\varphi_a$，这对应于总电容为 $C+C_J$ 的等效电容器。此外，注意到该方程系统适合对 β 进行系统展开，从而微扰地产生约化动力学。明确地，在形式为 $\varphi_j=\sum_{m=0}^{\infty}\beta^m\varphi_j^{(m)}$ 的 β 展开中，其中 j 可以是 a 或 b，对于 n_j 也相应如此，逐阶地，$\varphi_b^{(m)}$ 和 $n_b^{(m)}$ 完全由 $\left\{\varphi^{(m')}{}_a\right\}$ 和 $\left\{n^{(m')}{}_a\right\}$ 确定，其中$m'\le m$。该结果与 r 的取值无关，因此极限 $r\to\infty$ 可立即得到。

现在我们从以下极限开始 $r\to\infty$ 首先考虑具有哈密顿量(193)。由运动方程可知n_2 必须为零。与其直接代入哈密顿量，不如坚持使用运动方程来进行这一近似。因此 $n_2=0$ 为保持一致性要求 $\dot{n}_2=0$，由此 $\varphi_C=\varphi_2+\beta\sin\varphi_2$，而近似的运动方程恰好就是我们上文分析的系统。同样，这个极限是奇异的，因为只剩下一个自由度。需要指出的是，这似乎与 [85], 中的结果相矛盾；该文认为，在量子力学语境下，极限情况下的有效势$r\to\infty$ 总是为零。显然，这一问题值得进一步研究，我们将其留待今后的工作。

最后，我们再次检验极限 $\beta\to\infty$，这次是在该正则化模型中进行。物理直觉如上所述，即线性电感器中不会有电流。因此，C 电容器中将具有静电能，并且将得到一个完全由约瑟夫森结和正则化电容器 C_J组成的动力系统。这一直觉实际上可以直接从运动方程中读出，具体而言，

	$0 < r < \infty$	$r \to \infty$
$0 < \beta < \infty$	2 个自由度，H 见公式（193）	1 个自由度 H 见（183）
$\beta \to 0$	1 个自由度（$H = 4E_C n_a^2/(r+1) - E_J \cos\varphi_a$）	1 个自由度（$H = 4E_C n_a^2 - E_J \cos\varphi_a$）
$\beta \to \infty$	2 个自由度（1 个自由）($H = 4E_C n_C^2 + [E_C r n_C^2 - E_J \cos\varphi_2]$)	1 个（自由）自由度（$H = 4E_C n_C^2$）

表 1：图 15(b) 中不同电路经典哈密顿量模型的汇总表。我们着重指出有效自由度的数量，以及自由粒子的出现。

因为可以看到，在该极限下需要 $\dot{n}_C = 0$，并将 n_2 和 φ_2 变量分离出来。然而，其中存在两个自由度，其中一个是自由粒子。

由于 $\beta \to \infty$ 给出两个自由度，而 $r \to \infty$ 给出一个，我们现在来检验这两个极限是否可交换。从 $\beta \to \infty$ 极限哈密顿量 $H = 4E_C n_C^2 + [E_C r n_{C_J}^2 - E_J \cos\varphi_2]$ 出发，并考虑 $r \to \infty$，n_{C_J} 必须被冻结为零，而 φ_2 没有动力学，因此得到有效哈密顿量 $H = 4E_C n_C^2$。交换顺序后，我们从 $H = 4E_C n^2 - E_J \varphi_1^2/2\beta - E_J \cos\varphi_2$ 出发，并取 $\beta \to \infty$；如上文所分析，有效势变平，最终再次留下一个自由粒子。

在这些经典分析中，变量是否具有紧致性并未发挥关键作用。另一方面，如果我们要完整地讨论量子化（这一点留待后续工作），那么牢记这一方面将至关重要。例如，即使紧变量的有效势能是平坦的，相应的谱仍将是离散的。另一方面，在一个具有两个自由度的系统中，如果其中包含一个扩展变量，并且沿着参与这一扩展性质的某个方向，势能是有界的，那么该部分的谱将是连续的。我们在此考察的模型目前被认为是对含有超导岛的简单电路所作的极度理想化描述。在这种情况下，紧致相位（$\varphi_2 \in S^1$）的假设与实验数据相符，例如，任意耦合状态下电荷量子比特的离散谱，包括库珀对盒（$E_J \sim E_C$）和 *transmon* 状态（$E_J \gg E_C$）。因此，即使将正则化下量子化的详细研究留待未来工作，我们仍要指出，本文提出的经典分析，以及由此导出的关于量子模型的一般性考量，都与实验结果一致 [108, 141]。

H.2 奇异的多结支路

在本节中，我们将应用我们的方法来重现、阐释并扩展参考文献 [86]，中所呈现的结果，以此展示这一形式主义的多功能性。Miano等人的目标是提供一种方法，用于确定超导电路中的极小值，从而能够围绕这些极小值进行展开。Miano等人研究了一类非常特殊的电路，其中存在一个由约瑟夫森结和电感组成的回路。他们希望研究低能物理，即确定势能的极小值；势能是节点磁通的函数，因为他们假设更大电路的节点磁通描述并不存在缺陷。为此，他们提出这样一个问题：在一般状态下，每个节点处注入电感回路的电流强度是多少，其中这些节点位于电感元件之间；随后他们观察到，在电感能的极小值处，也就是在一种可能的稳态下，这种电流注入必须为零。他们通过类似 Tellegen 定理的论证得出了这一结果。接下来，他们研究这样一种等效电感元件：如果相邻的电容器可以忽略不计，该元件将描述相同的低能现象。

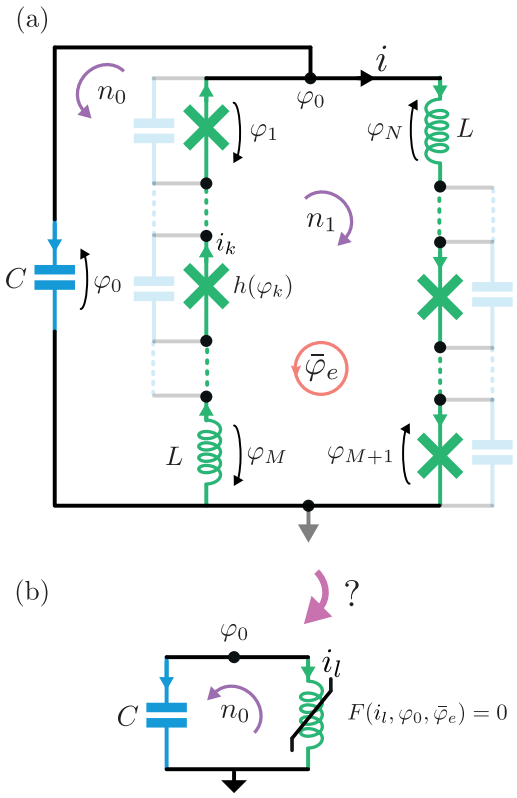


图1 6：参考文献 [86]，中研究的非线性偶极子由一系列约瑟夫森结和串联电感器构成。文献中长期存在的一个问题是，如何将多偶极子问题的响应映射到单个元件上。

H.2.1 有效哈密顿量

Miano 等人的主要目标是研究图16所示构型中的有效哈密顿量。我们将直接使用我们的方法计算该有效哈密顿量。特别是，我们将采用微分形式表述，而不是我们一直在上文坚持使用的等价矩阵形式，因为前者更便于处理一般模型。

已于 Quantum 2024-09-03 接收，点击标题进行验证。根据 CC-BY 4.0 发布。

我们希望这些内容具有教学意义，因此将在构造过程中进行非常详细的说明。需要指出的是，由于该系统完全由理想电抗元件组成，因此这一结果可以直接应用基尔霍夫定律推导得到。不过，我们认为，我们所提出方法的普适性和系统性有助于正确识别相关量。特别是，目标 [86]在于说明，完整系统可以由以下形式得到良好描述

$$H = 4E_C n_0^2 + U_{\text{eff}}(\varphi_0, \varphi_e)\,, \tag{197}$$

其中，φ_0 与 n_0 共轭且具有动力学性质，而 φ_e 一个（恒定的）外部磁通控制着内部电流。

简而言之，我们有三个有效支路：电容支路和两个串联电感支路，后两者分别称为电感回路的外边和内边。我们将使用 n_0 和 n_1 电荷数，以及$\{\varphi_k\}_{k=0}^{N+1}$ 支路相位变量。从图中可以看出，φ_0 也是顶节点相位。能量函数很简单，即

$$H\left(n_0, \{\varphi_k\}_{k=0}^{N+1}\right) = h_c(n_0) + \sum_{k=1}^{N+1} h_k(\varphi_k)\,. \tag{198}$$

乍一看，φ_0 和 φ_e 似乎都不起作用。然而，我们尚未确定所有约束。为此，我们注意到，基尔霍夫电压定律迫使我们具有

$$\mathrm{d}\varphi_e = \sum_{k=1}^{N+1} \mathrm{d}\varphi_k\,, \tag{199a}$$

$$\mathrm{d}\varphi_0 = -\sum_{k=1}^{M} \mathrm{d}\varphi_k \tag{199b}$$

$$= -\mathrm{d}\varphi_e + \sum_{k=M+1}^{N+1} \mathrm{d}\varphi_k\,. \tag{199c}$$

我们将在二形式中使用这些内容，按照我们的一般构造，其形式为

$$\omega = \frac{1}{2}\mathrm{d}n_0 \wedge \mathrm{d}\varphi_0 \tag{200a}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=M+1}^{N+1} \mathrm{d}\varphi_k \wedge \mathrm{d}n_1 \tag{200b}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M} \mathrm{d}\varphi_k \wedge (\mathrm{d}n_0 + \mathrm{d}n_1) \tag{200c}$$

$$= \mathrm{d}n_0 \wedge \mathrm{d}\varphi_0 + \frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi_e \wedge \mathrm{d}n_1\,. \tag{200d}$$

为简单起见，我们设定 $\hbar = 1$。第一行 (200a) 对应于电容支路，第二行 (200b)对应于外部电感支路，最后第三行(200c)对应于内部电感支路。

正如预期的那样，自由度只能有两个，而且只有在 φ_e 随时间变化时才是如此。否则，只有 n_0 及其共轭量是动力学变量，而我们必须进行辛约化，以明确这一事实。为明确起见，我们只考虑固定的 φ_e，因此得到简单的二形式 $\omega = \mathrm{d}n_0 \wedge \mathrm{d}\varphi_0$。

显然，这个二形式存在缺陷：总共有 $N+2$ 个支路，因此在施加基尔霍夫定律之前有 $2N+4$ 个支路变量，而施加基尔霍夫定律后，这些变量必须减少到 $N+2$ 个。实际上，这些变量是两个电荷和 N 个相位。其中一个电荷 n_1 被直接消去，因为它既不出现在二形式中，也不出现在哈密顿量中，因此相应的零向量 $\partial/\partial n_1$ 是规范的。换言之，电感回路中可能存在非动力学电流。如果 φ_e 随时间变化，它将驱动该电流 $\dot{n}_1$。我们将其固定为零，并令 φ_e 为常数。

因此，我们剩下一个电荷 n_0，以及 N个相位。然而，二形式 $\omega = \mathrm{d}n_0 \wedge \mathrm{d}\varphi_0$ 显然是秩二的。因此必定存在 $N-1$ 个线性无关的零向量。现在，由于式 (199b)，我们有

$$\left\langle \mathrm{d}\varphi_0, \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \right\rangle = -1 \tag{201}$$

对于 $k \in \{1, \ldots, M\}$，以及根据方程(199c)，连同d $\varphi_e = 0$,

$$\left\langle \mathrm{d}\varphi_0, \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \right\rangle = 1 \tag{202}$$

对于 $k \in \{M+1, \ldots, N+1\}$。因此我们有

$$\mathbf{W}_k = \frac{\partial}{\partial \varphi_{k+1}} - \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \tag{203}$$

从 1 到 k 以及从 $M+1$ 到 N 的向量都是零向量。事实上，它们彼此独立，共计 $M-1+(N-(M+1)+1) = N-1$。我们得到了一个完整的独立集。

这些零向量为我们提供了一致性约束，$\mathbf{W}_k(H) = 0$; 在本例中，它们实际上是电流守恒约束，具体如下

$$h'_{k+1}(\varphi_{k+1}) = h'_k(\varphi_k) \tag{204}$$

对于 $k \in \{1, \ldots, M-1\} \cup \{M+1, \ldots, N\}$。基本上，对于 $k = 0$ 和 $k = M$，可能存在电流抽取或注入，因此这些节点未出现在方程(204)的序列中。

综上所述，一方面，我们得到了一个用 $N+1$ 电感支路相位表示的电感能表达式；另一方面，还得到2个KVL约束方程，其中引入了额外的 φ_0 和 φ_e（使总相位变量的数量增加到 $N+3$），以及额外的 $N-1$ 电流守恒约束。总而言之，共有$N+3$ 个相位和 $1+2+N-1 = N+2$ 个关系；消去 $N+1$ 个回路电感支路相位后，我们得到一个用 φ_0 和 φ_e表示的电感能表达式。换言之，该系统的电感能总是依赖于这些变量。要给出显式形式，唯一需要注意的是，正如我们现在将要展示的那样，很可能无法将所有从1到 $N+1$ 的 φ_k 重新表示为

φ_0 和 φ_e的函数。无论如何，即使不能这样表示，我们仍然可以将电感能表示为 φ_0 和 φ_e的函数，只不过是隐式形式。

H.2.2 示例

让我们将前面的计算应用于这样一种情况：回路的内边和外边中的所有电感元件，要么是线性电感，要么是约瑟夫森结电感。也就是说，所有电感能 h_k 均具有以下形式之一：

$$h_k(\varphi_k) = \frac{E_k}{2}\varphi_k^2 \tag{205}$$

or

$$h_k(\varphi_k) = -E_k \cos(\varphi_k)\,. \tag{206}$$

如果回路某一条边上的所有电感器都是线性的，那么它们都可以参数化为 $\varphi_{\text{linedge}} = \sum_{k\in\text{边}} \varphi_k$ ，其中 $\varphi_k = E_{\text{linedge}}\varphi/E_k$，且 $E_{\text{linedge}} = \left(\sum_{k\in\text{边}} E_k^{-1}\right)^{-1}$，于是我们得到线性情形下的标准等效电感。因此，假设该边上至少有一个约瑟夫森结电感。不失一般性地，设所有约瑟夫森结电感中具有最小E 系数的约瑟夫森结电感，是回路该边上的第一个电感。为明确起见，我们首先取内边，因此 E_1 是该回路上所有约瑟夫森结电感中最小的能量系数。对内边上的所有电感器定义 $\beta_k = E_1/E_k$。于是约束方程(204) 要么是

$$\varphi_k = \beta_k \sin\varphi_1\,, \tag{207}$$

对于该边的线性电感，或者

$$\varphi_k = \arcsin\left(\beta_k \sin\varphi_1\right) \tag{208}$$

对于约瑟夫森结电感。注意，所有约瑟夫森结电感都满足$\beta_k \le 1$ 根据构造，因此方程 (208) 可以一致地使用。无论如何，我们得到了约束方程的解的显式参数化， $\varphi_k = f_k(\varphi_1)$，适用于内边。完全相同地，我们也有 $\varphi_k = f_k(\varphi_{M+1})$ 适用于外边。

现在我们用两个参数 φ_1 和 φ_{M+1}表示最终变量 φ_0 和 φ_e ，

$$\varphi_0 = -\sum_{k=1}^{M} f_k(\varphi_1)\,, \tag{209a}$$

$$\varphi_e = -\varphi_0 + \sum_{k=M+1}^{N+1} f_k(\varphi_{M+1})\,. \tag{209b}$$

此处需要探讨的问题是，这些关系能否求逆，从而使我们能够表示 $\varphi_1 = g_1(\varphi_0)$和 $\varphi_{M+1} = g_2(\varphi_0 + \varphi_e)$。由于所有 f_k 函数都是光滑的，问题在于方程(209) 中的各个和是否是 φ_1 和 φ_{M+1}的单调函数。换言之，我们必须考察方程是否

$$\sum_{k=1}^{M} f_k'(\sigma_1) = 0 \qquad \text{and}$$
$$\sum_{k=M+1}^{N+1} f_k'(\sigma_2) = 0$$

有根。关于若干示例的分析，参见参考文献 [86] 。

H.2.3 稳态与电感回路。

在前文的 H.2.1 节中，我们讨论了 [86], 电感偶极子的有效势这一核心研究对象的构造。Miano等人还讨论了另一个问题，即如何确定展开中的极小值。现在我们直接证明他们的第一个结果，该结果涉及通过电容元件连接到网络的电感回路的稳态。我们用索引 k 标识回路中的各个电感元件，并将支路电流（实际上是数电流，因为我们以库珀对电荷为单位对电荷进行归一化，但仍沿用电流强度的记号）和支路相位分别记为 i_k 和 φ_k。每个电感元件的能量函数为 $h_k(\varphi_k)$。回路的总电感能是这些能量函数之和，$U_{\text{ind}} = \sum_k h_k$。事实上，他们所考虑电路中由基尔霍夫约束导致的变量约化，等价于考虑节点相位。我们按顺序为电感元件编号，并相应地为节点编号，使得第 k个元件连接第 $k-1$个节点和第 k个节点。第 0 个节点是参考节点。因此，第 k个元件的支路相位 φ_k等于第 k个节点相位与第 $k-1$个节点相位之差， $\varphi_k = \phi_k - \phi_{k-1}$。回路的电感能表示为节点相位的函数，$U_{\text{ind}}(\boldsymbol{\phi})$。

电感元件的本构方程为

$$i_k = \frac{\partial h_k}{\partial \varphi_k}\,. \tag{210}$$

现在，根据构造， $\varphi_k = \phi_k - \phi_{k-1}$，因此

$$\frac{\partial}{\partial \phi_k} = -\frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial}{\partial \varphi_{k+1}}\,. \tag{211}$$

因此，

$$\frac{\partial U_{\text{ind}}}{\partial \phi_k} = -i_{k+1} + i_k = j_k\,, \tag{212}$$

其中，我们引入符号 j_k 表示注入 k节点的电流。该结果（参考文献 [86]的式（5））适用于任何动力学情形，无论是否处于稳态。不仅如此，即使电感回路连接了其他元件，而不只是像 Miano 等人的描述中那样由电容器为每个电感元件提供一个回路，该结果仍然成立。例如，即使节点磁通拉格朗日量存在缺陷，该结果也依然成立。这里的推导

源自基尔霍夫约束。在参考文献 [86] 中，该结果是通过 Tellegen类型论证得到的。由于 Tellegen全局性质源自基尔霍夫定律，并且此外，任意一个基尔霍夫定律结合 Tellegen全局性质都能推出另一个基尔霍夫定律，因此，这些导子是等价的。

在寻找适合展开并随后进行量子化的极小值时，下一个结论是：在经典稳态下，$\nabla_\phi U_{\mathrm{ind}}(\phi) = 0$。这一结论不如前一个结果普遍。要使其成立，与相关节点相连的电感元件必须只有回路中的那些元件。在此条件下，Miano 等人的下一个结论是：在稳态下，纯电感回路所有支路中的电流必须相同。换言之，对于稳态下电感回路中的所有元件 j, k，我们必须有

$$h'_k(\varphi_k) = h'_j(\varphi_j)\,. \tag{213}$$

这一更具体的结果是 Miano 等人分析有效电感偶极子的出发点，其思路与小节 H.2.1相同。注意，(213) 与(204)直接对应。

参考文献

[1] J. D. Jackson, 《经典电动力学》, 第3版（Wiley，纽约，1999）。[2] R. Feynman、R. Leighton 和 M. Sands, 《费曼物理学讲义》, 第II卷：主要讲电磁学与物质，新千年版（Basic Books，纽约，2010）。[3] A. O. Caldeira 和 A. J. Leggett, 《物理评论快报》46，211（1981）。[4] B. Yurke 和 J. S. Denker, 《物理评论A》29，1419（1984）。[5] A. Blais、A. L. Grimsmo、S. M. Girvin 和 A. Wallraff, 《现代物理评论》93，025005（2021）。[6] A. Parra-Rodriguez，博士论文：《超导电路的正则量子化》（巴斯克地区大学，Leioa，2021）。[7] R. M. Foster, 《贝尔系统技术杂志》6，259（1924）。[8] W. Cauer，博士论文：《规定频率依赖性的交流电阻的实现》（柏林工业大学，柏林，1926）。[9] W. Cauer, 《电气通信技术》（ENT）6，272（1929）。[10] O. Brune，博士论文：《驱动点阻抗为指定频率函数的有限双端网络综合》（麻省理工学院，波士顿，1931）。[11] B. D. H. Tellegen, 《飞利浦研究报告》3，81（1948年）。[12]V. Belevitch, 《电气通信》27，231（1950）。[13] W. Cauer, 《线性交流电路理论》, 第2版（Akademie-Verlag GmbH，柏林，1954）。[14]R. W. Newcomb, 《线性多端口综合》（McGraw-Hill，纽约，1966年）。[15] B. Anderson 和 P. Moylan, 《国际电路理论与应用期刊》3，193（1975年）。[16] D. A. Wells, 《应用物理学杂志》9，312（1938年）。[17] D. A. Wells, 《应用物理学杂志》16，535（1945年）。[18] A. MacFarlane, 《电气工程师学会会刊》116，1453(4)（1969年）。[19] L. Chua 和 J. McPherson, 《IEEE电路与系统汇刊》21，277（1974年）。[20] H. Kwatny、F. Massimo 和 L. Bahar, 《IEEE电路与系统汇刊》29，220（1982年）。[21] E. Shragowitz 和 E. Gerlovin, 《国际电路理论与应用期刊》16，129（1988年）。[22] G. Bernstein 和 M. Lieberman, 《IEEE电路与系统汇刊》36，411（1989年）。[23] B. Maschke、A. van der Schaft 和 P. Breedveld, 《IEEE电路与系统汇刊I：基础理论与应用》42，73（1995年）。[24] L. Weiss 和 W. Mathis, 《IEEE电路与系统汇刊I：基础理论与应用》44，843（1997年）。[25] A. Van Der Schaft，载于《国际数学家大会论文集》第3卷，Marta Sanz-Sole、Javier Soria、Juan Luis Verona、Joan Verdura，西班牙马德里（欧洲数学学会出版社，2006年），第1339–1365页。[26] A. Van Der Schaft 和 D. Jeltsema, 《系统与控制基础与趋势》1，173（2014年）。[27] M. H. Devoret, 载于《莱苏什暑期学校论文集》, 第LXIII期（爱思唯尔，S. Reynaud、E. Giacobino 和 J. Zinn-Justin 编，纽约，1995年）。[28] G. Burkard、R. H. Koch 和 D. P. DiVincenzo, 《物理评论B》69，064503（2004年）。[29] G. Burkard, 《物理评论B》71，144511（2005年）。[30] J. Ulrich 和 F. Hassler, 《物理评论B》94，094505（2016年）。[31] A. Parra-Rodriguez 和 I. L. Egusquiza，Quantum 6，681（2022年）。[32] I. L. Egusquiza 和 A. Parra-Rodriguez, 《物理评论B》106，024510（2022年）。[33] S. Chakravarty 和 A. Schmid, 《物理评论B》33，2000（1986年）。[34] B. Yurke, 《美国光学学会杂志B辑》4，1551（1987年）。[35] E. Paladino、F. Taddei、G. Giaquinta 和 G. Falci, 《物理学E辑：低维系统与纳米结构》18，39（2003年）。[36] A. Blais、R.-S. Huang、A. Wallraff、S. M. Girvin 和 R.J. Schoelkopf, 《物理评论A》69，062320（2004年）。[37] A. A. Houck、J. A. Schreier、B. R. Johnson、J. M. Chow、J. Koch、J. M. Gambetta、D. I. Schuster、L. Frunzio、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J.

Schoelkopf, 《物理评论快报》101，080502（2008年）。[38] J. Bourassa、J. M. Gambetta、A. A. Abdumalikov、O. Astafiev、Y. Nakamura 和 A. Blais, 《物理评论A》80，032109（2009年）。[39] A. A. Clerk、M. H. Devoret、S. M. Girvin、F. Marquardt 和 R. J. Schoelkopf, 《现代物理学评论》82，1155（2010年）。[40] J. Koch、A. A. Houck、K. L. Hur 和 S. M. Girvin, 《物理评论A》82，043811（2010年）。[41]S. Filipp、M. G¨oppl、J. M. Fink、M. Baur、R. Bianchetti、L. Steffen 和 A. Wallraff, 《物理评论A》83，063827（2011年）。[42]J. Bourassa、F. Beaudoin、J. M. Gambetta 和 A. Blais, 《物理评论A》86，013814（2012年）。[43] C. Bergenfeldt 和 P. Samuelsson, 《物理评论B》85，045446（2012年）。[44] B. Peropadre、J. Lindkvist、I.-C. Hoi、C. M. Wilson、J. J. Garcia-Ripoll、P. Delsing 和 G. Johansson, 《新物理学杂志》15，035009（2013年）。[45] S. E. Nigg、H. Paik、B. Vlastakis、G. Kirchmair、S. Shankar、L. Frunzio、M. H. Devoret、R. J. Schoelkopf 和 S. M. Girvin, 《物理评论快报》108，240502（2012年）。[46] M. Devoret 和 R. Schoelkopf, 《科学》339，1169（2013年）。[47] F. Solgun、D. W. Abraham 和 D. P. DiVincenzo, 《物理评论B》90，134504（2014年）。[48] N. M. Sundaresan、Y. Liu、D. Sadri、L. J. Sz˝ocs、D. L. Underwood、M. Malekakhlagh、H. E. T¨ureci 和 A. A. Houck, 《物理评论X》5，021035（2015年）。[49] F. Solgun 和 D. DiVincenzo, 《物理学年鉴》361，605（2015年）。[50] M. Malekakhlagh 和 H. E. T¨ureci, 《物理评论 A 》 93，012120 （ 2016 年）。[51] H. L. Mortensen、K. Mølmer 和 C. K. Andersen, 《物理评论A》94，053817（2016年）。[52] A. Roy 和 M. Devoret, 《物理学报告》17，740（2016年）。[53] U. Vool 和 M. Devoret, 《国际电路理论与应用期刊》45，897（2017年）。[54] M. Malekakhlagh、A. Petrescu 和 H. E. T¨ureci, 《物理评论快报》119，073601（2017年）。[55] A. Roy 和 M. Devoret, 《物理评论B》98，045405（2018年）。[56] A. Parra-Rodriguez、E. Rico、E. Solano 和 I. L. Egusquiza, 《量子科学与技术》3，024012（2018年）。[57] D. Jeltsema 和 A. J. Van Der Schaft, 《数学物理学报告》63，55（2009年）。[58]M. Mariantoni, arXiv:2007.08519 [class-ph]（2020年）。[59]A. Parra-Rodriguez、I. L. Egusquiza、D. P. Di-Vincenzo 和 E. Solano, 《物理评论B》99，014514（2019年）。[60] M. Rymarz、S. Bosco、A. Ciani 和 D. P. DiVin-cenzo, 《物理评论X》11，011032（2021年）。[61] A. Parra-Rodriguez 和 I. L. Egusquiza, 《物理评论B》106，054504（2022年）。[62]J. Kerckhoff、K. Lalumi`ere、B. J. Chapman、A. Blais 和 K. W. Lehnert, Physical Review Applied 4，034002（2015年）。[63] K. M. Sliwa、M. Hatridge、A. Narla、S. Shankar、L. Frunzio、R. J. Schoelkopf 和 M. H. Devoret, 《物理评论X》5，041020（2015年）。[64] F. Lecocq、L. Ranzani、G. A. Peterson、K. Cicak、R. W. Simmonds、J. D. Teufel 和 J. Aumentado, Physical Review Applied 7，024028（2017年）。[65] B. J. Chapman、E. I. Rosenthal、J. Kerckhoff、B. A. Moores、L. R. Vale、J. A. B. Mates、G. C. Hilton、K. Lalumi`ere、A. Blais 和 K. W. Lehnert, 《物理评论X》7，041043（2017年）。[66] A. C. Mahoney、J. I. Colless、S. J. Pauka、J. M. Hornibrook、J. D. Watson、G. C. Gardner、M. J. Manfra、A. C. Doherty 和 D. J. Reilly, 《物理评论X》7，011007（2017年）。[67] S. Barzanjeh、M. Wulf、M. Peruzzo、M. Kalaee、P. Dieterle、O. Painter 和 J. Fink, 《自然通讯》8，953（2017年）。[68] A. Rosario Hamann、C. M¨uller、M. Jerger、M. Zanner、J. Combes、M. Pletyukhov、M. Weides、T. M. Stace 和 A. Fedorov, 《物理评论快报》121，123601（2018年）。[69] R. Navarathna、D. T. Le、A. R. Hamann、H. D. Nguyen、T. M. Stace 和 A. Fedorov, 《物理评论快报》130，037001（2023年）。[70] R. K. Brayton 和 J. K. Moser, 《应用数学季刊》22，1（1964年）。[71] R. K. Brayton 和 J. K. Moser, 《应用数学季刊》22，81（1964年）。[72] S. Smale, 《微分几何杂志》7，193（1972年）。[73] A. Weinstein, 《微分几何杂志》18，523（1983年）。[74] T. J. Courant, 《美国数学会汇刊》319，631（1990年）。[75] H. Yoshimura 和 J. E. Marsden, 载于《第17届网络与系统数学理论国际研讨会论文集》（京都，2006年），论文编号 WeA08.5，第1–6页。[76] G. Kirchhoff, 《物理学年鉴》148，497（1847年）。[77] M. F. Gely 和 G. A. Steele, 《新物理学杂志》22，013025（2020年）。[78] Z. K. Minev、T. G. McConkey、M. Takita、A. D. Corcoles 和 J. M. Gambetta，arXiv:2103.10344[量子物理]（2021年）。[79] S. P. Chitta、T. Zhao、Z. Huang、I. Mondragon-Shem 和 J. Koch, 《新物理学杂志》24，103020（2022年）。[80] T. Rajabzadeh、N. L. Zhaoyou Wang、T. Makihara、Y. Guo 和 A. H. Safavi-Naeini，Quantum 7，1118（2023年）。[81]L. D. Faddeev, 《理论与数学物理》1，1（1969年）。

已获 (Quantum) 接收于 2024-09-03，点击标题进行验证。根据 CC-BY 4.0 发布。

[82] L. Faddeev 和 R. Jackiw，《物理评论快报》60，1692（1988年）。[83] R. Jackiw，arXiv:hep-th/9306075 [hep-th]（1993年）。[84] R. Jackiw，载于《约束理论与量子化方法：从相对论粒子到场论与广义相对论》，F. Colomo、L. Lusanna 和 G. Marmo 编（世界科学出版社，1994年）。[85] M. Rymarz 和 D. P. DiVincenzo，《物理评论X》13，021017（2023年）。[86] A. Miano、V. R. Joshi、G. Liu、W. Dai、P. D. Parakh、L. Frunzio 和 M. H. Devoret，PRX Quantum 4，030324（2023年）。[87] V. E. Manucharyan、J. Koch、L. I. Glazman 和 M. H. Devoret，《科学》326，113（2009年）。[88] M. B¨uttiker，《物理评论B》36，3548（1987年）。[89] D. Thanh Le、A. Grimsmo、C. M¨uller 和 T. M. Stace，《物理评论A》100，062321（2019年）。[90] E. A. Guillemin，《电路理论导论》（约翰·威立父子出版公司，纽约，1953年）。[91] L. Chua，《IEEE电路与系统汇刊》27，1014（1980年）。[92] M. Ostrogradsky，《圣彼得堡科学院院刊》6，385（1850年）。[93] R. P. Woodard，Scholarpedia 10，32243（2015年），修订版 # 186559。[94]M. Nakahara，《几何、拓扑与物理》，第二版，研究生物理学丛书（泰勒-弗朗西斯出版集团，2003年）。[95] Y. Choquet-Bruhat，《微分几何与外微分系统》，大学数学专著第28卷（Dunod 出版社，巴黎，1968年），第十七章。[96] H. Weyl，《西班牙裔美洲数学杂志》5，153（1923年）。[97] B. D. H. Tellegen，《飞利浦研究报告》3，81（1948年）。[98] M. A. De Gosson，《辛几何与量子力学》第166卷（施普林格科学与商业媒体，巴塞尔，2006年）。[99] B. Kostant，载于《现代分析与应用讲义 III》，C. T. Taam 编（施普林格柏林海德堡，柏林、海德堡，1970年），第87–208页。[100] J.-M. Souriau，《动力系统的结构：物理学的辛几何视角》，数学进展第149卷（Birkh¨auser，波士顿，1997年）。[101] I. L. Egusquiza、A. I˜niguez、E. Rico 和 A. Villarino，《物理评论B》105，L201104（2022年）。[102] A. Galindo 和 P. Pascual，《量子力学 I》，《理论与数学物理》（施普林格柏林海德堡，2012年）。[103]M. Reed 和 B. Simon，《现代数学物理方法 II：傅里叶分析、自伴性》，第1版（学术出版社，纽约，1975年）。[104] S. M. Apenko，《物理快报 A》142，277（1989年）。[105] A. D. Zaikin，《低温物理学杂志》80，223（1990年）。[106] G. Sch¨on 和 A. D. Zaikin，《物理学报告》198, 237 (1990)。[107] K. K. Likharev 和 A. B. Zorin，《低温物理学杂志》59, 347 (1985)。[108] Y. Nakamura、Y. A. Pashkin 和 J. S. Tsai，《自然》398, 786 (1999)。[109] J. Koch、T. M. Yu、J. Gambetta、A. A. Houck、D. I. Schuster、J. Majer、A. Blais、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf，《物理评论A》76, 042319 (2007)。[110] J. Koch、V. Manucharyan、M. H. Devoret 和 L. I. Glazman，《物理评论快报》103, 217004 (2009)。[111] M. H. Devoret，《超导与新型磁学杂志》34, 1633 (2021)。[112]E. B. Sonin，《低温物理学》48, 400 (2022)。[113] J. Mooij 和 Y. Nazarov，《自然物理学》2, 169 (2006)。[114] D. Thanh Le、J. H. Cole 和 T. M. Stace，《物理评论研究》2, 013245 (2020)。[115] C. Koliofoti 和 R.-P. Riwar，npj《量子信息》9, 1 (2023)，出版方：自然出版集团。[116] B. D. Josephson，《物理学通讯》1, 251 (1962)。[117]O. Astafiev、L. Ioffe、S. Kafanov、Y. Pashkin、K. Arutyunov、D. Shahar、O. Cohen 和 J. Tsai，《自然》484, 355 (2012)。[118] I. V. Pechenezhskiy、R. A. Mencia、L. B. Nguyen、Y.-H. Lin 和 V. E. Manucharyan，《自然》585, 368 (2020)。[119] X. You、J. A. Sauls 和 J. Koch，《物理评论B》99, 174512 (2019)。[120] A. E. Kennelly，《电气世界与工程师》34, 413 (1899)。[121] J. Williamson，《美国数学杂志》58, 141 (1936)。[122] A. Janhsen、B. Schiek 和 V. Hansen，载于《1992年第22届欧洲微波会议》，第1卷 (1992)，第251页。[123] F. Hassler、J. Stubenrauch 和 A. Ciani，《物理评论B》99, 014515 (2019)。[124] A. Osborne、T. Larson、S. Jones、R. W. Simmonds、A. Gyenis 和 A. Lucas，arXiv:2304.08531 [quant- ph] (2023)。[125] A. Osborne、T. Larson、S. G. Jones、R. W. Simmonds、A. Gyenis 和 A. Lucas，PRX Quantum 5, 020309 (2024)。[126]Y. Choquet-Bruhat、C. DeWitt-Morette 和 M. Bleick，《分析、流形与物理学》第1部分：基础、分析、流形与物理学（北荷兰出版社，1982）。[127] J. Jos´e 和 E. Saletan，《经典动力学：一种当代方法》，《经典动力学：一种当代方法》（剑桥大学出版社，1998）。

[128]R. Abraham 和 J. Marsden，《力学基础》，AMS Chelsea 出版社（Benjamin/Cummings 出版公司，2008）。[129] A. Carosso，科学史与科学哲学研究 96, 35 (2022)。[130] V. Belevitch，《经典网络理论》，信息系统 Holden-Day 丛书（Holden-Day，1968）。[131] H. Goldstein、C. P. Poole 和 J. L. Safko，《经典力学》，第3版（培生教育公司以 Addison Wesley 名义出版，2002）。[132] T. Thiemann，《现代正则量子广义相对论》（剑桥大学出版社，2008）。[133] N. Mukunda，Physica Scripta 21, 801 (1980)。[134] J. M. Evans 和 P. A. Tuckey，现代物理学国际期刊 A 08, 4055 (1993)。[135] D. Gitman 和 I. V. Tyutin，《带约束场的量子化》（Springer Science & Business Media，2012）。[136] Z. Belhadi、A. B´erard 和 H. Mohrbach，《物理快报 A》380, 3355 (2016)。[137] R.-P. Riwar 和 D. P. DiVincenzo，npj《量子信息》8, 36 (2022)。[138] J. Bryon、D. Weiss、X. You、S. Sussman、X. Croot、Z. Huang、J. Koch 和 A. A. Houck，《物理评论应用》19, 034031 (2023)。[139]E. Ince，《常微分方程》，Dover 数学丛书（Dover 出版社，1956）。[140] A. Shapere 和 F.Wilczek，《物理评论快报》 109, 200402 (2012)。[141] J. A. Schreier、A. A. Houck、J. Koch、D. I. Schuster、B. R. Johnson、J. M. Chow、J. M. Gambetta、J. Majer、L. Frunzio、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf，《物理评论B》77, 180502 (2008)。