arXiv:2304.12371v2 [math-ph] 3 Dec 2024

作为 Calabi–Yau曲面的十一维超引力

FABIAN HAHNER[♭] 和 INGMAR SABERI[♮]

[♭]数学研究所，海德堡大学 *Im Neuenheimer Feld 205 69120* 海德堡，德国

[♮]慕尼黑大学 *Theresienstraße 37 80333* 慕尼黑，德国

摘要。我们构造了泊松–陈–西蒙斯理论的一种推广，它定义在任意配备适当切丛过滤的超流形上。我们的构造以统一且几何化的方式，恢复了 Cederwall的表述中的相互作用十一维超引力，以及该理论的所有可能扭曲。此外，这还证明了 Costello的描述中的极大扭曲是十一维超引力在其纯旋量描述下的扭曲。该构造还为最小扭曲理论中的相互作用提供了纯旋量提升。我们的方法通过定义相容的分次交换乘积，将每个理论中相互作用的 BV表述提升为同伦泊松结构；这提示了从超空间上几何结构形变的角度进行诠释，并为这些理论具有第一量子化起源提供了一些具体证据。

目录

1. 引言 2 2. 旗标结构与广义 Dolbeault 复形 6 3. 通过导出括号构造 Poisson–Chern–Simons理论 16 4. 来自某些 Gorenstein 环的 Calabi–Yau 二重曲面 22 5. 十一维超引力：扭曲与非扭曲 29 参考文献 36

电子邮件地址：fhahner@mathi.uni-heidelberg.de，i.saberi@physik.uni-muenchen.de。

1. 引言

自最初的超对称场论构建以来，人们一直致力于使用超空间技术理解其性质并简化其构造。这一动机在超引力理论的情形下或许最为强烈。爱因斯坦引力理论的几何性质是通过洛伦兹号差度规空间上的协变最小作用量原理构造的，这推动了大量研究，试图以同样简洁的方式表述超引力理论，将其表述为超空间上特定自然几何结构的（变形）模空间问题。（相关参考文献在现有文献中俯拾皆是，故此处不再列举。）

在所有具有物理意义的超引力理论中，最为特殊的或许是十一维超引力。该理论最初由 Cremmer、Julia 和 Scherk 于 1978 [CJS78], 构建，并被认为是 M 理论的低能极限 [Wit95]。M 理论至今尚未构建出来，尽管人们认为，或许可以将其作为基本膜理论，通过世界面构造实现。虽然该理论的分量场表述相对简洁——除度规外，理论中仅包含一个引力微子和一个带有陈–西蒙斯项的阿贝尔三形式规范场——但即便是在超空间中表述该理论也十分困难，超空间中的最小作用量原理更是一直无法实现。这一困难部分可归因于人们试图寻找一组能够用于在壳外表示超对称性的辅助场，而当时这被视为必要的前提。

Cederwall 的工作取得了重大进展，他将纯旋量超场形式主义应用于 BV 形式，构造了微扰十一维超引力的超空间描述。十一维纯旋量与超引力之间的联系至少可以追溯到 [How91]。这一联系在 [CNT02],中得到进一步明确；该文指出，某个特定的十一维纯旋量超场再现了 BV 超引力多重态。在 [Ced10b], 中，作者为这一多重态构造了一个候选三次相互作用项；在 [Ced10a], 中，Cederwall 进一步在 BV 作用量泛函中加入了一个颇为微妙的四次项，并证明所得结果满足 BV 主方程，从而给出一个一致且显式超对称的相互作用理论——由于预期该理论是唯一的，它必定就是十一维超引力本身。（纯旋量技术也从第一量子化视角出发，用于构造新的超膜模型；参见 Berkovits 在 [Ber02], 中的工作，他将自己的超弦表述加以推广。）因此，纯旋量描述不仅在超空间上表述了该理论，还大幅简化了其相互作用结构：分量场的非多项式作用量被一个四次多项式所取代。（这种简化在相互作用纯旋量理论中

很常见。）尽管如此，它并未为相关四次多项式提供几何起源，也没有从超空间几何本身的变形角度，阐释它所描述的模问题。

后来，关于十一维超引力的扭曲版本又以彼此独立的方式取得了进一步进展。Costello 和 Li 在 [CL16], 中定义了超引力理论的扭曲，从而推广了超对称场论扭曲的标准概念。他们运用拓扑弦论中的世界面技术，提出了对IIB型超引力全纯扭曲的描述。Costello 和 Li 的理论是BCOV理论的一种版本 [Ber+94]，其模理论解释是清楚的；它与Calabi–Yau结构形变的Kodaira–Spencer理论有关。在 [Cos16], 中，Costello继续研究Omega背景下的十一维超引力；他提出的描述将十一维超引力的极大扭曲与一种称为泊松–陈–西蒙斯理论的非交换Chern–Simons理论联系起来。

在BV形式中，泊松–陈–西蒙斯理论很容易描述。其场由Calabi–Yau曲面上的 $(0, \bullet)$-形式的Dolbeault 复形与 $\mathbb{R}^7$ 上的德拉姆复形的张量积给出（或者更一般地，在一个 G_2-流形上；关于与 G_2-流形有关的非微扰问题，参见 [Dij+05; DZOZ22] 及其中的参考文献）。相互作用由场上的一个 L_∞ 结构决定，而且实际上是严格的：李括号是由Calabi–Yau形式诱导的全纯函数的泊松括号，其逆是一个全纯Poisson双向量。该理论具有两个基本特征。首先，它同样具有模理论解释。带有泊松括号的全纯函数李代数是全纯哈密顿向量场的一个一维中心扩张。由于辛结构就是全纯体积形式，这些向量场也都是无散向量场，因此也可以认为它们与Calabi–Yau结构形变的模空间有关。其次，中心扩张为泊松–陈–西蒙斯理论的场赋予了一个交换结构；相互作用定义的不仅是微分分次李结构，还是微分分次Poisson代数结构。回顾三维拓扑量子场论的可观测量带有一个 E_3-代数结构，它等价于偶移位Poisson结构，我们可以看到，这种表述至少暗示了一个第一量子化起源。（不过请注意，为此类理论定义 E_3 代数结构时存在一些微妙之处；参见 [WE21]。）

近期的研究进一步推进了我们对扭曲的十一维超引力的理解；由于没有可用的世界面描述，所有方法都采用了对偶性或靶空间技术。在 [SW21]中，人们应用纯旋量技术，对超引力多重态的扭曲给出了简洁且易于计算的描述。

由此首次直接计算了最小扭曲的十一维超引力多重态和 IIB 型超引力多重态；后者证实了 Costello 和 Li 在自由层面的提议。通过直接研究分量场，还证明了最大扭曲的十一维多重态在自由极限下约化为泊松–陈–西蒙斯理论 [EH23]。在 [RSW21], 中，人们在最小扭曲的十一维超引力多重态上定义了一种相容的 $\mathbb{Z}/2$分次 BV 理论。令人惊讶的是，该理论在平直空间上的上同调是例外无限维简单超李代数的一维 L_∞ 中心扩张 $E(5|10)$ [Kac77]。其他例外简单超李代数也在全纯 M 理论中发挥着根本作用 [RW22；SW23]。

本文通过利用两种情形中几何结构之间一种强大却似乎未受充分重视的类比，尝试将其中一些研究方向联系起来。我们将泊松–陈–西蒙斯理论（在利用 Ω 背景局域化六个方向之后）视为五维理论，并指出，该理论必须配备一种横向全纯叶层 （或 THF 结构），使我们可以将几何视为局部同构于 $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$。THF 结构是复化切丛的一个（三维）闭合子丛。类似地，最小扭曲理论最一般地定义在配备六维复分布的十一维流形上。

平坦超空间本身也自然配备了一个由左不变奇向量场张成的分布。然而，由于所有玻色平移都属于超对称变换的括号像，该分布的可积性可谓最差。因此，无法简单地将这两种结构联系起来。近期发展起来的几乎复流形的 Dolbeault上同调理论为我们提供了理解这一问题的线索 [CW21]。该理论利用分布 $T^{(0,1)}$ 定义德拉姆复形上的一个滤子。关联分次上的微分刻画了该分布的不可积性；对其取上同调，并将德拉姆微分其余各项所定义的 D_∞结构传递过去，可得到一个新的滤过复形，他们用它取代 Hodge 滤链。取这个新滤子的关联分次，便定义了他们的 Dolbeault 复形类比。

如果我们将同样的构造应用于超空间上的德拉姆复形，就可以将微分中编码奇分布不可积性的项，与超平移代数的 Chevalley–Eilenberg 微分对应起来。出现的“广义多尔博复形”无非是与超平移代数各个上同调群相关联的纯旋量多重态之和；次数为 $-k$ 的上同调所扮演的角色，类似于解析 $(k,\ 0)$-形式的 Dolbeault 复形。特别是，

典范超多重态 [Ced+23] 发挥着全纯函数的作用，而我们将其视为一个配备了交换结构的对象，认为它是为时空配备的适当结构层。在十一维中，这就是十一维超引力。

与复几何的类比使我们能够找到许多有趣概念的现成推广：复维数是超平移的最高阶李代数上同调的次数；Calabi–Yau结构是将顶上同调（的多重态）作为结构层上的模加以平凡化。在这一类比中，十一维超引力及其所有扭曲都是Calabi–Yau曲面。我们利用这一点构造出一族理论，将其称为同伦泊松–陈–西蒙斯理论。该构造使用了 [KS96], 推广的 [Vor05], 导出括号技术，并且完全类似于泊松括号的标准构造。然而，由于我们在导出设定中工作，相应的 L_∞ 结构一般并不严格。应用我们的构造，可以以几何方式恢复Cederwall的四次相互作用泛函以及Costello的极大扭曲。此外，它还给出了最小扭曲的相互作用的纯旋量提升。根据 [SW21], 的结果，即典范多重态的扭曲是扭曲超对称代数的典范多重态，可以推出这些理论都通过扭曲彼此相关，从而在完整的相互作用层面证明了Costello关于极大扭曲的猜想。

结构概览。下面简要概述本文的结构。我们首先在§2回顾如何由切丛的子丛过滤导出德拉姆形式层的一个过滤，并具有某些附加性质。我们将这些性质抽象为交换微分分次代数上的一种（加权）旗结构，并研究Cirici和Wilson的Frölicher谱序列推广的抽象版本。由此，我们可以在任何配备这种结构的（超）流形上定义“经Dolbeault解析的全纯$_{W^{-k,\bullet}}$-形式”的层。§3 回顾了如何在Calabi–Yau曲面与奇维实流形的乘积上构造泊松–陈–西蒙斯理论；Costello在描述极大扭曲的十一维超引力时采用了这一理论。随后，我们将其推广为一种“同伦”版本，该版本适用于任何合适的加权旗结构。§4 首先简要回顾纯旋量形式主义；我们在此用广义Dolbeault复形的语言重新发现这一形式主义，但不熟悉标准叙述的读者应从这里开始了解一些基本定义。接下来，我们讨论其在扭曲理论中的应用，并刻画能够导出“Calabi–Yau曲面”的实例。最后，§5.1 构造十一维超引力及其扭曲，将它们作为同伦泊松–陈–西蒙斯理论的实例。

致谢。我们特别感谢：M. Cederwall和C. Elliott，他们在本项目早期就与我们开展了卓有成效的合作，研究纯旋量对（全纯十一维）超引力的描述；B. R. Williams和S. Raghavendran，在本文逐步成形的过程中与我们进行了富有成效的持续讨论，并在相关项目上开展了过去、现在和未来的合作；J. Huerta，感谢他提出的诸多见解并与我们进行讨论，尤其感谢他指出Tanaka延拓可能与本研究相关。我们也衷心感谢I. Brunner、K. Costello、R. Eager、O. Gwilliam、S. Jonsson、S. Noja、J. Palmkvist、N. Paquette和J. Walcher就相关主题进行的讨论与合作，并特别感谢匿名审稿人认真审阅稿件并提出许多宝贵建议。本研究部分得到了Perimeter理论物理研究所的支持。Perimeter研究所的研究工作由加拿大政府通过创新、科学与经济发展部以及安大略省通过研究、创新与科学部提供支持。FH和IAS均感谢Perimeter研究所的热情接待，也感谢M. Bek、A. Kiefer和L. Steinert的款待。IAS还感谢德国研究基金会卓越集群PRISMA下的美因茨理论物理研究所$^{+}$ (项目编号39083149)在Higher Structures, Gravity, and Fields研讨会期间提供的接待，本研究的部分工作正是在该研讨会上完成的。本项目由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过德国卓越战略EXC 2181/1 — 390900948（海德堡 STRUCTURES 卓越集群）和项目编号517493862（超对称性的同调代数：局域性、幺正性、对偶性）资助，并得到巴伐利亚自由州资助。

2. 旗标结构与广义Dolbeault复形

2.0.1. 约定。 在全文中，我们使用带有形如 $\mathbb{C}^\times \times G$ 的半单李群作用的复超向量空间范畴。此处， G 将取决于具体语境，可能是平凡的，并且通常省略不写。$\mathbb{C}^\times$ 的作用等价于按整数进行的分次。为强调这不是上同调分次，我们将此分次称为 权。该范畴上的幺半群结构采用超向量空间上的幺半群结构；因此，符号由 $\mathbb{Z}/2$ 分次决定，并且与权无关。

我们还将考虑该范畴中对象的上链复形。于是，这些复形带有两种整数分次（分别按上同调次数和权分次），以及一种按内禀宇称进行的 $\mathbb{Z}/2$ 分次。Koszul 符号由上同调次数与内禀宇称之和模二决定。我们的约定始终采用上同调约定。

2.1. **加权旗结构**。 我们先从一些非常一般的考察开始，这些考察与我们将在下文借助的几何直觉有关。关键在于注意到，某些由 Tanaka 研究的（超或分次推广的）滤结构，同时存在于（几乎）复流形以及物理学中所关注的超空间上。超空间与几乎复流形之间由此产生的类比，将使我们能够在这样的流形上构造一个交换微分分次代数层；对于复流形，它重现 Dolbeault上同调，同时也重现其在几乎复流形上的推广，正如 [CW21]中所定义的那样。当我们将这些技术应用于超空间时，该构造自然地重现纯旋量形式主义中的一个特定多重态。[1] 这个多重态被赋予幂零簇的结构层，称为典范多重态，见 [Ced+23] （以及*tautological filtered cdgsa*，见 [SW21]）。

2.1.1. 在几何学上，我们关注的是配备了分布的流形（包括超流形或分次流形）。这里给出的定义，是将 ***Tanaka***结构 [Tan70]的标准定义推广到分次情形。[2]这里我们不会进一步深入讨论与 Tanaka延拓理论或更广泛的抛物几何之间的联系，尽管这些联系无疑都非常重要。我们将在未来的工作中回到这些问题；目前，感兴趣的读者可参阅 [Tan70; Zel09; AD15; CS09]。

回顾一下 [Lee12，第 19] 章中的结论：流形 上的一个分布 M 是切丛 $D \subset TM$ 的子丛。若一个分布中的向量场所构成的空间 是闭合的，即其中的向量场空间 D 关于 M 上的李括号构成向量场的子代数，则称该分布为闭合的。若存在一个 正则叶层，使得 M 的叶的切空间在每一点都与 D 一致，则称一个分布为可积分的。根据 Frobenius定理 [Lee12，定理 19。12], 对合分布与可积分布相同，我们将交替使用这两个术语。

更一般地，我们可以考虑一个分布旗，它定义为一个有限序列

$$0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_k = TM \tag{2.1}$$

由切丛中彼此包含的子丛组成，每个子丛都包含于下一个子丛中。换言之， $D_\bullet$ 是切丛过滤。我们关于滤子的约定遵循 [Del71，§1], 但有一点例外：我们将所有滤子都写成递增的形式。

[1]不熟悉相关内容的读者请参阅第4.1 节了解相关术语。[2]我们深深感谢 John Huerta 提醒我们注意 Tanaka 的研究工作与本文的相关性。

我们进一步要求 $D_\bullet$ 与向量场的李括号相容，即

$$[\Gamma(D_i), \Gamma(D_j)] \subset \Gamma(D_{i+j}). \tag{2.2}$$

因此， $D_\bullet$ 赋予 $\mathrm{Vect}(M)$ 滤李代数的结构。[3] 当 $k = 2$时，该条件是空泛的，因此我们只需指定一个任意分布 D_1。我们在此处的所有例子都属于这一类型。

伴随分次向量丛 $\mathbf{Gr}\ TM$，连同 $\mathbf{Gr}_p TM = D_p/D_{p-1}$，在 M上的向量丛范畴中获得权分次李代数的结构。对于$X \in \Gamma(D_i)$和 $Y \in \Gamma(D_j)$，可以观察到

$$[X, fY] = X(f)Y + (-)^{|f|\cdot|X|} f[X, Y]. \tag{2.3}$$

第一项是 D_j 的一个截面，因此在 $\Gamma(\mathbf{Gr}_{i+j} TM)$ 中等价于零。由此可知，伴随分次上的李括号关于函数是线性的。该李代数丛在 $p \in M$ 处的纤维称为 p处的符号代数；它是一个有限维、严格正分次的实李代数。如果每个点 M处的符号代数都同构，我们就称切丛过滤正则。

2.1.2. 复化切丛的滤子决定了复化余切丛的对偶滤子 [Del71, §1.1.6], 其定义规则如下

$$F_n T^*_{\mathbb{C}} = (T_{\mathbb{C}}/D_{-1-n})^\vee. \tag{2.4}$$

这一约定确保了 $\mathbf{Gr}_p T^*_{\mathbb{C}} = (\mathbf{Gr}_{-p} T_{\mathbb{C}})^\vee$。我们可以将其乘法扩展为复德拉姆形式的非正滤子 $F_\bullet\Omega^\bullet(M)$。由于 $D_\bullet$ 与李括号相容， $F_\bullet$ 在德拉姆微分下保持不变。

例如，考虑几乎复流形上的分布旗，其定义如下：

$$D_0 = 0 \subset D_1 = T^{(0,1)} \subset D_2 = T_{\mathbb{C}}. \tag{2.5}$$

应用（2.4），我们可得对偶滤子的形式为

$$F_{-3}T^* = 0 \subset F_{-2}T^* = (T_{\mathbb{C}}/T^{(0,1)})^\vee \subset F_{-1}T^*M = T^*_{\mathbb{C}}. \tag{2.6}$$

对于任意几乎复结构，它都与德拉姆微分相容。这个˜滤子称为“移位霍奇滤” F，见 [CW21，定义 3。5]。

[3]我们强调，滤李代数并非由李子代数构成滤子：它是一个滤子向量空间，其滤子与李括号满足相容条件（2.2）。

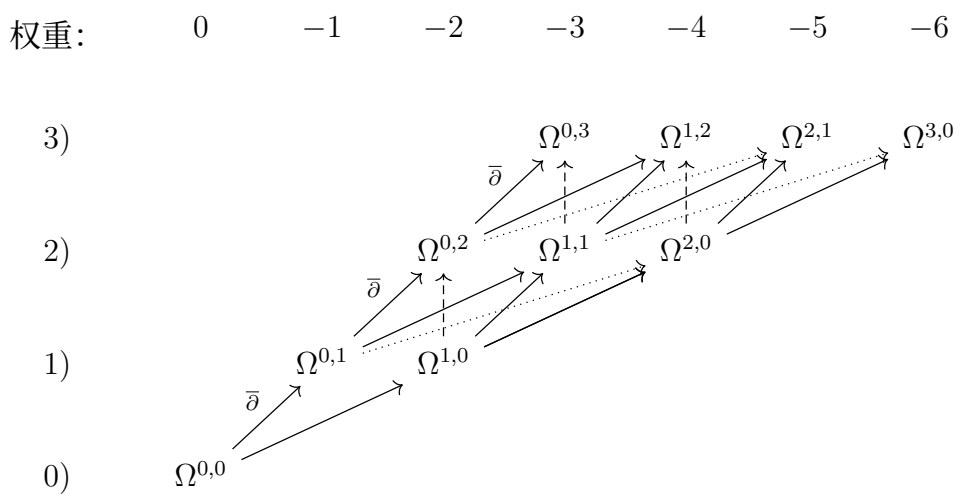


图1。由近复结构产生的权重分次

2.1.3. 相容权重分次。当切丛过滤源自一个分次时，问题会变得简单。相容权重分次是一个同构

$$\phi : \operatorname{Gr} TM \to TM \tag{2.7}$$

滤向量丛，其中 Gr TM按权重进行滤化。换言之，

$$\phi\left(\bigoplus_{1\le j\le k} \operatorname{Gr}_j TM\right) = D_k. \tag{2.8}$$

我们有时将 T_jM写作 ϕ(Gr$_j\,TM$) 的直和项。对于几乎复流形和超空间，都存在这种分裂的规范选择：前者通过 J的特征子空间，后者则通过 M的本体的切空间给出。

相容的权重分次在余切丛上定义了一个相容的权重分次（严格负次数），因而也在 M的德拉姆复形上定义了相应分次。在几乎复流形的例子中，该分次将 d$\bar{z}$ 赋予权重 -1，将 dz赋予权重 -2。

我们在图 1 中绘制了本例中权重分次的图表。上同调次数位于纵轴，权位于横轴。滤子 $F_\bullet$ 是列滤过： F_{-k} 由所有权为 $\le -k$ 的直和项组成。虚线箭头表示 Nijenhuis 张量，点线箭头表示其共轭；见下文的（2.18）。我们指出，标准 Hodge 滤链与几乎复情形中的微分不相容，它在图表中沿对角线出现。

2.1.4. 受前述讨论的启发，我们现在给出一些定义，旨在抽象地刻画赋有分布旗的流形的德拉姆复形中存在的结构（以及可能与之相容的权重分次）。

定义 2.1.4。 设 $(\Omega^\bullet, \mathrm{d})$ 是一个集中于非负同调次数的交换微分分次代数。$\Omega^\bullet$ 上的旗标结构 是每个齐次分量的一个（递增）滤子 $F_\bullet\Omega^k$ ，与微分和乘积均相容，并满足 $F_0\Omega^\bullet = \Omega^\bullet$、 $F_{-1}\Omega^\bullet = \Omega^{\geq 1}$，且 $F_\bullet\Omega^k$ 在每个同调次数 k上都是有限长度的滤子。$\Omega^\bullet$ 上的加权旗结构由一个取非正次数的权重分次构成，使得与该权重分次相关的列滤过是一个旗标结构。

在我们看来，旗标结构有两个基本且自然的例子。其中第一个正如我们已经看到的，是（几乎）复流形的德拉姆复形上的“平移”Hodge 滤链，如图 1所示。第二个例子与我们意图作为应用的超对称场论中的例子有关：任何平坦超空间都配备有一个典范分布，它由所有平移不变奇向量场的张成空间定义。更一般地，作为超对称场论或超引力理论的有效背景的超流形，都配备有一个最大维数的正则非对合奇分布，用于模拟局部超对称变换。（这是众所周知的；例如，可以考虑超黎曼曲面的定义 [Fri+86； RSV88； Wit12]。这个思想至少可以追溯到 Manin 在 [Man85；Man84], 所提出的观点，在那里，这样的数据被视为一种超共形结构。）

从某种意义上说，这一定义的价值在于，它将这两个例子统一起来。尤其是，我们的主要应用——十一维超引力——将依赖于利用二者之间的类比。为了引出这些例子，我们需要将 Dolbeault 上同调推广到这一更一般的情形。下一节将完成这项工作。随后，我们将在 §2.3 中讨论一些例子。

2.2. 由加权旗结构得到的 D_∞ 代数。

2.2.1. 给定一个加权旗结构，微分 d 可分解为若干项之和

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_0 + \mathrm{d}_{-1} + \cdots, \tag{2.9}$$

其中 d_i 的双次数为 $(1,\ i-1)$。下标标示的是<ưstyle id='5'>全化分次，即上同调次数与权之和。

$\mathrm{Gr}\, F_\bullet(\Omega^\bullet)$ 上的微分可以认定为 d_1, ，这是 $\Omega^\bullet$ 上一个平方为零且双次数为 (1，0) 的微分。现在我们将这个微分视为“内部”微分，而将附加项 $\mathrm{d}_0 + \mathrm{d}_{-1} + \cdots$ 视为定义在 $\mathrm{Gr}\ F_\bullet(\Omega^\bullet)$ 上的进一步结构。

回顾一下，一个次数为一的平方为零自同态可以被视为由运算子 D 平方为零的微分所支配的代数结构的定义数据。（例如，参见 [Val14]。）这个运算子只有一个d_0，其元数为一且次数为一，并满足自身复合为零的关系。

在上链复形 (V,d_1) 上的 D-代数结构由一个次数为一的平方为零自同态 d_0 给出。由于 d_0 是一个上链映射，d_0 与 d_1 反对易。因此，带有 D-代数结构的上链复形几乎等同于一个双复形，区别仅在于忘记了第二个分次。为了恢复这一分次，我们指定 $\mathbb{C}^\times$ 在运算子 D 上的一个作用，使非平凡运算具有权一，并要求在一个带权上链复形上给出一个等变的 D-代数结构。

由于关系 $\mathrm{d}_0^2 = 0$，算子系 D 并非自由的，并且与拟同构的相容性不好。按照同伦代数中的标准做法，我们必须将 D 替换为一个能够对其进行解析的自由生成的（加权）微分分次算子系。该算子系 D_∞ 由每个非正 i对应的运算 d_i 生成；这些运算的元数均为一、上同调次数均为一，且权为$i-1$。在上链复形中定义 D_∞ 代数结构的条件，归结为总微分

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_0 + \mathrm{d}_{-1} + \cdots \tag{2.10}$$

的平方为零。在这里，d_1 再次表示上链复形内部的（权为零的）微分，而对于 $i \leq 0$，d_i 则编码了 D_∞ 代数结构。显然，加权旗结构在 $\mathrm{Gr}\, F_\bullet(\Omega^\bullet)$ 上定义了一个 D_∞ 代数结构。

2.2.2. 同伦传递。 由于 D_∞ 是 D的良好同伦替换，因此可以利用 D_∞ 代数结构的同伦传递，在不同的拟同构模型之间进行转换。[4]我们考虑定义在 $\Omega^\bullet$ 的 E_1 页上的一个模型，该谱序列与 $F_\bullet$相关：

$$W^\bullet := H^\bullet\left(\mathrm{Gr}\, F_\bullet(\Omega^\bullet)\right) = H^\bullet\left(\Omega^\bullet, \mathrm{d}_1\right). \tag{2.11}$$

由于 d_1 是双次数为 $(1，0)$的齐次元素， $W^\bullet$ 再次按上同调次数和权进行双重分次。我们可以对 D_∞ 代数 [LV12] 应用同伦传递定理，从而在 D_∞ 上得到新的 $W^\bullet$代数结构。具体而言，这通过固定

[4]我们的论述不拘泥于历史沿革；这一技术更广为人知的名称是“同调扰动引理”，其历史可追溯至 [Bro67]，而且很可能是同伦传递的第一个例子。

一个撤回

$$h \circlearrowright (\Omega^\bullet, \mathrm{d}_1) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (W^\bullet, 0)\,. \tag{2.12}$$

尽管传递数据取决于 i、p 和 h的选择，但我们注意到，传递后的D_∞ 结构在同构意义下是唯一的，参见 [LV12，定理 10.3.15]。

上述构造的结果是一个内部微分为零的交换微分分次代数 $W^\bullet$，并配备了加权的 D_∞ 结构。或者说，它是 $W^\bullet$ 上的一个加权旗结构，且微分在 Gr $F_\bullet(W^\bullet)$ 上消失。我们将 D_∞结构的各项记为 d'_i，其中 $i \leq 0$；项 d'_i 的上同调次数为一，权为 $i-1$，因此总化次数为 i。$\mathsf{d}' = \sum \mathsf{d}'_i$ 是一个上同调次数为一且权严格为正的平方为零微分。

2.2.3. 重新加权。由于 $W^\bullet$ 上的微分只包含权严格为正的项，因此我们可以自由修改 $W^\bullet$ 上的 $\mathbb{C}^\times$ 作用，按上同调次数对其进行剪切。剪切后的权作用于上同调次数为 i 且权为 j 的直和项时，其权为$i+j$；因此它就是总化次数。由于 d' 只包含权为 ≤ -1的项，因此其剪切后的权非正。

我们注意到，对旗标结构也可以采用同样的过程，无需选择权赋值。可以保证，$W^\bullet$ 上的微分会降低滤子，即 $\mathsf{d}'(F_k W^\bullet) \subseteq F_{k-1} W^\bullet$。因此，剪切后的滤子 $F^+_\bullet$ 定义为

$$F^+_k(W^j) := F_{k-j}(W^j), \tag{2.13}$$

使 $(W^\bullet, \mathsf{d}')$ 成为一个带滤子交换微分分次代数，并且它与 $(\Omega^\bullet, \mathrm{d})$ 拟同构。

剪切后的滤子不会在 $W^\bullet$ 上定义旗标结构，因为 $\mathrm{Gr}_0 F^+_\bullet W^\bullet = W^0$ 不成立。（在复几何中，这就是说，$(0, \bullet)$-形式的 Dolbeault 复形不再只集中于同调次数零。）尽管如此，$\mathrm{Gr}_0 F^+_\bullet W^\bullet$ 将成为我们讨论的核心角色。

2.2.4. 结构层 $A^\bullet$；几何解释。我们在上文已经看到，对于可积复结构，$F^+_\bullet$无非就是 Hodge 滤链。正如 [CW21]中所阐明的，$F^+_\bullet W^\bullet$对于不可积复结构，它是取代标准 Hodge 滤链（因而也取代标准 Dolbeault上同调）的恰当对象。秉持这一理念，我们将 $\mathrm{Gr}\ F^+_\bullet W^\bullet = (W^\bullet, \mathrm{d}'_0)$ 视为与加权旗结构相关联的基本对象。

对于由切丛的正则滤子导出的加权旗结构，§2.1.1保证了 $W^\bullet$ 可视为底层流形上某个分次向量丛的光滑截面，因此它是底层流形上局部自由层的一个上链复形。我们将称其为广义多尔博复形。

复流形的复几何由其全纯函数层所支配；该层的一个良好导出替代物是层 $\Omega^{0,\bullet}$ 即能够对其进行光滑消解的多洛博形式层。在我们的设定中，这个结构层也有一个显然的推广：它就是交换微分分次代数层 $A^{\bullet,\bullet} = \mathrm{Gr}_0 F_\bullet^+ W^\bullet$。（在上面的图 1 中，$A^\bullet$ 在取 d_1, 所表示的虚线箭头对应的余核之后，出现在总化次数为零的主对角线上。）

我们的核心观点是，任何具有切丛正则滤子的超流形都可以（也应当）赋予结构层 $A^\bullet$。正如我们将在下一节中看到的，将这一构造应用于源自超空间的例子，会产生规范超多重态——因此，在其他具有重要物理意义的例子中，也会产生十一维超引力多重态。进一步推进这一与复几何的类比，将使我们能够从这个带环空间上的全纯泊松结构中构造出十一维超引力的相互作用，从而重现并推广 Cederwall 的工作 [Ced10b；Ced10a]。

2.3. **加权旗结构的示例**。

2.3.1. 复流形。 设 X 为一个复流形；局部地，我们可以为 X 配备相应的坐标（z^i, $\bar{z}^i$）。我们考虑 X 上的德拉姆复形，

$$\left(\Omega^\bullet(X)\,,\ \mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}\right). \tag{2.14}$$

德拉姆微分 d 分解为全纯部分和反全纯部分，即算子 ∂ 和 $\bar{\partial}$。上同调分次按形式次数给出；为定义权重分次，我们赋予 $\mathrm{d}\bar{z}$ 权重 0，并赋予 $\mathrm{d}z$ 权重 -1。这对应于滤子

$$0 \subset D_1 = T^{(0,1)}X \subset D_2 = T_{\mathbb{C}}X \tag{2.15}$$

复化切丛的滤子；通过选择它，我们将其细化为一个加权旗结构

$$T_1X = T^{(0,1)}X, \quad T_2X = T^{(1,0)}X. \tag{2.16}$$

在这个例子中，显然微分分解的各项为

$$\mathrm{d}_1 = 0, \quad \mathrm{d}_0 = \bar{\partial}, \quad \mathrm{d}_{-1} = \partial, \tag{2.17}$$

所有更高阶项均为零。因此， $W^\bullet$ 可与 $\Omega^\bullet$ 等同，而 $A^\bullet$ 是 Dolbeault 复形 $\Omega^{0,\bullet}(X)$。

2.3.2. 几乎复流形。 上面对加权旗结构的构造并不依赖复结构的可积性。事实上，该构造可立即推广到近复流形，区别在于 D_1 不再是闭合的。相应地，内部微分 d_1 不再为零。我们得到了几乎复流形的Dolbeault上同调理论，具体见 [CW21]。

在近复流形上，德拉姆微分分解为

$$\mathrm{d} = \overline{\mu} + \overline{\partial} + \partial + \mu, \tag{2.18}$$

其中， μ 及其复共轭 $\overline{\mu}$ 与Nijenhuis 张量有关。不存在其他项。定义上面所考虑的加权旗结构，我们看到

$$\mathrm{d}_1 = \overline{\mu}, \quad \mathrm{d}_0 = \overline{\partial}, \quad \mathrm{d}_{-1} = \partial, \quad \mathrm{d}_{-2} = \mu. \tag{2.19}$$

关键在于，Dolbeault微分 ∂ 的平方不再为零，因此标准Dolbeault上同调不再有良好定义。不过，我们仍然可以通过先取 $\bar{\mu}$的上同调来构造 $W^\bullet$:

$$W^\bullet = H^\bullet(\Omega^\bullet(X), \bar{\mu}). \tag{2.20}$$

这重现了近复流形的Dolbeault上同调构造，该构造定义于 [CW21]。将同伦传递应用于 D_∞ 代数后，会产生一个 D_∞ 结构于 $W^\bullet$之上，在此情形下，它起到Hodge到de Rham谱序列的作用。

我们注意到，微分 $\mathrm{d}_1 = \mu$ 中的第一项可以理解为编码相应分布旗不可积性的项。（在滤结构理论中，可以说该分布旗的符号不是阿贝尔的。）下面的例子将进一步说明这一点。

2.3.3. 超空间与典范超多重态。 设 $\mathfrak{n}$ 是 [Eag+22]意义下的超平移代数：一个具有一致权重分次、且支撑在一度和二度的超李代数。“一致”意味着奇偶性等于模二意义下的权：因此$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$，其中 $\mathfrak{n}_1$ 具有一的权和奇的内部奇偶性，而 $\mathfrak{n}_2$ 具有二的权和偶的内部奇偶性。令 $N = \exp(\mathfrak{n})$ 为相应的平坦超空间。德拉姆复形

$$(\Omega^\bullet(N), \mathrm{d}_{\mathrm{dR}}) = \left(C^\infty(N_+)[\theta, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}x] \ , \ \mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}\theta\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tag{2.21}$$

于是是一个带有权重分次的交换微分分次代数。[5]

我们可以在 TN 中定义一个分布旗：令 D_1 由奇的左不变向量场 $\big(\mathrm{Vect}(N)^N\big)_{-}$ 张成，并令 D_2 恰为 TN。在三维或更高维的物理例子中， D_1 总是括号生成的，因为每个平移都是某个超荷的平方。因此，我们考虑的分布是最大非闭合的。

这个分布旗在 $\Omega^\bullet(N)$ 上定义了一个加权旗结构。具体而言，我们可以用左不变基表示德拉姆复形

$$\lambda = \mathrm{d}\theta, \qquad v = \mathrm{d}x + \lambda\theta. \tag{2.22}$$

λ 承载 权 -1 和 v 权 -2 （正如 §2.1.3 中那样）。德拉姆微分 i s

$$\mathrm{d}_{\mathrm{dR}} = \lambda^2\frac{\partial}{\partial v} + \lambda\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \theta\frac{\partial}{\partial x}\right) + v\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.23}$$

请注意，在没有歧义时，我们会在记号中省略缩并。[6] 德拉姆复形上的总化分次就是 v 中的多项式次数。微分按权分解为以下各项

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1 &= \lambda^2\frac{\partial}{\partial v}, \\ \mathrm{d}_0 &= \lambda\frac{\partial}{\partial\theta} - \lambda\theta\frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathrm{d}_{-1} &= v\frac{\partial}{\partial x}\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

正如我们将在 §4.1 中明确看到的，广义多尔博复形 $W^\bullet$ 在纯旋量超场形式中有自然的诠释。特别是，零次部分 $_{W^{0,\bullet}}$ 与 $\mathfrak{n}$ [Ced+23] 的典范多重态重合；全纯 p-形式的多洛博分解的对应物，是与超平移代数 $(-p)$ 阶李代数上同调相联系的多重态 $\mathfrak{n}$（按总化次数计）。这些多重态已在 [Eag+22] 中结合物理例子作了详细讨论；由 d 中严格负次项产生的微分的无环变形，则在 [EHS23] 中予以定义，并通过例子具体展开。

2.3.4. 更多示例； （平坦的）常值符号分布。在前几节中，我们已经介绍了本文余下部分将详细探讨的示例。

[5]在讨论 $\mathfrak{n}$ 时，我们有时会采用全化分次的观点；在这种情况下， $\mathfrak{n}$ 是一个在一、二次上按上同调分次的李代数。不过，凡是采用这种观点的地方，我们都会特别加以说明。[6]例如，就 $\mathfrak{n}$ 的结构常数 $f^\mu_{\alpha\beta}$ 而言，我们有 $\lambda^2 = \lambda^\alpha f^\mu_{\alpha\beta}\lambda^\beta$ 和 $\lambda\theta = \lambda^\alpha f^\mu_{\alpha\beta}\theta^\beta$。其中$\alpha$， β 标记 $\mathfrak{n}_1$ 的一个基，而 μ 标记 $\mathfrak{n}_2$ 的一个基。

本文的主要目标是将几乎复几何和超空间都视为加权旗结构，从而建立二者之间的类比，并借此对相互作用的十一维超引力及其扭曲作出几何构造。不过，还有许多其他结构也可以从这一视角来考察，我们认为这样做会很有裨益。下面列出其中一部分示例，希望在未来的工作中再作探讨。

— 任意接触流形都具有旗标结构。— 任意配备Tanaka结构的流形 [AD17，定义 1] ，其德拉姆复形上都具有旗标结构。— 设 $\mathfrak{n}$ 是一个配备正权重分次的超李代数。按照 [Zel09], ，我们可以考虑具有常值符号 $\mathfrak{n}$的平坦Tanaka结构。根据定义，它是单连通超李群 $N = \exp(\mathfrak{n})$，并配备由 $\mathfrak{n}_{\leq j}$中的左不变向量场张成的分布旗。我们注意到，平坦超空间是这种平坦Tanaka结构的一个特例，其符号为超平移代数。应当也可以考虑非严格的例子（具有正权重分次的超 L_∞ 代数），并利用Getzler的结果 [Get09]。— 任意配备有限长度正滤过的李代数，都会在其 Chevalley–Eilenberg 上链上产生旗标结构。— 任意滤过李代数丛都会在其李代数丛余链上产生旗标结构。这显然是对前述例子以及流形切丛上的分布旗的一种推广。应当可以将此定义扩展到Courant代数丛，遵循 [Roy99], ，进而探讨其与例外广义几何的潜在联系。尤其值得探究的是Tanaka延拓与张量层级代数 [Pal14]之间的联系。

3. 通过导出括号构造的 Poisson–Chern–Simons理论

3.1. **全纯泊松–陈–西蒙斯理论**。 本节简要回顾标准泊松–陈–西蒙斯理论的构造。该理论定义在一个Calabi–Yau曲面与一个奇维光滑流形的乘积上。仅当光滑流形是一维时，该理论才是$\mathbb{Z}$-分次的。Costello在特定的Omega背景下，将泊松–陈–西蒙斯理论与十一维超引力的极大扭曲联系起来，见 [Cos16]。

3.1.1. 设 X 为一个带有全纯体积形式Ω的Calabi–Yau曲面。在复维数为二时，Ω同时也是一个全纯辛结构。我们将相应的全纯Poisson双向量记为 $\pi = \Omega^{-1}$。

回顾 §2.3.1 中的内容：全化分次将 $\mathrm{d}z$ 置于次数 -1，并将 $\mathrm{d}z$ 置于零次。上述构造还原了标准的 Dolbeault 复形（配备非标准分次）：

$$W^\bullet = \Omega^\bullet(X), \quad \mathrm{d}_0 = \bar{\partial}, \quad \mathrm{d}_{-1} = \partial. \tag{3.1}$$

与 π 收缩定义了 $\Omega^{0,\bullet}(X)$-模之间的一个同构

$$\pi : \left(\Omega^{2,\bullet}(X)\,,\,\bar{\partial}\right) \longrightarrow \left(\Omega^{0,\bullet}(X)\,,\,\bar{\partial}\right), \qquad \alpha \mapsto \pi \vee \alpha. \tag{3.2}$$

3.1.2. 现在可以利用这些数据为 Dolbeault 复形 $\Omega^{0,\bullet}(X)$ 配备循环 L_∞ 代数结构。此过程可分两步进行：

1. 将 $\Omega^\bullet(X)$ 转化为 BV 代数。2. 将 $\Omega^{0,\bullet}(X)$ 上的泊松括号定义为 BV 括号的导出括号。

对于第一步，注意交换子 $\Delta = [\pi, \partial]$ 定义了一个作用于 $\Omega^\bullet(X)$ 的二阶微分算子，它满足 $\Delta^2 = 0$ 和 $\Delta(1) = 0$。因此，我们可以在 $\Omega^\bullet(X)$ 上定义 Koszul 括号：

$$\{\alpha, \beta\} = (-1)^{|\alpha|}(\Delta(\alpha\beta) - \Delta(\alpha)\beta) - \alpha\Delta(\beta)\,, \tag{3.3}$$

将 $(\Omega^\bullet(X)\,1,\ \Delta,\ \{-,-\})$ 构造成 BV 代数。此构造归功于 Koszul [Kos85]。

第二步中，我们采用相对于微分 ∂的导出括号构造，如 [KS96]所述。导出括号定义如下：

$$[-,-]_\partial := \{\partial(-), -\}. \tag{3.4}$$

关键在于，这个括号并不会使整个 $\Omega^\bullet(X)$ 成为李代数；只有将其限制在阿贝尔子代数（相对于未导出括号 $\{-,-\}$）上之后，$[-,-]_\partial$ 才具有正确的对称性。很容易验证，Dolbeault 复形 $\Omega^{0,\bullet}(X)$ 确实是这样的子代数；由此可得

$$\left(\Omega^{0,\bullet}(X)\,,\,\bar{\partial}\,,\,[-,-]_\partial\right) \tag{3.5}$$

是一个微分分次李代数。

计算 $[-,-]_\partial$在 $\alpha,\ \beta \in \Omega^{0,\bullet}(X)$ 上的取值，我们得到

$$[\alpha, \beta]_\partial = \{\partial\alpha, \beta\} = \pi(\partial\alpha \wedge \partial\beta)\,, \tag{3.6}$$

由此恢复出泊松括号的著名公式。再结合通过与全纯体积形式 Ω 作楔积并积分所诱导的配对，$(\Omega^0,\bullet(X)\ \bar\partial, [-,-]_\partial)$ 构成一个循环 L_∞ 代数——事实上，这是一个局部 L_∞ 代数 [CG，定义 3.1.3。1]，带有次数为 -2的循环结构。与奇维光滑流形的德拉姆形式张量积后，便得到乘积流形上的一个具有奇移循环结构的局部 L_∞ 代数。相应的 $\mathbb{Z}/2$-分次 BV理论称为全纯 Poisson–Chern–Simons 理论。将奇维光滑流形记为 M，该理论的 BV作用量在元素 $\alpha \in \Omega^{(0,\bullet)}(X)\ \otimes \Omega^\bullet(M)$ 上的取值为

$$S_{BV}(\alpha) = \int_{X\times M} \Omega \wedge \alpha \left(\frac{1}{2}(\bar\partial_X + \mathrm{d}_M)\alpha + \frac{1}{6}[\alpha,\alpha]_\partial \right). \tag{3.7}$$

3.2. **同伦泊松–陈–西蒙斯理论。** 现在，我们将上述设置推广到第§2 节的背景中，以构造泊松–陈–西蒙斯理论的“同伦”版本。

3.2.1. 设 $(\Omega^\bullet, \mathrm{d})$ 是一个带有加权旗结构的交换微分分次代数，并设 $(W^\bullet, \mathrm{d}')$ 是相应的广义多尔博复形。假设相对于全化分次，$W^\bullet$ 集中在次数 0、-1 和 -2 中。由于次数原因，微分随即分解为三个部分

$$\mathrm{d}' = \mathrm{d}'_0 + \mathrm{d}'_{-1} + \mathrm{d}'_{-2}\,. \tag{3.8}$$

具体而言，这些项通过沿图表（2.12）进行同伦传递而产生。

$$\begin{aligned} \mathrm{d}'_0 &= i\circ \mathrm{d}_0 \circ p \\ \mathrm{d}'_{-1} &= i\circ (\mathrm{d}_0 h \mathrm{d}_0 + \mathrm{d}_{-1}) \circ p \\ \mathrm{d}'_{-2} &= i\circ \big((\mathrm{d}_0 h)^2 \mathrm{d}_0 + \mathrm{d}_0 h \mathrm{d}_{-1} + \mathrm{d}_{-1} h \mathrm{d}_0\big) \circ p \end{aligned} \tag{3.9}$$

注意，d' 的平方为零条件蕴含以下恒等式：

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}'_0)^2 &= 0 \\ [\mathrm{d}'_{-1}, \mathrm{d}'_0] &= 0 \\ (\mathrm{d}'_{-1})^2 + [\mathrm{d}'_0, \mathrm{d}'_{-2}] &= 0 \\ [\mathrm{d}'_{-1}, \mathrm{d}'_{-2}] &= 0 \\ (\mathrm{d}'_{-2})^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

这里，括号 $[-,-]$ 表示自同态的交换子。由于所有项的上同调次数均为一，它们都是对称的。我们进一步假设存在一个

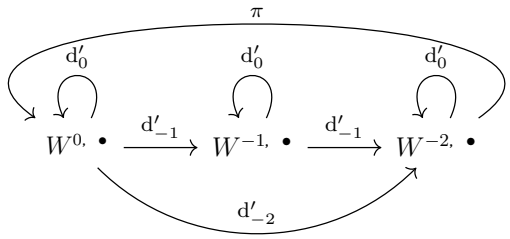
同构

$$\pi : (W^{-2,\bullet}\,,\, \mathrm{d}'_0) \longrightarrow (W^{0,\bullet}\,,\, \mathrm{d}'_0) \tag{3.11}$$

关于 $W^{0,\bullet}$-模。

总之， D_∞ 结构和配对 π 作用于 $W^{\bullet,\bullet}$ 如下面的图表所示。

(3.12)



3.2.2. 根据这些数据，我们现在在 L_∞ 上构造一个 $W^{0,\bullet}$。为此，我们对第 §3.1节中所述步骤进行适当的推广。

1. 将 $W^\bullet$ 变为一个 BV_∞ 代数。2. 使用导出括号构造在 $A^\bullet = W^{0,\bullet}$ 上定义一个 L_∞ 结构。

我们将看到，这两个步骤都可以视为 [Vor05;BV16]. 所描述的导出括号构造的实例。

3.2.3. 我们首先回顾 BV_∞ 代数的定义。

定义 3.2.3。 一个 BV_∞ 代数（$A, \Delta, \mathbf{1}$）是一个定义在 C 上的含单位分次交换代数，并配备一个次数为一的线性映射 $\Delta : A \longrightarrow A[\![t]\!]$，其可展开为

$$\Delta = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} t^k \Delta_k, \tag{3.13}$$

使得 Δ_k 是一个阶数至多为 k 的微分算子，并且

$$\Delta^2 = 0 \quad \text{and} \quad \Delta(1) = 0. \tag{3.14}$$

可以按照以下方式为 $A[\![t]\!]$ 和 A 赋予 L_∞ 结构。将元素 $a \in A$ 与由 a左乘法给出的自同态对应起来，我们可以将A 作为阿贝尔子代数嵌入其自同态的分次李代数（$\mathbf{End}(A)$ $[-,-]$）中。反过来，对单位元处的自同态求值则为该嵌入给出一个右逆

。可以在 $A[\![t]\!]$ 上按以下公式定义一系列括号 [Vor05]。

$$\{a_1,\dots,a_n\}_t=[\dots[\Delta,a_1],\dots,a_n](1). \tag{3.15}$$

这使得 $A[\![t]\!]$ 成为一个 L_∞ 代数。注意，一元括号正是由 Δ给出的，而二元括号则由 BV 代数的众所周知公式给出

$$\{a_1,a_2\}=\Delta(a_1a_2)-\Delta(a_1)a_2-(-1)^{|a_1|}a_1\Delta(a_2). \tag{3.16}$$

一般而言， n元括号可以被视为衡量 $(n-1)$元括号相对于代数结构而言不构成多重导子的程度。

此外，通过对参数 t取适当的极限，我们可以在 A 上提取一个 L_∞ 代数结构。我们定义

$$\{a_1,\dots,a_n\}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{n-1}}\{a_1,\dots,a_n\}_t. \tag{3.17}$$

该极限是有意义的，因为 Δ_k 是一个阶数至多为 k的微分算子。注意，对于这个 L_∞ 结构， n元运算由 Δ_n生成，即

$$\{a_1,\dots,a_n\}=[\dots[\Delta_n,a_1],\dots,a_n](1)\,. \tag{3.18}$$

3.2.4. 回到我们的设定，我们定义算子

$$\Delta=\Delta_1+t\Delta_2+t^2\Delta_3=\mathrm{d}'_0+t[\pi,\mathrm{d}'_{-1}]+t^2[\pi,[\pi,\mathrm{d}'_{-2}]] \tag{3.19}$$

在 $W^\bullet[\![t]\!]$上。直接计算得到以下命题。

命题 3.2.4. $(W^\bullet,\Delta,1)$ 是一个 BV_∞ 代数。此外， $W^{0,\bullet}$是一个阿贝尔子代数，而 $W^{<0,\bullet}$关于括号 $\{-,-\}$构成一个子代数。

证明。 这些结论可通过直接计算得出。例如，我们可以逐阶考察$\Delta^2=0$ 在 t中的情形。回忆一下 3.10 式给出的 D_∞-代数结构在 $W^\bullet$上的恒等式。在 t^0阶， $\Delta^2=0$ 恰好就是平方为零条件 d'_0；而 t^1-项为零，因为d'_{-1} 与 d'_0 反对易。对于 t^2-部分，我们得到

$$[\pi,\mathrm{d}'_{-1}]^2+[\mathrm{d}'_0,\pi\mathrm{d}'_{-2}\pi]. \tag{3.20}$$

回顾一下，$(\mathrm{d}'_{-1})^2=-[\mathrm{d}'_0,\ \mathrm{d}'_{-2}]$。由于次数原因，对第一项有贡献的唯一项是 $\pi(\mathrm{d}'_{-1})^2\pi$，由此我们得到

$$\pi(\mathrm{d}'_{-1})^2\pi=-\pi[\mathrm{d}'_0,\mathrm{d}'_{-2}]\pi=-[\mathrm{d}'_0,\pi\mathrm{d}'_{-2}\pi], \tag{3.21}$$

利用配对与 d'_0 之间的相容性。所有高阶项都因次数原因而消失。其他断言可通过类似的计算和次数论证得到验证。□

命题 3.2.5 3.2.4 为第二步奠定了基础。现在我们将导出括号构造应用于微分

$$\mathrm{d}^t = \mathrm{d}'_0 + t\mathrm{d}'_{-1} + t^2\mathrm{d}'_{-2}. \tag{3.22}$$

同样，这首先赋予 $W^{0,\bullet}[\![t]\!]$ 一个 L_∞ 结构

$$\mu_n^t(a_1,\dots,a_n) = \{\dots\{\mathrm{d}^t, a_1\},\dots a_n\} \tag{3.23}$$

最后，通过取极限，得到 $W^{0,\bullet}$

$$\mu_n = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{n-1}}\mu_n^t \tag{3.24}$$

L_∞ 结构于是具有如下形式

$$\begin{aligned}\mu_1(\alpha) &= \mathrm{d}'_0\alpha\\ \mu_2(\alpha,\beta) &= \{\mathrm{d}'_{-1}\alpha,\beta\}\\ \mu_3(\alpha,\beta,\gamma) &= \{\{\mathrm{d}'_{-2}\alpha,\beta\},\gamma\}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

用配对 π来表示这个 L_∞ 结构很有用。

命题 3.2.5。 对于 $\alpha,\beta,\gamma \in W^{0,\bullet}$ 我们有

$$\begin{aligned}\mu_2(\alpha,\beta) &= \pi(\mathrm{d}'_{-1}\alpha\cdot\mathrm{d}'_{-1}\beta)\\ \mu_3(\alpha,\beta,\gamma) &= \pi(\mathrm{d}'_{-2}\alpha\cdot\pi(\mathrm{d}'_{-1}\beta\cdot\mathrm{d}'_{-1}\gamma)).\end{aligned} \tag{3.26}$$

证明。 对于 μ_2 我们有

$$\{\mathrm{d}'_{-1}\alpha,\beta\} = (-1)^{|\alpha|}\left(\pi\mathrm{d}'_{-1}(\mathrm{d}'_{-1}\alpha\cdot\beta) - (\pi(\mathrm{d}'_{-1})^2\alpha)\cdot\beta\right), \tag{3.27}$$

其中我们已经利用了 $[\pi,\mathrm{d}'_{-1}]\beta = 0$，这是次数原因。利用 d'_{-1} 是乘法的导子，我们得到所需结果。

对于 μ_3，注意

$$\begin{aligned}\{\mathrm{d}'_{-2}\alpha,\beta\} &= (-1)^{|\alpha|}\left(\mathrm{d}'_{-1}\pi(\mathrm{d}'_{-2}\alpha\cdot\beta) - (\mathrm{d}'_{-1}\pi\mathrm{d}'_{-2}\alpha)\cdot\beta\right)\\ &= (\pi\mathrm{d}'_{-2}\alpha)\cdot\mathrm{d}'_{-1}\beta \in W^{-1,\bullet},\end{aligned} \tag{3.28}$$

其中我们使用了 th 在第二步中，π 是 $W^{0,\bullet}$-模的同构。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\{\{\mathrm{d}'_{-2}\alpha,\beta\},\gamma\} &= \{(\pi\mathrm{d}'_{-2}\alpha)\mathrm{d}'_{-1}\beta,\gamma\}\\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\left[\pi\mathrm{d}'_{-1}\left((\pi\mathrm{d}'_{-2}\alpha)(\mathrm{d}'_{-1}\beta)\gamma\right)-\pi\mathrm{d}'_{-1}\left((\pi\mathrm{d}'_{-2}\alpha)(\mathrm{d}'_{-1}\beta)\right)\cdot\gamma\right]\\ &= \pi\left((\pi\mathrm{d}'_{-2}\alpha)\,\mathrm{d}'_{-1}\beta\cdot\mathrm{d}'_{-1}\gamma\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

再次利用 π 是一个 $W^{0,\bullet}$-模这一事实，即可得到所需结果。 □

在我们感兴趣并将在以下各节讨论的例子中，$W^{0,\bullet}$ 是局部的，也就是说，它是某个流形上的 L_∞ 代数层，并且配备了一个配对，使其成为循环 L_∞ 代数。在这些情况下，$(W^{0,\bullet},\mathrm{d}'_0,\mu_2,\mu_3)$定义了一个微扰相互作用 BV 理论；或许需要与光滑流形的德拉姆复形作张量积，以修正循环结构的奇偶性。由于描述相互作用的 L_∞ 结构不再是严格的，我们将这类理论称为同伦泊松–陈–西蒙斯理论。

4. 从某些 Gorenstein 环得到的 Calabi–Yau 二重曲面

同伦泊松–陈–西蒙斯理论中的相互作用构造可应用于超对称场论及其扭曲，只需采用 §2.3.3 中的例子 —— 也就是说，采用超空间上的标准奇分布。正如下文将更明确地展示的，这会自动使我们处于纯旋量超场形式的框架中，相关介绍见 [ESW21；Eag+22；EHS23]。（关于场论中纯旋量超场技术的更广泛文献，可参阅综述 [Ced14] 及其中的参考文献。）现在只需检查哪些超空间能够产生满足 §3条件的加权旗结构。在物理学中出现的标准超空间里，恰有三个这样的例子，分别对应于十一维最小超对称性及其两种不同的扭曲。

我们首先非常简要地回顾纯旋量超场形式，以及其中阐明的其与扭曲的关系 [SW21]。然后，我们说明超空间的广义多尔博复形$(W^\bullet,\mathrm{d}'_0)$ 要具备 Calabi–Yau曲面的 Dolbeault 复形的性质，并因此运用第3节的技术导出同伦Poisson–Chern–Simons理论，所需满足的代数条件。在下文第5 节中，我们将证明，由此得到的理论是十一维超引力及其最大扭曲和最小扭曲。

4.1. **扭曲场论的纯旋量超场。**

4.1.1. 在标准的纯旋量超场形式中，我们从第2.3.3节的数据开始：一个形如以下形式的权分次超李代数

$$\mathfrak{n} = \Pi\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2, \tag{4.1}$$

人们将其视为超平移代数。选择 $\mathfrak{n}$ 的零次导子中的一个子代数 $\mathfrak{p}_0$，便可定义如下形式的扩张

$$0 \to \mathfrak{n} \to \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_0 \to 0, \tag{4.2}$$

它起着超庞加莱代数的作用。在标准例子中，$\mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{so}(d) \oplus \mathfrak{g}_R \oplus \mathfrak{gl}(1)$ 与另一个称为 R-对称性的李代数的直和，再加上定义权的阿贝尔因子。要求 $\mathfrak{n}_1$ 是 $\mathfrak{so}(d)$ 的旋量表示，而二次部分 $\mathfrak{n}_2 = V$ 同构于向量表示。

4.1.2. 超平移代数与多项式环中的二次理想生成集之间存在对应关系。令 $R = \mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{n}_1^\vee)$ 表示 $\mathfrak{n}_1$ 的多项式函数环，并按权分次。对于 $Q \in \mathfrak{n}_1$，方程 $[Q, Q] = 0$ 定义了一个齐次二次理想 $I \subset R$。商环 R/I 是如下空间（更准确地说，是概形）上函数的环：该空间由 $\mathfrak{n}$ 中平方为零的奇元素组成，

$$Y = \mathrm{Spec}(R/I), \tag{4.3}$$

这被称为幂零簇，属于 $\mathfrak{n}$ [ESW21]。反过来，我们可以从任意有限个二次方程构成的有限序列生成一个超平移型超李代数。令$R = \mathbb{C}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ 为以 n 个变量生成的 I为由这些方程生成的理想，

$$I = (\lambda^\alpha f^\mu_{\alpha\beta} \lambda^\beta), \qquad \mu = 1 \ldots d, \quad \alpha, \beta = 1 \ldots n. \tag{4.4}$$

我们定义 $\mathfrak{n}$ 为二步幂零超李代数

$$\mathfrak{n} = \Pi S(-1) \oplus V(-2), \tag{4.5}$$

赋予其所示的权重分次。这里 $S \cong \mathbb{C}^n$，$V \cong \mathbb{C}^d$，唯一非平凡的括号运算是映射

$$[-,-] : \mathrm{Sym}^2(S) \longrightarrow V, \tag{4.6}$$

由方程（4.4）生成——换句话说，具有结构常数 $f^\mu_{\alpha\beta}$。

4.1.3. 纯旋量超场形式是一个函子

$$A^\bullet_{R/I} : \mathsf{Mod}^{\mathfrak{p}_0}_{R/I} \longrightarrow \mathsf{Mult}_{\mathfrak{p}} \tag{4.7}$$

来自 $\mathfrak{p}_0$-等变模（定义在商环 R/I 上——换言之，来自 Y 上的等变层） $\mathfrak{p}$-多重态的范畴。一个 $\mathfrak{p}$-多重态是由超向量丛构成的上链复形，它关于 $\mathfrak{p}_+$ 通过仿射变换给出的自然作用是等变的，并且带有超庞加莱代数 $\mathfrak{p}$ 的同伦作用，该作用扩展了这一等变性。（更多细节见 [Eag+22]。）

函子 $A^\bullet_{R/I}$ 很容易理解。回想一下，超空间上的光滑函数 $C^\infty(N)$ 具有 $\mathfrak{n}$ 的两个可交换作用，分别由左不变向量场Q_a 和右不变向量场 D_a给出，其中下标 a 指的是 $\mathfrak{n}_1$中的一个基。然后构造交换微分分次代数

$$A^\bullet := (C^\infty(N) \otimes_{\mathbb{C}} R/I \,,\, \lambda^a D_a)\,, \tag{4.8}$$

将 R/I 的生成元置于上同调次数 1，从而赋予其分次结构。在坐标中，右不变向量场的显式形式为

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta\frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.9}$$

其中 $\mathfrak{n}$ 的结构常数出现在第二项中。通过左不变向量场 Q_a，这个交换微分分次代数获得了多重态的结构；它也是 R/I上的一个代数。函子 $A^\bullet_{R/I}$ 就是关于 R/I 与 $A^\bullet$的张量积:

$$A^\bullet_{R/I}(\Gamma) := A^\bullet \otimes_{R/I} \Gamma, \tag{4.10}$$

其中 Γ 是任意 $\mathfrak{p}_0$-等变 R/I-模。 $A^\bullet$ 在 [Ced+23]中被称为“典范多重态”，在 [SW21]中被称为“tautological filtered cdgsa”；在更早的文献中，它通常直接被称为（标量）纯旋量超场。我们注意到 $A^\bullet = A^\bullet_{R/I}(R/I)$。

尽管可以利用该函子生成许多具有物理意义的多重态，并在 $C^\infty(N)$ 上对它们进行自由消解，但它并不是范畴等价。正如 [EHS23], 中所解释的，可以借助导出几何中的思想扩展形式主义来解决这一问题。该扩展将 Y 替换为交换微分分次代数 $C^\bullet(\mathfrak{n})$，并将 $A^\bullet_{R/I}$ 置于下图中。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Mod}^{\mathfrak{p}_0}_{R/I} & \xrightarrow{A^\bullet_{R/I}} & \mathsf{Mult}_{\mathfrak{p}} \\ \downarrow & \overset{\hat{A}^\bullet}{\nearrow\!\!\swarrow}_{C^\bullet} & \\ \mathsf{Mod}^{\mathfrak{p}_0}_{C^\bullet(\mathfrak{n})} & & \end{array} \tag{4.11}$$

这里，$C^\bullet = C^\bullet(\mathfrak{n}, -)$ 表示 Chevalley–Eilenberg 上链函子，它对多重态的 $\hat{}$ 导出 $\mathfrak{n}$-不变部分进行建模。函子 $A^\bullet$ 和 $C^\bullet$ 在 $C^\bullet(\mathfrak{n})$-模与 $\mathfrak{p}$-多重态之间建立了 dg-范畴的等价。

导出提升是 Koszul 对偶性的一种形式，通过考虑超空间上的德拉姆形式层 $\Omega^\bullet$ 可以最容易地看出这一点。整体截面的交换微分分次代数是无环的，而左不变 de Rham 形式（它们与带平凡系数的 $\mathfrak{n}$ 的上链显然同构）映射到其中：

$$C^\bullet(\mathfrak{n}) \cong \Omega^\bullet(N)^N \subset \Omega^\bullet(N). \tag{4.12}$$

此外，$\mathfrak{n}$ 通过左不变向量场作用于 $\Omega^\bullet(N)$，并保持这个子代数不变。因此，$\Omega^\bullet(N)$ 是基域在 $(C^\bullet(\mathfrak{n}) \ U(\mathfrak{n}))$-双模中的一个分解。在任一侧进行张量积，便得到两个模范畴之间的对应关系，从而证明它们等价。

4.1.4. 纯旋量超场形式与上述讨论之间的明确联系现在已经清楚了。将纯旋量超场函子应用于 $C^\bullet(\mathfrak{n})$ 本身会恢复$\Omega^\bullet(N)$，并以第 §2.3.3 节中讨论的左不变标架表示（见 [EHS23, 引理 3。8] 证明见此处）：

$$\hat{A}^\bullet(C^\bullet(\mathfrak{n})) \cong (\Omega^\bullet(N), \mathrm{d}_{\mathrm{dR}}). \tag{4.13}$$

回顾一下，微分按照（2.24）分解；内部微分d_1 现在与 Chevalley–Eilenberg 微分d_{CE} 在 $C^\bullet$（$\mathfrak{n}$）上重合。因此，关于 d_1，取上同调，我们便得到

$$\mathrm{Gr}\, F^+_\bullet W^\bullet = A^\bullet_{R/I}(H^\bullet(\mathfrak{n})) \tag{4.14}$$

通过交换微分分次代数层的层同构。微分 d_0 是标准的纯旋量超场微分，因此，总化次数为 $-k$的广义多尔博复形——全纯 k-形式的类比——由 $A^\bullet_{R/I}$关联到李代数上同调群 H^{-k}（$\mathfrak{n}$）的超多重态构成，同样采用全化分次。特别地，在零次时，我们得到（4.8）中所述的典范多重态，

$$(W^{0,\bullet}, \mathrm{d}'_0) = A^\bullet_{R/I}(R/I), \tag{4.15}$$

使得 典范多重态与超空间的结构层相对应。这说明了我们在上文采用记号 $A^\bullet = A^\bullet_{R/I}$（$R/I$）$=$（$W^0$, $\bullet$，d'_0）的合理性。

4.1.5. 幂零簇还刻画了具有 $\mathfrak{p}$ 超对称性的理论可能发生的扭曲；这些扭曲通过取平方为零的奇对称性的不变量得到。固定这样的

一个元素 $Q \in Y$，我们可以通过定义一个微分分次李代数 $(\mathfrak{p}\,,\,[Q,-])$ 来扭曲代数本身。它的上同调 $\mathfrak{p}_Q = H^\bullet(\mathfrak{p},[Q,-])$ 又是一个只存在于零至二次的分次李代数，应视为任何经 Q 扭曲的理论的剩余对称代数；我们将其幂零簇（它编码了 Q 扭曲理论可能进一步发生的扭曲）记为Y_Q。

我们将上同调的正分次部分称为

$$\mathfrak{n}_Q = H^{>0}(\mathfrak{p},[Q,-]) \tag{4.16}$$

扭曲超平移代数。有时，使用 $\mathfrak{n}_Q$ 的一个拟同构微分分次模型会更为方便，该模型将所有偶平移保留在二次。为此，我们通过舍弃 $(\mathfrak{p},[Q,-])$ 的零次部分，同时将其一次部分替换为 Q 的伴随作用的余核，定义一个微分分次李代数 $\tilde{\mathfrak{n}}_Q$，

$$\tilde{\mathfrak{n}}_Q = \left(\mathfrak{p}^1/\operatorname{Im}([Q,-])(-1) \oplus \mathfrak{p}^2(-2)\,,\,[Q,-]\right). \tag{4.17}$$

重要的是，我们不仅可以将纯旋量超场形式应用于 $\mathfrak{p}$，还可以将其应用于它的任意扭曲。 [SW21] 的结果表明，扭曲过程与纯旋量超场构造可交换。具体而言，这意味着

$$A^\bullet(\mathcal{O}_Y)^Q \cong A^\bullet(\mathcal{O}_{Y_Q})\,, \tag{4.18}$$

使得典范多重态的扭曲与扭曲代数的典范多重态同构。

这意味着，扭曲运算在某种意义上完全内在于超空间之中：任何仅依赖于超空间的加权旗结构的“（几乎）复几何”，并以其广义多尔博复形为编码的构造，在任意扭曲中都应当完全以相同的方式表现。（例如，回想一下，通过考察 $\Omega^{0,\bullet}$ 的凯勒微分模，可以从代数上重构完整的多尔博复形。因此，我们可以将我们在 $W^\bullet$ 上构造的无环 D_∞ 结构，至少宽泛地理解为与微分分次空间 $\operatorname{Spec} A^\bullet$ 的代数德拉姆上同调相关。）

任何理论都允许一种极大扭曲，在这种扭曲下 $A^\bullet$ 会化为标准类型的混合多尔博–德拉姆复形。[7] 如果 n 表示某个理论在 d 维空间中进行这种极大扭曲时幸存平移的数量，那么

$$A^\bullet(\mathcal{O}_Y)^Q = \Omega^{0,\bullet}(\mathbb{C}^n) \otimes \Omega^\bullet(\mathbb{R}^{d-2n}). \tag{4.19}$$

[7]最大扭曲的特征在于它们是 Y的光滑点；由 $\mathfrak{n}_Q$支配的变形问题是平凡的，并且不可能再进行进一步的扭曲。最大扭曲并不唯一；我们在此关注的是对应于 Y中维数最高的光滑轨道的极大扭曲。

鉴于上述考量，我们可以通过自举获得关于这种极大扭曲的信息：如果我们有一个相互作用理论的描述，该描述只使用关于 $\mathbb{C}^n$ 的复几何的信息（或者更准确地说，只使用 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{d-2n}$ 上的 THF 结构），那么，将完全相同的构造应用于相应的广义多尔博复形，应当会为未扭曲相互作用理论，或任何其他扭曲，给出一个纯旋量模型。

4.2. **缺陷、有效维数与极大扭曲**。 因此，要在纯旋量超场形式中应用 §3.2的构造，我们需要明确能够保证配对 π存在且具有适当性质的条件。特别是，我们希望广义多尔博复形 $W^\bullet$ 具有 Calabi–Yau曲面的 Dolbeault 复形的性质。

4.2.1. 固定一个超平移代数 $\mathfrak{n}$ ，其对应的多项式环为 $R = \mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{n}_1^\vee)$，并配有 $\dim(\mathfrak{n}_2)$ 个生成元，它们生成二次理想 I 和幂零簇Y。我们将这个数称为

$$\mathrm{def}(\mathfrak{n}) = \dim(Y) - (\dim(\mathfrak{n}_1) - \dim(\mathfrak{n}_2)) = \dim(\mathfrak{n}_2) - \mathrm{codim}(Y) \tag{4.20}$$

$\mathfrak{n}$.[8] 的缺陷。粗略地说，它衡量理想 I 的生成元偏离正则序列的程度。下面的命题表明，缺陷决定了 $\mathfrak{n}$的 Chevalley–Eilenberg上同调的支集，因而也决定了 Spec $A^\bullet$的“复维数”。

命题 4.2.1。 设 R/I 为 *Cohen–Macaulay*环。则，$\mathrm{def}(\mathfrak{n})$ 是满足以下条件的最小非负数：对于所有 $i \geq \mathrm{def}(\mathfrak{n})$， $H^{-i}(\mathfrak{n}) \neq 0$ 。

证明。 回顾一下， $\mathfrak{n}$ 的 Chevalley–Eilenberg 复形是关于理想 I的一组生成元所构成的 Koszul 复形。令 $H^{-n}(\mathfrak{n})$ 为最高上同调群。根据 Koszul 复形的深度敏感性（例如参见 [Eis95，定理 17。4]），有

$$\mathrm{depth}(I, R) = \dim(V) - n. \tag{4.21}$$

Cohen–Macaulay 条件意味着 $\mathrm{depth}(I, R) = \mathrm{codim}(Y)$，从而得到所述结论。 □

4.2.2. 我们还可以为幂零簇中的任意轨道定义缺陷的局部版本。对于 $Q \in Y$，我们定义

$$\mathrm{def}(Q) = \dim(V) - \mathrm{codim}(P_0 \cdot Q). \tag{4.22}$$

下面的引理表明， Q 的缺陷等于在 Q的扭曲中幸存的平移数。

[8]如果 Y 不是等维的，我们约定 $\dim(Y)$ 表示其不可约分支的维数中的最大值。

引理 4.2.2。定义（Q）＝维数（H^2（$\mathfrak{n}$，$[Q,-]$）。

证明。回顾

$$H^2(\mathfrak{n},[Q,-])\cong V/\operatorname{Im}([Q,-])\,. \tag{4.23}$$

映射 $[Q,-]$ 诱导出一个同构

$$\mathfrak{n}_1/\ker([Q,-])\longrightarrow \operatorname{Im}([Q,-])\subseteq V. \tag{4.24}$$

令 $P_0\cdot Q$ 表示 Y 中 Q 的轨道。我们利用包含映射 $i\colon (P_0\cdot Q)\hookrightarrow \mathfrak{n}_1$ 拉回 Q 处 $\mathfrak{n}_1$ 的切空间。该拉回分解为直和：

$$i^*T_Q\mathfrak{n}_1\cong T_Q(P_0\cdot Q)\oplus N_Q(P_0\cdot Q). \tag{4.25}$$

我们可以将切空间识别为 $\ker([Q,-])$，将法空间识别为商空间$\mathfrak{n}_1/\ker([Q,-])$。因此，特别地，我们得到

$$\operatorname{codim}(P_0\cdot Q)=\dim(N_Q(P_0\cdot Q))=\dim(\mathfrak{n}_1/\ker([Q,-])). \tag{4.26}$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{def}(Q)&=\dim(V)-\dim(\mathfrak{n}_1/\ker([Q,-]))\\&=\dim(V/\operatorname{Im}([Q,-]))=\dim(H^2(\mathfrak{n},[Q,-])),\end{aligned} \tag{4.27}$$

从而证明了该断言。 □

根据该命题，$\mathfrak{n}$ 的缺陷等于在一个属于极大维数轨道的极大扭曲处计算的局部缺陷。（请注意，这既不是局部缺陷的最大值，也不是最小值；Y 不一定是——而且通常也不是——等维的。）

4.2.3. 缺陷二的 *Gorenstein* 环。固定一个超平移代数 $\mathfrak{n}$，其缺陷为二，并且商环 R/I 同时是 Gorenstein 环和强 Cohen–Macaualay。[9] 根据构造，$\mathfrak{n}$ 的零阶 Chevalley–Eilenberg 上同调给出

$$H^0(\mathfrak{n})=R/I. \tag{4.28}$$

此外，$H^\bullet(\mathfrak{n})$ 集中在次数0，-1 以及 -2。由于 R/I 是强 Cohen–Macauley 的，$H^\bullet(\mathfrak{n})$ 是一个庞加莱对偶代数 [AG71；Gol05]。特别地，我们有

$$H^{-2}(\mathfrak{n})\cong \operatorname{Ext}_R^{\operatorname{codim}(Y)}(R/I,R)\cong R/I, \tag{4.29}$$

[9]商环 R/I 被称为强 Cohen–Macaulay 环，当所有 Koszul 上同调群（对于 R/I 视为一个 R-模）都是 Cohen–Macaulay 模时 [Gol05]。

其中最后一个同构使用了 Gorenstein 性质。因此，存在一个 $A^\bullet(H^0(\mathfrak{n}))$-模同构

$$\pi : \left(A^\bullet(H^{-2}(\mathfrak{n}))\,,\, \mathrm{d}_0'\right) \longrightarrow \left(A^\bullet(H^0(\mathfrak{n}))\,,\, \mathrm{d}_0'\right). \tag{4.30}$$

由于我们假设超平移代数的缺陷等于二，将D_∞ 沿着（2.12）进行传递，得到一个由（ D_∞ （3.9）给出的诱导

因此，我们处于第 §3.2 节所描述的情形中，并且可以在 L_∞ 上构造一个$A^\bullet$（H^0（$\mathfrak{n}$））结构。此外，Gorenstein 性质意味着在$A^\bullet$（H^0（$\mathfrak{n}$））上还存在另一个配对（见 [Eag+22]），从而使其成为一个循环 L_∞ 代数，因而成为一个相互作用 BV 理论（如有必要，可与一个奇维光滑流形取积，以调整循环结构的奇偶性）。

5. 扭曲的与未扭曲的十一维超引力

如上所述，有三个重要的“Calabi–Yau 二重曲面”例子，它们源自与物理学相关的超空间。它们都与十一维超引力有关：要么是完整理论，要么是其两个扭曲之一。本节将回顾这些缺陷二的 Gorenstein 环的构造，然后构造相应的同伦泊松–陈–西蒙斯理论。这些理论分别重现了 Cederwall 的十一维超引力纯旋量公式、Costello 关于以全纯 Poisson–Chern–Simons 理论描述极大扭曲的描述，以及 [RSW21]中所描述的最小扭曲的十一维超引力相互作用的纯旋量提升。我们还将回顾这些环如何通过相应超庞加莱代数的扭曲彼此关联；这表明（遵循 [SW21]）这三个相互作用理论也通过扭曲彼此关联。

5.1. **十一维超对称及其扭曲**。

5.1.1. 令 V 表示 Spin(11) 的向量表示，令 S 表示维数为 32 的唯一旋量表示。十一维的超庞加莱代数具有如下形式

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{so}(V) \oplus S(-1) \oplus V(-2). \tag{5.1}$$

幂零簇 $Y \subset S$ 的维数为 23，因此 def(Y) $= 2$。此外，它的坐标环是十一种伽马矩阵所生成的二次理想对 S 上的多项式函数取商所得，且为 Gorenstein 环。从这个意义上说，十一维超空间的广义 Dolbeault 上同调描述了一个 Calabi–Yau曲面。

此外，这个空间的结构层正是十一维超引力多重态，它由 BV形式中的纯旋量超场描述 [How91；CNT02]。正如 [SW21；Ced+23]所强调的，十一维超引力是一个典范超多重态，因此场空间上具有一种交换结构。

5.1.2. 扭曲。 幂零簇分解为 $\mathrm{Spin}(V)$ 的两个轨道，因此有两种不同的扭曲可供选择。极大扭曲在四个方向上是全纯的，而在其余七个方向上是拓扑的；最小扭曲在十个方向上是全纯的，而在剩余一个方向上是拓扑的。极大扭曲是 Y 的光滑点，而最小扭曲对应于一个奇异点。众所周知 [BN05], ，奇异性呈现为射影簇 $\mathrm{Gr}(2,5)$ 上的锥的形式。极小超荷的稳定子是 $\mathrm{SU}(5)$，而极大超荷的稳定子是 $G_2 \times \mathrm{SU}(2)$。（有关几何的更多细节，请参见 [ESW21]及其中的参考文献。）

将纯旋量函子应用于扭曲幂零簇的坐标环Y_Q，即可得到自由扭曲理论的 BV复形。现在，我们可以将这些结果应用于以统一方式构造上述所有情形下这些理论的相互作用，将它们实现为同伦泊松–陈–西蒙斯理论。根据 [SW21], 的结果，这些理论随后可以通过施加相应的扭曲而彼此得到，特别是可以由十一维超引力得到。

We w我们将首先描述极大扭曲，并逐步处理完整理论。

5.2. **极大扭曲**。 在 [Cos16] 中，有人提出了用泊松–切恩–西蒙斯理论描述极大扭曲的方法。该扭曲利用分量场描述在 [EH23], 的自由极限下计算得到，并被实现为 [RSW21] 中最小扭曲的进一步扭曲。

5.2.1. 在稳定子下的分解。 平直时空上的极大扭曲定义在 $\mathbf{R}^7 \times \mathbf{C}^2$ 上。我们首先将所有相关的 Spin(11) 表示分解到 $G_2 \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$。记住子群的包含映射很有用，

$$\mathrm{Spin}(11) \supset \mathrm{Spin}(7) \times \mathrm{Spin}(4) \supset G_2 \times \mathrm{SU}(2)_+ \times \mathrm{SU}(2)_- \supset G_2 \times \mathrm{SU}(2)_+ \times \mathrm{U}(1), \tag{5.2}$$

其中我们将 $\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2)_+ \times \mathrm{SU}(2)_-$ 进行了识别，最后一步中出现的 U(1) 是 $\mathrm{SU}(2)_-$ 的嘉当子代数。在此子群下，Spin(11) 的向量表示分解为

$$V = V_7 \oplus L \oplus L^\vee, \tag{5.3}$$

其中 V_7 是 G_2 的七维不可约表示，而 $L \cong \mathbf{2}^1$ （以及$L^\vee \cong \mathbf{2}^{-1}$）是 SU(2) × U(1) 表示。旋量表示给出

$$S = (\mathbf{1}_{G_2} \oplus V_7) \otimes (\mathbf{2}^0 \oplus \mathbf{1}^1 \oplus \mathbf{1}^{-1}). \tag{5.4}$$

我们立即看到， S 包含两个 G_2 ×SU(2)的平凡表示副本，其对应的 U(1) 权为 ± 1。这些对应于极大平方零超荷。为明确起见，我们选择

$$Q \in \mathbf{1}_{G_2} \otimes \mathbf{1}^{-1}. \tag{5.5}$$

5.2.2. 扭曲超对称代数。 记住， $\mathfrak{so}(V) \cong \wedge^2 V$ ，并且作为G_2-表示，

$$\wedge^2 V_7 \cong V_7 \oplus \mathfrak{g}_2, \tag{5.6}$$

我们可以将微分分次李代数 $(\mathfrak{p},\ [Q,-])$ 分解如下表 1所示。这里的箭头

$$\begin{array}{ccc}
V_7 & \longrightarrow & V_7 \otimes \mathbf{1}^{-1} \\
\mathfrak{g}_2 & & V_7 \otimes \mathbf{1}^1 \longrightarrow V_7 \\
V_7 \otimes \mathbf{2}^1 & \longrightarrow & V_7 \otimes \mathbf{2}^0 \qquad\quad \mathbf{2}^1 \\
V_7 \otimes \mathbf{2}^{-1} & & \mathbf{2}^0 \longrightarrow \mathbf{2}^{-1} \\
\mathbf{1}^0 & \longrightarrow & \mathbf{1}^{-1} \\
\mathbf{1}^2 & \longrightarrow & \mathbf{1}^1 \\
\mathbf{1}^{-2} & & \\
\mathbf{3}^0 & &
\end{array} \tag{5.7}$$

表1. 稳定子下的分解

表示映射 $[Q,-]$。根据舒尔引理，所有非零箭头都是恒等映射的倍数；因此可以直接计算上同调。将全纯平移识别为 $\mathbf{2}^1 = L$ 后，我们得到如下形式的纯偶李代数

$$\mathfrak{p}_Q = H^\bullet(\mathfrak{p}, [Q,-]) = \left(\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{sl}(L) \oplus V_7 \otimes \mathbf{2}^{-1} \oplus \mathbf{1}^{-2}\right) \oplus L(-2). \tag{5.8}$$

我们注意到，正分次部分 $\mathfrak{n}_Q$ 就是阿贝尔偶代数 L。微分分次模型$\tilde{\mathfrak{n}}_Q$ 具有如下形式

$$\begin{array}{c} V_7 \otimes \mathbf{1}^1 \longrightarrow V_7 \\ \mathbf{2}^0 \longrightarrow \mathbf{2}^{-1} \cdot \\ \mathbf{2}^1 \end{array} \tag{5.9}$$

相应地， $\mathcal{O}_{Y_Q}$ =C，而幂零簇只是一个点。注意，维数和余维数均为零。由于有两个幸存平移，因此缺陷为 def($\mathfrak{n}_Q$) $= 2$。

5.2.3. 现在我们可以将第 §2.3.3节的形式主义应用于扭曲超平移代数$\mathfrak{n}_Q$。加权旗结构将 D_1 取为零截面，并将 D_2 取为完整的（全纯）切丛。如此一来，我们便得到 $\mathbb{C}^2$ 的负分次代数 de Rham 复形：

$$\Omega^\bullet = \mathbb{C}[z_1, z_2][\mathrm{d}z_1, \mathrm{d}z_2], \tag{5.10}$$

其中 $\mathrm{d}z_i$ 的总化次数为 -1。微分 d_1 是平凡的，并且 $W^\bullet = \Omega^\bullet$；“结构层”是 $\mathfrak{n}_Q$ 的典范多重态，仅由 $\mathbb{C}^2$ 上的全纯函数构成。

为了给出一个定义在 $V = \mathbb{R}^7 \times \mathbb{C}^2$, 上的多重态表示，我们可以用 V 上的光滑函数作分解；由此得到 $\mathbb{C}^2$ 上的 $(0, \bullet)$ 形式的 Dolbeault 复形。注意，直接考虑微分分次模型 $\mathfrak{n}_Q$ 的典范多重态，也可以得到这一结果：

$$A^\bullet(\mathcal{O}_{Y_Q}) \simeq \left(\Omega^{0,\bullet}(\mathbb{C}^2) \otimes \Omega^\bullet(\mathbb{R}^7)\,,\ \bar{\partial}_{\mathbb{C}^2} + \mathrm{d}_{\mathbb{R}^7}\right) \tag{5.11}$$

在这两种情况下，这都对应于十一维超引力的极大扭曲的场内容 [EH23]。

因此，我们处于 $\mathbb{Z}/2$-分次全纯泊松–陈–西蒙斯理论的框架中。构造 L_∞ 结构可以恢复第 §3.1节所描述的泊松–陈–西蒙斯理论中的相互作用。

我们注意到，扭曲超平移代数上的 Chevalley–Eilenberg 微分为零（这直接源于扭曲的极大性），因此最终得到的是泊松–陈–西蒙斯理论，而非其同伦版本。这是最大扭曲的一般特征。尽管如此，若将我们的构造应用于不可积复结构，则会得到一种具有非零三元括号的非严格泊松–Chern–Simons 理论。

5.3. **最小扭曲**。 最小扭曲是在自由极限下，于纯旋量上链层级计算得到的，见 [SW21]。分量场的相互作用在 [RSW21] 中提出（并进行了大量一致性检验）。

5.3.1. 扭曲超对称代数。 一个极小平方为零的超荷 $Q \in Y$ 的稳定子同构于 SU(5)。选择这样的 Q 等价于选择一个极大各向同性子空间 $L \subset V$。于是，向量表示分解为

$$V = L \oplus L^\vee \oplus \mathbb{C}. \tag{5.12}$$

扭曲超庞加莱代数 $(\mathfrak{p},\ [Q, -])$ 及其上同调 $\mathfrak{p}_Q$ 在 [SW21]中进行了分析。结果发现，上同调的正分次部分为

$$\mathfrak{n}_Q \cong \Pi \wedge^2 L(-1) \oplus \wedge^4 L(-2), \tag{5.13}$$

其中，两个奇元素的括号由楔积给出。（括号表示权重分次中的平移。）幂零簇 Y_Q 同构于五维向量空间中二维平面格拉斯曼流形 Gr(2，5) 上的仿射锥。等价地，也可以将其视为 $L^\vee$上秩为二的双线性斜对称形式空间。作为仿射簇，有 $\dim(Y_Q) = 7$，因此

$$\mathrm{def}(\mathfrak{n}_Q) = 7 - (10 - 5) = 2. \tag{5.14}$$

5.3.2. $\mathcal{O}_{Y_Q}$ 同样是 Gorenstein 的，因此我们可以应用我们的过程，为 $A^\bullet(\mathcal{O}_{Y_Q})$构造相互作用。通过 [SW21], 纯旋量多重态 $A^\bullet(\mathcal{O}_{Y_Q})$ 等价于超引力多重态的最小扭曲。因此，我们的过程在纯旋量上链层级上为最小扭曲的超引力构造相互作用，这对应于 [Ced21]中的一项设想。我们预计，在 [RSW21] 中构造的具有这一场内容的相互作用理论，可以通过同伦传递从这一上链层级描述中获得，从而严格证明 [RSW21]的扭曲的十一维超引力理论——它与例外单线性紧超李代数$E(5|10)$密切相关——实际上就是十一维超引力的扭曲。这一计算将发表于即将开展的工作 [HS25]。

5.3.3. 根据上文可知，通过考虑与 $\mathfrak{n}_Q$的李代数上同调群相关的纯旋量多重态，可以构造出 $W^\bullet$ 。余链为

$$C^\bullet(\mathfrak{n}_Q) \cong \wedge^\bullet L^\vee \otimes R, \tag{5.15}$$

其中我们定义了

$$\mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{n}_1^\vee) = R = \mathbb{C}[\lambda^{ab}]. \tag{5.16}$$

我们将 λ^{ab} 视为 $(\mathfrak{n}_Q)_1^\vee = (\wedge^2 L)^\vee$ 上的一组基，并利用同构 $a,\ b = 1,\ \ldots\ldots,\ 5$。进一步地，我们可以将 $L^\vee$ 视为$L = \mathbb{C}^5$ 上的常值全纯一形式，其基为 $\{\mathrm{d}z^a\}$。Chevalley–Eilenberg 微分具有如下形式

$$\mathrm{d}_{CE} = \lambda^{ab}\lambda^{cd}\varepsilon_{abcde}\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}z_e)}. \tag{5.17}$$

对于一个缺陷二的 Gorenstein 环，正如预期的那样，上同调集中在度数 0，-1 和 -2:

$$H^k(\mathfrak{n}_Q) \cong \begin{cases} R/I & k \in \{0,-2\} \\ M & k = -1 \\ 0 & \text{else,} \end{cases} \tag{5.18}$$

其中，M 是映射的余核

$$\phi : R \otimes \wedge^2 L \longrightarrow R \otimes L \qquad e_a \wedge e_b \mapsto \varepsilon^{abcde}\lambda_{cd}e_e. \tag{5.19}$$

这里，$\{e_a\}$ 是 L的一组基。作为 R/I-模，$H^0(\mathfrak{n}_Q)$ 由单位元 1 自由生成，而$H^{-2}(\mathfrak{n}_Q)$ 则由 $\lambda_{ab}\mathrm{d}z^a\mathrm{d}z^b$自由生成。

5.3.4. 在与 R 上的德拉姆形式张量化以便在 $\mathbb{C}^5$ ×R 上自由地作解之后，我们可以用如下拟同构复形描述 $\Omega^\bullet$

$$\left(\Omega^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}^5) \otimes \mathbb{C}[\lambda^{ab}, \theta^{ab}]\ ,\ \partial_{\mathbb{C}^5} + \bar\partial_{\mathbb{C}^5} + \mathscr{R} + \mathrm{d}_{CE}\right) \otimes \left(\Omega^\bullet(\mathbb{R})\ ,\ \mathrm{d}_{\mathbb{R}}\right), \tag{5.20}$$

其中

$$\mathscr{R} = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \theta\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{5.21}$$

是标准的纯旋量微分。这里，空间坐标 x 是以下各项之一：$(z$、$z)$。注意，相对于第 §2.3.3 节中的描述，θ 是超空间 N上的奇函数，而一形式为 λ、$\mathrm{d}z$和 $\mathrm{d}z$。加权旗结构将 $\mathrm{d}z$ 置于总化次数 -1，而将其他所有项置于次数零。我们可以将其识别为

$$\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_{CE}, \quad \mathrm{d}_0 = \mathscr{R} + \bar\partial + \mathrm{d}_{\mathbb{R}}, \quad \mathrm{d}_{-1} = \partial. \tag{5.22}$$

我们按照标准步骤，使用上述 $W^\bullet$ 转移后的结构公式 D_∞ （3.9）来构造广义多尔博复形。广义多尔博复形的带权部分是与这些模相关联的纯旋量多重态

§5.3.3中的。在极大扭曲中则不同，会出现一个次数为 -2 的部分，从而存在一个非零映射

$$\mathrm{d}'_{-2} : A^\bullet(H^0(\mathfrak{n}_Q)) \longrightarrow A^\bullet(H^{-2}(\mathfrak{n}_Q)), \tag{5.23}$$

这表明诱导的 L_∞ 结构将不是严格的。

Gorenstein 性质保证存在一个同构

$$\pi : \left(W^{-2,\bullet}, \mathrm{d}'_0\right) \longrightarrow \left(W^{0,\bullet}, \mathrm{d}'_0\right). \tag{5.24}$$

明确地说， π 由 $H^{-2}(\mathfrak{n}_Q)$与 $H^0(\mathfrak{n}_Q)$之间的同构诱导而来；因此，就代表元而言，我们有

$$\pi(\lambda_{ab}\mathrm{d}z^a\mathrm{d}z^b) = 1. \tag{5.25}$$

因此，根据命题 L_∞ 代数结构于 $A^\bullet(H^0(\mathfrak{n}_Q))$ 中的公式，我们得到 3.2.5。

5.4. **十一维超引力。** 回顾一下，与十一维超平移代数相关联的典范多重态是超引力多重态。在 [Ced10b]和 [Ced10a], 中，Cederwall 构造了一个一致的四次BV作用泛函，并在纯旋量超场形式中恢复了具有相互作用的十一维超引力。现在，我们将这些相互作用恢复为同伦Poisson–Chern–Simons理论的一个实例。

5.4.1. **李代数上同调与 $W^\bullet$。** 未扭曲超平移代数的 Chevalley–Eilenberg 上链具有如下形式

$$C^\bullet(\mathfrak{n}) = (\wedge^\bullet V^\vee \otimes R\,,\, \mathrm{d}_{CE})\,, \tag{5.26}$$

其中 $R = \mathrm{Sym}^\bullet(S^\vee) = \mathbb{C}[\lambda^\alpha]$ 是关于 $\{\lambda^\alpha\}$ 的多项式环，其中 $\alpha = 1$、……、32。固定 $\{v_\mu\}$ 的一个基后，Chevalley–Eilenberg 微分具有如下形式

$$\mathrm{d}_{CE} = \lambda^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \lambda^\beta \frac{\partial}{\partial v^\mu}. \tag{5.27}$$

同样，Chevalley–Eilenberg上同调集中在 0、 -1 和 -2度，其中 $H^0(\mathfrak{n})$ 和 $H^{-2}(\mathfrak{n})$ 都同构于幂零簇 $\mathcal{O}_Y = R/I$上的函数环。 -2 度的上同调由以下类张成

$$(\lambda^\alpha \Gamma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \lambda^\beta) v_\mu v_\nu. \tag{5.28}$$

5.4.2. **十一维相互作用。** 应用纯旋量超场构造，我们将广义多尔博复形构造为与以下各项相关的多重态之和

上一节中的模。（我们注意到，多重态 $W^{-1,\bullet}$ 在物理上对应于 $W^{0,\bullet}$ 的场强多重态；这一事实在 [CNT02]中已经得到认识。）

一如既往，超空间德拉姆复形上的加权旗结构诱导出一个 D_∞-模结构，作用于 $W^\bullet$，其中 d'_0 是标准的纯旋量微分，而 d'_{-1}和 d'_{-2} 都非平凡。将这些微分限制到 $W^{0,\bullet}$ 上便得到 Cederwall 在 [Ced10b 中构造的微分算子；Ced10a], 中则

$$\mathrm{d}'_{-1} : W^{0,\bullet} \longrightarrow W^{-1,\bullet}, \tag{5.29}$$

对应于“R”，并且

$$\mathrm{d}'_{-2} : W^{0,\bullet} \longrightarrow W^{-2,\bullet} \tag{5.30}$$

对应于“T”。连同由 π 诱导的

$$\pi(\lambda^\alpha \Gamma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \lambda^\beta v_\mu v_\nu) = 1, \tag{5.31}$$

这就在 $W^{0,\bullet}$ 上产生了一个 L_∞-结构。

5.4.3. *Batalin–Vilkovisky*作用？我们已经在纯旋量上链层级上，将十一维超引力相互作用所依据的 L_∞ 结构构造为一种同伦泊松–陈–西蒙斯理论。我们还知道，与我们所研究的复形相容的对象具有 (-1)-移位（或至少是奇移位的）辛结构。然而，要写出 BV作用泛函，就需要在我们构造的 dg环空间上建立积分理论或 Verdier 对偶理论。我们的这些例子尚未具体完成这项工作，因此我们暂不在此写出这类泛函（不过需要指出的是，可以通过解析方法在幂零簇上构造奇异Calabi–Yau形式来实现这一点；见 [Ced10a], ，其中写出了未扭曲情形下的作用泛函）。我们期待在未来的工作中研究纯旋量超空间上的积分理论。

参考文献

[AD17] D. Alekseevsky 和 L. David。《Tanaka结构的延拓：一种替代方法》。纯粹与应用数学年鉴（*1923*—）196（2017），第1137–1164页。网址：https://doi.org/10.1007/s10231-016-0610-7。[AD15] D. V. Alekseevsky 和 L. David。《Tanaka结构（非完整结构）和 Cartan联络》。几何与物理学杂志91（2015），第88–100页。

[AG71] L. Avramov 和 E. Golod。《局部 Gorenstein 环的 Koszul 复形的同调代数》。苏联科学院数学札记 9.1-3（1971），第30–32页。网址：https://doi.org/10.1007/BF01405047。[BV16] D. Bashkirov 和 A. A. Voronov。《Koszul 代数的 BV形式》。同伦及相关结构杂志 12.2（2016），第305–327页。arXiv：1410.6432[math.QA]。网址：https://doi.org/10.1007%2Fs40062-016-0129-z。[Ber02] N. Berkovits。《超膜的协变量子化探索》。高能物理学杂志 2002.09（2002年9月），第051–051页。网址：http://dx. doi.org/10.1088/1126-6708/2002/09/051。[BN05] N. Berkovits 和 N. Nekrasov。《纯旋量特征》。数学物理快报 74（2005），第75–109页。arXiv：hep-th/0503075。[Ber+94] M. Bershadsky、S. Cecotti、H. Ooguri 和 C. Vafa。《Kodaira–Spencer 引力理论与量子弦振幅的精确结果》。数学物理通讯 165.2（1994），第311–427页。网址：http : / / projecteuclid . org / euclid . cmp / 1104271134。[Bro 67] R. Brown。《扭曲 Eilenberg–Zilber 定理》。二十世纪纪念档案：拓扑学专题讨论会（1967），第34–37页。[CS09] A. Cap 和 J. Slovák。《抛物几何 I》。154。美国数学学会，2009年。[Ced10a] M. Cederwall。《显式超对称性超引力》。现代物理快报 A 25（2010），第3201–3212页。arXiv：1001.0112 [hep-th]。[Ced10b] M. Cederwall。《显式超对称的十一维超引力作用量探索》。高能物理学杂志 01（2010），第117页。arXiv：0912.1814 [hep-th]。[Ced14] M. Cederwall。《纯旋量超场——概览》。Springer 物理学会议录 153（2014）。S. Bellucci 编，第61–93页。arXiv：1307.1762 [hep-th]。[Ced21] M. Cederwall。《纯旋量（5）超对称性》。物理学进展 69.11-12（2021），第2100116页。arXiv：2107.SLmath.RT]。[Ced+23] M. Cederwall、S. Jonsson、J. Palmkvist 和 I. Saberi。《典范超多重态及其 Koszul 对偶》（2023年）。arXiv：2304.01258 [hep-th]。[CNT02] M. Cederwall、B. E. W. Nilsson 和 D. Tsimpis。《旋量上同调与最大超对称理论》。高能物理学杂志 02（2002），第009页。arXiv：hep-th/0110069。[CW21] J. Cirici 和 S. O. Wilson。《近复流形的 Dolbeault上同调》。数学进展 391 （ 2021 ），第 107970 页。arXiv：1809.01416 [math.DG]。[Cos16] K. Costello。《Omega背景中的 M 理论与五维非交换规范理论》（2016年10月）。arXiv：1610.04144 [hep-th]。

[CG] K. Costello 和 O. Gwilliam。《量子场论中的因子分解代数。第 2 卷》。可访问 http://people.mpim-bonn.mpg.de/gwilliam。[CL16] K. Costello 和 S. Li。《扭曲超引力及其量子化》（2016）。arXiv：1606.00365 [hep-th]。[CJS78] E. Cremmer、B. Julia 和 J. Scherk。《十一维超引力理论》。Phys. Lett. B 76 （1978 年），第 409–412 页。[DZOZ22] M. Del Zotto、J. Oh 和 Y. Zhou。《G_2 瞬子的一个代数的证据》。JHEP 08（2022年），第 214 页。arXiv：2109.01110 [hep-th]。[Del71] P. Deligne。《霍奇理论：II》。Publications mathématiques de l'IHÉS 40（1971），第 5–57 页。[Dij+05] R. Dijkgraaf、S. Gukov、A. Neitzke 和 C. Vafa。《拓扑 M 理论作为引力形式理论的统一》。Adv. Theor. Math. Phys. 9.4（2005），第 603–665 页。arXiv：hep-th/0411073。[EH23] R. Eager 和 F. Hahner。《极大扭曲的十一维超引力》。Commun. Math. Phys. 398.1（2023），第 59–88 页。arXiv：2106.15640 [hep-th]。[Eag+22] R. Eager、F. Hahner、I. Saberi 和 B. R. Williams。《纯旋量超场形式主义的视角》。J. Geom. Phys. 180（2022），第 104626 页。arXiv：2111.01162 [hep-th]。[ESW21] R. Eager、I. Saberi 和 J. Walcher。《幂零簇》。Annales Henri Poincaré 22.4（2021），第 1319–1376 页。arXiv：1807.03766 [hep-th]。[Eis95] D. Eisenbud。《交换代数》。第 150 卷。《数学研究生教材》。着眼于代数几何。Springer-Verlag，纽约，1995年，第 xvi+785 页。url：https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5350-1。[EHS23] C. Elliott、F. Hahner 和 I. Saberi。《导出纯旋量形式主义作为范畴等价》。SIGMA 19（2023），第 022 页。arXiv：2205 . 14133[math-ph]。[Fri+86] D. Friedan 等。《弦理论与二维共形场论笔记》。Unified string theories 162（1986）。[Get09] E. Getzler。《幂零代数的李理论》。Annals of Mathematics（2009年），第 271–301 页。 L_∞ Gol[E. Golod。《关于 Koszul 复形同调代数中的对偶性》。J Math Sci 128（2005），第 3381–3383 页。05] HS[F. Hahner 和 I. Saberi。即将出版。2025年。25] How[P. S. Howe。《纯旋量、函数超空间以及十维和十一维的超引力理论》。Physics Letters B 273.1-2（1991），第 90–94 页。91] Kac[V. G. Kac。《李超代数》。Advances in Math. 26.1（1977），第 8–96 页。

[KS96] Y. Kosmann-Schwazbach。《从泊松代数到 Gerstenhaber 代数》。傅里叶研究所年刊 46.5（1996），第 1243–1274 页。url：http://eudml. org/doc/75211。[Kos85] J.-L. Koszul。《Schouten-Nijenhuis 括号与上同调》。法文。Astérisque S131（1985）。url：http://www.numdam.org/item/AST_1985__S131__257_0/。[Lee12] J. M. Lee。《光滑流形导论》。数学研究生教材 218。Springer，2012年。[LV12] J.-L. Loday 和 B. Vallette。《代数歌剧》。第 346 卷。Springer Science & Business Media，2012年。[Man84] Y. I. Manin。《几何学的新方向》。俄罗斯数学调查 39.6（1984），第 51 页。[Man85] Y. I. Manin。《超引力的几何学与 Schubert超胞》。苏联数学杂志 31（1985），第 3362–3373 页。[Pal14] J. Palmkvist。《张量层级代数》。数学物理学杂志 55（2014），第 011701 页。arXiv：1305.0018 [hep-th]。[RSW21] S. Raghavendran、I. Saberi 和 B. R. Williams。《扭曲的十一维超引力》（2021年11月）。arXiv：2111.03049 [math-ph]。[RW22] S. Raghavendran 和 B. R. Williams。《六维超共形指标的全息方法》（2022年10月）。arXiv：2210.07910 [math-ph]。[RSV88] A. A. Rosly、A. S. Schwarz 和 A. A. Voronov。《超共形流形的几何学》。数学物理通讯 119（1988），第 129–152 页。[Roy99] D. Roytenberg。《Courant代数丛、导出括号与偶辛超流形》。加利福尼亚大学伯克利分校，1999年。[SW21] I. Saberi 和 B. R. Williams。《扭曲纯旋量超场及其在超引力中的应用》（2021年）。arXiv：2106.15639 [math-ph]。[SW23] I. Saberi 和 B. R. Williams。即将出版。2023年。[Tan70] N. Tanaka。《关于微分系统、分次李代数与伪群》。京都大学数学杂志 10.1（1970），第 1–82 页。[Val14] B. Vallette。《代数 + 同伦 = 歌剧》。Symplectic, Poisson, and non-commutative geometry 62（2014），第 229–290 页。arXiv：1202.3245 [math.AT]。[Vor05] T. Voronov。《高阶导出括号与同伦代数》。Journal of Pure and Applied Algebra 202.1-3（2005），第 133–153 页。arXiv：math/0304038 [math.QA]

[我们21] B. R. Williams和C. Elliott。《全纯泊松场论》。高阶结构5.1（2021）。[维特95] E. Witten。《不同维度中的弦理论动力学》。《核物理*B*》443（1995），第85–126页。arXiv：hep-th/9503124。

[Wit12] E. Witten。《超黎曼曲面及其模空间札记》（2012年）。arXiv：1209.2459 [hep-th]。[Zel09] I. Zelenko。《关于常类型滤结构的 Tanaka延拓过程》。*SIGMA* 5（2009年），第 094 页。网址：https://doi.org/10.3842%2Fsigma.2009.094。