arXiv:2304.12267v1 [math.NT] 24 Apr 2023

存在统一 p-进积分与下降：关于可积性和最大极点

RAF CLUCKERS 和 MATHIAS STOUT

ABSTRACT. 自 Denef 的工作以来， p-进胞腔分解一直是研究 p-进积分和动机积分的一种成熟方法。在本文中，我们提出了这一方法的一种变体，该变体会追踪存在量词。这使我们能够推导出 p-进积分的下降性质。特别地，我们证明了“存在”函数的可积性可以从任意 p-进域下降到任意 p-进子域。作为应用，我们得到 Serre-Poincaré 级数的最大极点在域扩张下只会增大。作为附带结果，我们证明了一个关于特征为零的亨塞尔赋值域的相对量词消去结论，并且该结论保持存在公式。

1. 引言

本文围绕以下问题展开。给定两个 p-进域 $L \geq K$，它们都配备 Haar 测度，以及两个“相似”的函数 f_L 在 L^n 上和 f_K 在 K^n上，在何种一般性条件下，可以由 f_L的可积性推导出 f_K 的可积性？事实证明，这是一个微妙的问题，因为从几何角度来看，人们希望在 L 中看到的“更多”内容多于在 K中看到的内容。对于这个关于从 L 到 K的下降问题，本文明确了“相似”和“更多”可能具有的含义。

在统一的 p-进积分背景下，人们通常使用模型论工具，对所有 p-进域 K 上的 f_K进行统一描述，参见例如 [Pas89, CH18]。这使得我们能够统一描述被积函数，

2020年数学主题分类。主要分类：03C98、11U09、14B05；次要分类：11S40、14E18、11F23。关键词和短语。 p-进积分的可积性下降、胞腔分解、Igusa局部ζ函数、Serre-Poincaré级数、对数典范阈值、振荡指数、 p-进可积性指标的半连续性。作者谨此感谢 A. Aizenbud、Y. Hendel、F. Loeser 和 E. Sayag 围绕本文主题所进行的宝贵讨论。也衷心感谢 J. Denef，就控制与动机积分及 p-进积分相关的量词问题展开讨论。作者 R. C. 得到了 Labex CEMPI（ANR-11-LABX-0007-01）的部分资助。

它们的可积性、积分、可积轨迹等，在遍历所有 K时皆是如此；但所提及的关于可积性的下降，比仅仅拥有这些统一描述要微妙得多。我们将采用两种额外的控制层次，它们都可以视为某种正性形式。第一种是非负性概念，仅仅源于避免作差，这让人想起 [CL08] 中用于动机函数的半环方法。第二种正性形式则来自于在描述 f_K时只允许使用存在公式。注意，任何存在公式 φ 都具有如下正性形式：对于任意子结构 $A \subseteq B$，解集$\varphi(A)$都包含于 $\subseteq \varphi(B)$，参见（2）。对存在 p-进积分及其下降性质的研究尚属全新。下面我们将对此作出精确定义。

1.1. 我们首先在有限环中的点计数这一具体背景下介绍关于下降的结果，这与 Igusa 的工作相同，参见例如 [Den91]。设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是 m 个变量上的非常数多项式。若我们希望理解对所有 $N > 0$而言 $f(x) = 0$ 模 N 的解的数量，那么根据中国剩余定理，只需理解以下数量

$$\tilde{N}_{n,p}(f) := \#\{\xi \in (\mathbb{Z}_p/(p^n))^m \mid f(\xi) = 0\},$$

对于素数 p 和整数 $n \geq 0$。研究这些数量的一种方法是考察相应的 Poincar´é 级数

$$\tilde{P}_{f,p}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{N}_{n,p}(f)}{p^{nm}} T^n.$$

˜经过变换 $T \mapsto p^{-s}$后，我们可以将 $P_{f,p}(p^{-s})$ 视为一个实部为正的复变量 s 的函数。Igusa 在 [Igu75]中证明，该函数可以表示为一个 p-adic 积分，并且 $P_{f,p}(p^{-s})$ 是关于 p^{-s}的有理函数，其所有极点的候选描述都基于对 $f = 0$的对数消解。$P_{f,p}(p^{-s})$ 的复极点的实部的最大值尤其值得关注，˜因为它与数量 $N_{n,p}(f)$ 的渐近增长有关，其中 $n \to \infty$。

现在考虑一个有限扩张 K of $\mathbb{Q}_p$，其赋值环为 $\mathcal{O}_K$，并选取一个一致化元 $\pi \in K$。类似地，我们可以计数 ˜ 个解 $N_{n,\ K}(f)$，这些解满足 $f(x) = 0$in $\mathcal{O}_K^m/(\pi^n)$，其中 (π^n) 表示由 π^n 在 $\mathcal{O}_K^m$ 中生成的理想。记 q 为 K 的剩余域的基数，并考虑相应的 Poincar´é 级数

$$\tilde{P}_{f,K}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{N}_{n,K}(f)}{q^{nm}} T^n.$$

˜再次地，$P_{f,\ K}(q^{-s})$ 关于 q^{-s} 是有理的，并且根据基于对数消解的极点候选描述，对于 $P_{f,\ K}(q^{-s})$ 的极点的最大实部˜ ˜，记为 $-\lambda_K(f)$，有

$$\mathrm{lct}(f) \leq \tilde{\lambda}_K(f),$$

其中左侧是 $f(x)$ 的对数典范阈值；按照˜ ˜约定，若 $P_{f,\ K}(q^{-s})$ 没有极点，则 $\lambda_K(f) = +\infty$。

我们的结果的一个推论是，当 L 是 K 的任意有限域扩张时，有

$$\tilde{\lambda}_L(f) \leq \tilde{\lambda}_K(f). \tag{1}$$

˜我们将这一现象称为下降：关于 $\lambda_K(f)$ 的信息从域扩张中下降而来。上述不等式 (1) 也可能可以通过纯代数论证得到证明，但本文的主要结果是在代数几何工具不易获得的情形下，证明了这类下降性质；Serre变体正是如此，我们接下来将对此进行解释。

1.2. 下面借助上述 Poincar´e 级数的 Serre变体，说明我们的结果所涵盖的范围。沿用关于 f、K、π、n 的记号，考虑数

$$N_{n,K}(f) \coloneqq \#\{\xi \in \mathcal{O}_K^m/(\pi^n) \mid \exists y \in \mathcal{O}_K^m (f(y) = 0 \wedge \xi = y + (\pi^n))\}$$

以及相应的 Serre-Poincar´e 级数

$$P_{f,K}(T) \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{N_{n,K}(f)}{q^{n(m+1)}} T^n.$$

Denef [Den84] 证明了，$P_{f,K}(q^{-s})$ 关于 q^{-s} 是有理的，其证明使用了模型论工具。证明的第一步同样是将 $P_{f,K}(q^{-s})$ 表示为某个 p-adic 积分。与通常的 Poincar´e 级数相比，主要的复杂之处在于，构造该积分所依据的数据不再纯粹是代数的，而是可定义的（例如，在 Denef-Pas语言中），更准确地说，是存在可定义的（见定义2.11）。

采取模型论观点后，我们可以将 Poincar´e 级数和 Serre-Poincar´e 级数置于同等地位，从而得到类似的下降结果，如下所述。记 $-\lambda_K(f)$ 为 $P_{f,K}(q^{-s})$ 的极点（在 s 中）的最大实部（若不存在极点，则令 $\lambda_K(f) = +\infty$）。我们证明如下：

定理 1.1。（Serre-Poincar´e 级数的下降）若 K 是一个 p-进域，则对于任意有限域扩张 L，有

$$\lambda_L(f) \leq \lambda_K(f).$$

与 Poincar´e 级数的情形一样，这给出了 $N_{n,L}(f)$ 与 $N_{n,K}(f)$ 的渐近性之间的比较。由于总有$\lambda_K(f) \geq 0$，该定理为研究当 K 成为越来越大的扩张时 $\lambda_K(f)$ 的极限值性质开辟了道路。

1.3. 我们关于 Poincar´e 和 Serre-Poincar´e 级数的极点的应用，是我们称为 K-指标下降的一般结果的两个特例。现在我们对此作更详细的说明。

利用模型论，可以在 K 的域扩张中一致地解释函数。更确切地说，我们考虑函数族 $f = (f_K)_K$，其中 K 遍历所有 p-进域，并且存在一个单一公式（从逻辑意义上说），使得每个 f_K 都是该公式在 K 中的解释。对于这样的 $f = (f_K \colon X_K \subseteq K^m \to K)_K$，我们对每个 p-进域 K 定义 $|f|$ 的 K-指标为

$$\mathrm{ind}_X^K(|f|) := \sup \left\{ s \in \mathbb{R}_{>0} \,\middle|\, \int_{X_K} |f_K|_K^s \, dx < +\infty \right\},$$

约定：当这样的 s 的集合为空时，$\mathrm{ind}_X^K(|f|) = 0$；当其无界时，$\mathrm{ind}_X^K(|f|) = +\infty$。

这里 $|\cdot|_K$ 是与 π-进赋值相关的绝对值（其中 $|\pi|_K = q^{-1}$），积分是相对于（加法）Haar测度 μ进行的，并归一化为 $\mu(\mathcal{O}_K) = 1$。

$|f|$ 的 K-指标的下降可能因平凡原因而失败，因为很容易定义出在域扩张中变得“奇异性较低”的函数（例 7.8）。然而，当 f的图是存在性可定义的时，下降确实成立。

定理 1.2。（ K-指标的下降）设 $f = (f_K \colon X_K \to K)_K$是语言 $\mathcal{L}_{val} = \mathcal{L}_{ring} \cup \{\mathcal{O}\}$中的可定义函数。如果 f 的图由存在公式[1], 给出，那么对于任意 p-进域 K 及任意有限域扩张 $L \geq K$，我们有

$$\mathrm{ind}_X^L(|f|) \leq \mathrm{ind}_X^K(|f|).$$

我们关于（Serre）-Poincar´é级数的结果，是通过将其最大极点与某个适当的 f下的 $-\mathrm{ind}_X^K(|f|)$ 相对应而得到的。

1.4. 我们的主要技术工具是一个胞腔分解定理（定理 4.14），它对存在量词进行了精确控制。

使用胞腔分解研究 p-adic 积分的思想由来已久，并取得了丰硕成果。Denef 首先在 [Den84] 中提出了这一思想，随后 Pas 在 [Pas89, Pas90a] 中对其进行了进一步发展。由于胞腔

[1]存在公式是指形如 $\exists y \varphi(x, y)$ 的公式，其中 $\varphi(x, y)$ 是某个无量词公式，x、y 是变量元组，见定义2.11

分解能够对某个给定集合进行良好描述，并且这一描述对于某一类域是一致的，因此它非常适合用于发展一致的 p-adic 积分理论：既可以研究剩余域特征足够大的局部域上的积分（例如 [CGH14, CGH18]），也可以研究任意剩余域特征的 p-adic 域上的积分（[CH18]）；这两种理论均遵循更为抽象的动机方法，即 [CL08, CL10]。

我们关注在 p-进域 K 与有限域扩张 $L \geq K$ 之间比较单个 $f = (f_K)_K$ 的解释 f_K 和 f_L （及其积分）。与上述用于一致 p-进积分的框架所依赖的常规胞腔分解相比，这带来了两个关键的技术差异。首先，我们使用带有首项映射的语言，而不是带有角分量映射的语言。这是因为首项映射总能扩张到域扩张上（命题 3.1），而角分量映射则未必如此（命题 3.3）。其次，为了更精确地控制存在量词，我们通过一些与亨塞尔提升相关的谓词扩充了语言。

粗略地说，这种对量词的控制使我们能够将一个存在可定义集分解为同样存在可定义的胞腔（更多细节参见定理 4.14）。由此，我们可以将定理 1.2 的证明归约到 X 是一个胞腔且 f 在其上以某种特定方式被预备的情形。存在公式的重要性与以下事实有关：如果 X 和 $f = (f_K \colon X_K \to K)_K$ 的图都是存在性可定义的，那么只要 $K \leq L$，我们就有

$$X_K \subseteq X_L \text{ and } f_K = f_{L|X_K}. \tag{2}$$

这使得对 f_K 和 f_L 的积分进行有意义的比较成为可能。

1.5. 此外，我们的胞腔分解蕴含了在某种语言 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$（见第 2 节介绍）中的一个存在量词消去陈述。该语言包含一个表示赋值域的 VF 类，以及表示首项结构 $K^\times/(1 + N\mathcal{M}_K) \cup \{0\}$ 的 RV_N 类，其中对所有整数 $N > 0$ 均如此。它还包含上述亨塞尔提升谓词。在这种语言中，我们可以表述特征零亨塞尔赋值域（剩余域特征任意）的理论 $T_{\mathrm{Hen},\ 0}$。

定理 1.3（∃-VF 消去）。任意存在 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$ 公式在 $T_{Hen,\ 0}$ 模意义下都等价于一个不含任何赋值域量词的存在 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$ 公式。

由于我们的语言中包含额外的 Hensel提升谓词，因此与 [Fle11, 命题 4.3] 相比，我们能够对量词进行更严格的控制。此外，我们的量词约化陈述蕴含了关于亨塞尔赋值域的存在理论的类似 AKE 的原理（推论 6.5）。

2. Valued fields and leading terms

2.1. 记号与约定。在全文中，K 表示一个非平凡赋值域，其赋值环为 $\mathcal{O}_K \neq K$。这意味着$x \in K$ 满足 $x \in \mathcal{O}_K$ 或 $x^{-1} \in \mathcal{O}_K$，并且 K 是$\mathcal{O}_K$的分式域。记 $\mathcal{M}_K$ 为 $\mathcal{O}_K$ 唯一的极大理想，记 $\Gamma = K^\times/\mathcal{O}_K^\times$ 为 K的值群。值群 Γ将被视为加法群，其秩可以是任意的。它配备了一个满赋值映射 ord: $K^\times \to \Gamma$。

对每个整数 $N > 0$，记 R_N为剩余环 $\mathcal{O}_K/(N\mathcal{M}_K)$。此外，定义开球 $B(a,\gamma)$，其中心为 $a \in K$，赋值半径为 $\gamma \in \Gamma$，如下

$$B(a,\gamma) := \{x \in K \mid \mathrm{ord}(x-a) > \gamma\}.$$

我们将大量使用首项结构 $\mathbf{RV}_N$。对任意 $N > 0$，定义 $\mathbf{RV}_N^\times$ 为乘法群

$$\mathrm{RV}_N^\times := K^\times/(1+N\mathcal{M}_K),$$

并令 $\mathbf{RV}_N = \mathbf{RV}_N^\times \cup \{0\}$。我们有映射 $\mathbf{rv}_N$: $K \to \mathbf{RV}_N$，它由 $K^\times$ 上的自然投影给出，并扩展为 $\mathbf{rv}_N(0) = 0$。每当N 整除某个 $0 < N \leq M$时，映射 $\mathbf{rv}_N$ 会诱导出映射 $\mathbf{RV}_M \to \mathbf{RV}_N$，我们也将其记为 $\mathbf{rv}_N$。当 $N = 1$时，直接用 RV 和 rv 代替 $\mathbf{RV}_1$ 和 $\mathbf{rv}_1$。

例 2.1. 设 k 为任意域，且令 K 为 $k((t))$，其赋值环为 $\mathcal{O}_K = k[[t]]$。对于 $a_j \in k \setminus \{0\}$，有

$$\mathrm{rv}\left(\sum_{i \geq j} a_i t^i\right) = a_j t^j (1+\mathcal{M}_K).$$

在上述例子中，对所有整数$N > 0$，都有 $\mathbf{RV}_N^\times \cong R_N^\times \times \Gamma$。但情况并非总是如此，因为角分量映射（第 3.2 节回顾）并不总是存在，[Pas90b]。不过，自然的短正合序列总是存在:

$$\{1\} \to R_N^\times \to \mathrm{RV}_N^\times \xrightarrow{\mathrm{ord}} \Gamma \to \{1\}.$$

因此，$\mathbf{RV}_N$ 结合了关于剩余环 R_N 和值群 Γ的信息。此外，赋值映射 ord: $K^\times \to \Gamma$ 可以分解为经过映射 $\mathbf{ord} : \mathbf{RV}_N^\times \to \Gamma$，我们仍用同一名称来表示该映射。特别地，下面的定义是有意义的。

定义 2.2。定义 $\mathbf{RV}_N$上的一个二元关系 $|$，如下所示:

$$\mathrm{rv}_N(x) | \mathrm{rv}_N(y) \leftrightarrow \mathrm{ord}(x) \leq \mathrm{ord}(y).$$

最后，我们注意到以下引理，其证明是直接的（另见 [Fle11，命题 2.2]，其中给出了更多等价条件）。

引理 2.3。对于 x、$y \in K \setminus \{0\}$，我们有

$$\mathrm{rv}_N(x) = \mathrm{rv}_N(y) \leftrightarrow \mathrm{ord}(x-y) > \mathrm{ord}\, y + \mathrm{ord}\, N.$$

2.2. RV_N 上的部分加法。现在我们回顾一下首项结构，特别是其中的部分加法的一些预备知识。这里提到的事实都不是新的。我们将其收录于此，以使本文自成一体。关于一些基本性质的进一步概述，我们也参考 [Fle11]。

定义 2.4。RV_N 上的部分加法 $\oplus$ 是一个三元关系，若且唯若存在 $x_i \in K$，使得对于 $i = 1$、2、3，有 $\mathrm{rv}_N(x_i) = \xi_i$，且 $x_1 + x_2 = x_3$，则 $\oplus(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 成立。

我们不将 $\oplus$ 视为关系，而是等价地将其视为二元运算 $+$；该运算取两个元素 ξ_1、$\xi_2 \in \mathrm{RV}_N$，并生成一个元素集合

$$\xi_1 + \xi_2 := \{\xi_3 \in \mathrm{RV}_N \mid \oplus(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\}.$$

对于两个子集 $A, B \subseteq \mathrm{RV}_N$，我们将它们的和定义为

$$A + B := \bigcup_{\substack{\xi_1 \in A \\ \xi_2 \in B}} \xi_1 + \xi_2.$$

记号 2.5. 如果对于 $a, b \in \mathrm{RV}_N$ 和 $c \in \mathrm{RV}_N$，有 $a + b = \{c\}$，则将其简写为 $a + b = c$。类似地，对于 $a, b \in \mathrm{RV}_{NM}$ 和 $c \in \mathrm{RV}_N$，我们记作 $\mathrm{rv}_N(a + b) = c$，而不写作 $\mathrm{rv}_N(a + b) = \{c\}$。本文中，我们用 $\mathbb{N}$ 表示正整数集合。

结合 $\mathrm{RV}_N^\times$ 的（乘法）群结构和映射 $\mathrm{ord}\colon \mathrm{RV}_N \to \Gamma$，这个“加法”赋予 RV_N 赋值超域的结构（[Kra83] [LT22，引理 1.17]）。特别地，我们有以下性质：

引理 2.6. 设 $N \in \mathbb{N}$，且 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathrm{RV}_N$。则 RV_N 上的部分加法满足

(1)（中性元）$0 + \xi_1 = \xi_1 + 0 = \xi_1$，（2）（交换律）$\xi_1 + \xi_2 = \xi_2 + \xi_1$，（3）（结合律）$(\xi_1 + \xi_2) + \xi_3 = \xi_1 + (\xi_2 + \xi_3)$。

证明。这可通过展开定义直接得出。例如，$\xi_4 \in \xi_1 + (\xi_2 + \xi_3)$ 当且仅当存在 $x_i \in K$ 对于 $i = 1$、2、3、4，满足 $\mathrm{rv}_N(x_i) = \xi_i$ 和 $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$。这证明了结合律。□

根据上述引理，诸如 $\sum_{i=0}^{d}\xi_i$ with $\xi_i \in \mathrm{RV}_N$ 这样的表达式是定义良好的。

引理 2.7。考虑非零整数 N、d 以及元素 $\xi_i \in \mathrm{RV}_N$，其中 $i = 0$、.....、d。设 i_0 满足 $\operatorname{ord}\xi_{i_0} = \min_i \operatorname{ord}\xi_i$。那么，对于任意满足 $\mathrm{rv}_N(a) \in \sum_{i=0}^{d}\xi_i$ 的 $a \in K$，有

$$\sum_{i=0}^{d}\xi_i = \mathrm{rv}_N\, B(a, \operatorname{ord}\xi_{i_0} + \operatorname{ord} N).$$

对于任意子集 $A \subseteq \mathrm{RV}_N$ 和 $\delta \in \Gamma$，称 $\operatorname{ord}(A) \le \delta$，如果对所有 都有 $\operatorname{ord}(x) \le \delta$ $x \in A$ $0 \notin$。注意，根据上述引理，$\sum_{i=0}^{d}\xi_i$ $\sum_{i=0}^{d}\xi_i \le \gamma$ $\gamma \in \Gamma$ 当且仅当对某个 有 $\operatorname{ord}(\ )$ 时，我们有；这又当且仅当 $\operatorname{ord}(\sum_{i=0}^{d}\xi_i)$ 是单元素集。

下面的引理是用 $_N$ 上的部分加法对亨塞尔引理的重新表述。

引理 2.8。设 K 是一个亨塞尔赋值域，且 $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ 是一个系数属于 K 的非零多项式。如果对于 N 和 $\xi \in \mathrm{RV}_N^{\times}$ 有

$$\operatorname{ord}\left(\sum_{i=1}^{d}\mathrm{rv}_N(ia_i)\xi^{i-1}\right) \le \min_{1\le i\le d}\operatorname{ord}(a_i\xi^{i-1}) + \operatorname{ord} N,$$

~ ~并且，如果存在某个 $\xi \in \mathrm{RV}_{N^2}$，使得 $\mathrm{rv}_{N^2}(\xi) = \xi$ 且

$$0 \in \sum_{i=0}^{d}\mathrm{rv}_{N^2}(a_i)\tilde{\xi}^i, \tag{3}$$

那么存在唯一的 $x_0 \in K$，使得 $\mathrm{rv}_N(x_0) = \xi$ 且 $f(x_0) = 0$。

~证明。设 $b \in K^{\times}$ 满足 $\mathrm{rv}_{N^2}(b) = \xi$，并设 $i_0 \in \{0, \dots, d\}$ 为使 $\operatorname{ord}(a_{i_0}\xi^{i_0})$ 在所有 $i \in \{0, \dots, d\}$ 的 $\operatorname{ord}(a_i\xi^i)$ 中取最小值的极大者。注意，由方程 (3)，我们有 $i_0 \ge 1$。现在考虑由下式给出的多项式 $g(y) \in \mathcal{O}_K[y]$

$$g(y) = \sum_{i=0}^{d}\frac{a_i b^i}{a_{i_0}b^{i_0}}y^i$$

那么，我们关于 f 和 ξ 的假设意味着

$$\begin{cases} \operatorname{ord} g'(1) & \le \operatorname{ord} N, \\ \operatorname{ord} g(1) & > \operatorname{ord} N^2. \end{cases}$$

根据亨塞尔引理 [Eis95, 定理 7.3], 我们找到唯一的 $y_0 \in K$，满足 $g(y_0) = 0$，且 $\operatorname{ord}(1 - y_0) > \operatorname{ord} N$。现在令 $x_0 := by_0$。于是 $f(x_0) = 0$

且 ord$(b - x_0)$ $>$ ord $b +$ ord N。后者恰恰意味着 rv$_N(x_0)$ $=$ rv$_N(b)$ $= \xi$。□

注 2.9。在上述引理的记号下，设 $h(x) = \sum_{i=0}^{d} b_i x^i$是任意多项式，且满足 rv$_{N^2}(b_i)$ $=$ rv$_{N^2}(a_i)$。则该引理对 $h(x)$ 同样成立。换言之， ξ 的亨塞尔提升的存在性取决于 $(\xi,$ rv$_{N^2}(a_0) \ldots,$ rv$_{N^2}(a_d))$，而不是取决于 $(\xi, a_0, \ldots, a_d)$。

2.3. 语言 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$。我们在一个多排序结构中工作，其排序为 (VF, (RV$_N)_{N\in\mathbb{N}}$)。回顾一下，本文中 $\mathbb{N}$ 表示正整数集合。令 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$ 为恰好包含以下内容的语言

(1) 赋值域排序 VF 上的环语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$；(2) 首项排序 RV$_N$上的语言 $\{0, 1, \cdot, |, \oplus\}$，其中| 和 $\oplus$ 分别是二元和三元关系符号， $\cdot$ 是二元函数符号，0、1 是常量；(3) 对所有 $N \in \mathbb{N}$, 函数符号 rv$_N$: VF $\to$ RV$_N$；(4) 当 $N \mid M$时，函数符号 rv$_{N,\ M}$: RV$_M \to$ RV$_N$；(5) 对每个 d、 $N \in \mathbb{N}$，RV$_N \times$RV$_{N^2}^{d+1}$ 上的关系符号 $P_{N,\ d}$。

赋值域 K，其赋值环为 $\mathcal{O}_K$，极大理想为 $\mathcal{M}_K$，具有自然的 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$结构，定义如下。

(1) VF 和 RV$_N$ 分别解释为 K 和 RV$_N$；(2) rv$_N$ 解释为投影 rv$_N$: $K \to$ RV$_N$；(3) rv$_{N、M}$ 解释为投影 rv$_N$: RV$_M \to$ RV$_N$；(4) 在 RV$_N$ 上，符号 0、1 分别解释为 0 和 rv$_N$(1)；(5) RV$_N$ 上的函数符号 $\cdot$ 解释为 RV$_N^{\times}$ 上的乘法，并通过 $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ 对所有 $x \in$ RV$_N$ 延拓；(6) $|$ 和 $\oplus$ 按定义 2.2 和 2.4 解释；(7) $P_{N、d}(\xi、\zeta_0、\ldots\ldots、\zeta_d)$ 在 K 中成立，当且仅当对于任意（所有） $a_0、\ldots\ldots、a_d \in K$，满足 rv$_{N^2}(a_i) = \zeta_i$，引理 2.8 的条件成立，其中 $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ （以及这个 N 和 ξ）。

当两者可能混淆时，我们将用 RV$_{N,\ K}$ 表示 RV$_N$ 这一类在 K 中的解释。此外，我们定义以下简写

$$\mathrm{RV}_{\bar{n}} := \mathrm{RV}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{RV}_{n_r},$$

其中 $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$。

注 2.10. 注意，$P_{N,\ d}$可以在 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}} \setminus \{P_{N,d}\}_{N,\ d}$中表示为不含 VF 量词的存在公式。将其作为一个符号加入我们的语言后，我们便确保其否定也具有存在性，且

不含 VF 量词（甚至不含量词）。这对命题 5.1 证明中的归约步骤 (5) 至关重要。

2.4. 模型论约定。在以下各节中，我们在固定语言 $\mathcal{L}$ 中工作，该语言是通过常量、函数符号和关系符号扩展 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$ 得到的任意语言，并且新的函数符号和关系符号不涉及任何 VF 变量。我们还使用固定的 $\mathcal{L}$- 理论 T，它扩展了特征零非平凡亨塞尔赋值域的 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$- 理论 $T_{\mathrm{Hen},0}$，这些赋值域带有来自第2.3节的自然 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-结构。 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(x)$ 被理解为变量元组 $x=(x_1,\ldots,x_m)$ 中的公式，其变量取值于任意类型的笛卡尔积。我们通常使用字母 ξ、ζ、η、ρ 表示取值于 $\mathrm{RV}_{\bar{n}}$ 的变量元组。

给定 $\mathcal{K}$ 的某个 T 模型集合，如果存在某个 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(x)$，使得对所有 $K\in\mathcal{K}$ 都有 $\varphi(K)=X_K$，则由 $X_K\subseteq K^m\times\mathrm{RV}_{\bar{n}}$ 的子集组成的集合 $X=(X_K)_{K\in\mathcal{K}}$ 称为可定义集。可定义函数 $f\colon X\to Y$ 是可定义集 X、Y 之间的函数集合 $(f_K\colon X_K\to Y_K)_K$，其中每个函数的定义域为 X_K，并且 $\mathrm{graph}(f)=(\mathrm{graph}(f_K))_K$ 是可定义集。

当且仅当两个公式定义了相同的可定义集时，我们称它们是等价的（这取决于 $\mathcal{K}$的选择）。$\mathcal{K}$ 通常将由 T 的所有模型组成（即 $\mathcal{K}$ 是初等的）。在这种情况下，当且仅当两个公式关于 T等价时，它们确定相同的可定义集。关于如何处理这里的一个小集合论问题（谈及所有模型时），例如参见 [CL08]第2.3节的开头。

定义2.11。存在公式是形如$\exists y\varphi(x,y)$的公式，其中 $\varphi(x,y)$是无量词公式。由存在公式给出的可定义集合称为存在可定义集。

3. Comparison of leading terms to angular components

本节将说明我们选择使用首项而非角分量的原因：首项可以很好地传递到子域，而角分量则不能，参见命题3.1和3.3。由于我们的主题主要涉及从较小的 p-进域传递到较大的域时的比较结果，这显然说明了我们所采用框架的自然性。

3.1. 赋值子域是 RV子结构。令 $\mathcal{L}_{\mathrm{val}}$ 为单排序语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}\cup\{\mathcal{O}\}$。任意赋值域 K 都具有自然的 $\mathcal{L}_{\mathrm{val}}$ 结构，其中我们将 $\mathcal{O}$ 解释为赋值环 $\mathcal{O}_K$。注意，

对于两个赋值域 K、L，我们有：L 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{val}}$ 的一个子结构，当且仅当 K 是 L 的子域且 $\mathcal{O}_K = K \cap \mathcal{O}_L$。

下面的命题对于我们研究 K-指标的下降方法至关重要。这也是我们使用首项结构，而非使用带有角分量的语言的主要动机。

命题 3.1. 设 K、L 是两个特征为零的亨泽尔赋值域。若 K 是 $\mathcal{L}_{val}$ 的一个子结构，则 K 是 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$ 的一个子结构。

证明。根据假设，K 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$ 的一个子结构。现在注意，由于 $\mathcal{O}_K = K \cap \mathcal{O}_L$，我们有 $\mathcal{M}_K = K \cap \mathcal{M}_L$。事实上，$\mathcal{M}_K$ 包含 0 以及所有满足 $x^{-1} \notin \mathcal{O}_K = \mathcal{O}_L \cap K$ 的非零 $x \in \mathcal{O}_K$。因此，对所有整数 $N > 0$，都有 $1+N\mathcal{M}_K = K \cap (1+N\mathcal{M}_L)$。于是，包含映射 $K \hookrightarrow L$ 诱导出阿贝尔群 $K^\times/(1+N\mathcal{M}_K)$ 到 $\hookrightarrow L^\times/(1+N\mathcal{M}_L)$ 的包含映射。这样，对于每个 $N > 0$，我们便可将 $\mathbf{RV}_{N,\,K}$ 识别为 $\mathbf{RV}_{N,\,L}$ 的一个子集。在此识别下，L 上的映射 $\mathbf{rv}_N$ 和 $\mathbf{rv}_{N,\,M}$ 限制为 K 上的映射。

我们仍需证明，$\mid$、$\oplus$、$P_{N,\,d}$ 在 K 上的关系是 L上相应关系的限制。对于 $\mid$，这是显然的。对于关系 $\oplus$，我们使用引理 2.7。这表明，对于 ξ_1、$\xi_2 \in \mathbf{RV}_{N,\,K}$，和 $\xi_1 +_K \xi_2$ 是某个开球 $B_K \subseteq K$在 $\mathbf{rv}$ 下的像。于是，$\xi_1 +_L \xi_2$等于 $\mathbf{rv}_N(B_L)$，其中 $B_L \subseteq L$ 是一个与 B_K具有相同中心和赋值半径的开球。现在由以下事实即可得到该结论：$B_K = B_L \cap K$。

最后，考虑谓词 $P_{N,\,d}$。如果对于某个 $\xi \in \mathbf{RV}_{N,\,K}$ 和ζ_0、……、$\zeta_d \in \mathbf{RV}_{N^2,\,K}$，条件 $P_{N,\,d}(\xi, \zeta_0, \ldots\ldots, \zeta_d)$ 在 K 中成立，那么它显然也在 L 中成立。反之，假设 $P_{N,\,d}(\xi, \zeta_0, \ldots\ldots, \zeta_d)$ 对某些 $\xi \in \mathbf{RV}_{N,\,K}$ 和 ζ_0、……、$\zeta_d \in \mathbf{RV}_{N^2,\,K}$ 在 L 中成立。于是取 $a_i \in \mathcal{O}_K$ 作为 ζ_i 的提升，并令 $f(x) := \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$。根据假设，$f(x)$ 和 ξ 在 L 中满足引理 2.8 的条件。因此，存在唯一的$x_0 \in L$，使得 $f(x_0) = 0$且 $\mathbf{rv}_N(x_0) = \xi$。假设 $x_0 \notin K$，那么经过将 M 替换为 $K[x_0]$的有限域扩张后，我们可以找到某个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$，使得 $\sigma(x_0) \neq x_0$。但这样一来，$f(\sigma(x_0)) = 0$且 $\mathbf{rv}_N(\sigma(x_0)) = \xi \in \mathbf{RV}_{N,\,K}$，这与 x_0的唯一性相矛盾（在亨塞尔赋值域 M中）。因此，$x_0 \in K$，并且 $P_{N,\,d}(\xi, \zeta_0, \ldots\ldots, \zeta_d)$ 也在 K 中成立。□

3.2. 角分量映射并不总是可限制的。设 K 为一个赋值域，并回顾，对于任意整数 $N > 0$，我们将剩余环 $\mathcal{O}_K/(N\mathcal{M}_K)$记为 R_N。角分量映射 $\mathbf{ac}_N$：$K \to R_N$是一个乘法同态$K^\times \to R_N^\times$，其对$\mathcal{O}_K^\times$的限制是到$R_N^\times$上的投影，并通过 $\mathbf{ac}_N(0) = 0$进行扩展。一族

这样的映射 $\{\mathrm{ac}_N\colon K \to R_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 称为相容系统，若对于所有 N、$M \in \mathbb{N}$，它们与自然投影 $R_{NM} \to R_N$ 交换。

在任何包含函数符号 $\{\mathrm{ac}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ （对应一个相容的角分量映射系）的语言中，命题 3.1 的类似结论都不成立：对于域扩张 $L \geq K$，不一定总能在 L 上找到一个相容的角分量映射系，使得它们在 K 上的限制 $\mathcal{O}_K$/落在 $N\mathcal{M}_K$($\subseteq \mathcal{O}_L$/) $N\mathcal{M}_L$中。

特别地，Pas 在 [Pas90a] 中使用的语言不适用于我们在第 7.2 节中的应用。事实上，我们的方法需要命题 3.1 来比较一个域及其有限扩张之间的 p-进积分的值。

引理 3.2。设 K 为一个 p-进域（即 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张），并设 L 为 K的全分歧有限扩张。则以下条件等价。

(1) 存在一个定义在 L 上的相容的角分量映射系，其在 K 上的限制确定了定义在 K上的相容的角分量映射系。(2) 存在 L 的一个一致化元 τ，使得 $\tau^{[L:K]} \in K$。

证明。这是由以下事实得出的：$\{\mathrm{ord}\ N\}_{N\in\mathbb{N}}$在 K 和 L的赋值群中共终结，再结合 K和 L 完备这一事实。由此可知，对于一个相容的角分量映射系，我们可以找到唯一的一致化元 $\tau \in L$（分别为 $\pi \in K$），使得对所有 $N \in \mathbb{N}$均有 $\mathrm{ac}_N(\tau) = 1$（分别为 $\mathrm{ac}_N(\pi) = 1$），反之亦然。□

命题 3.3。设 K 是一个 p-adic 域。则对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个次数为 pn 的（完全分歧）域扩张 $L \geq K$，使得 L 上的任何相容的角分量映射系限制到 K上时，都不是角分量映射系。

证明。根据引理 3.2，只需找到一个 L 的、次数为 pn 的 K的完全分歧域扩张，使得对于任意一致化元 $\tau \in L$ 都有 $\tau^{pn} \notin K$。注意，如果 $\tau^{pn} =: \pi \in K$，那么实际上 $L = K[\tau]$，且τ是 $f(x) = x^{pn} - \pi$的一个根。此外，$\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\tau]$，并且我们计算得到 $\mathrm{ord}(f'(\tau)) = \mathrm{ord}(pn) + (pn-1)\,\mathrm{ord}\ \tau$。因此，$L$的判别式为 $((pn)^{pn}\pi^{pn-1})$ ([Ser95, §II.6])。现在我们构造一个判别式不同的、次数为 pn 的完全分歧域扩张。设 α 是艾森斯坦多项式 $g(x) = x^{pn} + \pi x + \pi$的一个根。我们有 $\mathrm{ord}(g'(\alpha)) = \mathrm{ord}(\pi)$，因此 $L = K[\alpha]$ 是一个次数为 pn 的域扩张，其判别式为(π^{pn})。□

3.3. 关于 $\mathrm{RV}_{\bar{n}}$ 上求和的一个引理。本节将证明一个关于精确形式求和的基本估计（引理 3.5），该估计将在后文中用到

第 7.2 节。根据 [Rid17, 命题 1.8]，只需在角分量可用的情形下证明此引理。接着，由 [CH18, 推论 5.2.5] 可轻易得到我们的估计。由于细节稍显技术性，初读时只关注整体思路的读者可以放心跳过本节，待定理 7.6 的证明中用到引理 3.5 时，再回头参阅其陈述。我们回顾一下 [CH18] 中的广义 Denef-Pas 语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{gDP}}$。

定义 3.4. 设 $\mathcal{L}_{\mathrm{gDP}}$ 为一种具有排序 (VF $\{\mathrm{RF}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, VG_∞) 的语言。在赋值域排序 VF 和剩余环排序 RF_N 上，它是环语言。在值群排序 VG_∞ 上，它是有序阿贝尔群的语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{og}}=\{0,+,<\}$，并带有一个常量符号 ∞。此外，它还包含函数符号 ord: VF $\to$ VG_∞ 和 ac_N: VF $\to$ RF_N，分别用于赋值和角分量映射。

任意赋予相容的角分量映射系的赋值域 K 都自然地成为一个 $\mathcal{L}_{\mathrm{gDP}}$-结构。排序 VF 和 RF_N 分别解释为赋值域 K 和剩余环R_N，而 VG_∞ 解释为 $\Gamma_\infty := \Gamma\cup\{\infty\}$。这里 ∞是一个不包含于 Γ 中的符号，它大于所有其他元素，并且对所有 $\gamma\in\Gamma$都满足 $\gamma+(\infty)=(\infty)+\gamma=\infty$。将 VG 记作可定义集合 $\mathrm{VG}_\infty\setminus\{\infty\}$。

当 K 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张（即 p-adic 域）时，记其剩余域的基数为 q_k，记其分歧指数为 e_K。将 $\mathbb{Q}_p$ 的值群与 $\mathbb{Z}$等同后，可以将 Γ 与 $\frac{1}{e_K}\mathbb{Z}$等同，使得 K 上的赋值延拓 $\mathbb{Q}_p$上的赋值。

引理 3.5. 设 $f\colon D\subseteq \mathrm{RV}_{\bar{n}}\times\mathrm{RV}^\times\to\mathrm{RV}^\times$ 在 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$中是可定义的。设 K 是一个 p-adic 域，并对所有 $\xi_0\in\mathrm{RV}^\times$ 考虑函数

$$f_K(\cdot,\xi_0)\colon D_K(\xi_0)\subseteq \mathrm{RV}_{\bar{n}}\to\Gamma\colon \zeta\mapsto f_K(\zeta,\xi_0).$$

假设对于所有 $\xi_0\in\mathrm{RV}^\times$，均有

(1) $f_K(\cdot,\xi_0)$具有有限纤维；(2) ord $(f_K($ $D_K(\xi_0)$ $\xi_0))$ 有下界。

则存在一个多项式 $p_K(\gamma)\in\mathbb{Q}[\gamma]$，使得对于所有满足 $D_K(\xi_0)$ 非空的 $\xi_0\in\mathrm{RV}^\times$，均有

$$\sum_{\zeta\in D_K(\xi_0)} q_K^{-e_K\operatorname{ord} f_K(\zeta,\xi_0)}\le p_K(\operatorname{ord}\xi_0)q_K^{-e_K\min_\zeta(\operatorname{ord} f_K(\zeta,\xi_0))}.$$

证明。选取 K 上的一个相容的角分量映射系，并考虑 K 上相应的 $\mathcal{L}_{\mathrm{gDP}}$-结构。回想一下，角分量映射 ac_N 确定了一个同构 $u\colon \mathrm{RV}_N^\times\to$

$R_N^\times \times \Gamma$，我们将其扩展为 $u(0) = (0,\infty)$。我们还可以将它扩展到任意多个 K 与 RV_N 的笛卡尔积上，方法是令它在所有因子 K 上均为恒等映射。现在定义 $g_K := \mathrm{ord} \circ f_K \circ u^{-1}$。根据（[Rid17，命题 1.8]，的证明），存在一个语言$\mathcal{L}^{\mathrm{ac},\ e}$ 中的可定义函数 g，使得 g_K 是它在 K 中的解释。查阅 [Rid17，定义 1.7 和第 6] 页，可知 $\mathcal{L}^{\mathrm{ac},\ e}$ 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{gDP}}$ 的定义扩张。因此，我们可以将 g_K 视为一个 $\mathcal{L}_{\mathrm{gDP}}$-可定义映射的解释

$$g\colon \mathrm{dom}(g) \subseteq \left(\mathrm{VG}_\infty^r \times \prod_{i=1}^r \mathrm{RF}_{n_i}\right) \times (\mathrm{RF}_1^\times \times \mathrm{VG}) \to \mathrm{VG}\,.$$

根据假设，这些映射

$$g_K(\cdot,\eta,\rho,\gamma)\colon \mathrm{dom}(g)(\eta,\rho,\gamma) \subseteq (\Gamma_\infty) \to \Gamma\colon \delta \mapsto g(\delta,\eta,\rho,\gamma)$$

对于所有 $\eta \in \prod_i R_{n_i}$、$\rho \in R_1$ 和 $\gamma \in \Gamma$，都具有有限纤维，且其值域有下界。现在，令 $p_K(\gamma)$ 表示由引理 3.6 产生的有限个多项式 p_K、$_\eta$、$_\rho(\gamma)$ 之和。□

引理 3.6。设 U、D 和 $f\colon\ D \subseteq \mathrm{VG}_\infty^r \times \mathrm{VG} \times U \to \mathrm{VG}$ 是 $\mathcal{L}_{gDP}$-可定义的。设 K 为一个 p-adic 域，并对每个 $(\gamma,\ u) \in \Gamma \times U_K$ 考虑函数

$$f_K(\cdot,\gamma,u)\colon (\Gamma_\infty)^r \to \Gamma\colon \delta \to f_K(\delta,\gamma,u).$$

假设对于每个 $(\gamma,\ u) \in \Gamma \times U_K$，都有

(1) $f_K(\cdot,\ \gamma,\ u)$ 具有有限纤维；(2) f_K

$(D_K(\gamma,\ u)\ \gamma,\ u)$ 有下界。

然后，对于每个 $u \in U_K$，存在一个多项式 $p_{K,\ u}(\gamma) \in \mathbb{Q}[\gamma]$，使得对于所有满足 $D_K(\gamma,u)$ 非空的 $\gamma \in \Gamma$，都有

$$\sum_{\delta \in D_K(\gamma,u)} q_K^{-e_K f_K(\delta,\gamma,u)} \le p_{K,u}(\gamma) q_K^{-e_K \min_\delta(f_K(\delta,\gamma,u))}.$$

证明。记 $e = e_K$、$q = q_K$，并将给定的和改写为

$$\sum_{\varepsilon \in f_K(D_K(\gamma,u))} \#\left(f_K(\cdot,\gamma,u)^{-1}(\varepsilon)\right) q^{-e\varepsilon}.$$

根据 [CH18，第 5.2.5]号推论 D，将定义域f划分为有限个部分后，我们发现，将 $(\gamma,u,\varepsilon) \in \Gamma \times U_K \times \Gamma$ 映射到 $f_K(\cdot,\gamma,u)^{-1}(\varepsilon)$ 在所有坐标上的最小元素（分别地，小于 $+\infty$ 的最大元素）的可定义函数，有下界（分别地，上界）为关于 γ 和 ε的线性函数。因此，对于每个 $u \in U_K$，存在一个多项式 $h_u(\gamma,\varepsilon) \in \mathbb{Q}[\gamma,\varepsilon]$，使得该

给定的和有上界

$$\sum_{\varepsilon\in f_K(D_K(\gamma,u))} h_u(\gamma,\varepsilon)q^{-e\varepsilon}.$$

因此，我们是在对 q 中的几何级数（的导数）求和。由于 $q > 1$，这些级数收敛，而该引理可由此类级数求和公式推出（例如参见 [CL08，引理 4.4.3]）。□

4. ∃-SIMPLE FORMULAS

令 $\mathcal{L}$ 如第 2 节所述，并回顾它是 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$ 的扩张。特别地，$\mathcal{L}$ 包含部分加法 $\oplus$ 和亨塞尔提升谓词 $P_{N,\ d}$ 的符号。我们细化 Denef 和 Pas [Den86, Pas89] 的策略，以证明一个新的胞腔分解定理，并对量词加以额外控制。我们的应用将由这一细化的胞腔分解结果得出。我们首先引入 Denef 和 Pas 的简单公式概念的一种细化变体（该概念可追溯至 Cohen[Coh69] 提出的一种概念）。

定义 4.1. 若一个 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(x)$ 是不含赋值域量词的存在公式，则称其为 ∃-简单公式。这意味着存在某个无量词的 $\mathcal{L}$-公式 $\psi(x,\xi)$，使得 $\varphi(x)$ 等于

$$(\exists\xi\in \mathrm{RV}_{\bar{n}})\psi(x,\xi)$$

对于某个 $\bar{n}\in\mathbb{N}^r$（遵循第2.4节的记号）。

定义 4.2. 如果 X 是一个可定义集合，并且存在一个 ∃-简单公式 $\varphi(x)$ 定义 X，那么我们称 X 为 ∃-简单集合。

引理 4.3. 设 X、$Y\subseteq \mathrm{VF}^m\times\mathrm{RV}_{\bar{n}}$ 是 ∃-简单集合。那么 $X\cap Y$ 和 $X\cup Y$ 都是 ∃-简单的。

注 4.4. 设 $f\colon X\to Y$ 是一个可定义函数，其图由公式 $\varphi(x,y)$ 给出。回顾第2.4节，我们要求 X 恰好是 f 的定义域，换句话说，

$$x\in X\leftrightarrow(\exists y\in Y)\varphi(x,y).$$

这看似是一条无关紧要的注记，但请务必牢记这一点，参见下文的注 4.7。

定义 4.5. 设 $f\colon X\to Y$ 是一个可定义函数，由某个公式 $\varphi(x,y)$ 定义。对于任意公式 $\psi(y,z)$，记

$$\psi(f(x),z)$$

作为……的简写

$$\exists y(\varphi(x,y)\wedge\psi(y,z)).$$

乍看之下尚不清楚，具有 ∃-简单图的可定义函数，是否会在定义 4.5 所考虑的替换下保持 ∃-简单公式。为此，我们还针对 Denef 和 Pas 关于强可定义函数的概念引入了一个相应的变体。胞腔分解（推论 6.4）将表明，具有 ∃-简单图的每个函数本身已经是这样的 ∃-强可定义函数。

定义 4.6. 设 X 是一个 ∃-简单集合， Y 是一个可定义集合，且 $f\colon X \to Y$ 是一个可定义函数。若函数 f 保持 ∃-简单公式，则称其为 ∃-强可定义的。也就是说，对于每个 ∃-简单公式 $\psi(y,z)$，存在某个 ∃-简单公式 $\varphi(x,z)$，使得

$$\psi(f(x),z)$$

is 等价于 $\varphi(x,z)$。

注 4.7. 若 $f\colon X \to Y$ 是一个 ∃-强可定义函数，而 $Z \supseteq X$ 是一个更大的 ∃-简单集合，则 f 不一定能延拓为一个 ∃-强可定义函数 $Z \to Y$。如果 $Z \setminus X$ 不是 ∃-简单的，将其延拓为零的朴素方法可能会失败。正是由于这些微妙之处，我们才如注 4.4 中那样谨慎地记录 f 的定义域

引理 4.8. 设 X 是一个 ∃-简单集合。

(1) 设 $f\colon X \to Y$ 是一个 ∃-强可定义函数，且 Z 是 X 的一个 ∃-简单子集。限制 $f_{|Z}\colon Z \to Y$ 是一个 ∃-强可定义函数。(2) 如果 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to Z$ 是 ∃-强可定义的，那么 $g \circ f$ 也是如此。(3) ∃-强可定义函数 $X \to$VF 构成一个环。(4) 设 $f\colon X \to \mathrm{RV}_{\bar{n}}$ 是一个可定义函数，其图是一个 ∃-简单集合。那么 f 是一个 ∃-强可定义函数。

证明. (1) 取一个 ∃-简单公式 $\varphi(y,u)$，并设 $\psi(x,u)$ 是一个 ∃-简单公式，使得 $\varphi(f(x)\ u)$ 等价于 $\psi(x,u)$。于是我们还得到

$$(x \in Z \wedge \varphi(f(x),u)) \leftrightarrow (x \in Z \wedge \psi(x,u)).$$

(2) 考虑一个 ∃-简单公式 $\varphi(z,u)$。那么存在某些 ∃-简单公式 $\psi(y,u)$ 和 $\chi(x,u)$，使得

$$\varphi(g(f(x)),u) \leftrightarrow \psi(f(x),u) \leftrightarrow \chi(x,u).$$

(3) 这由 (2) 得出，因为加法和乘法是 ∃-强可定义函数 $\mathrm{VF} \times \mathrm{VF} \to \mathrm{VF}$。

(4) 设 $\varphi(x,\xi)$ 是定义 f 的图的简单公式。考虑任意一个 $\exists$-简单公式 $\psi(\xi,y)$。对于 $x \in X$，简写 $\psi(f(x)\ y)$ 表示

$$(\exists \xi \in \mathrm{RV}_{\bar{n}})(\varphi(x,\xi) \wedge \psi(\xi,y)),$$

这已经是所需的 $\exists$-简单公式。 □

引理 4.9。如果 $f\colon X \to \mathrm{VF}$ 是 $\exists$-强可定义的，那么下式也是如此：

$$X \setminus \{x \mid f(x)=0\} \to \mathrm{VF}\colon x \mapsto \frac{1}{f(x)}.$$

证明。根据引理 4.8（1）和（2），只需验证函数 $\mathrm{VF} \setminus \{0\} \to \mathrm{VF}$: $t \mapsto \frac{1}{t}$ 是 $\exists$-强可定义的。根据 $\exists$-简单公式的定义，只需证明：如果 $\varphi(t,x,\xi)$ 是一个无量词公式，且有 $x \in \mathrm{VF}^m$ 和 $\xi \in \mathrm{RV}_{\bar{n}}$，那么 $\varphi(\frac{1}{t},x,\xi)$ 等价于某个 $\exists$-简单公式。

我们注意到，$\exists$-简单公式 $\varphi(t,x,\xi)$ 不包含任何赋值域量词，并且所有 VF-项都是 t 和 x 的多项式。此外，对于任意 $y \in K$，有 $y=0$ 当且仅当 $\mathrm{rv}(y)=0$。因此，我们可以假设变量 t 的每次出现都位于形如 $\mathrm{rv}_N(f(t,x))$ 的项中，其中 $f(t,x)$ 是一个多项式。

对于每个这样的 $f(t,x)$，都存在某个正整数 d 使得

$$(\mathrm{rv}_N\, t)^d\, \mathrm{rv}_N(f(\frac{1}{t},x)) = \mathrm{rv}_N\, g(t,x)$$

对于某个多项式 $g(t,x)$。为简单起见，假设 t 只出现在一个形如 $\mathrm{rv}_N\, f(t,x)$ 的项中，那么我们可以找到某个 $\exists$-简单公式 $\psi(t,x,\xi,\zeta)$，使得 $\varphi(\frac{1}{t},x,\xi)$ 等价于

$$\exists \zeta \in \mathrm{RV}_N(t \neq 0 \wedge (\mathrm{rv}_N\, t)^d \cdot \zeta = \mathrm{rv}_N\, g(t,x) \wedge \psi(t,x,\xi,\zeta)).$$

对于任意 $\exists$-简单公式，我们重复这一过程。 □

在第 5 节的证明中，我们有时会写出一些严格来说并非 $\exists$-简单公式（甚至不是 $\mathcal{L}$-公式）的公式。从上下文可以看出，这些出现的条件都可以等价地改写为（不那么直观的）$\exists$-简单公式。我们在下面的引理中说明两个特殊情形。

引理 4.10. 设 N, M 为正整数。对于下列每个条件，都存在一个 $\exists$-简单 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(a,b,c)$，使得对于所有赋值域 $K \models T$ 以及 a,b,c 的任意取值，该条件都等价于 $K \models \varphi(a,b,c)$。

(1) 对 $a>$、$b+$、c 取 ord，适用于 a、b、c 属于 K（或属于 RV_N）的情形，

(2) $a = \mathrm{rv}_N(b+c)$, *with* $a \in \mathrm{RV}_N$ *and* $b, c \in RV_{NM}$ *(see Remark 2.5).*

证明。我们首先考虑第一种条件，即a、 b、 $c \in$属于 $\mathbf{RV}_N$ 的情形。此时，一个等价的（无量词）公式是 $bc|a$ 与 $\neg(a|bc)$ 的合取。在某些 a、 b、 c 属于 K 的情形下，我们先应用 $\mathbf{rv}_N(\cdot)$。

第二个条件可以分成两部分。首先，它断言 $\mathbf{rv}_N(b+c)$ 中存在唯一元素，这等价于 $\mathbf{rv}_M(b) \neq -\mathbf{rv}_M(c)$。这又可以改写为 $\neg \oplus (\mathbf{rv}_M(b), \mathbf{rv}_M(c), 0)$。其次，它意味着 $a \in \mathbf{rv}_N(b+c)$，这由以下公式表示：

$$\exists d \in \mathrm{RV}_{NM}(\oplus(b,c,d) \wedge \mathrm{rv}_N(d) = a). \qquad \square$$

4.1. 胞腔。我们对胞腔的定义与[CL08，第 7] 节中的胞腔非常相似。主要区别在于，我们要求所有数据都是∃-简单的（而不仅仅是可定义的）。

记号 4.11. 考虑满足 $Z \subseteq X \times Y$ 的可定义集合 X、 Y、 Z。对于 $y \in Y$，将 $Z(y)$ 记作 Z 在 y 处的纤维，如下所示：

$$Z(y) \coloneqq \{x \in X \mid (x,y) \in Z\}.$$

定义 4.12（胞腔）。设 U 是任意可定义集合。若 ∃-简单集合$Z \subseteq \mathbf{VF} \times U$ 满足以下两个条件，则称其为带表示 (λ, Z_D) 的 ∃-简单胞腔：

(1) $Z_D \subseteq Z \times \mathbf{RV}_{\bar{n}} \subseteq \mathbf{VF} \times U \times \mathbf{RV}_{\bar{n}}$ 具有如下形式，其中 D 和 R 是 ∃-简单集合，$Z_D = \{(t,x,\xi) \mid (x,\xi) \in D \wedge \mathrm{rv}_N(t - c(x,\xi)) \in R(\xi)\}$，并且对于所有 $(x,\xi) \in D$，要么 $\emptyset \neq R(\xi) \subseteq \mathbf{RV}_N^\times$，要么对于所有 $(x,\xi) \in D$，$R(\xi) = \{0\}$。(2) $\lambda\colon Z \to Z_D$ 是一个 ∃-强可定义双射，且与到 $\mathbf{VF} \times U$ 的投影可交换。

若 $R(\xi) \subseteq \mathbf{RV}_N^\times$，则称 Z 为 ∃-1-胞腔；若 $R(\xi) = \{0\}$，则称 Z 为 ∃-0-胞腔。函数 c 称为胞腔中心，正整数 N 称为胞腔深度。∃-简单集合D 称为 Z_D的基底。

注记 4.13. 任意带有表示 (λ, Z_D) 的 ∃-简单胞腔 $Z \subseteq \mathbf{VF} \times U$，都可以改写为 Z_D 的纤维的不交并：

$$Z = \bigsqcup_{\xi \in \mathrm{RV}_{\bar{n}}} Z_D(\xi).$$

反之，若 $Z \subseteq \mathrm{VF} \times U$ 被给定为这种不交并（即这种 Z_D 的纤维的不交并），那么我们可以定义 $\lambda\colon\ Z \to Z_D$，规定 $\lambda(t,u)$ 是唯一的元组 (t,u,ξ)，满足 $(t,u) \in Z_D(\xi)$。由于 λ 具有 $\exists$-简单图且 $\xi \in \mathrm{RV}_{\tilde{n}}$，根据引理 4.8 (4)，它是 $\exists$-强可定义的。由此可见， Z 是一个带有表示 (λ, Z_D) 的胞腔。

以下定理将是我们在第 7.2 节研究正存在性一致 p-阿代克积分时的主要工具；它是我们的关键技术成果。该陈述中的不同概念已在第2.4节和定义 4.12 中引入（定义 4.12 建立在定义 4.1 和 4.6 之上）

定理 4.14（胞腔分解）。设 $Y \subseteq \mathrm{VF} \times (\mathrm{VF}^m \times \mathrm{RV}_{\tilde{n}})$ 是一个存在可定义集。那么 Y 是有限多个 $\exists$-简单胞腔的不交并。

在下一节中，我们将证明定理 4.14，或者更准确地说，证明一个特殊情形。在第 6 节中，我们将从定理 4.14 的这一特殊情形推导出量词消去结果，并由此得到完整的定理 4.14 以及对 $\exists$-强可定义函数的一个简明描述，参见定理 1.3、6.1 和推论 6.3、6.4。随后在第 7 节中，我们将再次主要利用定理 4.14，得到关于下降的主要目标。

5. Cell decomposition

为了证明定理 4.14，我们紧密遵循并细化了 Denef 和 Pas 的策略 [Den86, Pas90a], 。主要区别在于，我们使用带有 RV-排序而非角分量映射的语言，并且在整个证明过程中精细地控制量词。事实上，在整个过程中，我们必须谨慎行事，只引入关于 RV 的存在量词 $_N$。对于整数 $d > 0$，我们归纳证明以下两个命题。

命题 5.1（陈述 $(\mathrm{I})_d$）。设 N 为正整数， X 为一个$\exists$-简单集合， $Z \subseteq \mathrm{VF} \times X$ 为一个 $\exists$-简单胞腔，并且 $f(t,x)$ 是一个关于 VF 变量 t 的多项式，其次数至多为 d，其系数是 $x \in X$ 上的 $\exists$-强可定义函数。

那么，存在一个整数 $q > 0$ 和一个将 Z 划分为有限个 ˜ ˜ $\exists$-简单胞腔的划分，使得在每个胞腔 $Z = \bigsqcup_\xi Z_D(\xi)$ 上，以中心 $c(x,\xi)$，以下结论成立：若记

$$f(t,x) = \sum_{i=0}^{d} a_i(x,\xi)(t - c(x,\xi))^i,$$

then

$$\mathrm{rv}_N(f(t,x)) = \mathrm{rv}_N\left(\sum_{i=0}^{d} \mathrm{rv}_{Nq}(a_i(x,\xi)(t-c(x,\xi))^i)\right).$$

注 5.2. 由于系数 $a_i(x,\xi)$ 通过欧几里得除法与 $f(t,x)$ 的原始系数相关，因此根据引理 4.8 (3)，它们是 $\exists$ 上的强可定义函数。

命题 5.3（陈述（II）$_d$）。设 N、X 和 Z 如命题 5.1 中所述，并设 $f_1(t,\ x)$ ..... $f_r(t,\ x)$ 是 t 中次数至多为 d 的多项式，其系数是 $x \in X$ 中 $\exists$-强可定义函数。那么，存在一个整数 $q > 0$，以及将 Z 划分为有限个 ˜ ˜ 个 $\exists$-简单胞腔，使得在每个胞腔 $Z = \bigsqcup_\xi Z_D(\xi)$ 上，以 $c(x,\ \xi)$ 为中心时，

$$\mathrm{rv}_N(f_j(t,x)) = h_j(\mathrm{rv}_{Nq}(t-c(x,\xi)), x, \xi)),$$

对于某些 $\exists$-强可定义函数 $h_j(\zeta,\ x,\ \xi)$，其中 $j = 1,\ .....,\ r$。

我们称 $f_j(t,\ x)$ 在命题 5.3 所得分解中的胞腔上已被预备；同时，也称该胞腔分解预备了 $f_j(t,\ x)$。

注 5.4. 上述陈述隐含地说明，h_j 的定义域为

$$\mathrm{dom}(h_j) = \{(t-c(x,\xi), x, \xi) \mid (t,x,\xi) \in \tilde{Z}_D\}.$$

该集合是 $\exists$-简单的，因为 Z_D 是 $\exists$-简单的，且 $c(x,\xi)$ 是 $\exists$-强可定义的。

在下文的证明中，我们将 $\exists$-简单胞腔简称为胞腔。

在假设 (I)$_{d-1}$ 和 (II)$_{d-1}$成立的条件下，证明陈述 (I)$_d$。我们可以假设 $d \geq 2$，因为情形 $d = 1$ 是显然的。我们将归纳假设 (I)$_{d-1}$ 应用于 $f(t,x)$ 关于 t的导数。除去˜将 Z 替换为所得的某个 Z，我们可以找到某个 $q_0 \in \mathbb{N}$，使得在 Z上

$$\mathrm{rv}_N(f'(t,x)) = \mathrm{rv}_N\left(\sum_{i=1}^{d} \mathrm{rv}_{Nq_0}\left(ia_i(x,\xi)(t-c(x,\xi))^{i-1}\right)\right).$$

特别地，右端是一个单元素集合，因此

$$\mathrm{ord}\, f'(t,x) \leq \min_i \mathrm{ord}\left(ia_i(x,\xi)(t-c(x,\xi))^{i-1}\right) + \mathrm{ord}\, q_0. \tag{4}$$

令 $M = d!q_0$，并注意到方程 (4) 表明引理 2.8 的第一个条件已满足（用 M 代替 N）。接下来我们进行若干归约步骤。

(1) 我们可以假设 Z 是一个 $\exists$-1-胞腔，因为否则 $f(t,x) = a_0(x, \xi)$。(2) 假设 Z 的表示为 (λ, Z_D)。注意，将 Z_D 划分为胞腔会得到 Z 的相应划分。因此，除去先复合 λ^{-1} 之外，我们不妨假设 $f(t,x)$ 的系数的定义域为 D，且 $Z = Z_D$。实际上，我们可以从记号中省略重新参数化变量 ξ。

(3) 由于 $g(y) = \sum_{i=0}^{d} a_i(x)y^i$ 的胞腔分解（例如以 $\tilde{c}(x,\zeta)$ 为中心）会导出 $f(t,x)$ 的胞腔分解（以 $c(x) + \tilde{c}(x,\zeta)$ 为中心），我们可以假设 $c(x)$ 在 D 上恒等于零。

(4) 至多增大 q_0 后，我们可以假设 M 是 Z_D 深度的倍数。然后将 λ 替换为映射 $(t,x) \mapsto (\lambda(t,x), \mathrm{rv}_M(t))$，并再次执行归约步骤 (2)，从而归结为 Z 具有如下形式的情形：

$$Z = \{(t,x) \mid x \in D \wedge \mathrm{rv}_M(t) = \xi(x)\},$$

其中 $\xi(x)$ 只是投影到 X 的最后坐标（特别是，它是 $\exists$-强可定义的）。注意，对于所有 x，$\xi(x) \in \mathrm{RV}_N^\times$，因为 Z 是一个 $\exists$-1-胞腔。

(5) 我们可以假设条件

$$P_{M,d}(\xi(x), \mathrm{rv}_{M^2}(a_0(x)), \ldots, \mathrm{rv}_{M^2}(a_d(x)))$$

在所有 D 上都成立；事实上，由方程 (4) 可知，其否定意味着

$$\operatorname{ord} f(t,x) \le \min_i \big(\operatorname{ord}(a_i(x)t^i)\big) + \operatorname{ord}(M^2).$$

这就得到了所需的结论（其中 $q = M^2$）。注意，D 中 $P_{N,d}$ 不成立的部分是 $\exists$-简单的，见注 2.10。

通过最后这一步归约，我们可以假设（根据引理 2.8）存在一个可定义的 $d\colon D \to \mathrm{VF}$，使得对所有 $x \in D$，都有 $f(d(x)\ x) = 0$，且 $\mathrm{rv}_M(d(x)) = \xi(x)$。我们希望将 $d(x)$ 用作新的胞腔中心，因为我们有

$$Z = \{(t,x) \mid x \in D \wedge \operatorname{ord}(t - d(x)) > \operatorname{ord} d(x) + \operatorname{ord} M\}.$$

事实上，由构造可知，条件 $\mathrm{ord}(t - d(x)) > \mathrm{ord}\ d(x) + \mathrm{ord}\, M$ 等价于 $\mathrm{rv}_M(t) = \mathrm{rv}_M(d(x))$ 且 $\mathrm{rv}_M(d(x)) = \xi(x)$。由于上述对 Z 的描述仅取决于 x 和 $\mathrm{rv}(t - d(x))$，因此它确实是一个中心为 $d(x)$的胞腔。

现在利用 $\mathrm{ord}(t-d(x)) > \mathrm{ord}\, d(x) + \mathrm{ord}\ M$ 以及方程 (4)，可知对所有 $2 \le k \le d$

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}\left(\frac{f^{(k)}(d(x),x)}{k!}(t-d(x))^k\right) &> \min_i(\mathrm{ord}\, a_i(x)d(x)^{i-1}(t-d(x))) + \mathrm{ord}\, M,\\ &\ge \mathrm{ord}(f'(d(x),x)(t-d(x))).\end{aligned} \tag{5}$$

因此，在 $d(x)$ 附近对 $f(t,x)$ 进行泰勒展开后，可得

$$\mathrm{rv}_N(f(t,x)) = \sum_{k=1}^{d} \mathrm{rv}_N\left(\frac{f^{(k)}(d(x),x)}{k!}(t-d(x))^k\right). \tag{6}$$

这就是我们所需的结论，其中 $q=1$。

因此，剩下的工作就是证明（可定义）函数 $d(x)$ 是∃强可定义的。设 $\varphi(t,y,\xi)$ 是一个 ∃简单公式，其中 y遍历 VF^m，而 ξ 遍历 $\mathrm{RV}_{\bar{n}}$。不失一般性，变量 t 的每次出现都位于形如 $\mathrm{rv}_N(h_i(t,y))$ 的项中，其中 $h_1(t,y)$ ...，$h_r(t,y)$ 是某个多项式列表。根据欧几里得除法，我们可以将每个 $h_i(t,y)$ 写成 $f(t,x)q_i(t,x,y) + p_i(t,x,y)$，其中 q_i 和 p_i 是关于 t 的多项式，其系数是关于 $(x,y) \in D \times \mathrm{VF}^m$ 的 ∃强可定义函数。由于 $f(d(x)\ x) = 0$，我们可以将 $\varphi(d(x)\ x,\xi)$ 中每个 $h_i(d(x)\ x,y)$ 的出现替换为 $p_i(d(x)\ x,y)$。

由于 $p_i(t,x,y)$ 的 t 次数严格小于 $f(t,x)$ 的次数，我们可以将 $(\mathrm{II})_{d-1}$ 应用于 $p_i(t,x,y)$。因此，我们还可以将 $\varphi(d(x)\ x,\xi)$ 进一步改写为以下形式的公式的有限析取

$$\begin{aligned}\exists \zeta \in \mathrm{RV}_{\bar{n}'}(\quad & (x,y,\zeta) \in C \wedge \mathrm{rv}_{N_1}(d(x) - E(x,y,\zeta)) \in R(\zeta)\\ & \wedge \psi(\mathrm{rv}_{N_1}(d(x) - E(x,y,\zeta)), y, \xi, \zeta)).\end{aligned}$$

这里，N_1 是一个正整数，C、R 是 ∃-简单集合，$E(x,y,\zeta)$ 是一个 ∃-强可定义函数，而 ψ 是一个 ∃-简单公式。为简化记号，省略函数的变量，因此只需证明函数 $\mathrm{rv}_{N_1}(d-E)$ 是 ∃-强可定义的。

我们首先证明，对于任意 $N_2 \in \mathbb{N}$，形如 $\mathrm{rv}_{N_2}(d) = \eta$ 的条件可以由 ∃-简单公式表示。我们断言，这样的条件等价于存在某个 $\rho \in \mathrm{RV}_{M^2N_2}$，使得

$$\mathrm{rv}_M(\rho) = \xi(x) \quad \text{and} \quad 0 \in \sum_{i=0}^{d} \mathrm{rv}_{M^2N_2}(a_i)\rho^i \quad \text{and} \quad \mathrm{rv}_{N_2}(\rho) = \eta.$$

确实，对于一个方向，我们只需取 $\delta = \mathrm{rv}_{M^2N_2}(d(x))$。对于另一个方向，我们注意到，上述条件意味着，如同引理 2.8 中那样，$\mathrm{rv}_{MN_2}(\rho)$ 唯一地提升为 $f(t,x)$ 的一个零点（即 $d(x)$）。

经过对 C 细分后，我们可以假设以下两个 ∃-简单条件中恰有一个在 C 的全部范围内成立

(1) $\mathrm{rv}^{MN_1}(d) \neq \mathrm{rv}^{MN_1}(E)$. 在这种情况下，我们有 $\mathrm{rv}^{N_1}(d-E) = \mathrm{rv}^{N_1}(\mathrm{rv}^{MN_1^2}(d) - \mathrm{rv}^{MN_1^2}(E))$。根据引理4.10和4.8，此函数是 ∃-强可定义的。(2) $\mathrm{rv}^{MN_1}(d) = \mathrm{rv}^{MN_1}(E)$。在这种情况下，我们有 $\mathrm{ord}(d-E) > \mathrm{ord}\ d + \mathrm{ord}(MN_1)$。特别地，$(E,x) \in Z$。通过与方程（5）类似的论证，我们发现对于所有 $2 \leq k \leq d$

$$\mathrm{ord}\left(\frac{f^{(k)}(E,x)}{k!}(E-d)^k\right) > \mathrm{ord}(f'(E,x)(E-d)) + \mathrm{ord}\, N_1.$$

因此，对 $f(d,x)$ 在 E 附近进行泰勒展开 $= 0$ 后，我们得到

$$\mathrm{rv}_{N_1}(-f(E,x)) = \mathrm{rv}_{N_1}(f'(E,x)(E-d)). \qquad \square$$

在假设 $(\mathrm{I})_d$ 和 $(\mathrm{II})_{d-1}$ 的情况下证明陈述 $(\mathrm{II})_d$。我们对 $r \geq 2$ 进行归纳论证。设 Z_1, Z_2 是胞腔，其表示分别为 (λ_i, Z_{D_i})，并且对于 $i = 1$，2，其中心为 c_i，使得 Z_1 为 $f_1(t,x) \ldots, f_{r-1}(t,x)$ 作准备，而 Z_2 为 $f_r(t,x)$ 作准备。我们将交集 $Z_1 \cap Z_2$ 划分为更小的胞腔，直到所有 $f_i(t,x)$ 都准备好。取某个充分大的 $q \in \mathbb{N}$，并进一步将 Z_1, Z_2 重新参数化为一个 RV^{Nq} 变量，我们可以假设它们的交集可写为

$$\begin{aligned} Z_1 \cap Z_2 = \bigsqcup_{\xi,\zeta}\{(t,x) \mid\ & (x,\xi) \in D_1 \wedge (x,\zeta) \in D_2, \\ & \mathrm{rv}_{Nq}(t - c_1(x,\xi)) = \xi_1, \\ & \mathrm{rv}_{Nq}(t - c_2(x,\zeta)) = \zeta_1\}. \end{aligned}$$

记 D 为包含满足以下条件的 (x,ξ,ζ) 的 ∃-简单集合：$(x,\xi) \in D_1$ 且 $(x,\zeta) \in D_2$，并令 $Q = Nq$。通过向 D 添加一个条件，我们可以假设在 D 上，$c_1(x,\xi) \neq c_2(x,\zeta)$。现在将 D 划分，使得以下两个条件中恰有一个在 D 上恒成立。记号简便起见，我们再次省略函数的自变量。

（1）$\mathrm{rv}_Q(t-c_2) \neq \mathrm{rv}_Q(c_1-c_2)$。在此情况下，我们有

$$\mathrm{rv}_Q(t-c_1) = \mathrm{rv}_Q(\mathrm{rv}_{Q^2}(t-c_2) - \mathrm{rv}_{Q^2}(c_1-c_2)). \tag{7}$$

通过引入一个额外变量 $\eta \in \mathrm{RV}^{Q^2}$ 进行重新参数化后，我们可以将 $Z_1 \cap Z_2$ 的这部分改写为

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{\xi,\zeta,\eta}\{(t,x) \mid\ & (x,\xi,\zeta) \in D, \\ & \xi_1 = \mathrm{rv}_Q(\eta + \mathrm{rv}_{Q^2}(c_1-c_2)), \\ & \mathrm{rv}_Q(\eta) \neq \mathrm{rv}_Q(c_1-c_2), \\ & \mathrm{rv}_{Q^2}(t-c_2) = \eta\}, \end{aligned}$$

这是一个胞腔（注意，我们隐式地使用了引理 4.10）。此外，根据方程（7），所有 $f_i(t,x)$ 在这个胞腔上都是预备好的。

(2) $\mathrm{rv}_Q(t-c_2) = \mathrm{rv}_Q(c_1-c_2)$。由于 $c_1 \neq c_2$，该条件等价于

$$\mathrm{ord}((t-c_2)-(c_1-c_2)) > \mathrm{ord}(c_1-c_2) + \mathrm{ord}\, Q.$$

因此，$Z_1 \cap Z_2$ 的这部分可以改写为

$$\bigsqcup_{\xi,\zeta}\{(t,x) \mid \begin{array}{l}(x,\xi,\zeta)\in D,\\ \mathrm{ord}\,\xi_1 > \mathrm{ord}(c_1-c_2)+\mathrm{ord}\,Q,\\ \mathrm{rv}_Q(c_1-c_2)=\zeta_1,\\ \mathrm{rv}_Q(t-c_1)=\xi_1\}.\end{array}$$

这再次是一个胞腔。注意，由于等式 $\mathrm{rv}_Q(t-c_2) = \mathrm{rv}_Q(c_1-c_2)$，它为 f_r 做了准备。□

下面的命题 5.5 比定理 4.14 稍弱，因为它仅适用于 ∃-简单集合。然而，在下一节中我们将证明，实际上所有存在性可定义集都是 ∃-简单的（推论 6.3），从而完成定理 4.14 的证明。

命题 5.5。设 $Y \subseteq \mathrm{VF} \times (\mathrm{VF}^m \times \mathrm{RV}_{\bar{n}})$ 是一个 ∃-简单集合。那么，Y 是有限多个 ∃-简单胞腔的不交并。

证明。设 $\varphi(t,x,\xi)$ 是一个定义 Y 的 ∃-简单公式，其中 $(t,x) \in \mathrm{VF}\times\mathrm{VF}^m$ 且 $\xi \in \mathrm{RV}_{\bar{n}}$。我们可以找到一个多项式的有限列表 $f_1(t,x),\ldots,f_r(t,x)$，使得 t 的每次出现都位于某个形如 $\mathrm{rv}_N(f_i(t,x))$ 的项中，其中 $i \in \{1,\ldots,r\}$。现在我们将命题 5.3 应用于多项式 $f_i(t,x)$。这给出了 $\mathrm{VF}\times\mathrm{VF}^m$ 的一个划分，将其分解为 ∃-简单胞腔。与 $\mathrm{RV}_{\bar{n}}$ 取笛卡尔积后，我们得到 $\mathrm{VF}\times(\mathrm{VF}^m \times \mathrm{RV}_{\bar{n}})$ 的相应分解。

设 $Z = \bigsqcup_\zeta Z_D(\zeta)$ 是所得胞腔之一，设其中心为 $c(x,\zeta)$。假设 Z 是一个 ∃-1- 胞腔（Z 是 0- 胞腔的情形类似，但更为直接）。我们需要证明 $Z \cap Y$ 仍可写成一个胞腔。我们可以假设 $\mathrm{rv}_{Nq}(t-c(x,\zeta)) = \zeta_1$ 在 Z_D 上成立，必要时可在元组 ζ 中添加一个变量。由于 Z 是由命题 5.3 得到的，$\mathrm{rv}_N(f_i(t,x))$ 限制在 Z_D 上是一个 ∃-强可定义函数 $h_i(\zeta_1,x,\zeta)$。因此，我们可以找到一个 ∃-简单公式 $\psi(x,\xi,\zeta)$，当 $(t,x,\zeta) \in Z_D$ 时，它等价于 $\varphi(t,x,\xi)$。于是 $Z \cap Y$ 给出为

$$\bigsqcup_\zeta \{(t,x,\xi) \mid (x,\zeta)\in D \wedge \psi(x,\zeta,\xi) \wedge \mathrm{rv}_N(t-c(x,\zeta)) = \zeta_1\},$$

因此它是一个胞腔。 □

6. Reduction of existential quantifiers

现在我们来介绍存在性胞腔分解的第一个应用。特别是，下面的存在量词约化结论蕴含任何存在可定义集都是 $\exists$-简单的（推论 6.3），从而完成定理 4.14 的证明。

定理 6.1（$\exists$-VF 约化）。任意存在 $\mathcal{L}$-公式都等价于一个不含任何 VF 量词的存在 $\mathcal{L}$-公式。

证明。由于存在量词可以交换，因此只需证明：如果 $\psi(t, x, \xi)$ 是一个无量词公式，那么

$$(\exists t \in \mathrm{VF})\psi(t, x, \xi)$$

它是 $\exists$-简单的。设 $Z \subseteq \mathrm{VF} \times(\mathrm{VF}^m \times \mathrm{RV}_{\bar{n}})$ 是由 ψ 给出的可定义集合。我们需要证明，将 Z 投影到 U 上所得的集合是 $\exists$-简单的。根据命题 4.14，我们可以归约到 Z 是一个单一的 $\exists$- 简单胞腔的情形，设其表示为 (λ, Z_D)。但此时，将 Z 投影到 U 上所得的集合等于将 D 投影到 U 上所得的集合。后者是 $\exists$-简单的，因为 $D \subseteq U \times \mathrm{RV}_{\bar{n}}$。□

定理 1.3 的证明。这是定理 6.1 的一个实例，其中$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$ 和 $T = T_{\mathrm{Hen},0}$。□

注 6.2。VF 上的语言仅通过常量符号扩充环语言这一事实，对定理 6.1 至关重要。事实上，考虑例如语言 $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^{\mathrm{RV}} \cup \{P_2(x)\}$，其中$P_2(x)$是赋值域排序 VF 上的一个新一元谓词。设 $T' \supseteq T$表示 $P_2(x)$ 等价于 $(\forall y \in \mathrm{VF})(x \neq y^2)$。考虑陈述 $\exists x P_2(x)$，并假设它等价于某个不含任何 VF 量词的存在量词$\mathcal{L}'$-句子 φ。那么 φ 将是语言 $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}^{\mathrm{RV}} \cup \{P_2(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$中的一个存在句子。现在设 k 是一个代数闭域。那么 $\exists x P_2(x)$在赋值域$k((t))$中成立（赋值环为 $k[[t]]$），但在其代数闭包 L中不成立。然而，由于 $k((t))$是 L 的一个 $\mathcal{L}''$-子结构，且 φ 是存在的，我们必然有 $L \models \varphi$，矛盾。注意，根据 Pas 风格的经典量词消去结果，任意 $\mathcal{L}'$-公式模 T' 仍等价于一个不含赋值域量词的 $\mathcal{L}'$-公式，参见例如 [Fle11]。

推论 6.3。任何存在可定义集都是 $\exists$-简单的。

证明。由定理 6.1 立即可得。□

定理 4.14 的证明。将命题 5.5 与推论 6.3 结合。

□

推论 6.4。任何具有 ∃-简单图的可定义函数 $f\colon X \to Y$ 都是 ∃-强可定义的。

证明。根据引理 4.8 (4) 和归纳法，只需处理 $Y = \mathrm{VF}$ 的情形。设 $\varphi(x,t)$ 是定义 graph(f) 的 ∃-简单公式，且 $\psi(t,y)$ 是任意 ∃-简单公式。我们需要证明 $\psi(f(x)\ y)$ 等价于某个 ∃-简单公式。回顾一下，$\psi(f(x)\ y)$ 只是以下表达式的简写：

$$(\exists t \in \mathrm{VF})(\varphi(x,t) \wedge \psi(t,y)).$$

由于这是一个存在公式，我们可以由定理 6.1 得出结论。 □

我们还得到一个“存在性 AKE 类原理”，类似于 [AF16，第 7.1] 条定理（但相对于 RV_N），其中 AKE 代表 Ax-Kochen 和 Ershov。对于任意 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-结构 K，我们将 $\mathrm{Th}_\exists(K)$ 记作在 K 中成立的所有存在性 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-语句的集合。令 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}_{|\mathrm{RV}}$ 为将 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$ 限制到 $\{\mathrm{RV}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 的结果。类似地，我们令 $\mathrm{Th}_\exists(\{\mathrm{RV}_{N,K}\}_{N\in\mathbb{N}})$ 表示 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}_{|\mathrm{RV}}$-结构 $\{\mathrm{RV}_{N,K}\}_{N\in\mathbb{N}}$ 的存在性理论。

推论 6.5. 设 K、L 是特征零的亨塞尔赋值域，则

$$L \models \mathrm{Th}_\exists(K) \text{ if and only if } \{\mathrm{RV}_N(L)\}_{N\in\mathbb{N}} \models \mathrm{Th}_\exists(\{\mathrm{RV}_N(K)\}_{N\in\mathbb{N}}).$$

证明。假设 $\{\mathrm{RV}_N(L)\}_{N\in\mathbb{N}} \models \mathrm{Th}_\exists(\{\mathrm{RV}_N(K)\}_{N\in\mathbb{N}})$。注意到这意味着 K 和 L 具有相同的剩余域特征 p。事实上，对于每个素数 p，当 $0 \in \sum_{i=1}^{p} 1_{\mathrm{RV}_K}$ 时，K 的剩余特征为 p；而当 $\mathrm{ord}(\sum_{i=1}^{p} 1_{\mathrm{RV}_K}) = 0$ 时，K 的剩余特征不同于 p。设 K 的剩余特征为 $p > 0$（$p = 0$ 的情形类似），并令 $T_{\mathrm{Hen},0,p}$ 表示混合特征 $(0,p)$ 的非平凡亨塞尔赋值域的 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-理论。现在令 φ 为一个存在 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-句，并设 $K \models \varphi$。我们证明，模 $T_{\mathrm{Hen},0,p}$ 意义下，它等价于一个存在 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}_{|\mathrm{RV}}$-公式。根据定理 6.1，不妨设 φ 不包含 VF 量词。于是，φ 中的每个 VF-项都由某个 $m \in \mathbb{Z}$ 给出。因此，存在一个存在 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}_{|\mathrm{RV}}$-公式 $\psi(y_1,\dots,y_r)$ 以及对于 $i = 1,\dots,r$ 的整数 m_i、N_i，使得 φ 等价于 $\psi(\mathrm{rv}_{N_1}(m_1)\dots,\mathrm{rv}_{N_r}(m_r))$。现在，对每个 $i \in$，取 $\{1,\dots,r\}$ 为满足 $p^{M_i} \geq m_i$ 的整数 M_i。于是我们有

$$\mathrm{rv}_{N_i}(m_i) = \mathrm{rv}_{N_i}\left(\sum_{k=1}^{m_i} 1_{\mathrm{RV}_{N_i p^{M_i}}}\right).$$

因此，我们可以找到一个存在 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}_{|\mathrm{RV}}$-句子，使其与$\varphi$ 在模 $T_{\mathrm{Hen}0,\ p}$意义下等价。特别地，$L \models \varphi$。□

备注 6.6。在 [AF16] 中，推论 6.5 的类似结果已针对等特征亨泽尔赋值域（任意特征）得到证明。他们使用一个三排序结构，其中各排序分别对应赋值域、剩余域和值群。他们的结果无法推广到混合特征情形，正如 [AF16，第 7.4]条备注所示。由于我们允许使用来自所有 RV_N 的数据（而不只是来自 RV_1的数据），我们的结果对剩余特征或分歧不作任何限制。我们还注意到，推论 6.5 的一个版本对正特征域显然成立。事实上，如果 K 的特征为 $p>0$，那么 $\mathrm{RV}_p^{\times}$，$_K \cong K^{\times}$ 并且存在一个存在 $\mathcal{L}_{|\ \mathrm{RV}}^{\mathrm{RV}}$-公式，在 $\mathrm{RV}_{p,\ K}$上定义 K的加法。

7. Descent for the K-index

7.1. 非阿基米德局部域 K 上函数的 K-指标。现在我们定义函数 F 的 K- 指标： $X \subseteq K^n \to \mathbb{C}$，其中 K 是一个非阿基米德局部域。对于阿基米德域 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$，也存在类似术语，而不是 K，通常称为实的或复的对数典范阈值，或者实的或复的阿诺德指标，参见 [AGZV], [Kol 97], [Mus02, Mus12]。

首先，我们固定一些关于积分的记号。设 K 是一个非阿基米德局部域 K，即， K 是 $\mathbb{F}_p((t))$ 的有限扩张，或 $\mathbb{Q}_p$ 是某个次数为 n 的有限扩张。记 $n = e_K f_K$，其中 $p^{f_K} =: q_K$ 是剩余域的基数， e_K 是其分歧指数。赋值 ord: $K^{\times} \to \frac{1}{e_K}\mathbb{Z} = \Gamma$ 诱导出一个非阿基米德绝对值 $|x|_K = q^{-e_K \operatorname{ord}_K(x)}$。我们赋予 K 其加性哈尔测度，并将其归一化，使得 $\mathcal{O}_K$ 的测度为 1。所有积分均相对于此测度进行。

定义 7.1. 设 X 是 K^n 的可测子集，且 $F\colon X \to \mathbb{C}$ 是可测函数。记 $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的绝对值。

(1) 我们将 F 的 K-指标 $\mathrm{ind}_X^K(F)$ 定义为所有满足下述条件的 $s \in \mathbb{R}_{>0}$ 的上确界

$$\int_X |F(x)|_{\mathbb{C}}^s \, dx < +\infty$$

若此上确界在 $\mathbb{R}_{>0}$ 中存在。若这样的 s 构成的集合为空，则令 $\mathrm{ind}_X^K(F) = 0$；若该集合无界，则令 $\mathrm{ind}_X^K(F) = +\infty$。

(2) 对于 $P \in X$，我们将 F 在 P 处的 K-指标 $\mathrm{ind}_P^K(F)$ 定义为所有值的上确界

$$\mathrm{ind}_{X\cap Y}^K(F)$$

当 Y 遍历 K^n 中 P 的所有邻域时。

注记 7.2. 设 $g(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ 是一个满足 $g(0) = 0$ 的非常数多项式，将其视为映射 $g\colon \mathcal{O}_K^n \to K$。假设 K 的特征为零。若 $F(x) = |g(x)|_K^{-1}$ 几乎处处成立，则 $\mathrm{ind}_P^K(F)$ 与 $P = \{0\}$ 相对应的值，等于 $\lambda(\mathcal{I}_g)$ 在 [VZnG08] 中定义的值。根据 [VZnG08，注 2.8] $\lambda(\mathcal{I}_g)$ 至少为 g 在零点处的（复）对数典范阈值。

7.2. 在存在性可定义集上进行一致的 p-adic 积分。本节将证明：若 K 是一个 p-adic 域，且 $f\colon X \subseteq K^n \to K$ 是一个图由存在性 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-公式定义的函数，那么将 $x \mapsto |f(x)|_K$ 扩张到有限域扩张后，其 K-指数不会增大（定理 7.6）。通俗地说，这表示 $f(x)$ 不会因转到更大的域而突然变得奇异性较低。这可以视为关于 p-adic 指数的下降和半连续性结果。若 $f(x)$ 不是存在性可定义的，则这种形式的半连续性不一定成立，例 7.8 展示了这一点。借助动机积分和一致 p-adic 积分的传递原理，第 7.4 节将把这些下降结果推广到特征为（较大）正数的局部域。

我们不考虑形如 $x \mapsto |f(x)|_K$ 的函数的线性组合（差也不考虑），这一事实可以视为我们在研究下降时所考虑函数的一种基本正性（或非负性），类似于 [CL08]中的半环方法（即不考虑差）。事实上，我们处理的是某种双重正性：一方面是上述函数$|f(x)|_K$的非负性，另一方面是对象的存在性，这一点已在引言中说明。

为进行积分，我们将讨论范围限制在这样的情形： $\mathcal{L}$ 仅为 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$ 添加常量的扩张，并且所考虑的所有域都是非阿基米德局部域。更确切地说，在本节余下部分中，我们采用以下约定。

记号 7.3. 用 Loc^0 表示所有特征零的非阿基米德局部域的集合；对于任意 $K_0 \in \mathrm{Loc}^0$，用 $\mathrm{Loc}_{K_0}^0$ 表示所有作为 K_0的有限域扩张的 $K \in \mathrm{Loc}^0$。若某个 X 要么是 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-可定义的，要么是 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}} \cup K_0$-可定义的（其中 $K_0 \in \mathrm{Loc}^0$），则称其为可定义集合。注意，如果 X 是 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}} \cup K_0$-可定义的，那么对每个 $K \in \mathrm{Loc}_{K_0}^0$，它都有一个自然解释 X_K。

下面的引理是胞腔分解的直接推论（另见 [Pas89、Pas90a]）。

引理 7.4。设 U 和 $X \subseteq \mathrm{VF}^m \times U$ 是存在性可定义的。则存在有限个正整数 M_1、.....、M_r 以及存在性可

定义集 D_1、……、$D_r \subseteq \mathrm{RV}_{\bar{n}} \times U$，使得对于每个 $K \in \mathrm{Loc}^0$（分别为 $\mathrm{Loc}^0_{K_0}$）以及 $u \in U_K$ 的每种取值，均成立以下等式

$$\int_{X_K(u)} dx = \sum_{i=1}^{r} q^{-(m+e_K \operatorname{ord} M_i)} \sum_{\xi \in D_{i,K}(u)} q_K^{-e_K(\operatorname{ord}(\xi_1)+\cdots+\operatorname{ord}(\xi_m))},$$

在扩展实数 $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 中。

证明。我们对 m 进行归纳法证明。根据定理 4.14，我们可以将问题归约到 $X \subseteq \mathrm{VF} \times(\mathrm{VF}^m \times U)$ 是一个单独的 $\exists$-1-胞腔的情形，设其中心为 $c = c(x, u, \xi)$。

由 σ-可加性和 Fubini-Tonelli 定理可知，对所有 $K \in \mathrm{Loc}^0$ and$u \in U_K$ 均有

$$\int_{X_K(u)} dx\, dt = \sum_{\xi \in \mathrm{RV}_{\bar{n}}} \int_{(u,x,\xi) \in D_K} \left(\int_{\mathrm{rv}_N(t-c)=\xi_1} dt \right) dx.$$

由于 Haar测度是平移不变的，内层积分等于

$$q_K^{-e_K(\operatorname{ord}(\xi_1)+\operatorname{ord}(N))+1}.$$

现在将归纳假设应用于 $D \subseteq \mathrm{VF}^m \times(U \times \mathrm{RV}_{\bar{n}})$。 □

记号 7.5. 若 $f\colon X \subseteq \mathrm{VF}^m \to \mathrm{VF}$ 是一个可定义函数，且 $K \in \mathrm{Loc}^0$（分别地，$\mathrm{Loc}^0_{K_0}$），则我们记作 $\mathrm{ind}_X^K(|f|)$，而不记作 $\mathrm{ind}_{X_K}^K(|f_K|_K)$。

现在我们来到了主要结果：存在性可定义函数的 K-指标的下降。

定理 7.6. 设 $X \subseteq \mathrm{VF}^m$ 是存在性可定义的，并设 $f\colon X \to \mathrm{VF}$ 是一个存在性可定义函数。若 $K \in \mathrm{Loc}^0$（分别地，$\mathrm{Loc}^0_{K_0}$），则对所有有限域扩张 $L \geq K$，有

$$\mathrm{ind}_X^L(|f|) \leq \mathrm{ind}_X^K(|f|).$$

证明. 记 $e := e_K$，以及 $q := q_K$。令 $Y(\xi_0)$ 为由条件 $x \in X$ 给出的可定义集合，并满足 $\mathrm{rv}(f(x)) = \xi_0 \in \mathrm{RV}^\times$。由$\sigma$-可加性和线性性可知，对每个 $s \in \mathbb{R}$，

$$\int_{X_K} |f_K(x)|_K^s \, dx = \sum_{\xi_0 \in RV} q^{-e \operatorname{ord}(\xi_0) s} \int_{Y_K(\xi_0)} dx, \tag{8}$$

其中，左侧有限当且仅当右侧有限。

令 $a_K(\xi_0) = \int_{Y_K(\xi_0)} dx$，我们得到

$$\int_{X_K} |f_K(x)|_K^s \, dx = \sum_{\operatorname{ord} \xi_0 < 0} a_K(\xi_0)(q^s)^{-e \operatorname{ord} \xi_0} + \sum_{\operatorname{ord} \xi_0 \geq 0} a_K(\xi_0)(q^s)^{-e \operatorname{ord} \xi_0}.$$

首先考虑所有 $a_K(\xi_0)$ 都有限的情形。由于它们均为非负数，因此如果第二个加数对某个 $s=s_0$ 收敛，那么它对所有 $s \geq s_0$ 都收敛。现在将第一个加数视为变量 q^s 的幂级数，并将其收敛半径记为 q^{λ_K}。根据 K-指标的定义，这意味着 $\lambda_K = \mathrm{ind}_X^K(|f|)$。我们可以使用以下公式计算该收敛半径

$$q^{-\lambda_K} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{-e \operatorname{ord} \xi_0 = n} a_K(\xi_0) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

利用引理 7.4，我们可以将其计算为以下形式的上限之最大值

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\sum_{-e \operatorname{ord} \xi_0 = n} \sum_{\zeta \in D_K(\xi_0)} q^{-e(\operatorname{ord}\zeta_1 + \cdots + \operatorname{ord}\zeta_m)} \right)^{\frac{1}{n}}, \tag{9}$$

其中 D 是存在性可定义的。我们声称，这个值仅取决于函数

$$m_{D,K}(\xi_0) \coloneqq \min\{\operatorname{ord}(\zeta_1 \cdots \zeta_m) \mid \zeta \in D_K(\xi_0)\}.$$

更确切地说，我们声称 (9) 可计算为

$$\limsup_{\operatorname{ord}\xi_0 \to -\infty} \left(q^{\frac{m_{D,K}(\xi_0)}{\operatorname{ord}\xi_0}} \right). \tag{10}$$

事实上，由于对于所有 ξ_0，$a_K(\xi_0)$ 都是有限的，因此（存在性）可定义映射 θ_K 的解释

$$\theta\colon D \subseteq \mathrm{RV}_{\bar{n}} \times \mathrm{RV}^\times \to \mathrm{RV}\colon (\zeta, \xi_0) \mapsto \prod_{i=1}^m \zeta_i \tag{11}$$

满足引理 3.5 的假设。因此，存在某个多项式 $p_K(\gamma) \in \mathbb{Q}[\gamma]$，使得

$$q^{-e m_{D,K}(\xi_0)} \leq \sum_{\zeta \in D_K(\xi_0)} q^{-e \operatorname{ord}(\zeta_1 \cdots \zeta_m)} \leq p_K(\operatorname{ord}(\xi_0)) q^{-e m_{D,K}(\xi_0)},$$

[1]该断言现已得证，因为当 $\operatorname{ord}\ \xi_0$ 趋于 $-\infty$ 时，$(p_K(\operatorname{ord}\ \xi_0))^{-e_{\operatorname{ord}}\xi_0}$ 趋于 1。

定理现在由该断言以及公式 (10) 同样适用于计算 $\lambda_L = \mathrm{ind}_X^L(|f|)$ 这一事实得出（例如将 D_K 替换为 D_L，但不改变 D）。由于 D 是存在性可定义的，我们有 $D_K \subseteq D_L$。于是，对于所有 ξ_0，都有 $m_{D,\ K}(\xi_0) \geq m_{D,\ L}(\xi_0)$，因此 $q^{-\lambda_K} \leq q^{-\lambda_L}$，从而 $\mathrm{ind}_X^K(|f|) \geq \mathrm{ind}_X^L(|f|)$。

最后，考虑对于某个 $\xi_0 \in \mathrm{RV}_K$，$a_K(\xi_0)$ 为无限集的情形。令 $D_1, \ldots, D_r \subseteq \mathrm{RV}_{\bar{n}} \times \mathrm{RV}$ 为引理 7.4 得到的存在性可定义集。由引理 3.5 可知，必存在某个 $i \in \{1, \ldots, r\}$，使得

$$\{\mathrm{ord}(\xi_1 \ldots \xi_m) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in D_{i,K}(\xi_0))\} \subseteq \Gamma$$

没有下界，或者存在某个 $\gamma \in \Gamma$，使得对于无穷多个元组 $(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in D_{i,K}(\xi_0)$，都有 $\mathrm{ord}(\xi_1 \ldots \xi_m) = \gamma$。由于 D_i 是存在性可定义的，因此可得 $D_{i,K}(\xi_0) \subseteq D_{i,L}(\xi_0)$，从而 $a_L(\xi_0)$ 也是无限的。我们据此得出，在这种情况下，$\mathrm{ind}_X^K(f) = \mathrm{ind}_X^L(f) = 0$。□

定理 1.2 的证明。该结论包含于定理 7.6 中，因为任何 $\mathcal{L}_{\mathrm{val}}$-可定义集合也是 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-可定义的。□

我们还有下降的一个局部形式，在点 P 处。

推论 7.7。设 $f\colon X \subseteq \mathrm{VF}^m \to \mathrm{VF}$ 是存在性可定义的。设$K \in \mathrm{Loc}^0$ 以及 $P \in X_K$。对于任意有限域扩张 $L \geq K$，都有

$$\mathrm{ind}_P^L(|f|) \leq \mathrm{ind}_P^K(|f|).$$

证明。令 $\pi \in K$ 为一致化元。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，考虑由下式给出的存在性 K-可定义集合 $B_n(P)$：

$$B_n(P) = \{x \in \mathrm{VF}^m \mid \bigwedge_{i=1}^{m} \mathrm{ord}(x_i - P_i) > n\,\mathrm{ord}(\pi))\}.$$

我们将定理 7.6 的（带有 $K = K_0$ 的 $\mathrm{Loc}^0_{K_0}$ 版本）应用于 $f_{|X \cap B_n(P)}$，并得到对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{ind}^L_{X \cap B_n(P)}(|f|) \leq \mathrm{ind}^K_{X \cap B_n(P)}(|f|).$$

现在对两边关于 n 取上确界。□

定理 7.6 中 f 为存在性可定义的条件不能省略，推论 7.7 中亦然，以下例子说明了这一点。

例 7.8。令 $f\colon \mathrm{VF} \to \mathrm{VF}$ 为下式给出的可定义函数：

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{if } x \neq 0 \text{ and } \forall y \in K(y^2 \neq -1), \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

注意，f 不是存在性可定义的。直接计算表明，$\mathrm{ind}_0^{\mathbb{Q}_3}(|f|) = 1$，而 $\mathrm{ind}^{\mathbb{Q}_3(\sqrt{-1})}_0(|f|) = +\infty$。

备注 7.9. 对于任意可定义集合 X，我们都有一个定义在 X 上的“可构造函数”环 $\mathcal{C}(X)$，其定义见 [CH18]。如果 X 是存在性可定义的，那么考虑这样一个子半环是有意义的：在生成元的描述中只允许使用存在性 $\mathcal{L}_{\mathrm{gDP}}$-公式，并要求 a, α 类型的生成元只能分别取 $\mathbb{A}_+$（如 [CL08，第 4.2] 节）和 $\mathrm{VG}^{\geq 0}$ 中的值。与 $\mathcal{C}(X)$（或 $\mathcal{C}_+(X)$，[CL08，CGH21]）不同，这个半环目前还不具有积分下稳定性。需要加入若干种新的函数类型。下面给出两个例子。

例 7.10。给定 $X \subseteq \mathrm{VG} \times \mathrm{VG}_{>0}$，其中 $\{(\gamma, \delta) \mid 0 \leq 2\gamma < \delta\}$，并考虑常值函数 $2 \in \mathcal{C}(X)$。对 γ-变量积分后，我们得到一个新函数 $f(\delta) \in \mathcal{C}(\mathrm{VG}_{>0})$，其对每个 K均定义为

$$f_K(\delta) = \sum_{0 \leq 2\gamma < \delta} 2 = e_K\delta + (e_K\delta \mod 2).$$

对于任何存在性可定义的 $a\colon \mathrm{VG}_{>0} \to \mathrm{VG}^{\geq 0}$，此函数都不是 $e_K a_K(\delta)$ 的形式。经过进一步推导可以证明，$f(\delta)$ 无法通过加法和乘法由前面提到的生成元构造出来。

例 7.11。考虑可定义集合 $X \subseteq \mathrm{VF} \times \mathrm{VG}_{>0}$，其由 $\{(x, \delta) \mid 0 \leq \delta < 2 \operatorname{ord} x\}$ 给出，以及常值函数 $1 \in \mathcal{C}(X)$。于是我们计算得到，对于所有 $\delta > 0$ 以及 $K \in \mathrm{Loc}^0$，有

$$g_K(\delta) := \int_{X_K(\delta)} 1 \, dx = \begin{cases} q_K^{-(\frac{e_K\delta}{2}+1)} & \text{if } \delta \in 2\Gamma, \\ q_K^{-(\frac{e_K\delta+1}{2})} & \text{if } \delta \notin 2\Gamma. \end{cases}$$

现在考虑 $f(\delta) = q^{e_K\delta+2} g(\delta)^2$。后者由 $\delta \geq 0$ 给出：

$$f_K(\delta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \delta \in 2\Gamma, \\ q & \text{if } \delta \notin 2\Gamma. \end{cases}$$

显然，这个函数 $q^{e_K(\delta \bmod 2\,\mathrm{VG})}$ 不具有 $q^{e_K\beta(\delta)}$ 的形式，其中 β 是某个存在性可定义的函数：$\mathrm{VG}_{>0} \to \mathrm{VG}$（否则，$2\,\mathrm{VG}_{>0}$ 的补集将是存在性可定义的）。经过进一步处理，可以证明它不属于由先前提到的生成元生成的半环。

7.3. 应用于（Serre）-Poincar´é 级数。现在考虑与多项式组 $f(x) = (f_1(x) \ldots, f_r(x))$ 相关的 Poincar´é 级数和 Serre-Poincar´é 级数，其中该多项式组含有 m 个变量 $x = (x_1, \ldots, x_m)$，且系数属于 $\mathcal{O}_K$。这些生成级数与 $f(x) = 0$ 在剩余环中的解的数量（或其约化）相关。它

众所周知（例如参见 [Meu81、定理 2], [Den84、Den91]），经过变量 $T \mapsto q_K^{-s}$ 的变换后，这些级数由 p-进积分给出。

我们将定理 7.6 应用于这些积分，并发现这些 Poincar´e 级数的最大极点（关于 s）在经过有限域扩张时只可能增大（定理 7.13）。

定义 7.12. 令 $K \in \mathrm{Loc}^0$，并取一个多项式组 $f(x) = (f_1(x) \dots, f_r(x))$，它是关于 m 个变量 $x = (x_1, \dots, x_m)$ 的多项式组，系数属于 $\mathcal{O}_K$。令 $\pi \in K$ 为一致化元，并对所有 $n \in \mathbb{N}$ 定义如下数（如 [Den84] 中所述）

(1) $\tilde{N}_{n,K}(f) := \#\{\xi \in (\mathcal{O}_K/(\pi^n))^m \mid f(\xi) = 0\}$,
(2) $N_{n,K}(f) := \#\{\xi \in (\mathcal{O}_K/(\pi^n))^m \mid \exists y \in \mathcal{O}_K^m (f(y) = 0 \wedge \xi = y + (\pi^n)^m)\}$.

我们将相应的生成级数称为

(1) $\tilde{P}_{f,K}(T) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{N}_{n,K}(f)}{q^{nm}} T^n$,
(2) $P_{f,K}(T) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{N_{n,K}(f)}{q^{n(m+1)}} T^n$,

f 的 Poincar´e 级数和 Serre-Poincar´e 级数。

定理 7.13. 设 K_0 是一个 p-adic 域，且 $f(x) = (f_1(x) \dots, f_r(x))$ 是关于 m 个变量 $x = (x_1, \dots, x_m)$ 的多项式组，其系数属于 $\mathcal{O}_{K_0}$。对于所有 $K \in \mathrm{Loc}_{K_0}^0$，我们将 $-\lambda_K(f)$（分别将 $-\tilde{\lambda}_K(f)$）记作 s 中 $P_{f,K}(q_K^{-s})$（分别为 $P_{f,K}(q_K^{-s})$）的所有极点中实部最大的值。若不存在极点，则记 $-\lambda_K(f) = +\infty$（分别记 $\lambda_K(f) = +\infty$）。对于任意有限域扩张 $L \geq K$，有

$$\lambda_L(f) \leq \lambda_K(f) \quad and \quad \tilde{\lambda}_L(f) \leq \tilde{\lambda}_K(f).$$

证明。设 X 为存在可定义集

$$\{(x, w) \in \mathrm{VF}^m \times \mathrm{VF} \mid \exists y \in \mathrm{VF}^m (\mathrm{ord}(y) \geq 0 \wedge f(y) = 0 \wedge \min_i(\mathrm{ord}(x_i - y_i)) \geq \mathrm{ord}\, w \geq 0)\}.$$

根据 [Den84, 引理 3.1], ，我们有

$$P_{f,K}(q_K^{-s}) = \frac{q_K}{q_K - 1} \int_{X_K} |w|_K^s \, dxdw, \tag{12}$$

对于所有使 $P_K(q_K^{-s})$ 有限的实数 s。现在回顾一下，$P_{f,K}(T)$ 是有理函数（[Den84, 定理 1.1] 和 [CH18, 推论 4.5.2]）。因此，其最接近原点的极点的实部（$= q^{\lambda_K(f)}$）等于其收敛半径。现在，$-\lambda_K(f)$ 也可以计算为使 (12) 右侧有限的所有 $s \in \mathbb{R}$ 的下确界。由此我们观察到，$\lambda_K(f) = \mathrm{ind}_X^K(|w^{-1}|)$。定理 7.6 现在意味着 $\lambda_L(f) \leq \lambda_K(f)$。

$\tilde{}$ $\lambda_K(f)$ 的结论同样可由以下恒等式推出（[Meu81, 定理 2], [Den 91]）

$$(1-q_K^{-s})\tilde{P}_{f,K}(q_K^{-s}) = 1 - q_K^{-s}\int_{\mathcal{O}_K} |f(x)|_K^s \, dx,$$

其中 $|f(x)|_K = \max_{j=1}^r |f_j(x)|_K$。 □

定理 1.1 的证明。这是定理 7.13 的一部分。 □

如引言中所述，定理 7.13 推出了关于数值 $N_{n,\ K}(f)$ 的渐近比较。

推论 7.14。设 $K_0 \in \mathrm{Loc}^0$ 和 $f(x) = (f_1(x)\ldots, f_r(x))$ 是一个由 m 个变量 $x = (x_1, \ldots, x_m)$ 上、系数属于 $\mathcal{O}_{K_0}$ 的多项式组成的多项式组。对于任意有限域扩张塔 $K_0 \le K \le L$，有

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{N_{n,K}(f)}{q_K^{n(m+1)}}\right)^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{N_{n,L}(f)}{q_L^{n(m+1)}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

证明。由于我们已证明 $q_K^{\lambda_K(f)}$ 是 $P_{f,\ K}(T)$ 的收敛半径，因此这由上述定理 7.13 得出。□

7.4. 大正特征的非阿基米德局部域与传递原理。关于 p-adic 积分的现有迁移结果（例如参见 [CL10、CGH14、CGH18]）蕴含了当前情形下相应的传递性陈述。进而，这又蕴含了在具有充分大正特征的非阿基米德域中关于 K-指标的下降。

首先，我们扩展一些记号。对于任意 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-可定义集合 X，可以取一个定义公式 $\varphi(x)$，并对任意素数幂 $q = p^f$，考虑集合 $\varphi(\mathbb{F}_q((t)))$。根据紧致性定理，公式 $\psi(x)$ 的任何其他选择在 p 足够大时都会得到同一个集合（其中“足够大”可能取决于 φ 和 ψ）。对于充分大的 p，将第2.4节中关于可定义集的记号扩展为写作 $\varphi(\mathbb{F}_q((t))) =: X_{\mathbb{F}_q((t))}$。类似地扩展可定义函数的记号。

对于下一个引理的表述，请注意，如果两个非阿基米德局部域 K、L 具有同构的剩余域，那么这会诱导出一个同构 $\mathrm{RV}_K \cong \mathrm{RV}_L$，并保持第2.4节中的关系 $P_{1、d}$、$|$ 和 $\oplus$。

引理 7.15。设 $X \subseteq \mathrm{VF}^m \times \mathrm{RV}^n$ 是 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-可定义的。那么，对于所有具有充分大剩余特征的非阿基米德局部域 K，以及所有 $\xi \in \mathrm{RV}_K^n$，以下表达式的值

$$\int_{X_K(\xi)} dx$$

仅取决于 ξ 以及 K的剩余域的同构类。

证明。为 X选择某个定义公式 $\varphi(x,\xi)$。（证明）[Rid17，命题 1.8], 给出一个 $\mathcal{L}_{\mathrm{gDP}}$-公式（定义 3.4） $\psi(x,\zeta,\gamma)$，使得对于所有带有角分量映射 $\varphi(x,\xi)$的特征零亨塞尔赋值域， $\psi(x,\zeta,\gamma)$ 在 $K^m \times R_1^n \times \Gamma^n$ 中定义相同的集合；这里的同一性是在由 K上角分量映射的选择所诱导的同构 $\mathrm{RV}^\times \cong R_1^\times \times \Gamma$ 下成立的。由于只需考虑剩余特征充分大的赋值域，我们可以假设 $\psi(x,\zeta,\gamma)$ 不包含任何符号 ac_N，也不包含关于 RF_N 的量词 $N > 1$ （因此按照 [CGH14] 的记号，它是一个 $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$-公式）。根据 [CGH14，定理 4.4.3], ，存在一个固定的可构造函数 $g(\zeta,\gamma) \in \mathcal{C}(\mathrm{RF}_1^r \times \mathrm{VG}^r)$，其在所有具有充分大正特征的非阿基米德局部域中的解释，恰好是 $\int_{\psi(x,\zeta,\gamma)} dx$，只要该积分有限（根据 [CGH14，定理 4.4.1] ，该积分的有限性仅取决于 ζ, γ 以及剩余域的同构类）。

对于出现在 $g(\zeta,\gamma)$ 的描述中的每个公式 $\chi(\zeta,\gamma)$，都存在关于如下形式公式的有限析取： $\chi_{\mathrm{RF}}(\zeta) \wedge \chi_{\mathrm{VG}}(\gamma)$，其中 $\chi_{\mathrm{RF}}(\zeta)$ 是一个 $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$-公式， $\chi_{\mathrm{VG}}(\gamma)$ 是一个 $\mathcal{L}_{\mathrm{og}}$-公式，使得对于所有带角分量映射的等特征零亨塞尔赋值域，该有限析取与 $\chi(\zeta,\gamma)$ 等价（例如参见 [CL08，第 2.1.1] 定理）。根据紧致性，这些等价关系对于带角分量映射且剩余特征足够大的亨塞尔赋值域同样成立。因此，对于所有剩余特征充分大的非阿基米德局部域 K， $g_K(\zeta,\gamma)$ 的值仅取决于 ζ、 γ 以及剩余域的同构类（因为值群总是同构于 $\mathbb{Z}$）。□

命题 7.16. 设 $X \subseteq \mathrm{VF}^m$ 和 $f\colon X \to \mathrm{VF}$ 是 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-可定义的。则对于所有具有同构剩余域且特征充分大的非阿基米德局部域 K、 L，有

$$\mathrm{ind}_X^K(|f|) = \mathrm{ind}_X^L(|f|).$$

证明。如果 K 和 L 具有同构的剩余域，那么我们已经指出，可以将 RV_K 和 RV_L视为相同。现在，引理 7.15 推出

在定理 7.6 的证明中，体积 $a_K(\xi_0)$ 和 $a_L(\xi_0)$ 相等，对所有 $\xi_0 \in \mathrm{RV}_K = \mathrm{RV}_L$ 均成立。□

定理 7.6 和命题 7.16 立即蕴含了大正特征下的下降。最后，我们给出大正特征下定理 7.6 的类似结论，并将推论 7.7 和定理 7.13 的相应类似结论留给读者。

推论 7.17。设 $X \subseteq \mathrm{VF}^m$ 和 $f\colon X \to \mathrm{VF}$ 是存在性地 $\mathcal{L}^{\mathrm{RV}}$-可定义的，并设 K 是一个具有充分大正特征的非阿基米德局部域。对于所有有限域扩张 $L \geq K$，均有

$$\mathrm{ind}_X^L(|f|) \leq \mathrm{ind}_X^K(|f|).$$

我们由定理 7.6、定理 7.13 和推论 7.17 得到的下降结果，一方面可以看作关于 K-指标的半连续性结果，另一方面也可以看作关于最大极点的半连续性结果。它们为研究通过在越来越大的域扩张上取极限而得到的不变量开辟了道路。研究这些极限，并在可能的情况下将它们与复不变量联系起来，将会很有意义。

References

[AF16] Sylvy Anscombe和Arno Fehm，等特征亨泽尔赋值域的存在性理论，《代数与数论》10（2016），第3期，665–683。MR 3513134[AGZV] Vladimir Arnold、Sabir Gusein-Zade和Alexander Varchenko，可微映射的奇点。第2卷，现代Birkhäuser经典，单值化与积分的渐近性，由Hugh Porteous从俄文翻译，并由作者和James Montaldi修订。1988年译本的重印版。¨CGH14] Raf Cluckers、Julia Gordon和Immanuel Halupczok，局部域上振荡函数的可积性：转移原理，《杜克数学杂志》163（2014），第8期，1549–1600。MR 3210968[CGH18] ———,局部域上的一致分析及其在轨道积分中的应用，《美国数学学会汇刊》B辑5（2018），125–166。MR 3859937[CGH21] Raf Cluckers、Itay Glazer和Yotam I. Hendel，e-光滑簇和(frs)态射的数论刻画：$\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$-点数量的估计，2021年。[CH18] Raf Cluckers和Immanuel Halupczok，动机指数类函数的积分：在所有特征零非阿基米德局部域上一致，《J. ´Ec. polytech. Math.》5（2018），45–78。MR 3732692[CL08] Raf Cluckers和Fran¸cois Loeser，可构造动机函数与动机积分，《数学发明》173（2008），第1期，23–121。MR 2403394[CL10] ———,可构造指数函数、动机傅里叶变换与传递原理，《数学年刊》（第2辑）171（2010），第2期，1011–1065。MR 2630060

[Coh69] Paul J. Cohen，实域与 p-adic域的判定过程，《纯粹与应用数学通讯》22（1969），131–151。[Den84] Jan Denef，与簇上的 p-adic点相关的Poincar´é级数的有理性，《数学发明》77（1984），第1期，1–23。MR 751129[Den86] 、p-adic半代数集与胞腔分解，《纯粹与应用数学杂志》369（1986），154–166。MR 850632[Den91] ———，关于Igusa局部ζ函数的报告，第201–203号，1991，《Bourbaki研讨会论文集》，1990/91年第1990卷，第741号报告，359–386（1992）。MR 1157848[Eis95] David Eisenbud，交换代数，《数学研究生教材》第150卷，Springer-Verlag，纽约，1995年，附代数几何视角。MR 1322960[Fle11] Joseph Flenner，亨塞尔赋值域中的相对可判定性与可定义性，《符号逻辑杂志》76（2011），第4期，1240–1260。MR 2895394[Igu75] Jun-ichi Igusa，复幂与渐近展开。II. 渐近展开，《纯粹与应用数学杂志》278(279)（1975），307–321。MR 404215[Kol97] J´anos Koll´ár，对的奇点，《代数几何——圣克鲁斯1995》，《纯粹数学研讨会论文集》第62卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年，第221–287页。MR 1492525（99m:14033）[Kra83] Marc Krasner，关于一类超环与超域，《国际数学杂志·数学科学》6（1983），第2期，307–311。MR 701303[LT22] Alessandro Linzi和Pierre Touchard，关于与赋值域相关的超域，2022年。[Meu81] Diane Meuser，关于某些生成函数的有理性，《数学年刊》256（1981），第3期，303–310。MR 626951[Mus02] Mircea Mustat¸ˇa，通过喷射概形研究对的奇点，《美国数学学会杂志》15（2002），第3期，599–615（电子版）。MR 1896234（2003b:14005）[Mus12] ———,关于对数典范阈值的IMPANGA讲义，《代数几何贡献》，欧洲数学学会会议报告丛书，欧洲数学学会，苏¨黎世，2012年，Tomasz Szemberg记录，第407–442页。[Pas89] Johan Pas，一致的 p-adic胞腔分解与局部ζ函数，《纯粹与应用数学杂志》399（1989），137–172。MR 1004136[Pas90a] ———，在 p-adic域的非分歧扩张塔中的胞腔分解与局部ζ函数，《伦敦数学学会会刊》（第3辑）60（1990），第1期，37–67。MR 1023804[Pas90b] ———，关于模 P的角分量映射，《符号逻辑杂志》55（1990），第3期，1125–1129。MR 1071318[Rid17] Silvain Rideau，解析差分赋值域的一些性质，《Jussieu数学研究所杂志》16（2017），第3期，447–499。[Ser95] Jean-Pierre Serre，局部域，《数学研究生教材》第67卷，Springer-Verlag，纽约—柏林，1995年，由Marvin Jay Greenberg从法文翻译。[VZnG08] Willem Veys和W. A. Z´u˜niga Galindo，解析映射、理想的对数主化与牛顿多面体的ζ函数，《美国数学学会汇刊》360（2008），第4期，2205–2227。MR 2366980

Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000Lille, France, and KU Leuven, Department of Mathematics, B-3001Leuven, Belgium

电子邮箱地址：Raf.Cluckers@univ-lille.fr 网址：http://rcluckers.perso.math.cnrs.fr/

KU Leuven, Department of Mathematics, B-3001 Leuven, Belgium电子邮箱地址：mathias.stout@kuleuven.be