arXiv:2304.12435v1 [math.CO] 24 Apr 2023

在代数刚性拟阵中计算回路多项式

*Goran Mali´c†和 Ileana Streinu‡

摘要。 我们提出了一种用于计算的算法 *circuit polynomials* 在代数刚性拟阵中$\mathcal{A}(\mathrm{CM}_n)$ 与 Cayley-Menger 理想 CM 相关联 $_n$，用于 n 二维点。该算法依赖于 *combinatorial resultants*，这是一种作用于图的新运算，能够刻画该理想中两个多项式的西尔维斯特结式的性质。我们证明，每个刚性回路都具有一个 *construction tree*，由基于该运算的 K_4 图构成。我们的算法利用这样一棵构造树执行 *algebraic elimination*，并使用经典结式、因式分解和理想成员关系。为突出其有效性，我们在 Mathematica 中实现了该算法：在一个 Gr¨obner 基计算耗时 5 天 6 小时的示例上，算法用时不到 15 秒。使用 Cayley-Menger 理想的非K_4生成元以及对主算法的简单变体，还可进一步提速。

关键词 . Cayley-Menger 理想，刚性拟阵，回路多项式，组合结式，归纳式 Gröbner 基消元 n-构造，Gr¨obner 基消元

AMS 学科分类。 05B35, 13P15, 52C25, 14Q20, 51K05, 51K99,68W30, 13P10

1. 引言。

本文聚焦于以下横跨组合刚性与代数拟阵的问题：

主要问题。 给定一个刚性回路，求出其对应的回路多项式。

其研究动机源自距离几何中的一个普遍问题：

定位。 给定一个图，以及与其 边 相关联的权重。目标是在某个欧几里得空间中（本例中为二维）寻找其顶点的 放置，使所得边长与给定权重相符。为此，我们建立一个二次方程组，未知数对应顶点的笛卡尔坐标。可能的放置 （或实现）是该方程组实数解中的一部分，可通过数值方法求得（例如参见 [36, 49, 3]）。另一个相关问题是，求某个单个未知距离可能的取值，该距离对应于一条非边 （即一对未由边相连的顶点）。如果我们能够解决一组非边顶点对所对应的这个第二个问题，并使这些顶点对与原有边一起包含一个三边测量，那么之后便可通过线性数量的二次方程求解步骤，得到该图的一种放置。

刚性回路。 该 一般的单个未知距离问题的版本中，权重是符号而非具体数值，因此适合采用《刚性理论》中的技术。在二维情况下，可以预测一般而言唯一

*于 2021 年 8 月 1 日提交给编辑。本论文扩展了会议摘要 [37], ，该摘要公布了主要结果；本文还包含预印本 [38]中的研究结果。**经费支持：** 两位作者感谢 Ileana Streinu 获得美国国家科学基金会 CCF:1703765 和 CCF:2212309 项目资助。

†美国马萨诸塞州北安普顿史密斯学院计算机科学系（gmalic@smith.edu，http://www.goranmalic.com）。

‡美国马萨诸塞州北安普顿史密斯学院计算机科学系（istreinu@smith.edu,streinu@cs.umass.edu，http://cs.smith.edu/~istreinu）。

未知距离的解集将是离散的（如果给定的图是刚性的），还是连续的（如果图是柔性的）。我们使用 Cayley 坐标 $X_n = \{x_{ij} : 1 \le i < j \le n\}$，以代数方式表述该问题，其中 x_{ij} 表示顶点 i 与 j 之间的距离平方，n 表示顶点数。这些变量之间存在某些依赖关系，由生成 Cayley-Menger 理想的多项式 $f \in \mathbb{Q}[X_n]$ 所刻画。当 G 是一个极小刚性图时，添加一条新边 e 会诱导出一个唯一子图 $C \subseteq G \cup \{e\}$，该子图是二维刚性拟阵中的一个回路，而其基是极小刚性图。在对应于 C 的边的距离之间，还存在一个唯一的（除相差一个标量乘法外）多项式依赖关系 p_C。这是 Cayley-Menger 理想中的一个回路多项式，也是本文研究的主要对象。通过将 G 的边权重的具体值代入该回路多项式，然后计算所得一元多项式的根，即可求解唯一未知距离问题。

这个问题有多容易处理？原则上，可以使用带有¨消元序的格[1]布纳基算法来计算回路多项式。在最坏情况下，这是一种双指数方法，但在实践中，格¨布纳基算法的复杂度和性能很大程度上取决于所选择的单项式序。已知存在一些情形，例如零维多项式理想 [15, 32], ，对于任意单项式序，其复杂度都是单指数的。然而，消元序据报道表现不佳。一般而言，消元理论的主要问题，例如理想平凡性问题、完全交理想成员问题、根式成员问题、一般消元问题和诺特正规化，都属于 PSPACE复杂性类 [40]。

在我们的实验中，**GroebnerBasis** 函数在 Mathematica 12 中（运行于一台配备 6 个核心、主频为 3.6GHz 的 2019款 iMac 计算机上）耗时 5 天 6 小时，才计算出表1中第13节所报告的 Desargues 加一图回路（一个具有 6个顶点的图），但在大多数情况下，该函数都会超时或崩溃。

结果概述。 我们的目标是通过利用问题中固有的结构信息，使此类计算更加易于处理。我们描述了一种新的算法，用于计算具有已知支集的回路多项式。该算法依赖于由一种新颖的刚性回路归纳构造所引导的基于结式的消元步骤。归纳构造经常被用于刚性理论，其中最著名的是用于 Laman 图的亨内伯格序列 [27] 以及用于三连通刚性回路的 Henneberg II 序列 [5]。我们认为，我们的组合构造更加自然，因为它具有直接的代数解释，这是此前已知的其他构造所不具备的性质。我们已在 Mathematica 中实现了该方法，并成功计算出所有顶点数不超过 6 个的回路多项式（其中仅有一个例外），以及少数顶点数为 7 和 8 的回路多项式；其中规模最大的一个包含超过九百万项。前文提到的 Desargues 加一图回路曾使用 GroebnerBasis 花费五天多时间才完成，而我们的算法在不到 15 秒内就解决了该问题。

在6个顶点的例子中，唯一仍难以解决的是以下图的回路多项式$K_{3:\,3}$-加一回路（参见表1，见第13节）：计算该多项式所需的计算资源远远超出了我们的两台机器以及我们试用过的高性能计算系统的能力

[1]参见 [13]中第3章§1的练习5和练习6

我们通过扩展基本算法，使其能够处理 Cayley-Menger 理想的其他生成元（除了对应于 K_4的生成元之外），从而取得了成功。这些生成元是支集为从属刚性图的不可约多项式，而这些图不一定是回路。

相关工作。 我们的方法建立在以下思想之上： 距离几何 和 刚性理论，并将其与代数拟阵理论相结合。前者历史悠久且成果斐然——篇幅所限，无法在此详述，相关内容可参见 [6, 14]。组合拟阵和线性拟阵（但非代数拟阵）在刚性理论中占据核心地位 [24, 55]。据我们所知，Rosen 在其博士论文中首次研究了一般多项式理想中的回路多项式 [45]。他的 Macaulay2 代码 [46] 可用于探索较小的情形，但无法处理 Cayley-Menger 理想。近期的一篇文章 [47] 普及了代数拟阵，并以 Cayley-Menger 理想中最简单的回路多项式 K_4 为例。我们在任何地方都未能找到非平凡的例子。与我们的问题间接相关的成果包括 [54], ，其中计算了一个次数为 8 的显式一元多项式（该多项式对应一个未知角；在一个由边长给定的$K_{3,3}$ 构形中，由此可确定顶点配置）；还有 [48], ，该研究在考察若干距离图族的配置空间时使用了 Cayley 坐标。一个与之密切相关的问题是计算极小刚性图的嵌入数 [9], ，近年来这一问题受到了广泛关注（例如 [11, 1, 19, 18], ，仅举数例）。全文还将陆续引用与本文所发展的理论及证明相关的具体文献成果。

论文概述。 我们的主要理论结果分为组合方面的定理 1和代数方面的定理 2，二者各自都有一个算法对应物，并且每个结果之前都有一节介绍实现自包含论述所需的概念。第 2 节回顾二维组合刚性拟阵。然后在第 3 节中，我们将两个图的组合结式定义为经典结式的一种抽象，证明定理 1，并描述计算组合回路结式（*CCR*）树的算法。

定理 1。 每个刚性回路都可以通过归纳方式获得：从 K_4 回路出发，应用组合结式运算。该构造由一棵二叉结式树表示，其节点是中间刚性回路，叶节点是 K_4 图。

这引出了一个用于寻找回路*CCR* 树的图算法。构造的每一步都可以在多项式时间内完成，所使用的是经过变体处理的*Pebble Game* 拟阵稀疏性算法 [35] ，并结合 Hopcroft 和 Tarjan 的线性时间 3-连通性算法 [28]。然而，可以设想该树的规模可能呈指数增长，因此整个构造可能需要指数级的步骤：要详细理解我们方法的算法复杂度，仍有待进一步研究。

在第4、5、6和7节中，我们简要且自洽地概述与本文相关的代数概念：理想及其代数拟阵、Cayley-Menger 理想、结式，以及 Cayley-Menger 理想中的回路多项式。在第8节中，我们证明：

定理 2. 每个回路多项式都可以通过归纳方式，借助结式运算得到。该过程由定理 1 中的组合回路结式（*CCR*）树引导，并从 K_4 回路多项式逐步构建而成。每一步中，结式都会生成一个可能不可约的多项式。随后通过多项式因式分解和属于该理想的检验，确定哪个因子才是真正的回路多项式。

定理 2 的算法对应物见第9节。总体而言，所得的代数消元算法运行时间为指数时间，部分原因是所生成多项式的规模不断增长。还有一些理论上的未决问题尚待解决，其答案可能会影响精确的时间复杂度分析。

在第 10 节中，我们定义并刻画一种更一般的组合结式树，它通过允许更自由地选择树叶处所使用的图，将 CCR 树推广如下：除了 K_4 回路外，现在还可以使用从属刚性图。这一扩展使我们能够使用 Cayley-Menger 理想中支集为相关集、但不一定是回路的多项式。Cayley-Menger 理想的相关非回路生成元将在第 11 节中讨论，而我们主要算法的完整推广将在第 12 节中给出。

我们使用 Mathematica 实现该方法所开展的初步实验结果将在第13节中讨论。我们在一台 2019 款 iMac 上使用 Mathematica v13，其配置如下：Intel i5-9600K 3.7GHz、16 GB RAM、macOS Monterey 12.3.1。我们还尝试了 Macaulay2，但在计算其中一个示例时，其速度远慢于 Mathematica（数小时与数秒）。所得多项式已发布在一个 GitHub 仓库中 [39]。

本文各处以及最后的第 14 节中都提出了开放性问题。

进一步的联系：拟阵理论中的回路多项式。《拟阵理论》文献中充满了各种类型的可实现性问题， [43] 近年来，人们对代数拟阵的兴趣也日益浓厚。Ingleton [29] 证明了，定义在特征为 0 的域上的代数拟阵具有线性表示，但在正特征下情况并非如此 [43]。最近， [7]有人发现了一类无穷的、定义在正特征域上的代数拟阵；这类拟阵在相同特征下具有线性表示，即所谓 Lindstr¨om 赋值为平凡赋值的代数拟阵。Lindstr¨om 赋值的计算问题在文献中得到了研究， [12], 其中的关键步骤是在正特征下计算给定代数拟阵的所有回路多项式。我们注意到，对于那些组合结构允许使用类似于我们的组合结式的运算来描述其回路的代数拟阵，本文所介绍的方法适用，并且可能比 Gr¨obner 基方法更加高效。

注。 本文的主要结果已在会议摘要[37]以及 [38]中公布。

2. 预备知识：刚性回路。 我们从问题的组合方面入手，并回顾二维杆-铰框架组合刚性理论中的相关概念和结果。

记号。我们研究由完全图K_n的边的子集 E 给出的（子）图，该完全图的顶点为 $[n]$：$= \{1, \ldots, n\}$。若 G 是一个（子）图，则 $V(G)$和 $E(G)$分别表示其顶点集和边集。 G 的支集为 $E(G)$。边 E 的顶点张成集 $V(E)$是所有边端点顶点的集合。若一个子图 G 的边集 $E(G)$张成 $[n]$，则称其为生成子图。顶点 v 的邻接顶点 $N(v)$是与 v 在 G中相邻的顶点。

框架。 一个 二维杆-铰框架 是图G、 p（ $G =$、V）以及 E的一个放置映射 p： $V \to \mathbb{R}^2$所组成的二元组。我们将边视为刚性杆件，将顶点视为旋转铰链，只要杆件保持其原始长度，框架就可以连续地发生变形。框架的实现空间是其在

具有相同杆长的平面中的所有可能放置的集合。如果两个实现通过平面等距变换相互关联，则称它们全等。框架的构形空间由实现的全等类组成。给定框架的变形空间 (G, p)是构形空间中包含该特定放置（由 p 给出）的连通分支。若框架的变形空间恰好由一个构形组成，则称其为刚性；否则称其为柔性。如果一个框架是最小刚性的，并且移除其任意一条边后变为柔性，则称该框架为最小刚性。

Laman 图。 一般框架 这一概念的严格定义见第 5 节。图的所有可能放置中，除零测集外，均为一般的。下述定理使我们能够仅根据一般框架的底层图来描述其刚性和柔性。证明将经过无穷小刚性这一中间概念；无穷小刚性蕴含刚性；该概念同样在第 5 节中介绍。

定理 3。 *[44, 33]* 一个一般的杆-铰框架在二维中是最小刚性的，当且仅当其底层图 $G = (V, E)$ 满足两个条件：***(a)*** 它恰好有 $|E| = 2|V| - 3$ 条边；***(b)*** 任意真子集 $V' \subset V$ 包含 $|V'| \geq 2$ 个顶点时，所张成的边数至多为 $2|V'| - 3$ 条。

满足定理 3 条件的图称为***Laman*** 图，或简称$Laman$。遗传性质 (b) 也称为 (2,3)-稀疏条件。性质 (a) 和 (b) 合在一起定义了一种图，称为 $(2, 3)$-紧致（此外，它还满足 (2,3)-稀疏条件）。

定理 3使我们现在可以讨论图的*(*最小*)* 刚性，而不是框架的刚性。Laman 图具有最小刚性，移除其中任意一条边后就会变得柔性。向 Laman 图添加额外的边仍能保持其刚性，但会失去最小性：这类图称为刚性且过约束，或称为相关。简言之，若一个图是刚性的，则其顶点集必须张成一个 Laman 图；否则该图就是柔性的。其他图可能同时具有柔性和过约束性。本文主要研究既刚性又相关的图。最小相关的图称为刚性回路，下文将介绍它们。

拟阵。 拟阵是对来自某个 底集的元素集合之间的（非）依赖关系的抽象概括，其灵感既来自 线性 依赖关系（例如矩阵的行之间的依赖关系），也来自 代数 方程对一组原本自由的变量施加的代数约束。规定一个拟阵的标准方式是指定其独立集，这些独立集必须满足某些公理（本文不予列出，有兴趣的读者可参阅 [43]）。 基是极大独立集，而不独立的集合称为相关集。极小相关集称为回路。与本文相关的基本性质如下：（a）（遗传性质）独立集的子集也是独立集；（b）所有基的基数都相同，称为拟阵的秩。根据需要，我们将在相应的语境中介绍其他性质。

本文将讨论三类与刚性相关的拟阵：一种图[2] 拟阵，其底集由完全图 K_n的所有边 $E_n := \{ij : 1 \leq i < j \leq n\}$ 构成；这就是下文所述的（2，3）-稀疏拟阵或一般二维刚性拟阵；一种线性拟阵，定义在与杆-铰框架相关的刚性矩阵的一个同构行向量集上；以及一种代数拟阵，定义在一个同构的

[2]不要将其与完全图的生成树拟阵混淆。

变量底集 $X_n := \{x_{ij} : 1 \le i < j \le n\}$；这是与 *Cayley-Menger* 理想相关的代数拟阵。线性拟阵和代数拟阵将在第 5 节中定义。

该(2，3)-稀疏拟阵：独立集、基、回路。在（*2*，3）-稀疏图的 n顶点上，这些图构成拟阵 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$，其底集为完全图 E 的边集 K_n [55]，称为（一般的）二维刚性拟阵，或（2，3）-稀疏拟阵。拟阵$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$ 的基是极大独立集，因此是 Laman 图。不稀疏的边集是相关集。例如，在 Laman 图中添加一条边会产生一个由 $2n-2$ 条边组成的相关集，称为 Laman 加一图：示例见图 1。

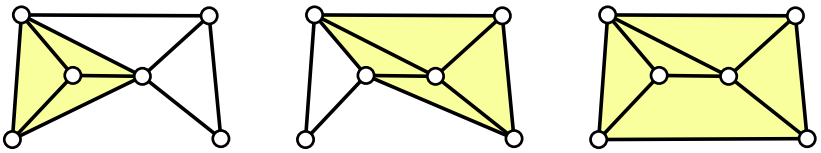

图 1：Laman 加一图包含一个唯一回路（已突出显示）：（左图和中图）该回路并不生成整个顶点集。（右图）一个生成回路。

一个极小的相关集（稀疏拟阵中的）是一个回路。回路的边所跨越的顶点构成 V的一个子集。若回路跨越 V，则称其为一个生成或极大回路，位于稀疏拟阵$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$中。示例见图 1（右）和图 2。

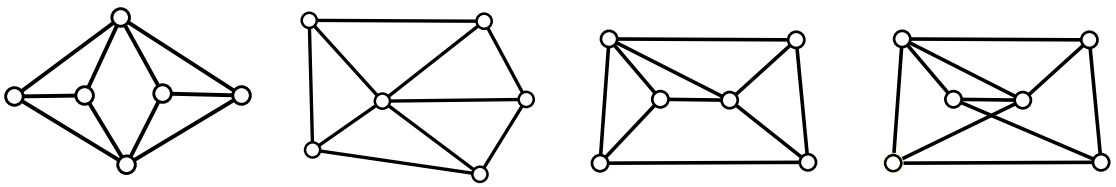

图 2： $n = 6$ 个顶点上的四种生成回路：二维双香蕉、5轮W_5、*Desargues* 加一图以及$K_{3,3}$加一图。

一个*Laman* 加一图包含一个唯一的极小相关子图，换言之，包含一个唯一回路。生成刚性回路 $C = (V, E)$是 Laman 加一图的一种特殊情形：它总共有 $2n-2$ 条边，但对于所有至多包含 $n' \le n-1$ 个顶点的真子集，都满足 (2，3)-稀疏条件。简单的稀疏性考量可以表明，从生成回路中移除任意一条边，都会得到一个 Laman 图。

组合图与回路。 现在我们定义一些运算，将两个具有共同顶点和边的图组合成一个图。

如果 G_1 和 G_2 是两个图，我们使用一致的**记号**表示它们的顶点数和边数 $n_i = |V(G_i)|$、$m_i = |E(G_i)|$、$i = 1, 2$，以及它们的顶点和边的并集与交集，如 $V_\cup = V(G_1) \cup V(G_2)$、$V_\cap = V(G_1) \cap V(G_2)$、$n_\cup = |V_\cup|$、$n_\cap = |V_\cap|$ 和

边也同样如此，其中 $m_\cup = |E_\cup|$ 和 $m_\cap = |E_\cap|$。两个图 G_1和 G_2 的公共子图是 $G_\cap = (V_\cap, E_\cap)$。

设 G_1 和 G_2 是两个恰有两个顶点 u、$v \in V_\cap$ 和一条边 $uv \in E_\cap$重合的图。它们的 2-**和** 是图 $G = (V, E)$，其中 $V = V_\cup$ 且 $E = E_\cup \setminus \{uv\}$。将 G 拆分为 G_1 和 G_2 的逆操作称为 2-分裂或 2-分离（图 3）。

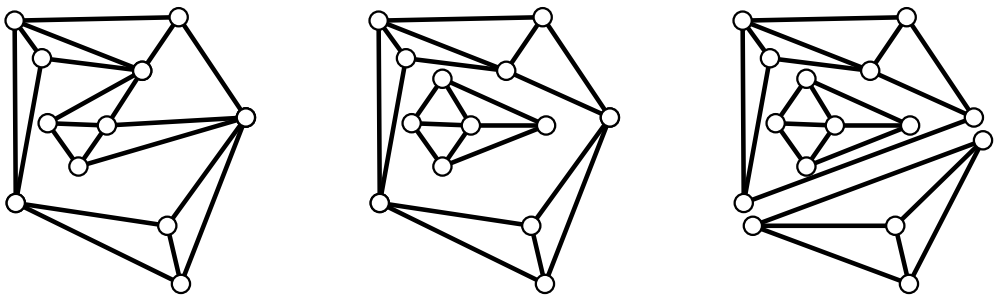

图 3：（从左到右）通过 2-分裂操作，将一个 2-连通回路分解为三个 3-连通回路。（从右到左）通过 2-和操作，将三个 3-连通回路合并为一个更大的（非 3-连通）回路。

引理 4（[5], 引理 4.1 和 4.2）。两个回路的 2-和是一个回路。一个回路的 *2*-分裂得到一对回路。

连通性。众所周知，也很容易证明，回路总是一个 2-连通图。如果一个回路不是 3-连通的，我们就简单地称其为 2-连通电路。将一个 2-连通图分解为 3-连通分量的 Tutte分解 [51] 归结为识别顶点的分离对。对于一个回路而言，分离对会诱导出 2-分裂（2-和的逆）操作，并产生更小的回路（另见 [5]中的引理 2.4(c)）。因此，可以通过 2-和由 3-连通电路构造出 2-连通电路，如 图 3中从右向左的序列所示。

3-连通回路的归纳构造。Henneberg II扩展(也称为边分裂操作)定义如下：对于一条边 uv 和一个与其不关联的顶点 w，移除边 uv，添加一个新顶点 a 和三条新边 au、av、aw。Berg和Jordan [5] 证明了，如果 G 是一个 3-连通回路，那么对G 进行 Henneberg II 扩展后仍是一个 3-连通回路。对一个回路进行逆 *Henneberg II* 操作时，移除一个度为 3 的顶点，并在其三个邻点之间添加一条新边，使所得结果仍为回路，见图 4。Berg和Jordan还证明，每个 3-连通回路都可以进行逆 Henneberg II 操作，且操作后仍保持 3-连通性。因此，3-连通回路具有归纳构造，即可以通过保持 3-连通性的 Henneberg II 扩展由K_4 得到。他们的证明基于这样一个事实：存在一对非邻接顶点，对其中任一顶点进行逆 Henneberg II 操作后所得的回路均为 3-连通回路。我们将在第 3 节中使用以下较弱的结果，该结果不要求逆 Henneberg II 操作后仍保持 3-连通性。

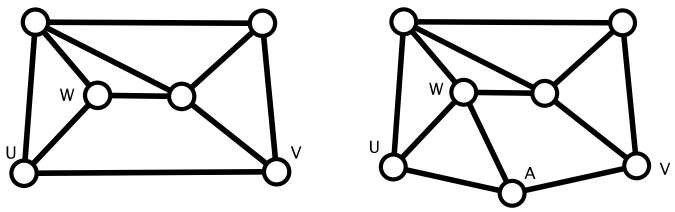

图 4：Desargues 加一图的 Henneberg II 扩展。

引理 5（ [5]中的定理 3.8）。设 $G = (V, E)$ 是一个3-连通回路，且 $|V| \geq 5$。那么，要么 G 有四个顶点，对其中任一顶点进行逆 *Henneberg II* 操作后所得结果是一个回路；要么 G 有三个两两非邻接的顶点，对其中任一顶点进行逆 *Henneberg II* 操作后所得结果是一个回路（但不一定是3-连通的）。

3. 组合合成构造。 现在我们定义两个图的组合结式这一新运算，证明定理 1并阐述其算法含义。

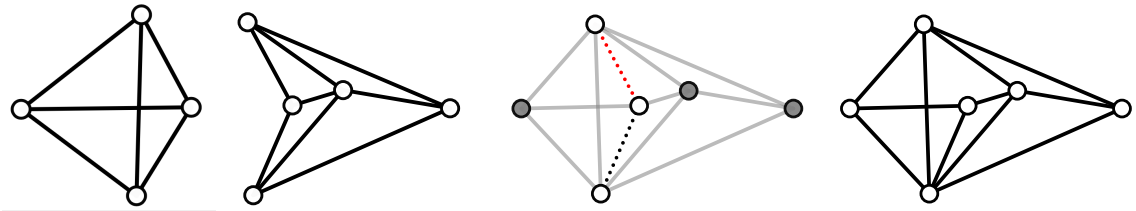

图 5：一个完整的 K_4 图、一个 4-轮图 W_4、它们的公共边（虚线表示，消元边以红色标出）及其组合结式；该组合结式包含多于 $2n-2$ 条边，因此不是回路。

3.1. 定义：组合合成。 设 G_1 和 G_2 是两个具有非空交集的不同图 $E_\cap \neq \emptyset$，并设 $e \in E_\cap$ 为一条公共边。图 组合结式 G_1 和 G_2 在 消元边 e 上的组合结式是图 CRes(G_1, G_2, e)，其顶点集为 $V_\cup$，边集为 $E_\cup \setminus \{e\}$。

当两个图恰好有一条公共边，且该边在运算中被消去时，2-和便是组合结式的一种特殊情形。回路在 2-和运算下封闭，但在这种一般的组合结式运算下并不封闭：两个例子见图 5和图 6。

电路有效的组合合成。 我们关注将回路生成回路的组合结式。为此，如果两个回路的适当相交公共子图（由公共顶点和公共边组成）是 Laman 图，则称它们图 5中的示例并非适当相交，但图 6和图 7 中的示例是适当相交的。

引理 6。 两个回路的组合结式具有 $m = 2n-2$ 条边，当且仅当这两个回路的公共子图 $G_\cap$ 是 *Laman* 图。

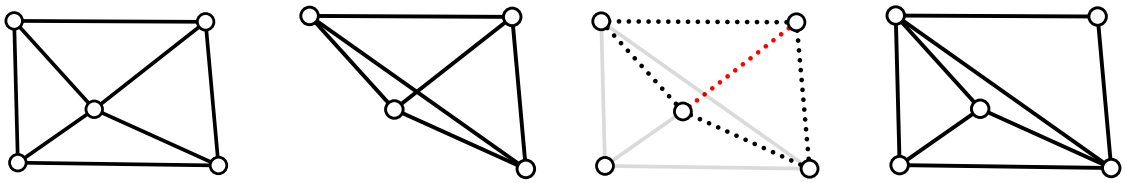

图 6：一个 4-轮图 W_4、一个完全 K_4 图、它们的公共 Laman 图（虚线表示，并带有红色消元边）以及它们的组合结式；后者是一个 Laman 加一图，但不是回路。

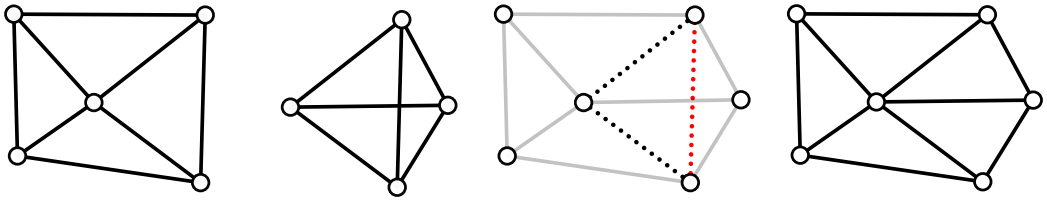

图 7：一个 4-轮图 W_4 和一个完全 K_4 图、它们的公共 Laman 图（虚线表示，并带有红色消元边）以及它们的组合结式，即 5-轮图 W_5 回路。

证明。设 C_1 和 C_2 是具有 n_i 个顶点和 m_i 条边的两个回路，$i = 1, 2$，并设 C 是具有 n 个顶点和 m 条边的它们的组合结式。根据容斥原理，$n = n_1 + n_2 - n_\cap$ 和 $m = m_1 + m_2 - m_\cap - 1$。将此处的 $m_1 = 2n_1 - 2$ 和 $m_2 = 2n_2 - 2$ 的值代入，可得 $m = 2n_1 - 2 + 2n_2 - 2 - m_\cap - 1 = 2(n_1 + n_2 - n_\cap) - 2 + 2n_\cap - 3 - m_\cap = (2n - 2) + (2n_\cap - 3) - m_\cap$。当且仅当 $m_\cap = 2n_\cap - 3$ 时，$m = 2n - 2$。由于 C_1 和 C_2 都是回路，因此不可能一个边集包含于另一个边集中：回路是极小相关的边集，因而不能包含其他回路。作为 $E_1 = E(C_1)$ 和 $E_2 = E(C_2)$ 的真子集，$E_\cap$ 满足遗传 (2, 3)- 稀疏性。若进一步 $G_\cap$ 恰好有 $2n_\cap - 3$ 条边，则它是 Laman 图。 ■

需要注意的是，公共子图 是在公共顶点集和公共边集上定义的。在检验两个回路是否适当相交时，下面的引理有时允许我们只考虑 G_1 和 G_2的并集中由公共顶点集诱导的图 。从现在起，本文中所使用的这类组合结式均适用这一观察。

引理 7。 设 $C_1 = (V_1, E_1)$ 和 $C_2 = (V_2, E_2)$ 是两个回路，它们的公共顶点集$V_\cap$ 是真子集，且分别包含于 V_1 和 V_2。若公共子图 $G_\cap = (V_\cap, E_\cap)$ 是 *Laman* 图，则 C_1 和 C_2 均不包含由其公共顶点张成的额外边（除 $E_\cap$之外）。

证明。 假设 C_1 包含一条由 $V_\cap$张成的额外边。由于 $(V_\cap, E_\cap)$ 是 Laman，这条边会诱导出一个回路，该回路完全包含在 C_1 中，且由 V_1的一个真子集顶点张成：这与 C_1 是一个回路这一事实矛盾：根据回路的定义，回路是极小相关边集，因此不可能包含一个更小的子图，但它仍然

相关。
对两个适当相交的回路施加组合结式运算，若其结果是一个生成回路，则称该运算为回路有效的。图示例见图 7。适当相交是两个回路的组合结式产生回路的必要条件，但图 6 中的示例表明，这并非充分条件。

开放问题 8. 找出两个回路的组合结式为回路的充要条件。

我们的首要目标是证明，每个回路都可以通过一系列回路有效的组合结式运算，从 K_4 个回路构造得到，并且每一步至少增加一个新顶点。

3.2. 定理 1的证明。现在我们证明，每个刚性回路都可以通过归纳法得到：从 K_4 个回路出发，连续施加组合结式运算。证明分别处理 2-连通和 3-连通情形。在第 2 节中我们已经看到，2-连通回路可以通过 2-和由 3-连通回路得到。证明的主要部分是下面处理 3-连通回路的命题。

命题 9。 设 $C=(V,\ E)$ 是一个跨越 3-连通回路，共有 $n+1\geq 5$ 个顶点。那么我们可以找到两个回路 A 和 B，使得 A 具有 n 个顶点，B 至多具有 n 个顶点，并且 C可以表示为 A 和 B的组合结式。

证明。 我们应用 引理 5 来找到两个非邻接顶点 a 和 b，它们的度为 3，使得可以通过对顶点 a 在 C (见图 8) 中执行逆 Henneberg II 操作生成回路 A。设顶点 a的邻点为 $N(a)=\{u,v,w\}$，使得 $e=uv$不是 C中的一条边，并且是为获得新回路 $A=(V\setminus\{a\},\ (E\setminus\{au,av,aw\})\cup\{uv\})$ 而添加的边。

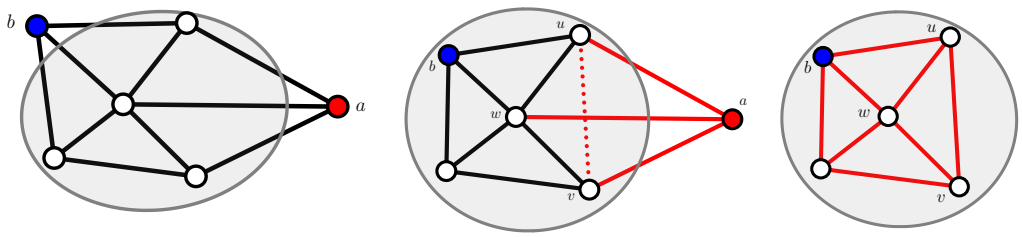

图 8：跨越 $n+1$ 个顶点的 3-连通回路 C，其中有两个非邻接顶点a （红色）和 b （蓝色），它们的度为 3。注意， N（a）和 N（b）可能并不不相交。在 a 处执行逆 Henneberg II 操作会移除 a 处的红色边，并添加虚线红边 $e=uv$。回路 A（红色）。

为定义回路 B，我们首先令 L 为由 C 诱导的子图 $V\setminus\{b\}$。简单的稀疏性考量表明， L 是一个 Laman 图。由 D 通过添加边 L 得到的图 $e=uv$，如 图 9 (左)所示，是一个 Laman 加一图，包含与 a 关联的三条边（它们不属于 A）以及边 e （它属于 A）。 D 包含一个唯一回路B (图 9 左)，其边为 $e\in B$ （例如，参见 [43, 命题 1.1。6]）。接下来需要证明 B

包含 a 及其关联的三条边。如果 B 不包含 a，那么它就是 A的真子图。但这与 A 作为回路的极小性相矛盾。因此， a 是 B中的一个顶点；而且，由于回路中的顶点次数不可能小于3， B 包含其关联的全部三条边。

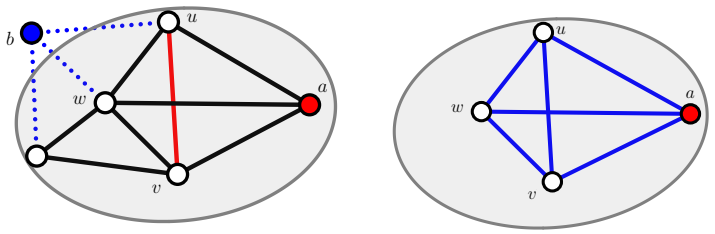

图 9：从 C 中移除 b 的边（蓝色虚线），并添加红色边 e。回路 B （蓝色）。

回路 A和 B关于 e 消去边的组合结式 CRes(A， B， e) 满足所需性质，即 $C = \text{CRes}(A,\ B,\ e)$。 ■

3.3. 算法方面。 算法3.1 概括了命题 9中所述的过程。该过程可以递归应用，直到达到基例 K_4 。其主要步骤包括：第 4 行对回路执行逆 Henneberg II 步骤，以及第 6行在 Laman-加一图中寻找唯一回路；这两个步骤都可以通过对 ， 3) 和 (2， 2)-稀疏 Pebble Game 稍作变体，在多项式时间内完成，相关方法见 [35]。

算法3.1 逆组合结式

输入：3-连通电路 C
输出：回路 A、 B 和边 e，使得 $C = \text{CRes}(A、\ B、\ e)$

1: **对于**每个度为 3 的顶点 a **执行**
2: **如果**可以对 a 执行逆 Henneberg II 操作
3: **并且**存在一个不相邻的度为 3 的顶点 b **则**
4: 在 a 上对 C 执行逆 Henneberg II 操作，得到回路 A 和边 e
5: 去除 $D = C$ 及其边，并添加新边 e
6: 计算 B 中的唯一回路
7: **返回** 回路 A、 B 和边 e

对于两个3度顶点 a 和 b，算法面临许多选择。这些选择可能导致将一个回路表示为另外两个回路的组合结式时产生不同的表示。

推论10。 将 C 表示为两个较小回路的组合结式通常并不唯一。一个例子是图*10*所示的“ 双香蕉”2-连通电路。

3.4. 组合回路合成（CCR）树。 使用组合结式运算构造回路的每一种可能方式，都可以表示为一种树结

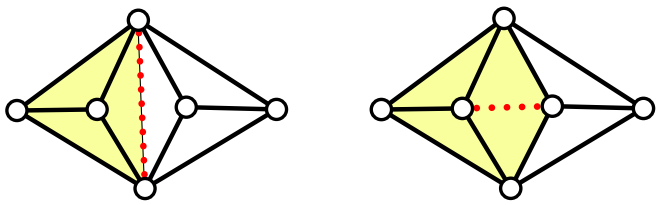

图10：2-连通双香蕉 回路可由两个 K_4 图通过组合结式（左图，2-和）得到，也可由两个共享两个三角形的4顶点轮图得到（右图）。虚线表示消去边，每种情况下都突出显示了其中一个回路，以便将其与 K_4 W_4区分开来。

构。设 C 是一个具有 n 个顶点的刚性回路。对于回路，组合回路结式（*CCR*）树T_C 是以 C 为根节点的有根二叉树，并满足以下条件：(a) T_C的节点均为回路；(b) 第 l层的回路最多有 $n-l$个顶点；(c) 父回路 C_i 的两个子回路 $C_i =$ 满足 CRes(C_j, C_k, e)，其中 e是某条公共边；(d) 叶节点均为 4顶点完全图。示例见图 11。

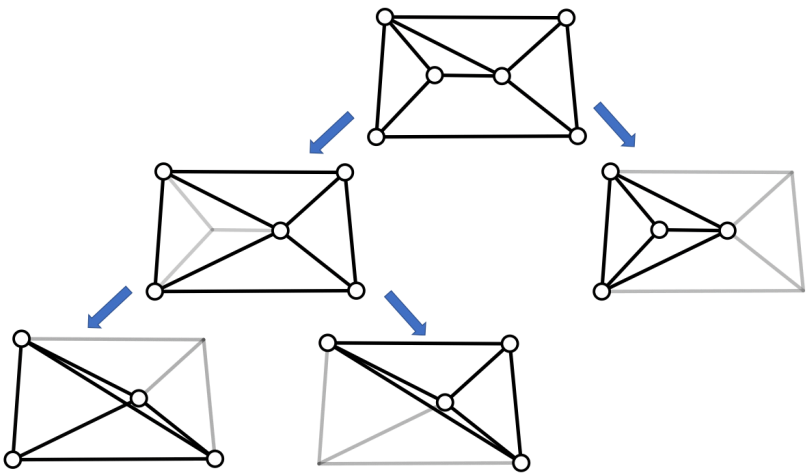

图11：Desargues-plus-one 回路的 CCR 树。为了帮助读者直观地了解树中每个节点处共有的 Laman子图和消去边，下层回路以黑色和较大的顶点显示，并置于其上方的组合结式回路（浅灰色）中。

CCR树的复杂度。 如果中间回路全都是3-连通的，那么用我们的方法得到的树的深度为 $n-4$，这是最坏的情况。深度的最佳情况为 $\log n$，发生在所有中间回路均为2-连通且被拆分为两个大小相同的回路时。

在 te 就大小（节点数）而言，CCR 树原则上可能处于

从线性规模到指数规模之间。最佳情况出现在结式树呈路径状、每个内部节点都有一个 K_4 叶节点时，或者树的深度为 $\log n$ 且处于平衡状态、每个结式运算都是 2-和时。可以设想，最坏情况（指数规模）可能是一棵深度为线性的完全（平衡）二叉树：第 k 层的每个内部节点都会将两个具有相同数量顶点 $n-k-1$ 的回路合并为一个具有 $n-k$ 个顶点的回路。已知一些小型、全高且平衡的 CCR树的零星示例（例如对于 K_{33}-plus-one），但我们不知道它们能在多大程度上推广。

开放问题 11. 是否存在具有线性深度、平衡的 CCR 树的无限回路族?

即使不存在上述回路族，了解这些树在最坏情况下的规模也很有意义：

开放问题 12. 刻画导致 CCR 树规模达到最坏情况的回路。

了解最坏情况可能有助于我们的算法3.1 避免在步骤 1–3 中选择相应的顶点 a 和 b。这样一来，目标便是根据某种定义明确的 *CCR* 树复杂度衡量标准，生成最优的 CCR 树，或至少生成一棵较好的树。我们将在第9节中回到这个问题。

要回答问题 11 和 12，可能需要对 CCR 树进行实验。然而，树的数量可能非常庞大，因此引出以下问题：

开放问题 13. 开发一种高效算法，用于枚举某个回路的 CCR 树。

开放问题 14. 计算或估算某个回路的不同 CCR 树的数量。

4. 预备知识：理想与代数拟阵。 现在我们转向问题的代数方面，以介绍代数拟阵和回路多项式。我们在有理数域 $\mathbb{Q}$上进行讨论。在本节中，变量集合 X_n 表示 $X_n = \{x_i : 1 \le i \le n\}$；讨论 Cayley-Menger 理想时，它将是 $X_n = \{x_{ij} : 1 \le i < j \le n\}$。多项式环 R 总是形如 $R = \mathbb{Q}[X]$，其变量集合为 $X \subset X_n$。多项式的支集 $\operatorname{supp} f$ 是指多项式 $f \in \mathbb{Q}[X_n]$ 中出现的不定元集合。变量 x 在多项式 f 中的次数记作 $\deg_x f$。

4.1. 多项式理想。多项式集合 $I \subset \mathbb{Q}[X]$ 是环 R $\mathbb{Q}[X]$ 的理想，当且仅当它对加法以及乘以 $\mathbb{Q}[X]$ 的元素封闭。每个理想都包含零理想 $\{0\}$。理想的生成集是一个多项式集合 $S \subset \mathbb{Q}[X]$，使得该理想中的每个多项式都可以表示为 S 中元素的有限代数组合，且系数属于 $\mathbb{Q}[X]$。希尔伯特基定理（例如参见 [13]）保证，多项式环中的每个理想都有有限生成集。由单个多项式生成的理想称为主理想。若对于任意 $fg \in I$，都有 $f \in I$ 或 $g \in I$，则理想 I 是素理想。若一个多项式无法分解为 $\mathbb{Q}[X]$ 中非常数多项式的乘积，则称它在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。主理想是素理想，当且仅当它由不可约多项式生成。由两个或更多不可约多项式生成的理想不一定是素理想。 $\mathbb{Q}[X]$ 的理想 I 的维数 $\dim I$，是具有性质 $I \cap \mathbb{Q}[S] = \{0\}$ 的最大子集 $S \subseteq X$ 的基数。

设 I 是 $\mathbb{Q}[X_n]$ 的一个理想，且 $X' \subset X_n$ 非空。关于 X' 的 I 的消去理想是环 $\mathbb{Q}[X']$ 的理想 $I \cap \mathbb{Q}[X']$。消去理想经常出现在

Gr¨obner 基 [10, 13] 的背景下，它提供了一种计算消去理想的一般方法：如果 $\mathcal{G}$ 是 ¨关于 I 的一个 消元序（参见第3章第1节中的练习5和练习6 [13]），例如取 $x_{i_1} > x_{i_2} > \cdots > x_{i_n}$ 字典序，那么消去 $I \cap \mathbb{Q}[x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}]$ 中的前 k 个不定元的消去理想 I在指定顺序下以 $\mathcal{G} \cap \mathbb{Q}[x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}]$ 作为其 Gr¨obner 基。

4.2. 代数独立性与代数拟阵。 回顾一下，向量空间中的一组向量称为线性相关的，是指它们之间存在非平凡的线性关系。类似地，给定一个有限复数集合 A ，我们称 A 是 代数相关的 ，如果 A中的数之间存在非平凡的多项式关系。

定义 15。 设 k 是一个域（例如 $k = \mathbb{Q}$），且 $k \subset F$ 是 k的一个域扩张。若 $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 F的有限子集，则称其在 k上代数相关，如果存在一个系数属于 k 的非零（多元）多项式，在 A上取值为零。否则，我们称 A 在 k上代数无关。

范德瓦尔登注意到，有限集合 A 的代数无关子集 E 在 F 上满足拟阵公理 [52, 53] ，因此定义了一个拟阵。

定义 16。 设 k 是一个域，且 $k \subset F$是 k的域扩张。设 $E = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 F的有限子集。定义 在 k 上的 E 代数拟阵是这样一个拟阵：其独立集是 k上的代数无关（相对于 k）子集 E。

4.3. 素理想的代数拟阵。 用多项式理想来表述代数拟阵的一个等价定义，对于本文的目的更为有用。直观地说，若一组变量相对于理想 I 不受 I中的任何多项式约束，则称其为独立的；否则称其为 相关的。由该理想诱导的 代数拟阵，非正式地说，是以变量 X_n 为底集的拟阵，其独立集是变量的子集，且这些子集 不被理想中的任何多项式支集包含。其 相关集是理想中多项式的支集。

定义 17。 设 I 是多项式环 $\mathbb{Q}[X_n]$中的素理想。 由 I定义的代数拟阵，记作 $\boldsymbol{\mathcal{A}}(I)$，是拟阵 $(X_n, \mathcal{I})$，其独立集为：

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq X_n \mid I \cap \mathbb{Q}[X] = \{0\}\}.$$

4.4. 定义的等价性。众所周知，每个素理想的代数拟阵 I 都可以作为域扩张的代数拟阵出现，其含义见定义 16，反之亦然。为完整起见，我们给出证明。

从域扩张到素理想。设 $E = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的域扩张中的一组元素，并设 $\mathcal{M}$ 是 E 上关于 $\mathbb{Q}$ 的代数拟阵，其相关集为 $A \subset E$ 的代数相关子集。为了将 $\mathcal{M}$ 实现为 $\mathbb{Q}[X_n]$的素理想 I 所对应的代数拟阵，我们定义 $I := \ker \varphi$ 为同态 $\varphi\colon \mathbb{Q}[X_n] \to \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 的核，其中该同态将 $x_i \mapsto \alpha_i$ 映射为 $i \in \{1, \ldots, n\}$，并将 $a \mapsto a$ 映射为 $a \in \mathbb{Q}$。已知同态的核是素理想 [34]。核 $\ker \varphi$ 非零，因为 $\ker \varphi$ 中的任何多项式都定义了 $\mathcal{M}$ 中的一个依赖关系，而 $\mathcal{M}$ 中的任何相关集 $A \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 都会使 $\mathbb{Q}[X_n]$ 中的某个多项式为零。令 $\mathbb{Q}[X_A]$ 为支集包含于 X_A 子集的多项式环：$= \varphi^{-1}(A)$。当且仅当 A 是 $\mathcal{M}$ 的相关集时，$\ker \varphi \cap \mathbb{Q}[X_A] \neq \{0\}$。因此，$\varphi$ 在 $\ker \varphi$ 所诱导的拟阵中的相关集与 $\mathcal{M}$ 之间建立了同构。

从素理想到域扩张。设 I 是 $\mathbb{Q}[X_n]$ 中的一个素理想。我们通过一个同构构造有限域扩张 F 和子集 $\{x_1,\dots,x_n\} \in F$，该同构将理想 I 中的相关/不相关集合 $X \subset X_n$ 映射为代数相关/不相关集合 $X \subset \{x_1,\dots,x_n\}$。商环 $\mathbb{Q}[X_n]/I$ 是一个整环，其分式域 $F = \mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[X_n]/I)$ 定义良好，并且包含 $\mathbb{Q}$ 作为子域。X_n 在典范嵌入 $\mathbb{Q}[X_n] \hookrightarrow \mathbb{Q}[X_n]/I \hookrightarrow \mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[X_n]/I) = F$ 下的像是 F 的子集 $\{x_1,\dots,x_n\}$；其中，x_j 表示 x_j 在 $\mathbb{Q}[X_n]/I$ 和 F 中的等价类。

设 X 是 X_n 的非空子集（不失一般性，取为 $X = \{x_1,\dots,x_i\}$），并设 $\overline{X} = \{\overline{x_1},\dots,\overline{x_i}\}$ 是其在 F 下经由典范嵌入所得的像。根据定义，集合 X 在 $\mathbb{Q}$ 上代数相关，当且仅当存在一个非零多项式 $f \in \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_i]$ 在 X 上取值为零，即 $f(x_1, \dots, x_i) = 0$。这当且仅当 $f(x_1, \dots, x_i) \in I$，也就是说，当且仅当 $I \cap \mathbb{Q}[X] \neq \{0\}$。类似地，$X$ 在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关，当且仅当 $I \cap \mathbb{Q}[X] = \{0\}$。

现在我们可以定义支撑本文的核心代数概念了。

4.5. 回路与回路多项式。 拟阵中的一个 回路 是一个极小相关集。在代数拟阵中，一个回路 $C \subset X_n$ 是由素理想中的多项式所支撑的变量的极小集合，该素理想 I 定义了该拟阵。支集为一个回路的不可约多项式 C 称为 回路多项式，记作 p_C。Dress 和 Lovasz 的一个定理 [16]指出，除相差一个常数因子外，回路多项式 p_C 是该理想中具有给定支集的唯一不可约多项式 $C \subset X_n$。简而言之，我们称其为 唯一的。

我们保留以下性质，该性质表明 回路多项式生成由回路支撑的消去理想。

定理 18（[47], 定理 11）。设 I 是 $\mathbb{Q}[X_n]$ 中的一个素理想，并且 $C \subset X_n$ 是代数拟阵 $\mathcal{A}(I)$的一个回路。理想 $I \cap \mathbb{Q}[C]$ 是主理想、素理想，并由回路多项式 p_C生成。

5. Cayley-Menger 理想。本节介绍二维 Cayley-Menger 理想 CM_n。我们将证明[3] 其代数拟阵与（2，3）-稀疏拟阵$\mathcal{S}_n$同构。因此，我们得到 Cayley-Menger 理想中回路多项式支集的完整组合刻画：它们与第2 节中介绍的刚性回路一一对应。

在本节及后文讨论 Cayley-Menger 理想时，我们使用变量 $X_n = \{x_{i,j} : 1 \le i < j \le n\}$ 表示点对之间未知的平方距离。

5.1. Cayley-Menger 理想及其代数拟阵。标记 点的距离矩阵是 n点对之间的平方距离组成的矩阵。Cayley 矩阵是在距离矩阵的右侧和下方各添加一行一列全为 1 的元素，并在对角线上置零后得到的矩阵：

[3]这种等价关系广为人知，但我们未能找到最初的参考文献，因此为完整起见给出证明。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ 1 & x_{1,2} & 0 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ 1 & x_{1,3} & x_{2,3} & 0 & \cdots & x_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1,n} & x_{2,n} & x_{3,n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Cayley 定理表明，如果这些距离来自欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$中的一个点集，那么该矩阵的秩至多为 $d+2$。因此，Cayley 矩阵的所有（$d+3$）$\times$（$d+3$）阶子式都应为零。Menger 提出的一个附加条件 [42]（另见[6, 14]）保证 Cayley 矩阵中的元素对应于 n 空间中 $\mathbb{R}^d$点之间的实际平方距离。Menger 条件指出，所有包含 $m \times m$ 个 $m-1$点的子式，其符号应为（-1）$^{m-1}$ 或为零，其中 $m \le d+2$。就本文而言，我们只使用 Cayley 条件，而不使用 Menger 条件。

Cayley 矩阵的所有（$d+3$）$\times$（$d+3$）子式构成集合，其中每个子式都会在 $\mathbb{Q}[X_n]$中导出一个多项式，并构成（n，d）-Cayley-Menger 理想 CM_n^d的生成集。这些生成元是齐次多项式，具有整数系数，且在上不可约 $\mathbb{Q}$，详情将在第 11 节中进一步讨论。（n，d）-Cayley-Menger 理想是一个素理想，维数为 $dn - \binom{d+1}{2}$ [8, 23, 26, 30]，余维数为 $\binom{n}{2} - dn + \binom{d+1}{2}$。

如第4节所定义，Cayley-Menger 理想的代数拟阵$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{CM}_n^d)$是定义在底集 $X_n = \{x_{i,j} \mid 1 \le i < j \le n\}$ 上的拟阵，其中距离变量的子集$X \subseteq X_n$ 是独立的，当且仅当 $\mathrm{CM}_n^d \cap \mathbb{Q}[X] = \{0\}$，即 X 其支集中不含该理想中的任何多项式。

作为多项式环中理想维数定义的直接推论（第 4.1 小节），我们得到：

命题 19。 $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{CM}_n^d)$ 的秩 等于 $\dim \mathrm{CM}_n^d = dn - \binom{d+1}{2}$。

5.2. (2,3)-稀疏拟阵与 CM_n 的代数拟阵的等价性。 从现在起[4]，我们只讨论 二维 *Cayley-Menger* 理想 $\mathrm{CM}_n := \mathrm{CM}_n^2$，它由 Cayley 矩阵的 5×5子式生成；其代数拟阵记为 $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{CM}_n)$。在这种情况下，该代数拟阵的秩恰好等于（2,3）-稀疏拟阵 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$ 在 n个顶点上的秩。该拟阵在 第 2 节中引入。我们通过证明这两个拟阵都同构于下文将要引入的二维一般线性刚性拟阵，来确立它们的等价性。

二维线性刚性拟阵。 设 $G=(V,E)$ 是一个图，且 (G,p) 是一个定义在点集 $2D$ 上的杆-铰框架 $\{p_1,\dots,p_n\} \subset \mathbb{R}^2$。

杆-铰框架 (G,p) 的刚性矩阵 $R_{(G,p)}$（若不会引起混淆，也简称为 R_G）是一个 $|E| \times 2n$ 矩阵，其成对的列 由顶点 $\{1,2,\dots,n\}$ 索引，行由边 $ij \in E$ 索引，其中 $i<j$。第 ij 行中的第 i 个元素为 $p_i - p_j$（2 个坐标），第 j 个元素为 $p_j - p_i$，其余元素均为 0。

刚性矩阵的定义取决于顶点和边的排列顺序；为消除这种歧义，我们固定顶点的顺序为 $1<2<\cdots<n$，并按 ij 的顺序排列边

[4]本节为完整起见而收录，可以跳过。

，其中 $i<j$ 按字典序排列。例如，设 $G=K_4$。那么各行依次对应 12、13、14、23、24 和 34，相应的刚性矩阵 R_{K_4} 为

$$R_{K_4}=\begin{pmatrix} p_1-p_2 & p_2-p_1 & 0 & 0\\ p_1-p_3 & 0 & p_3-p_1 & 0\\ p_1-p_4 & 0 & 0 & p_4-p_1\\ 0 & p_2-p_3 & p_3-p_2 & 0\\ 0 & p_2-p_4 & 0 & p_4-p_2\\ 0 & 0 & p_3-p_4 & p_4-p_3 \end{pmatrix}.$$

与矩阵相关的线性拟阵定义在由其各行构成的底集上。独立集是由线性无关的行组成的集合。

由框架诱导的二维线性刚性拟阵$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(G,p)}$是与该框架的刚性矩阵相关的线性拟阵。注意，它不仅取决于 G，还取决于平面构型 p。例如，若 $G=K_4$是一个构型，其中 K_4 的至多两个顶点位于同一条直线上；而 q 是一个构型，其中顶点 $\{2,3,4\}$位于同一条直线上，则秩$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(K_4,p)}>$秩$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(K_4,q)}$。

二维线性刚性拟阵$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{p}$是与完全图框架$(K_n,p)$的刚性矩阵相关的线性拟阵。

一般性。设 G 是一个图，并考虑 G的所有可能平面构型 p。如果二维杆-铰框架(G,p)的行空间的秩在所有这些构型中达到最大值，我们就称该框架为一般的。对于图 G，若 p 和 p' 是两个不同的一般平面构型，则二维线性拟阵$\mathrm{L}^{(G,p)}$和$\mathrm{L}^{(G,p')}$同构[24, 定理 2.2。1]。因此，我们可以将二维一般线性拟阵L_G定义为一般平面构型 p对应的二维线性拟阵$\mathrm{L}^{(G,p)}$。

一种替代性的观点 [50] 是使用坐标不定元 $p_i=\{x_i,y_i\}$，$i\in[n]$ 在变量集 $X_n\cup Y_n$上工作。我们将一般刚性矩阵定义为其元素属于这些变量的矩阵。如果存在一个 $r\times r$子式，它作为关于 $\mathbb{Q}[X_n\cup Y_n]$的多项式并非恒等于零，则一般刚性矩阵的秩至少为 r。对定理 3的另一种证明（见 [50] ）表明，一般刚性矩阵中极大独立的行集 K_n 对应于具有 n 个顶点的 Laman 图。Laman 图的一般刚性矩阵的极大子式在点集的零测集上为零，而零点集补集中的所有点都称为给定 Laman 图的一般的点。

代数 Cayley-Menger 拟阵与稀疏拟阵之间的等价性。现在我们可以证明:

定理 20。二维 *Cayley-Menger* 理想的代数拟阵$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{CM}_n)$与$(2,3)$-稀疏拟阵$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$同构。

证明。由定理 3 可知，对于给定的图 G，其 n 个顶点上的一般线性拟阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(G,p)}$ 与（2，3）稀疏拟阵 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$ 同构。接下来只需证明代数拟阵 $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{CM}_n$与一般线性刚性拟阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{K_n}$等价。

这一等价性源于 Ingleton 的一个经典结果 [29, Section 6]（另见 [17, Section 2]）：特征为零的域上的代数拟阵可在线性表示域扩张上表示，且该线性表示由雅可比矩阵给出。现在我们指出，Cayley-Menger 簇可实现为其 Zariski 闭包

即映射 $f = (f_{ij})_{\{i,j\}\in\binom{n}{2}} : (\mathbb{C}^2)^n \to \mathbb{C}^{\binom{n}{2}}$ 的像，该映射由边函数给出

$$(p_1, \ldots, p_n) \mapsto (||p_i - p_j||^2)_{\{i,j\}\in\binom{n}{2}}.$$

在 $(\mathbb{C}^2)^n$ 中，一般点处边函数的雅可比矩阵恰好是矩阵$2R_{(K_n,p)}$，对应于完全图的一般构形 p。

从现在起，我们将利用同构，在将代数回路表述为变量 $X \subset X_n$ 的子集与其图论解释（即作为刚性回路的图）之间自由转换。

注：超越二维？ 注意， d维线性刚性拟阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_n$与代数拟阵 $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{CM}_n^d)$ 是 (n, d)-Cayley-Menger 拟阵，并且根据与上述相同的雅可比矩阵论证，它们同构。然而，二维稀疏拟阵 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$ 与 $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{CM}_n)$ 之间的等价性，在更高维度下并不能扩展为某个已知的图拟阵。将 $dn - \binom{d+1}{2}$ 条件从二维的 $2n-3$)-稀疏性推广到维数 d，称为 Maxwell稀疏性 [41], ，并不满足拟阵公理；已知它对于维数 $d \geq 3$ 中的极小刚性而言，仅是必要条件而非充分条件。

6. 预备知识：结式。本节回顾有关结式的已知概念和事实；下一节将这一框架专门应用于 Cayley-Menger 理想。在第8节中，为了证明定理 2，我们将把 Cayley-Menger 理想中两个回路多项式的结式作为组合结式运算的代数对应物，该运算删除 e 两个回路的公共边。

结式。结式可以通过几种等价的方式引入 [22]。这里我们采用其作为 Sylvester 矩阵的行列式的定义。

设 f, $g \in R[x]$ 是 x 中的两个多项式，其系数属于某个多项式环 R，其次数分别为 $\deg_x f = r$ 和 $\deg_x g = s$，且 r 或 s 中至少有一个非零，并令

$$f(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_s x^s + \cdots + b_1 x + b_0.$$

关于不定元 x， f 和 g 的结式 记作 $\mathrm{Res}(f, g, x)$，它是由 f 和 g 的系数按照以下模式交错排列成行所构成的 $(r + s) \times (r + s)$ Sylvester 矩阵的行列式：

$$\mathrm{Syl}(f, g, x) = \begin{pmatrix} a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_r & a_{r-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_r & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \ddots & a_0 \\ b_s & b_{s-1} & b_{s-2} & \cdots & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_s & b_{s-1} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_s & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_s & b_{s-1} & b_{s-2} & \ddots & b_0 \end{pmatrix}$$

其中，仅包含 f 系数的子矩阵 S_f 的维数为 $s\times(r+s)$，仅包含 g 系数的子矩阵 S_g 的维数为 $r\times(r+s)$。除非 $r=s$，否则 S_f 和 S_g 的列 $(a_0\ a_1\ \cdots\ a_r)$ 和 $(b_0\ b_1\ \cdots\ b_s)$ 分别不会在 $\mathrm{Syl}(f,g,x)$ 的同一列中对齐（如上所示），而是第一列会根据 r 与 s 之间的关系，向第二列的左侧或右侧偏移。我们将默认使用结式以下众所周知的对称性和乘法性质：

命题 21。 设 f、g、$h\in R[x]$。 f与 g的结式满足

- $\mathrm{Res}(f,g,x)=(-1)^{rs}\mathrm{Res}(g,f,x)$,
- $\mathrm{Res}(fg,h,x)=\mathrm{Res}(f,h,x)\,\mathrm{Res}(g,h,x)$。
- f g在 $R[x]$ 中有公因子，当且仅当 $\mathrm{Res}(f,g,x)=0$。

前两个性质见 [22, 第 398] 页。第三个性质针对唯一分解整环，在未给出证明的情况下陈述于 [25, 第 9] 页。当 R 是域时，该性质的证明可见 [13, 第3章命题 3§6], ，并且通过希尔伯特零点定理可直接推广到多项式环。

结式与消去理想。 我们将处理多元齐次多项式f 和 g 中的 $\mathbb{Q}[X_n]$，其中某个特定变量 $x\in X_n$ 被单独提出。由于结式是 f 和 g的系数的多项式，因此其总体作用是将特定变量 x 进行消去。形式化地说，设 $X'\subset X$ 非空且 $R=\mathbb{Q}[X']$。设 f，$g\in R[x]$，其中 $x\in X\setminus X'$。根据结式的定义显然可知，$\mathrm{Res}(f,g,x)\in R$。我们将经常使用下面的命题来概括这一观察；其证明见 [13, 第 167]页。

命题 22。 设 I是 $R[x]$ 的理想，且 f，$g\in I$。则 $\mathrm{Res}(f,g,x)$ 属于消去理想 $I\cap R$。

齐次性质。 从下一节开始，我们将在 Cayley-Menger 理想中进行讨论，其中生成元和回路多项式都是齐次的。在 第8节 和第13节 中，我们将使用下面的命题。

命题 23。 设 $f=a_{m-r}x^r+\cdots+a_{m-1}x+a_m$和 $g=b_{n-s}x^s+\cdots+b_{n-1}x+b_n$是 $\mathbb{Q}[y_1,\ldots,y_t,x]$ 中次数为 m和 n的齐次多项式，分别为 a_i，$b_j\in\mathbb{Q}[y_1,\ldots,y_t]$ 是次数为 i和 j的齐次多项式，对所有$i\in\{m-r,\ldots,m\}$ 以及所有 $j\in\{n-s,\ldots,n\}$均成立。如果 $\mathrm{Res}(f,g,x)\neq 0$，则它是 $\mathbb{Q}[y_1,\ldots,y_t]$ 中的齐次多项式，其齐次次数为

$$m\deg_x g+n\deg_x f-\deg_x f\cdot\deg_x g=ms+nr-rs.$$

我们未能在文献中找到关于此命题的参考资料。在 [13, 第 454]（§7 第 8 章的引理 5）中，我们找到了以下特殊情形：设 f和 g是次数为 r和 s的齐次多项式，且 $\deg_x f=r$和 $\deg_x g=s$，从而 $f=a_0x^r+\cdots+a_1x+a_r$以及 $g=b_0x^s+\cdots+b_1x+b_s$。在此情形下，$\mathrm{Res}(f,g,x)$ 的齐次次数为 rs。下面的证明直接改编自这一特殊情形的证明，而后者又直接由命题 23 通过代入 $m\to r$ 和 $n\to s$ 从而得到 $rs+sr-rs=rs$。

证明。 令 $\mathrm{Syl}(f,g,x)=(S_{i,j})$ 为关于 x 的 f与 g 的 Sylvester 矩阵，并令（忽略符号），$\prod_{i=1}^{r+s}S_{i,\sigma(i)}$ 为其行列式的 Leibniz 展开中对应于 $[r+s]$ 的某个排列 σ 的一个非零项。

如果 $1 \le i \le s$，则非零项 $S_{i,\sigma(i)}$ 的次数为 $m-(r+i-\sigma(i))$；如果 $s+1 \le i \le r+s$，则其次数为 $n-(i-\sigma(i))$。因此，$\prod_{i=1}^{r+s} S_{i,\sigma(i)}$ 的总次数为

$$\sum_{i=1}^{s}[m-(r+i-\sigma(i))]+\sum_{i=s+1}^{r+s}[n-(i-\sigma(i))]=\sum_{i=1}^{s}(m-r)+\sum_{i=s+1}^{s+r} n-\sum_{i=1}^{r+s}(i-\sigma(i))$$
$$=s(m-r)+rn-0=m\deg_x g+n\deg_x f-\deg_x f\cdot\deg_x g.$$

7. Cayley-Menger 理想中的回路多项式。本节定义回路多项式于 CM 理想中，并通过它们的支集，将其与组合刚性回路联系起来。

A(CM$_n$)中的回路与CM$_n$中的回路多项式。代数拟阵A(CM$_n$)与稀疏拟阵S$_n$ 的同构（定理 20）立即意味着，这两个拟阵的回路集之间存在一一对应关系。我们将把稀疏回路 $C=(V_C, E_C) \in$S$_n$与代数回路 $\{x_{i,j} \mid ij \in E_C\} \in$A(CM$_n$)等同起来；相关集也同样处理。反过来，我们将把多项式 $f \in \mathbb{Q}[\{x_{i,j} \mid 1 \le i < j \le n\}]$的支集与图 $G_f=(V_f, E_f)$等同，其中

$$V_f=\{i \mid x_{i,j} \text{ or } x_{j,i} \in \operatorname{supp} f\} \text{ and } E_f=\{ij \mid x_{i,j} \in \operatorname{supp} f\}.$$

给定一个（刚性）回路 C，我们用 p_C 表示相应的回路多项式，它属于 Cayley-Menger 理想 CM$_n$。回顾定理 18，CM$_n$ 中回路 C 的回路多项式是唯一的（相差一个单位因子），且该多项式 p_C 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，并满足 $\operatorname{supp} p_C = C$。因此从现在起，我们将回路 C 与其回路多项式的支集$\operatorname{supp} p_C$等同 p_C。此外，p_C 生成消去理想 CM$_n \cap \mathbb{Q}[C]$。

命题 24。环 CM$_n$ 中的回路多项式是齐次多项式。

证明。由于环 $_n$ 由齐次多项式生成，环 ¨的任意约化格$_n$ 布纳基都只由齐次多项式组成（参见 §第 8 章第 3 节中的定理 2 [13]）。如果 C 是环 CM 中的一个回路$_n$，我们可以选择一个消元序，使得 C 补集中的所有不定元都大于 C中的不定元。关于该消元序的格¨布纳基必然包含 $\mathcal{G}_C$，因为 $\mathcal{G}_C \cap \mathbb{Q}[C]$ 必须生成消去理想 CM$_n \cap \mathbb{Q}[C]$。

示例：K_4 回路。最小的回路多项式可以在 CM 的生成元中找到$_n$。它们的支集与完全图的边相对应 K_4，这些完全图定义在 $[n]$的所有 4 个顶点子集上。回路多项式$p_{K_4^{1234}}$如下所示，对应于顶点 1234 上的一个 K_4。它是齐次的，次数为 3，含有 22 项，并且对每个变量的次数均为 2。

$$\begin{aligned}
p_{K_4^{1234}} = {} & x_{3,4}x_{1,2}^2 + x_{3,4}^2x_{1,2} + x_{1,3}x_{2,3}x_{1,2} - x_{1,4}x_{2,3}x_{1,2} - x_{1,3}x_{2,4}x_{1,2} \\
& + x_{1,4}^2x_{2,3} + x_{1,3}x_{2,4}^2 + x_{1,4}x_{2,4}x_{1,2} - x_{1,3}x_{3,4}x_{1,2} - x_{1,4}x_{3,4}x_{1,2} \\
& + x_{1,3}^2x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3}^2 - x_{2,3}x_{3,4}x_{1,2} - x_{2,4}x_{3,4}x_{1,2} + x_{2,3}x_{2,4}x_{3,4} \\
& - x_{1,3}x_{2,4}x_{3,4} - x_{1,3}x_{1,4}x_{2,3} - x_{1,3}x_{1,4}x_{2,4} - x_{1,3}x_{2,3}x_{2,4} \\
& - x_{1,4}x_{2,3}x_{2,4} + x_{1,3}x_{1,4}x_{3,4} - x_{1,4}x_{2,3}x_{3,4}.
\end{aligned}$$

回路多项式的结式。 设 f, g 是 Cayley-Menger 理想中的两个多项式，它们有一个x_{ij}公共变量。我们将它们视为关于x_{ij}的多项式，因此系数本身是其余变量的多项式。我们的主要观察是，Sylvester 矩阵中的项恰好是由对应于以下对象的变量构成支集的多项式：组合结式，其支集分别为 f 和 g 关于消元变量（边） ij的。

以下引理可直接由命题 22 得出证明，本文后续将频繁使用。

引理 *25.* 设 I *in* $\mathbb{Q}[X_n]$ 是一个理想， f、 $g \in I$ 是多项式，其支撑图分别为 $G_f =$ *supp* f 和 $G_g =$ *supp* g，且有 x_{ij} 一个公共变量，即包含边 $ij \in G_f \cap G_g$。设这些支撑图的组合结式为 $S =$ *CRes*(G_f, G_g, ij)，视为变量集合 $S \subset X_n$。那么 *Res*$(f, g, x_{ij}) \in I \cap \mathbb{Q}[S]$。

8. 将回路多项式表示为两个较小回路多项式的结式。现在我们准备完成第二个结果——定理 2——的证明。我们将说明，组合结式是经典多项式结式的组合类比，具体而言：若一个（刚性）回路 C 是由两个回路 A 和 B 通过消去边 e 后取组合结式 CRes(A, B, e) 得到的，那么回路多项式 p_A 和 p_B 关于不定元 x_e 的结式 Res(p_A, p_B, x_e) 的支集包含于 C，且属于由回路多项式 p_C 生成的消去理想 $\langle p_C \rangle$。当 Res(p_A, p_B, x_e) 不可约时，它将等于 p_C。但一般而言， p_C 只是它在 $\mathbb{Q}$ 上的一个不可约因子。实际上，Res(p_A, p_B, x_e) 中恰有一个因子（计重数）可能对应于 p_C；通过检查各因子的支集，并对支集为 p_C 的因子进行理想成员测试，即可推断出该因子。

这些事实总结于算法 8.1中，其中，为了提取回路多项式而对结式进行整理的工作单独列为算法 8.2。本节其余部分将证明算法 8.1和算法 8.2的正确性，并讨论若干尚未解决的开放问题。

算法 8.1 回路多项式结式($\{A, B, e\}$, $\{p_A, p_B, x_e\}$) 基于给定的组合结式分解计算回路多项式 输入：回路 A、 B 和边 e，使得 $C =$ CRes(A, B, e)。回路多项式 p_A 和 p_B，以及消元变量 x_e。输出：关于 C 的回路多项式 p_C。1：计算结式 $p =$ Res(p_A, p_B, x_e)。2：如果 p 是不可约的，则 3：$p_C = p$ 4：否则 5：$p_C =$清理结式(p) 6：返回 p_C

8.1. 算法 8.1的正确性。下面逐步进行分析。

步骤 1-4。 其正确性由定理 26 和推论 27下文确立。

定理 26。 设 C 是一个定义在 $n+1$ 个顶点上的稀疏回路，其对应的回路多项式为 p_C。存在定义在至多 n 个顶点上的稀疏回路 A 和 B，其回路多项式分别为 p_A 和 p_B，使得 p_C 是环 $\mathbb{Q}$ 上的不可约因子，且 $\mathrm{Res}(p_A、p_B、x_e)$，其中 $e \in A \cap B$。

证明。 给定一个 C 个顶点上的稀疏回路 $n+1$，我们可以找到两个稀疏回路 A 和 B，它们至多具有 n 个顶点，并且满足 $C = \mathrm{CRes}(A, B, e)$，其中 $e \in A \cap B$ 根据命题 9的证明可得。令 p_A 和 p_B 为相应的回路多项式。

多项式 p_A 和 p_B 包含于 CM_m 中，其中 $m \geq n+1$，且结式 $\mathrm{Res}(p_A, p_B, x_e)$ 是 $R = \mathbb{Q}[(A \cup B) \setminus \{x_e\}]$ 中的非恒定多项式，其支集包含于 C。由于 $\langle p_A, p_B \rangle \subset \mathrm{CM}_m$，我们有 $\mathrm{Res}(p_A, p_B, x_e)$ 包含于消去理想 $\mathrm{CM}_m \cap \mathbb{Q}[C] = \langle p_C \rangle$（根据 引理 25）。 ■

推论 27。 在定理 *26*的假设下，结式 $\mathrm{Res}(p_A、p_B、x_e)$ 是回路多项式，当且仅当它在 $\mathbb{Q}$上不可约。

如果结式总是不可约的，就不需要清理步骤。但一般而言，p_C 只会是 $\mathrm{Res}(p_A、p_B、x_e)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的某个不可约因子。

Le命题 28。 两个回路多项式的结式不一定总是回路多项式 *l.*

证明。我们通过一个例子证明该命题，这一例子可以轻易推广。由推论10可知，一般而言，一个稀疏回路可以有不止一种方式表示为两个回路的组合结式。如果 $C = \mathrm{CRes}(C_1, C_2, e) = \mathrm{CRes}(C_3, C_4, f)$ 和 p_{C_i} 对于 $i \in \{1, \ldots, 4\}$ 是相应的回路多项式，那么 $\mathrm{Res}(p_{C_1}, p_{C_2}, x_e)$ 和 $\mathrm{Res}(p_{C_3}, p_{C_4}, x_f)$ 一般将是 $\langle p_C \rangle$ 中不同的元素。图 10 中的 2- 连通电路有两个不同的CCR树：其中一个的根节点由两个 K_4的组合结式得到，另一个的根节点则由两个4顶点轮图的组合结式得到。在前一种情况下，相应的回路多项式的齐次次数为3，并且关于任意不定元都是二次的；在后一种情况下，它们的齐次次数为8，并且关于任意不定元都是四次的（见第13节）。利用命题 23计算结式的齐次次数，我们分别得到齐次次数8和48。两个结式的支撑集都是同一个回路，因此它们都属于消去理想 $\langle p_C \rangle$，但只有齐次次数为8的那个是回路多项式（通过检验不可约性得到验证）。 ■

我们可以按以下方式推广引理 28 证明中的例子。设 C 是一个具有 $n \geq 5$ 个顶点的稀疏回路。考虑将 C 表示为两个稀疏回路 A 和 B（每个至多有 n 个顶点）的组合结式的所有可能分解所构成的集合：

$$Decompositions(C) = \{(A, B, e) \mid C = \mathrm{CRes}(A, B, e), |V(A)|, |V(B)| \leq |V(C)|\}$$

以及相应回路多项式的所有结式所构成的集合：

$$Resultants(C) = \{\mathrm{Res}(p_A, p_B, x_e) \mid (A, B, e) \in Decompositions(C)\}.$$

回路多项式 p_C 在回路 C 的证明中 引理 28 具有这样的性质：它是 $Resultants(C)$ 中齐次次数最小的多项式。因此，人们可能会

猜想，对于任意稀疏回路 C， $Resultants(C)$ 中齐次次数最小的多项式就是 C的回路多项式；在这种情况下，由于我们可以根据齐次次数以及p_A、 p_B、 x_e中 x_e 的次数计算 Res(p_A 和 p_B (命题 23)，因此无需进行不可约性检查。然而，我们将在命题 48 中证明，一般而言，回路 C 的回路多项式不一定 单独存在于 $Resultants(C)$ 中；只有它的某个非平凡多项式倍数才是如此。这一事实引出了下面这个自然问题。

开放问题 29. 确定 Res(p_A, p_B, x_e) 为 p_C 的充分条件。

算法 8.2 CleanUpResultant(C, p)
从可约多项式中提取回路多项式。
前置条件： p 是另外两个回路多项式的结式。p
支集于一个回路 C上。

输入：一个回路 $C = \mathrm{CRes}(A, B, e)$，以及由 Res($p_A$,$p_B$,$x_e$) 得到的多项式 p。假设 p 是可约的。
输出：回路多项式 p_C for C。
1：因式分解 = 在 p 上进行因式分解 $\mathbb{Q}$2：因子 = 丢弃支集不等于 C3：
如果恰好剩下一个因子（可能具有重数） **则**4：p_C = 支集为 C5：**返回** p_C
6：**否则**7：对剩余因子应用 CM 理想成员测试8：p_C = 理想成员测试成功
的唯一因子9：**返回** p_C

如果 Res(p_A， p_B， x_e) 不可约，算法 8.1 会调用 **清理结式** (算法 8.1，现在我们分析其正确性。

步骤1。 在步骤1中，我们首先将 p 在 $\mathbb{Q}$上进行因式分解，这可以在多项式时间内完成（历史概述请参见 [31]）。除重数外，p 的不可约因子中恰好有一个属于 CM_n，而该因子正是回路多项式 p_C （因为 p_C 生成消去理想 $\mathrm{CM}_n \cap \mathbb{Q}[C]$）。可以通过两个步骤确定所需因子：分析所有因子的支集，以及执行理想成员测试。

步骤 2–5：分析不可约因子的支集。回顾一下，我们将一个回路 C与变量 $\mathrm{supp}\, p_C$ 对应的回路多项式的支集中的变量 p_C 联系起来 $\langle p_C \rangle$，并且消去理想 $\mathbb{Q}[C]$是 $C = \mathrm{CRes}(A、 B、 e)$ 的理想。由于 Res(p_A、 p_B、 x_e) $\in \langle p_C \rangle$，因此该结式在 $\mathbb{Q}$ 上的任一不可约因子，其支集都包含于 $\mathrm{supp}\, p_C$的某个子集，而该子集不一定是真子集。至少有一个因子的支集必须恰好等于 $\mathrm{supp}\, p_C$；如果只有一个这样的因子，那么该因子必定是 p_C。

开放问题 30. 确定使 Res(p_A， p_B， x_e) 恰好有一个（计重数）支集位于 C 的因子的充分条件。

目前尚无定论，因此我们继续进行步骤6。

步骤 6–9：理想成员测试。我们只考虑 Res(p_A, p_B, x_e) 中支集包含于 supp p_C的那些不可约因子（其余因子因不属于该理想而会自动舍弃）。接下来，我们必须测试每个因子是否属于 CM$_n$。这项测试可以通过 Gr¨obner 基算法进行，所用单项式序可以是任意的，不一定是消元序。第一个被判定属于 CM$_n$ 的因子是 p_C。

目前尚不清楚这项测试是否有必要：在使用我们的方法进行的实际实验中，我们尚未遇到需要进行这项测试的情况。

开放问题 31。请给出一个例子：两个属于 Cayley-Menger 理想的回路多项式的结式，其组合结式是一个回路 C，而该结式含有一个不同于 p_C、但支集包含于 supp p_C的因子；或者证明这种情况永远不会发生。

8.2. 理想成员测试的影响。我们采用的方法在计算回路多项式时，主要的复杂度瓶颈在于我们可能仍须计算一个 Gr¨obner 基，才能进行理想成员测试。如果事实证明这一步无法避免，那么已有结果表明，这项测试不会使我们的方法退化为代价高昂的 Gr¨obner 基计算。

理想成员测试确实是通过计算 Gr¨obner 基完成的，但不需要消元序，而消元序在各方面看来都不实用。消元序仅在计算消去理想时才是必要的（而这正是我们基于结式的算法所要避免的）：已有充分文献记载其表现不佳（参见 [4, 第 4]节和 复杂性问题，见 [13, §第 2]章第 10 节）。另一方面，分次序表现更好，但不能用于计算消去理想。

总之：我们的方法避免使用消元序，只需借助结式完成一个消元步骤，随后进行因式分解，并可能执行理想成员测试；该测试可以通过关于任意 单项式序的 Gr¨obner 基来完成。因此，我们可以自由选择预期具有最佳性能的单项式序来处理 CM$_n$ 。当然，很难事先知道哪一种良好 的序会达到这一点。算法这一部分仍有待进一步研究，并需结合前文所述的开放问题加以考察。

9. 从组合回路结式（CCR）树计算回路多项式。现在，我们已经具备了描述引言中提出的主要问题的算法解法所需的全部要素：给定一个刚性回路 C，计算其回路多项式 p_C。

其中一种实现方式由算法 9.1给出。该算法使用一个组合回路结式树（CCR 树） T_C ，该树已通过算法3.1预先计算得到。它根据高层级上支集为回路的多项式，递归计算树中更接近根节点的各层上支集为回路的多项式。该算法在处理下一层之前，会存储当前层上的所有回路多项式。当 CCR 树的某一层包含大量顶点时，这种方法会变得不切实际；例如，二叉 CCR 树为平衡树时就会出现这种情况。算法 9.1的正确性直接由算法 3.1和算法 8.1得出。

Algo算法 9.2 采用另一种方法，并按后缀序遍历 CCR 树 .

算法 9.1 回路多项式(T_C)：从 CCR 树中归纳地计算回路多项式。输入：一棵 CCR 树 T_C，其根节点是一个回路 C。输出：回路多项式 p_C，对应于 C。方法：按层级自底向上遍历该树 T_C。1： $h =$ 的高度为 T_C2：层级 $= h - 1$3：当层级 ≥ 0 时，执行 4：在当前层级的所有节点 C_i 处，使用回路多项式结式（算法 8.1），根据其两个子节点处的多项式 $\{C_j, C_k\}$ 计算回路多项式 p_{C_i} 5：层级 $=$层级 $- 1$6：返回 p_C

这自然可以描述为一个递归过程。递归栈会沿着 CCR 树中从根节点到某个节点的路径，保留左子节点的回路多项式，因此其空间复杂度取决于树的深度。

算法 9.2 递归回路多项式:
由 CCR 树生成回路多项式，采用后缀遍历处理 输入：一棵根节点为回路 T_C 的 CCR 树。 输出： p_C 的回路多项式，其中 C。 方法：按后缀序遍历树 T_C。 1: 如果 C 与 K_4 同构，则 2: 按适当的顶点重标记对$p_C = p_{K_4}$ 进行标记 3: 返回 p_C4: 否则 5: 令 T_A、T_B 为 T_C的左、右子树，其中 $C =$ 为 CRes(A, B, e)，且 x_e 为消元变量。 6: $p_A =$递归回路多项式(T_A) 7: $p_B =$ 递归回路多项式(T_B) 8: $p_C =$回路多项式结式$(\{A, B, e\}, \{p_A, p_B, x_e\})$（算法 8.1） 9: 返回 p_C

寻找用于计算特定回路多项式的性能最优 *CCR* 树，是一个仍有待研究的问题。预计，在结式步骤中涉及的多项式的深度、宽度和各种代数参数之间取得平衡的树，将带来最佳性能。

9.1.“延迟清理”启发式方法。算法9.1和9.2中描述的算法会在与 CCR 树每个节点相关的**清理结式**中调用**回路多项式结式**。这并非必要：我们可以只计算结式，而不调用整个**回路多项式结式**(算法 8.1)，并将结式多项式的清理延后

直到到达根节点，或确有必要时再进行清理。确有必要是指以下任一情形：(a) 结式为零；或 (b) 清理结式时，为进行理想成员测试而计算格罗布纳基所需的资源（时间和内存）开销过大，例如耗时过长、耗尽可用内存，或导致程序崩溃。这种简单的“延迟清理”启发式方法在实践中可能有用，也就是说，在某些特定情况下，它可能会加快计算。现在我们证明，只要按如下方式处理为零的结式，这种方法就是正确的。

设 $r_C = \text{Res}(r_A, r_B, x_e)$ 为两个先前计算得到、尚未清理的多项式 r_A 和 r_B 的结式。它们的因子中分别包含回路多项式 p_A 和 p_B，且这两个因子并不相同。若 r_C 为零，则 r_A 和 r_B 有一些公因子。我们进行一次简化清理，对 r_A 和 r_B 因式分解，去除它们的公因子，得到 q_A 和 q_B，然后重新计算新的（非零）结式 $q_C = \text{Res}(q_A, q_B, x_e)$。这种简化清理过程不需要进行理想成员测试。结式 q_C 定义良好，因为 q_A（分别为 q_B）的因子中包含回路多项式 p_A（分别为 p_B），因此 x_e 属于两者的支集。结果式的乘法性（命题 21 (ii)）意味着，简化后的多项式 q_A 和 q_B 的结式 q_C 将非零，并且包含一个唯一因子（重数除外），该因子等于 $C = \text{CRes}(A, B, e)$ 对应的回路多项式 p_C。因此，算法可以采用“延迟清理”的方式继续执行，直到遇到另一个为零的结式，再进行因式分解，依此类推，直至到达根节点；此时必须进行完整清理。

我们不知道结式为零的情况是否会出现，因为在我们的实验中只遇到过不可约多项式。高性能计算或许有助于回答以下尚未解决的问题：

开放问题 32. 找出一个例子，其中在延迟清理回路多项式计算的中间步骤中出现可约多项式。

开放问题 33. 找出一个例子，其中延迟清理回路多项式计算具有一个等于零的中间结式。

开放问题 34. 提供实验性证据，说明“延迟清理”启发式方法是否能够加快回路多项式计算。

9.2. CCR树的复杂度度量。 回顾 推论10 指出，一个回路 C 可以具有多个 CCR 树。回路多项式本身与这一选择无关，但在其计算过程中，最好使中间多项式的规模尽可能小，这里的规模是指单项式项的数量和齐次次数。换言之，对于刚性回路 C 我们希望能够确定一个最优CCR树。代数算法9.1和9.2的复杂度受 CCR 树中编码的多个因素影响：其大小（结式运算的总数）、宽度（最大层级上的节点数）、深度（从根节点到叶节点的最长路径），以及每个内部节点处消元边的具体性质。这引出了以下问题：

开放问题 35. 定义一种有意义的 CCR树复杂度度量，以实现对更大规模[5] 回路多项式的有效计算。

[5]例如，比第13节中报告的更大。

可以根据 命题 23中给出的公式，尝试构造一棵使每一层的齐次次数最小化的 CCR 树；然而，目前尚不清楚这是否是最佳方法。事实上，在第一个算法中，节点处回路多项式的次数可能小于 命题 23所预测的次数，因为该回路多项式可能只是一个因子，而不是整个结式。

识别最优树将有助于实际计算回路多项式。本文 第13节 中稍后报告的具体结果之所以能够实现，是因为我们可以在 $n < 7$时，从少量可能性中轻松选出一棵最优结式树，但这个集合会随着 n而迅速增大。理想情况下，我们应能够直接计算出一棵最优 CCR 树，而不必在搜索最优树时遍历所有可能性。

开放问题 36。 改进算法 3.1 （及其分析），使其能够根据一种 CCR树复杂度度量生成一棵 最优 CCR 树，从而实现基于结式的回路多项式高效计算。

利用迄今为止开发的方法，我们能够计算 CM_6 中除 $K_{3,3}$-加一回路之外的所有回路多项式。在结式步骤，即算法 8.1的步骤1中，计算$K_{3,3}$-加一回路的回路多项式耗尽了所有内存。然而，通过修改算法，使其也允许在 CM_n 中支集为非独立集 、但不一定是回路的多项式，我们成功计算出了 $K_{3,3}$-加一回路的回路多项式。现在我们介绍这一扩展算法。

10. 组合结式树。 我们推广第9节中的算法，允许刚性拟阵的所有相关集出现在节点处，以期提升计算性能。

首先，我们放宽由第 3.4 小节中的构造对结式树施加的一些约束。内部节点和之前一样，对应于组合结式运算，但：(a) 它们不再仅限于应用于回路或仅生成回路；(b) 叶节点可以标记为除 K_4的图之外的其他图；(c) 从叶节点到根节点的路径上，各节点对应的图序列不再受限于其顶点集必须严格单调递增。

定义37。 满足以下条件的有限相关图集合 Gen ： $K_4 \in \mathrm{Gen}$ 称为一个生成元集合。

Gen 中的生成元将是允许用于标记叶节点的图。为了生成（组合）回路并计算（代数）回路多项式，我们选择一组生成元，详见第 11 节，这些生成元在刚性拟阵中是相关的。

定义38。 一个 生成元在 *Gen*中的组合结式树（简称 CR树） 是一个有限二叉树，满足：*(a)* 其叶节点标记有来自 Gen 的图，且 *(b)* 每个标记有图 G 和一条边 $e \notin G$ 的内部节点 G_1 对应于对标记其子节点的两个图 G_2 所应用的组合结式运算。具体而言， $G = \mathrm{CRes}(G_1, G_2, e)$，其中边 $e \in G_1 \cap G_2$。

因此，CCR树是 CR树的特殊情形。图 12展示了一个并非 CCR树的 CR树示例。

Lemma39. 如果生成元 Gen 是相关图（在刚性拟阵中），那么 *al* l

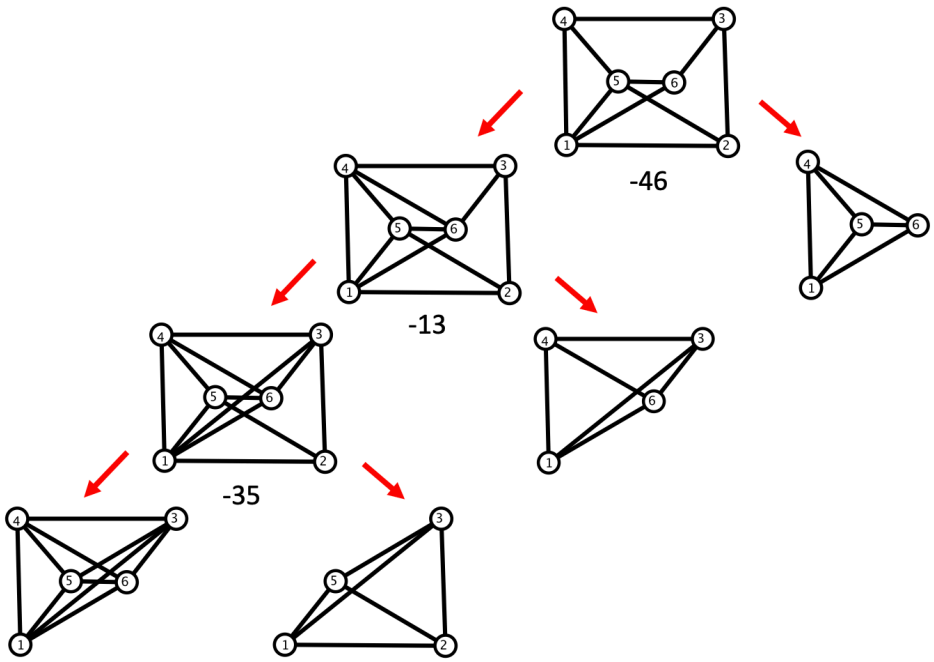

图 12：一个组合结式树，对应于 $K_{3,\ 3}$ 加一回路：其最左叶节点以及沿最左路径通向根节点的两个内部节点，均标记为不是回路的刚性依赖图。

组合结式树中各节点（包括内部节点，而不只是叶节点）所标记的图也相关。

证明。证明采用对树节点的归纳法，基例为叶节点。我们将 G 的一条边称为冗余边，若删除该边后图仍保持刚性；否则称该边为关键边：删除它会使图变为柔性。对于归纳步骤，设 G_1 和 G_2 是标记某节点两个子节点的依赖图，而该节点标记为$G = \mathrm{CRes}(G_1,\ G_2,\ e)$，其中 $e \in E_\cap$ 是公共交集 $G_\cap$中的一条边。根据 e 在两者中是否均为冗余边，或在至少一个中为关键边 G_1 和G_2，我们分两种情况讨论。每种情况下，我们都找出组合结式图 G 的一个子集，该子集违反 Laman 性质，因此可以得出整个图 G 是相关的。

情形 1： e **在** G_1 **和** G_2**中均为冗余。** 这意味着存在边子集 $C_1 \subset G_1$ 和 $C_2 \subset G_2$，二者都包含边 e，且都是回路（它们各自的生成顶点集可能包含额外边，但这只会使我们更容易得到所需结论）。它们的交集 $C_1 \cap C_2$ 不能是相关的（根据回路的极小性）。因此，它们的并集在去除边 e 后至少有 $2n_\cup - 2$ 条边（参见 引理 6的证明），因此它是相关的。

情形 2： e **在** G_1 **中关键，或在** G_2**中关键。** 假设它在 G_1 中是关键的。由于 G_1是相关的，且 $e \in G_1$ 是关键的，这意味着从 G_1 中移除 e 会生成一个仍然相关的柔性图。作为一个柔性图，它会分裂成边不相交的刚性分量；

在这种情况下，这些分量中至少有一个 R 是相关的。接着，由于移除 e不会影响 R，因此可知 R，从而结式图 $G = \mathrm{CRes}(G_1, G_2, e)$仍然是相关的。 ■

定义 40。 给定一个回路 C，对于 C，一个有效的组合结式树是指这样一棵组合结式树：其根节点为 C，且其叶节点（从而所有节点）都是相关图。

图 12 中的示例是 K_3的有效组合结式树，3加一回路。在下一节回顾必要的代数概念后，我们将在第 13.4 小节 中使用该示例，以演示我们在第 12 节中描述的广义代数消元算法。

11. 二维 Cayley–Menger 理想的生成元。 我们使用生成元集合 GenCM_n，它们生成二维 Cayley-Menger 理想 CM_n，该集合由所有 5×5 阶子式组成，这些子式取自 $(n+1) \times (n+1)$ Cayley 矩阵。每个生成元 $g \in \mathrm{GenCM}_n$ 都与其支撑图 G_g相对应，该支撑图的定义见 第 7 节。为了说明在 第 10 节定义广义组合结式树时对图族 Gen 可能作出的选择，我们现在将所有生成元的支撑图制成表格；其中忽略非零常数倍、重新标号以及图同构。

为了找出所有这些图，只需考虑 GenCM_{10} 中所有的 5×5 CM 的子式10。使用计算机代数软件包可以验证，该集合包含 109 619 个不同的子式，其中 106 637 个具有不同的支撑图。利用 Mathematica 的 IsomorphicGraphQ 函数将它们约化为 14 个图同构类，其中 11 个显示在第 11 节中。仅有两个代表的顶点数少于 6 个，它们是 K_4 和K_5。在具有 6、7、8 个顶点的图中各有三个同构类（其中一个是 K_6），具有 9 个顶点的图中有两个同构类，具有 10 个顶点的图中有一个同构类。对于给定的支集，相应的生成元多项式在同构意义下（即由顶点重标记诱导的变量重标记下）是唯一的，但有少数例外：对于 K_5，我们找到了 3 个不同的（非同构）多项式。

请注意，CM 中可能存在一些多项式$_n$，它们与 GenCM 中的某个生成元具有相同的支集，但它们本身并不是由 Cayley 矩阵的单个 5×5 子式得到的。例如，如果 $p \in \mathrm{GenCM}_n$ 的支集为 K_5，而 $q \in \mathrm{GenCM}_n$ 的支集为 K_6，且 $\mathrm{supp}\ p \subset \mathrm{supp}\, q$，那么 $p+q$具有某个生成元在 K_6 上的支集，但其本身不属于 GenCM_n。

12. 算法：由组合结式树计算回路多项式。现在我们已经具备了描述算法 12.1所需的全部要素，该算法计算回路多项式 p_C，其对应的回路为 C，输入为给定的组合结式树 T_C；如果无法计算，则返回一条消息 p_C 说明无法使用 T_C进行计算。与第9节中的算法一样，该算法从树的各个节点开始计算结式，首先计算支集位于 CM_n 叶节点上的生成元的结式。在根节点处，从该根节点结式的不可约因子中提取回路多项式 C。其主要区别在于中间（非根）节点，具体如下方的算法 12.1所述。这是因为非叶节点处所需的多项式并非由回路支集确定，因此不一定是支集位于所需相关图上的不可约多项式，正如第9节中的情形。因此，它们可能包含不属于 Cayley-Menger 理想的因子；并且可能出现这样的情况：它们中属于 Cayley-Menger 理想的因子均不以所需图为支集，但它们与其他因子的

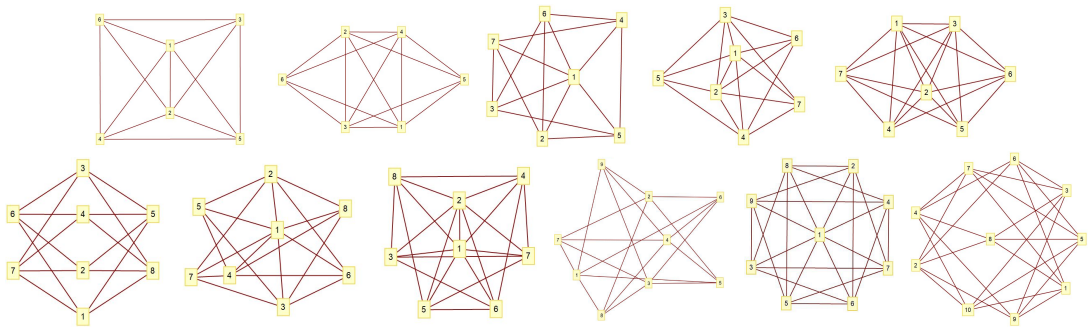

图 13：Cayley-Menger 生成元的 14 个图同构类由三个完全图 K_4、K_5、K_6 以及此处所示的、包含 6 至 10 个顶点的 11 个图组成。

乘积却是。更进一步，某个中间结式 Res(f，g，x) 可能为零，而 x 仅出现在 f 和 g 的公因子的支集中；在这种情况下，算法无法沿所选的树 T_C继续运行。然而，明确找出此类示例（这可能需要对巨大多项式进行实验）并证明可能发生或不可能发生的情况，仍然是一个开放问题（我们目前尚未找到任何示例）。

算法 12.1 计算组合结式树某个节点上有支集的 Cayley-Menger 理想中的多项式——简化版本。

输入：组合结式树 T_C 的非叶节点 G。在 G 和 x_e 的子节点上有支集的多项式 v、$w \in \mathbf{CM}_n$，以及待消去的不定元。输出：在 G 上有支集的多项式 $p \in \mathbf{CM}_n$，或一条说明无法计算 p 的字符串。1：计算结式 $r = \mathbf{Res}(v, w, x_e)$。2：如果 $r = 0$，则返回“无法计算 p”。3：在 $\mathbb{Q}$ 上对 r 进行因式分解，并将所有在相关集上有支集的因子存储到候选列表 candidates 中。4：如果 candidates $= \{p\}$，则 5：如果 $\mathbf{supp}\, p = G$，则返回 p；6：否则返回 $p \cdot \Pi_{x \in G \setminus \mathrm{supp}\, p} x$；7：否则 8：对所有 $p \in$candidates 执行 9：使用理想成员测试检验 p 是否属于 $\mathbf{CM}_n$；10：如果 $p \in \mathbf{CM}_n$，则 11：如果 $\mathbf{supp}\, p = G$，则返回 p；12：否则返回 $p \cdot \Pi_{x \in G \setminus \mathrm{supp}\, p} x$

算法 12.1 的正确性证明算法 12.1。回顾一下，$\mathbb{Q}[G]$ 表示由不定元构成的多项式环x_{ij}，其 $i < j$ 由以下边给出：ij G。

步骤 1–2：计算结式。如果结式为零，算法将终止，并提示无法沿着 T_C 继续。我们可以尝试将其中一个或

两者中的 v 和 w 替换为 CM 中其他n 具有适当支集、从而能够得到非零结式的多项式。不过，在本文中，我们假设在之前的调用中所作的所有选择算法 12.1 （例如第 9 行中的候选项选择）都保持不变。

步骤 3：消去理想 $\mathrm{CM}_n \cap \mathbb{Q}[G]$ 是素理想，因此 r 的至少一个不可约因子 p属于 CM_n。

步骤 4：如果恰好有一个支集为相关集的因子 p，那么该因子必然属于 CM_n。这由 $\mathrm{CM}_n \cap \mathbb{Q}[G]$的素性推出：为简单起见，假设 r 分解为 $q_1 \cdot q_2 \cdot p$，且只有 p 的支集为相关集。如果 $q = q_1 \cdot q_2$ 的支集为独立集，则它不属于 CM_n，因此 p 必属于 $\mathrm{CM}_n \cap \mathbb{Q}[G]$。如果 q的支集为相关集，则 $q \in \mathrm{CM}_n$ 将意味着 q_1 或 q_2 中至少有一个属于 CM_n，但两者均不属于。因此在任何情况下都有 $p \in \mathrm{CM}_n \cap \mathbb{Q}[G]$ 。

步骤 5–6：现在对于 p有两种可能：它的支集要么包含在 G上，此时我们返回它；要么包含在 G的一个真子集上。如果它的支集是 G的一个真子集，原则上我们可以返回任意满足 $\operatorname{supp} qp = G$ 的多项式 qp 。回想一下，结式具有乘法性（命题 21），因此在后续调用算法时，在计算 $\operatorname{Res}(qp, f, y) = \operatorname{Res}(q, f, y) \operatorname{Res}(p, f, y)$ 时，对于某些 f 和 y，我们可以暂不计算因子 $\operatorname{Res}(q, f, y)$。另一种方法是修改结式树 T_C，将 G 替换为由 p 的支集给出的图 G_p （定义见第 7 节）。不过，在我们的表述中，结式树始终保持不变，并选择 q 简单地作为 $G \setminus$ 中所有不定元的乘积 $\Pi_{x \in G \setminus \operatorname{supp} p} x$，其中 $G \setminus \operatorname{supp} p$。

在我们的实验中，我们尚未遇到这样的例子：某个支集为相关集的真子集 G 的不可约因子出现。我们将寻找这样的例子，或证明这种情况不可能发生，留作一个开放问题。

开放问题 41. 考虑组合结式树中的一个中间节点 G，并令 $r = \operatorname{Res}(f, g, x_e)$ 为支集在 G 上的结式，其中所用多项式的支集分别位于 G的子节点上，如 算法 12.1所示。找出这样的例子，使得 r 恰好有一个支集为相关集的不可约因子，且该相关集是G的真子集；或者证明这种情况永远不会发生。

步骤 7–12：如果有多个支集为相关集的不可约因子，我们会按某种顺序将它们存入列表候选列表 中。然后按照它们在列表候选列表中的存储顺序，使用理想成员测试检查这些因子是否属于 CM_n 。第一个通过测试的不可约因子，如果其支集为 G，则返回该因子；否则，按照上文所述的相同方式，将其补全为支集在 G 上的多项式，然后返回。

我们尚未遇到在相关集上有多个不可约因子的例子，不过这很可能是因为我们只能对至多含有 8 个顶点的图进行计算。

开放问题 42. 考虑组合结式树中的一个中间节点 G，并令 $r = \operatorname{Res}(f, g, x_e)$ 表示支集为 G、且关于 G的子节点所支集的多项式计算得到的结式，如 算法 12.1所示。寻找 r 在相关集上含有多个不可约因子的例子，或者证明这种情况永远不会发生。

Since G 不一定是回路，消去理想 $\mathrm{CM}_n \cap \mathbb{Q}[G]$ 也不再一定是主理想，

我们也无法再保证存在唯一的不可约因子p，使其既支集于 G，又属于 CM$_n$。我们在实验中尚未遇到这种可能性，因此将其留作一个开放问题。

开放问题 43. 如果 开放问题 42 的答案是肯定的，请找出具有两个或更多支集于 G 上的不可约因子的例子，或者证明这种情况绝不会发生。

算法 12.1 的改进。如果在 T_C 的某个节点处有 Res$(v, w, e) = 0$，我们可以尝试用 CM$_n$ 中其他适当多项式替换 v 或 w。特别是，我们可以从候选列表中选择不同的多项式，尝试重新计算 v 或 w（第 9 行）。然而，这种方法可能需要多次重新计算 v 和 w，而且我们仍然无法保证 Res(v, w, x_e) 非零。我们将确定 v 和 w 满足什么条件才能使 Res(v, w, x_e) 非零，留作一个开放问题。

开放问题 44. 考虑在 T_C 的某个中间节点处有 Res$(v, w, e) = 0$ 的情形。是否总能通过选择候选列表中的另一个多项式（算法第 9 行），使用 算法 12.1 重新计算 v 和 w，使得 Res$(v, w, e) \neq 0$?

或者，我们可以替换 G 的结式树的一个或两个分支（取作 T_C 以 G为根的子树），替换后的树将导出在 G处非零的结式。为此，拥有一种枚举相关图的结式树的算法将会很有用。与 CCR 树相比（开放问题 13），这种枚举似乎要困难得多，而且尚不清楚能否有效地解决以下问题：

开放问题 45。 开发一种枚举相关图的结式树的算法。

如果 开放问题 42的答案是肯定的，我们就必须决定输出哪个多项式。在 算法 12.1 中，选择并返回第一个具有相关支集且通过理想成员测试的不可约因子（必要时用 $G \setminus \operatorname{supp} p$中的不定元补齐）。然而，如果我们的目标是在该算法作用于 G的父对象时简化结式计算，那么通过理想成员测试的第一个不可约因子可能并不是最佳选择。例如，相对于其他通过理想成员测试的因子，首个通过测试的因子在后续调用算法时将被消去的不定元上可能具有非常高的次数，从而导致 Sylvester 行列式的维数非常大。

当 r 在 CM$_n$ 中具有多个 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 不可约因子时，我们提出以下判定标准。从集合 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 中选择多项式：

i) 在调用 算法 12.1 处理 G 的父对象时，选择关于待消去不定元次数最小的多项式。ii) 如果有多个这样的选择，则选择齐次次数最小的多项式。iii) 如果仍有多个选择，则选择单项式数量最少的第一个多项式。

准则（i）确保当算法作用于 G 的父对象时，Sylvester 行列式的维数将达到可能的最小值；准则（ii）确保结式

将具有可能的最小齐次次数（命题 23），而准则（iii）则使 Sylvester 行列式中作为条目出现的单项式总数达到最少。

这种决策标准的选择可能并非最佳方案，我们将制定其他决策标准作为一个开放问题。

开放问题 46. 如果 开放问题 42 的答案为肯定，则建立用于决定将哪个多项式作为输出返回的标准。

13. 实验。 本节讨论我们使用本文所述算法开展的实验工作。这些工作实现了对 CM_6 中所有回路多项式的有效计算。 表1 总结了相关结果。据我们所知，除 K_4的回路多项式外，这些多项式此前均未被计算过。每个回路多项式示例均按顶点重标号后的形式给出。本节计算得到的所有回路多项式均可在 GitHub 仓库 [39]中获取。为便于比较，我们还列出了一些使用 Gr¨obner 基方法完成或尝试完成的初步计算。

该 K_4 回路。 唯一能够直接作为 CM 的生成元获得的回路多项式n 对于任意 $n \geq 4$，且不需要 Gr¨obner 基方法或结式计算，是某个 K_4 图（可能经过重新标号）的回路多项式。该多项式有 22 项，齐次次数为 3，并且关于其中任意一个变量的次数均为 2。

13.1. 通过 Gr¨obner 基计算回路多项式。 原则上，可以通过计算 $p \in \mathrm{CM}_n$ 的 Gr¨obner 基 $\mathcal{G}_{\mathrm{CM}_n}$ 来计算回路多项式 $_n$，其中关于集合 消元序 满足 $\{x_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ 补集中的所有不定元都大于 supp p 中的所有不定元 p。

给定 $\mathcal{G}_{\mathrm{CM}_n}$，确定理想 $\langle p \rangle = \mathrm{CM}_n \cap \mathbb{Q}[\mathrm{supp}\, p]$ 的 Gr¨obner 基 $\mathcal{G}_{\langle p \rangle}$ 是直接的：它就是交集 $\mathcal{G}_{\langle p \rangle} = \mathcal{G}_{\mathrm{CM}_n} \cap \mathbb{Q}[\mathrm{supp}\ p]$。因此，支集为 supp p 的 $\mathcal{G}_{\mathrm{CM}_n}$ 中唯一元素正是 p，可能还要乘以一个非零标量。

Gr¨关于 CM_n 的消元序 Gröbner 基。 我们仅能针对 ¨计算关于消元序的 Gröbner 基 $n = 5$。对于 $n = 6$，我们未能在合理的时间内通过 Mathematica 或 Macaulay2 完成此类计算。

由两个回路多项式生成的理想的 Gröbner 基。为了进行比较，我们介绍另一种曾尝试过的方法。该方法考虑了第 3 节中呈现的组合结构，但使用 Gröbner 基而非结式。设 A、 B 和 C 为回路，且 $C = \mathrm{CRes}(A, B, e)$，其中 e 是 A 和B的公共边。要计算回路 C的回路多项式 p_C，只需计算理想 $\langle p_A, p_B \rangle$ 的一个 Gröbner 基 β 即可；该理想由 A 和 B的回路多项式生成，并采用一种消元序，使得消去 $(A \cup B) \setminus C$ 中的不定元。这是由 $\langle p_A, p_B \rangle \cap \mathbb{Q}[C] \subseteq \mathrm{CM}_n \cap \mathbb{Q}[C] = \langle p_C \rangle$得出的；若 $\langle p_A, p_B \rangle$ 是素的，则 Gröbner 基 β 将恰好等于 $\beta = \{p_C\}$。否则，还需要对每个多项式中支集在 C 上的因子进行因式分解，并随后对这些因子进行理想成员测试。

通过这种方法，我们能够计算出除$K_{3、3}$加一回路之外的所有具有6个顶点的回路的回路多项式。计算二维双香蕉耗时0。164秒，计算5顶点轮耗时略超过3小时，而计算

表1：结果：所有具有 $n \leq 6$ 个顶点的回路多项式、两个具有 $n = 7$个顶点的回路多项式，以及两个具有 $n = 8$ 个顶点的回路多项式。Gr¨obner方法是对由两个回路多项式生成的理想计算Gr¨obner基，详见第13.1小节。结式 A9.1方法是算法 9.1，结式 A12.1方法是算法 12.1。

n	回路	方法	比较 time (秒)	项数	Hom. de-gree
4	K_4	行列式	0.0008	22	3
5	4 个顶点的轮图	Gr¨obner 合成 A9.1	0.02 0.013	843	8
6	二维双香蕉	Gr¨obner 合成 A9.1	0.164 0.029	1 752	8
6	5顶点轮	Gr¨obner 合成 A9.1	10 857 7.07	273 123	20
6	Desargues 加一图	Gr¨obner 合成 A9.1	454 753 14.62	658 175	20
6	$K_{3,3}$-加一	合成 A12.1	979.42	1 018 050	18
7	二维双香蕉 $\oplus_{16}$ K_4^{1567}	合成 A9.1	38.14	1 053 933	20
7	二维双香蕉 $\oplus_{56}$ K_4^{4567}	合成 A9.1	89.86	2 579 050	20
8	二维双香蕉 $\oplus_{45}$ K_4^{4578}	合成 A9.1	109.8	3 413 204	20
8	二维双香蕉 $\oplus_{56}$ K_4^{5678}	合成 A9.1	302.47	9 223 437	20

Desargues-plus-one 电路多项式（见表1）。

13.2. 使用结式计算回路多项式。现在，我们通过计算最多含 W_4 个顶点的所有回路多项式，展示我们的算法的有效性。这些回路多项式分别支集于五类图上：4-轮图 K_4（含有 4 个圈顶点和位于中心的第 5 个顶点）、5-轮图、由两个 $K_{3,\ 3}$-和得到的二维“香蕉双图”、Desargues-plus-one 图，以及 图 6和图 2中所示的 3-plus-one 图。我们这里只记录特定结式树的根节点的计算。对于每次计算，我们都选择了效率最高的结式树。每个回路的相关参数（规模、齐次次数）及其计算时间的比较见表1。此外，我们还使用 2-和结式计算了两个含 7 个顶点的回路以及两个含 8 个顶点的回路，并由此得到最优的结式树。

4 个顶点的轮图。这个回路的计算速度非常快。除重新标记外，它恰好有一棵含有两个 K_4 叶节点的结式树，并且只需进行一次结式运算，即可得到一个不可约多项式。我们使用 Mathematica 验证了其不可约性。该多项式有 843 项，齐次次数为 8，并且对其中每个变量的次数均为 4。

“二维双香蕉”。 回顾图10 可知，二维双香蕉可以由两个 K_4的组合结式得到，也可以由两个4-轮图得到。第一棵树带来了非常快速的计算，并且所得结式是一个不可约多项式。该多项式有1752项，其齐次次数为8，并且关于每个变量的次数均为4。

然而，在我们的计算机上，我们未能使用第二棵结式树计算该回路多项式，也未能将其计算为由两个4-轮图的回路多项式生成的理想相对于某个消元序的格¨罗布纳基。下面给出一种可能的解释。回顾命题 23 允许我们预测两个齐次多项式的结式的齐次次数。特别地，两个4-轮图的结式的齐次次数为48，而两个 K_4 图的回路多项式的结式的齐次次数为8。因此，我们可以立即看出，应当舍弃前者，因为在后一种情况下我们得到的是一个简单得多的多项式。这个例子启发了如下猜想：

开放问题 47. 证明：在将回路多项式计算为两个回路的结式时，2-和比任何其他类型的组合结式都更高效。

5顶点轮。 我们从一个4-轮图和一个 K_4计算得到了这个回路，并直接得到一个不可约多项式。我们在 Mathematica 中验证了其不可约性。该多项式有273123项，其齐次次数为20，并且对每个变量的次数均为8。

Desargues 加一图回路。 刚性理论文献将图 D （其边为 $\{12, 14, 15, 23, 26, 34, 36, 45, 56\}$ ）称为 Desargues图，这是因为它与源自经典 Desargues构型直线的关联结构相似。图 D可以通过向其中恰好加入一条缺失的边而补全为一个回路（我们称之为 Desargues-plus-one 回路）；无论选择哪条缺失的边，所得图均同构。该回路可以通过一个4-轮图（其环为1，2，3，4和5位于中心）与一个 K_4 （顶点为2，3，5，6）作组合结式得到，消去边35。利用先前计算的4-轮图回路多项式，结式计算耗时不到15秒；与 Gr¨obner 基方法耗时5天6小时相比，这一结果令人印象深刻。所得结式多项式不可约，齐次次数为20，在变量 $x_{2,\ 5}$ 上的次数为12，在其余变量上的次数为8。

13.3. $K_{3,\ 3}$**加一回路。** 顶点划分为 $\{1, 4, 5\} \cup \{2, 3, 6\}$ 的完全二分图 $K_{3,\ 3}$ 是最小刚性的。通过添加缺失边中的恰好一条边，可以将其补成为一个回路。所有这些选择都会得到同构图。

我们无法使用 算法 9.1或算法 9.2计算其回路多项式。在结式步骤中，所有尝试都完全耗尽了全部计算资源。然而，我们通过 第 12 节中所述的方法取得了成功。该方法使我们能够完成全部计算，具体步骤见 第 13.4 小节。该不可约电路多项式包含 1018050 项，齐次次数为 18，并且关于每个变量的次数均为 8。

The 这个多项式的性质蕴含了一个有趣的事实，这对于更好地

理解算法 8.1很有帮助：它间接给出了第一个回路多项式的例子，在该多项式上，任何可能的组合结式树中的最后一个结式步骤都不可能产生不可约多项式。因此，在根节点处必须进行因式分解，并检查各因子是否属于 Cayley-Menger 理想；可以通过检查支集，或通过在 Cayley-Menger 理想中进行归属检验来完成。该证明很有启发性，我们在此给出。

命题 48. 设 A 和 B 是顶点数不超过 6 的刚性回路，且二者均不是 $K_{3,\ 三加一}$回路；并且对于某条公共边 e，$\mathrm{CRes}(A,B,e)$ 是 $K_{3,\ 三加一}$回路。若 p_A 和 p_B 分别是 A 和 B的回路多项式，则$\mathrm{Res}(p_A,p_B,x_e)$可约。

证明。设 h_A 和 h_B 为齐次次数，d_A 和 d_B 分别为 p_A 和 p_B关于 x_e的次数。由命题 23，$\mathrm{Res}(p_A,p_B,x_e)$ 的齐次次数为$h_Ad_B+h_Bd_A-d_Ad_B$，因此若对于某个 $c\in\mathbb{Q}$，$\mathrm{Res}(p_A,p_B,x_e)=c\cdot p_{K_3}$是三加一，则 $h_Ad_B+h_Bd_A-d_Ad_B=18$。然而，根据第 13.2 小节，(h_A,d_A) 和 (h_B,d_B) 的取值只能属于集合 $\{(3,2),(8,4),(20,8),(20,12)\}$，且没有任何一种取值对应于 $h_Ad_B+h_Bd_A-d_Ad_B=18$。 ∎

作为最后的观察，我们注意到 $K_{3,\ 3}$-加一图可以作为两个 4-轮图的组合结式得到：其中一个轮图的顶点为 1，2，3，4，中心为 5；另一个轮图的顶点为 1，3，4，6，中心为 5，并且消元边为 15。由于 4-轮图的回路多项式具有齐次次数 8，且两个回路多项式关于$x_{1,\ 5}$的次数均为 4，根据命题 23 可知，它们的结式具有齐次次数 48。因此，$K_{3,\ 3}$-加一图的回路多项式作为因子出现在该结式中，其重数不超过 2。遗憾的是，在我们的计算机耗尽内存之前，我们未能计算出这两个 4-轮图的结式。我们尝试通过先计算关于变量 x 的两个一般四次多项式的结式来暴力完成计算，该结式包含 219 个单项式。随后，我们将两个轮图的回路多项式关于 x 的系数代入这 219 个单项式中。接着，我们展开这些单项式，并将 219 个展开结果分别保存到磁盘上。在一台高性能计算机上，这大约耗时 5 天，总共占用约 1.7 TB 的数据空间（以 Mathematica 的未压缩 .mx 格式存储）。然而，将这 219 个展开后的单项式相加时失败了，因此我们没有继续沿这个方向进行。我们估计，至少配备 2 TB RAM 的足够强大的计算机可以计算出两个 4顶点轮图的结式。

13.4. 示例：$K_{3,\ 3}$-加一回路多项式。 在树的叶节点处，我们使用 Cayley-Menger 理想生成元中的不可约多项式。下文将从叶节点到根节点的最左路径上的节点所对应的多项式称为 D_1（最左叶节点）、D_2 以及 D_3（其上有相关图的接下来两个内部节点），而根节点处的回路多项式称为 C，见 图 12。右侧的叶节点是三个 K_4 回路多项式：C_1 支集在顶点 $\{1,2,3,5\}$、C_2 支集在 $\{1,3,4,6\}$ 以及 C_3 支集在 $\{1,4,5,6\}$。对于左下方最左叶节点处的多项式 D_1，其支集是一个相关 K_5 图，我们使用了生成元：

$$x_{15}x_{34}^2 - x_{16}x_{34}^2 - x_{56}x_{34}^2 - x_{14}x_{35}x_{34} + x_{16}x_{35}x_{34} + x_{14}x_{36}x_{34} - 2x_{15}x_{36}x_{34}$$
$$+ x_{16}x_{36}x_{34} - x_{13}x_{45}x_{34} + x_{16}x_{45}x_{34} + x_{36}x_{45}x_{34} + x_{13}x_{46}x_{34} - 2x_{15}x_{46}x_{34}$$
$$+ x_{16}x_{46}x_{34} + x_{35}x_{46}x_{34} - 2x_{36}x_{46}x_{34} + x_{13}x_{56}x_{34} + x_{14}x_{56}x_{34} - 2x_{16}x_{56}x_{34}$$
$$+ x_{36}x_{56}x_{34} + x_{46}x_{56}x_{34} - x_{14}x_{36}^2 + x_{15}x_{36}^2 - x_{13}x_{46}^2 + x_{15}x_{46}^2 - x_{35}x_{46}^2 + x_{14}x_{35}x_{36}$$
$$- x_{16}x_{35}x_{36} - x_{36}^2x_{45} + x_{13}x_{36}x_{45} - 2x_{14}x_{36}x_{45} + x_{16}x_{36}x_{45} - 2x_{13}x_{35}x_{46} + x_{14}x_{35}x_{46}$$
$$+ x_{16}x_{35}x_{46} + x_{13}x_{36}x_{46} + x_{14}x_{36}x_{46} - 2x_{15}x_{36}x_{46} + x_{35}x_{36}x_{46} + x_{13}x_{45}x_{46}$$
$$- x_{16}x_{45}x_{46} + x_{36}x_{45}x_{46} - x_{13}x_{36}x_{56} + x_{14}x_{36}x_{56} + x_{13}x_{46}x_{56} - x_{14}x_{46}x_{56}$$

支集为 K_5 的生成元集合中包含的不仅是这个多项式。还有另外两种可选方案，其齐次次数分别为 4 或 5，并且还可能在消元不定元 x_{35} 中具有二次次数。之所以选择这个特定的生成元，是为了尽量降低结式的（计算）复杂度：它的齐次次数为 3，且关于消元变量 x_{35} 的次数为 1，这两个次数在三个可选方案中都是最小的。

在树的内部节点处，我们使用结式和因式分解，计算理想中的不可约多项式，使其支集与组合树的相关图相匹配，具体如下。

结式 $p_{D_2} = \mathrm{Res}(p_{D_1}, p_{C_1}, x_{35})$ 是一个支集为图 D_2（见图 12）的不可约多项式。该图包含最终结果 $K_{3,3}$-加一作为子图，并且还包含两条额外边；要得到最终结果，必须消去这两条边。因此，沿路径上的顶点集合而言，结式树并非严格递增，这与第 3.4节中的情况不同。然而，当顶点集合保持不变时（如本例所示），沿通向根节点的路径，相关图相对于边集而言是严格递减的。

结式 $p_{D_3} = \mathrm{Res}(p_{D_2}, p_{C_2}, x_{13})$ 是一个有 222108 项且包含两个非恒定不可约因子的可约多项式。只有一个因子的支集位于 D_3上，另一个因子的支集则位于一个最小刚性（因此相关）的图上。因此，选取这个因子作为新的多项式 p_{D_3}，并以此继续计算；它是唯一可能属于 CM 理想的因子（根据素性考虑，它也必定属于该理想）。

要得到 C，最后一步是通过与 C_3 求组合结式，从 D_3 中消去边 46。相应的结式多项式 p_C 是一个有 15 197 960 项且包含三个不可约因子的可约多项式。与前一步一样，对这些不可约因子支集的分析表明，只有一个因子的支集位于该$K_{3,3}$加一回路上，另外两个因子的支集则位于最小刚性图上。这个唯一的不可约因子就是所求的 $K_{3,3}$加一回路的回路多项式。

在配备 6 个 CPU 核心、主频为 3.7 GHz 的 2019 款 iMac 上使用 Mathematica v13 进行计算（包括分解为不可约分量），耗时 979.42 秒。最终结式步骤的计算和因式分解占用了大部分计算时间（分别为 562.5 秒和 394.9 秒）。

14. 总结。 本文介绍了组合结式运算，它类似于多项式的经典结式。下面给出一些最后的评论

以及对进一步研究的建议。

不可约性检验。 我们的方法仍存在若干计算上的缺陷，因为它们需要进行不可约性检验，并且可能还需要对具有回路支集的因子作进一步的因式分解和理想成员测试。

理想情况下，我们希望能够通过组合方法判断：当两个具有回路支集的回路多项式的结式具有回路支集时，该结式何时是不可约的。Gao 的绝对不可约性检验[20] 指出，一个多项式是绝对不可约的，当且仅当其牛顿多胞体在整数意义下不可分解；结合 Gelfand、Kapranov 和 Zelevinsky 对两个多项式的结式的牛顿多胞体的描述 [21, 22] 可为绝对不可约性提供组合判据，但不能为在 $\mathbb{Q}$上的不可约性提供判据。然而，并非每个回路多项式都是绝对不可约的；例如，4 个顶点的轮图的回路多项式在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，但并非绝对不可约。

我们在实践中观察到的现象。 值得注意的是，每当我们在计算中需要判定结式的哪个因子属于 CM_n时，我们从未需要执行理想成员测试。检查结式的不可约因子的支集就始终足够了。在所有计算成功的情形中，除一个不可约因子外，其余不可约因子的支集都是 Laman 图，而有一个因子的支集是一个相关集。这似乎不太可能是一般情形；因此，确定结式在什么条件下恰好有一个（忽略重数）支集为相关集的因子，并且该因子属于 $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{CM}_n)$，将会很有意义。

开放问题。 我们以另外几个关于两个回路多项式的结式的代数和几何结构的开放问题作为本文的结尾。

开放问题 49。 设 A、 B和 C是满足 $C = \mathrm{CRes}(A, B, e)$ 的回路。设 p_C、 p_A和 p_B 是相应的回路多项式。在什么条件下，$\mathrm{Res}(p_A, p_B, x_e)$ 具有 $\alpha \cdot p_C^m$的形式，其中 $m \geq 1$ 满足 $\alpha \in \mathbb{Q}$?

开放问题 50. 更一般地，对于两个多项式 p， $q \in \mathrm{CM}_n$ 满足 $x_e \in$ 支集 $p \cap$支集 q，在什么条件下，结式恰好有一个支集包含于相关集的不可约因子，该相关集位于 $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{CM}_n)$ 中?

开放问题 51. 将 命题 48 推广到以下问题：是否可以根据图论数据（回路 p_A、 p_B、 x_e）推断 Res 的可约性，其中 C、 A、 B 以及边 e 满足 $C = \mathrm{CRes}(A, B, e)$ 。

这个问题似乎极具挑战性。答案在很大程度上取决于具体的多项式 p_A、 p_B 和变量 x_e ，并涉及与 $r = \mathrm{Res}(p_A, p_B, x_e)$、 p_A 和 p_B 相关的（仿射）簇之间的关系。令 $R = \mathbb{C}[C]$ 为一个多项式环，p_A、 $p_B \in R[x_e]$，并令 I_{x_e} 表示消去理想 $\langle p_A, p_B \rangle \cap R$。令 l_A （分别为 l_B）表示关于 x_e 的 p_A （分别为 p_B）的首项系数。于是，根据扩张定理 [13, 第 3] 章第 6 节中的定理 8 以及闭包定理 [13, 第 4] 章第 4 节中的定理 4，我们得到以下（仿射）簇的等式： $V(r) = V(l_A, l_B) \cup V(I_{x_e})$。此外，如果 r 可分解为 $q \cdot p_C^k$，其中 k 为某个正整数，那么 $V(r) = V(q) \cup V(p_C)$。理想情况下，我们希望有$V(r) = V(p_C) = V(I_{x_e})$，但一般而言， $V(p_C)$ 仅包含于 $V(I_{x_e})$ 和 $V(r)$。因此， $V(r)$ 的结构，尤其是其不可约性，取决于代数数据 $V(l_A, l_B)$ 和 $V(I_{x_e})$，而它们与组合及图论数据之间的关系尚待发现。

另一个值得关注的问题涉及回路多项式的参数，例如单个变量的次数或单项式的数量。第一个参数，即关于单个变量的次数 x_e 与回路多项式支集中的单个变量有关，它与关于 Laman 图嵌入数量的文献相关；目前已知的最佳上界为 3.77^n [2]，适用于 n 个顶点。由此可以推断 3-连通回路多项式中单个不定元的次数的界，而对于 2-连通回路多项式，则需要将其分解为 3-连通分量。另一方面，据我们所知，关于回路多项式单项式项数量的此类界尚未见于文献，但我们观察到其数量会迅速增加，如表 1 所示。

开放问题 52. 回路多项式的规模有多大，即相对于顶点数，单项式项数量的上界和下界是多少 n?

开放问题 53. 当使用扩展生成元集合时，其中并非所有生成元都是回路（例如来自第 11 节的生成元），判断给定回路是否具有一棵组合结式树，并且至少有一个非K_4 叶节点来自给定的生成元。

致谢 我们感谢匿名审稿人的意见。这些意见有助于改进本文的表述，并感谢他们建议的参考文献，这些文献拓展了本文的范围。

参考文献

[1] E. Bartzos, I. Z. Emiris, J. Legerský, and E. Tsigaridas, *On the maximal number of real embeddings of minimally rigid graphs in R^2 R^3 and S^2* 102 2021 189 , , 《符号计算杂志》, （）, 第 – 208 页, https://doi.org/10.1016/j.jsc.2019.10.015。[2] E. Bartzos, I. Z. Emiris, and C. Tzamos, *The m-Bézout Bound and Distance Geometry*, 载于《科学计算中的计算机代数》, F. Boulier、M. England、T. M. Sadykov 和 E. V. Vorozhtsov 编, Cham, 2021 年, Springer International Publishing, 第 6–20 页, https://doi.org/10.1007 % 2F978-3-030-85165-1 2。[3] D. J. Bates, A. J. Sommese, J. D. Hauenstein, and C. W. Wampler, *Numerically Solving Polynomial Systems with Bertini* 2013, 10 , 工业与应用数学学会, 1 月。https://doi.org/ 。1137/1.9781611972702。[4] D. Bayer and D. Mumford, *What Can Be Computed In Algebraic Geometry?*, 载于《计算代数几何与交换代数》, D. Eisenbud 和 L. Robbiano 编, 剑桥大学出版社, 1993 年, 第 1–48 页。[5] A. B. Berg and T. Jordán, *A proof of Connelly's conjecture on 3-connected circuits of the rigidity matroid* 88 2003 77 97, 10 1016 , 《组合理论杂志》B 辑, （）, 第 – 页, https://doi.org/ 。/ S0095-8956(02)00037-0。[6] L. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, AMS Chelsea出版系列, Chelsea Publishing Company, 1970 年。[7] G. P. Bollen, J. Draisma, and R. Pendavingh, *Algebraic matroids and Frobenius flocks*, 《数学进展》, 323（2018）, 第 688–719 页, https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.aim.2017.11.006。[8] C. S. Borcea, *Point Configurations and Cayley-Menger Varieties*, 2002 年, https://arxiv.org/abs/math/ 0207110。[9] C. S. Borcea and I. Streinu, *The number of embeddings of minimally rigid graphs*, 《离散与计算几何》, 31（2004）, 第 287–303 页, https://doi.org/10.1007/s00454-003-2902-0。[10] B. Buchberger, *Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems* 4 1970 374 383, 10 1007 01844169 , Aequationes Math., （）, 第 – 页, https://doi.org/ 。/BF 。[11] J. Capco, M. Gallet, G. Grasegger, C. Koutschan, N. Lubbes, and J. Schicho, *The number of realizations of a Laman graph* 2 2018 94 125, , 《SIAM应用代数与几何杂志》, （）, 第 – 页

https://doi.org/10.1137/17M1118312。[12] D. Cartwright,
Construction of the Lindström valuation of an algebraic extension, 《组合理论杂志》A 辑，157（2018），第 389–401 页，https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jcta. 2018.03.003。[13] D. A. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computa-tional Algebraic Geometry and Commutative Algebra*，数学本科教材，Springer，Cham，第四版，2015 年。[14] G. Crippen and T. Havel,
Distance Geometry and Molecular Conformation，化学计量学研究丛书，Research Studies Press，1988 年。[15] A. Dickenstein, N. Fitchas, M. Giusti, and C. Sessa,
The membership problem for unmixed polyno-mial ideals is solvable in single exponential time 33 1991 73 94, ，《离散应用数学》，（），第 – 页，https://doi.org/10.1016/0166-218X(91)90109-A。[16] A. Dress and L. Lovász,
On some combinatorial properties of algebraic matroids，《组合数学》，7（1987），第 39–48 页，https://doi.org/10.1007/BF02579199。[17] R. Ehrenborg and G.-C. Rota,
Apolarity and canonical forms in homogeneous polynomials，《欧洲组合数学杂志》，14（1993），第 157–181 页，https://doi.org/10.1006/eujc.1993.1022。[18] I. Emiris and B. Mourrain,
Computer algebra methods for studying and computing molecular confor-mations 25 1999 372 402, 10 1007 00008283 ，《算法学》，（），第 – 页，https://doi.org/ 。/PL 。[19] I. Z. Emiris, E. P. Tsigaridas, and A. Varvitsiotis,
Mixed Volume and Distance Geometry Techniques for Counting Euclidean Embeddings of Rigid Graphs ，载于《距离几何：理论、方法与应用》，A. Mucherino、C. Lavor、L. Liberti 和 N. Maculan 编，第 2 章，Springer，纽约、海德堡、多德雷赫特、伦敦，2013 年，第 23–46 页，https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5128-0。[20] S. Gao,
Absolute irreducibility of polynomials via Newton polytopes，《代数杂志》，237（2001），第 501–520 页，https://doi.org/10.1006/jabr.2000.8586。[21] I. Gelfand, M. Kapranov, and A. Zelevinsky,
Newton Polytopes of the Classical Resultant and Discriminant 84 1990 237 254, 10 1016 ，《数学进展》，（），第 – 页，https://doi.org/ 。/ 0001-8708(90)90047-Q。[22] I. Gelfand, M. Kapranov, and A. Zelevinsky,
Discriminants Resultants and Multidimensional Determinants ¨ ¨ 2009. 10 1007 Birkhauser Classics, Birkhauser Boston, https://doi.org/ , / 978-0-8176-4771-1 。[23] G. Giambelli,
Sulle varietà rappresentate coll'annullare determinanti minori contenuti in un determi-nante simmetrico od emisimmetrico generico di forme 44 1905 06 ，Atti della R. Acc. Sci, di Torino，（/），第 102–125 页。[24] J. Graver, B. Servatius, and H. Servatius, *Combinatorial rigidity*，《数学研究生教材》第 2 卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1993 年。[25] P. A. Griffiths and J. Harris,
Principles of algebraic geometry，Wiley经典文库，Wiley，纽约州纽约，1994 年。[26] J. Harris and L. Tu,
On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties，《拓扑学》，23（1984），第 71–84 页，https://doi.org/10.1016/0040-9383(84)90026-0。[27] L. Henneberg, *Die graphische Statik der starren Systeme*，B. G. Teubner，1911 年。[28] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan, *Dividing a graph into triconnected components*，《SIAM计算杂志》，2（1973），第 135–158 页，https://doi.org/10.1137/0202012。[29] A. Ingleton,
Representation of Matroids，载于《组合数学及其应用》（1969 年 7 月 7—10 日于牛津数学研究所举行的会议论文集），D. Welsh 编，Academic Press，1971 年，第 149–167 页。[30] T. Józefiak, A. Lascoux, and P. Pragacz,
Classes of determinantal varieties associated with symmetric and skew-symmetric matrices 18 1982 575 586, ，《苏联数学通报》，（），第 – 页，https: //doi.org/10.1070/im1982v018n03abeh001400。[31] E. Kaltofen,
Polynomial factorization 1987–1991，载于《LATIN 1992》。《计算机科学讲义》，I. Simon 编，Springer，柏林、海德堡，1992 年，第 294–313 页，https://doi.org/10.1007/BFb0023837。[32] Y. N. Lakshman,
A Single Exponential Bound on the Complexity of Computing Gröbner Bases of Zero Dimensional Ideals ，载于《代数几何中的有效方法》，T. Mora 和 C. Traverso 编，Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州波士顿，1991 年，第 227–234 页，https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0441-1 15。[33] G. Laman, *On graphs and rigidity of plane skeletal structures*，《工程数学杂志》，4

(1970), pp. 331–340, https://doi.org/10.1007/BF01534980. [34] S. Lang, *Algebra*, 数学研究生教材第211卷, Springer-Verlag，纽约，第3版，2002年。[35] A. Lee-St. John and I. Streinu, *Pebble game algorithms and sparse graphs*, 《离散数学》, 308 (2008), pp. 1425–1437, https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.07.104. [36] T. Y. Li, *Numerical solution of multivariate polynomial systems by homotopy continuation methods*, 《数值数学学报》, 6 (1997), p. 399–436, https://doi.org/10.1017/S0962492900002749. [37] G. Malić and I. Streinu, *Combinatorial Resultants in the Algebraic Rigidity Matroid*, 收录于第37届计算几何国际研讨会（SoCG 2021），K. Buchin 和 E. Colin de Verdi`ere 编，第189卷《莱布尼茨国际信息学会议录》（LIPIcs），达格施图尔，德国，2021年，Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，pp. 52:1–52:16, https://doi.org/10.4230/LIPIcs.SoCG.2021.52, https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2021/13851. [38] G. Malić and I. Streinu, *Faster algorithms for circuits in the Cayley-Menger algebraic matroid*, 技术报告，2021年12月，https://arxiv.org/abs/2111.14307. [39] G. Malić and I. Streinu, *CayleyMenger - Circuit Polynomials in the Cayley Menger ideal a GitHub repository*, . 2023 https://github.com/circuitPolys/CayleyMenger, . [40] G. Matera and J. M. Turull Torres, *The space complexity of elimination theory: upper bounds*, 收录于《计算数学基础》（里约热内卢，1997），Springer，柏林，1997年，pp. 267–276，https://doi.org/10.1007/978-3-642-60539-0 20. [41] J. C. Maxwell, *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames*, 《哲学杂志》, 27 (1864), pp. 294–299, https://doi.org/10.1080/14786446408643668. [42] K. Menger, *New Foundation of Euclidean Geometry*, 《美国数学杂志》, 53 (1931), pp. 721–745, https://doi.org/10.2307/2371222. [43] J. Oxley, *Matroid theory*, 牛津数学研究生教材第21卷，牛津大学出版社，牛津，第2版，2011年。[44] H. Pollaczek-Geiringer, *Über die Gliederung ebener Fachwerke*, ZAMM, 7 (1927), pp. 58–72, https: // doi.org/10.1002/zamm.19270070107. [45] Z. Rosen, *Algebraic Matroids in Applications*, 博士论文，加州大学伯克利分校，2015年，https://digitalassets.lib.berkeley.edu/etd/ucb/text/Rosen berkeley 0028E 15261.pdf. [46] Z. Rosen, *algebraic-matroids, a GitHub repository*. https://github.com/zvihr/algebraic-matroids, 2017. [47] Z. Rosen, J. Sidman, and L. Theran, *Algebraic matroids in action*, 《美国数学月刊》, 127 (2020), pp. 199–216, https://doi.org/10.1080/00029890.2020.1689781. [48] M. Sitharam and H. Gao, *Characterizing graphs with convex and connected Cayley configuration spaces* 43 2010 594 625, 10 1007 , 《离散与计算几何》, ( ), pp. – https://doi.org/ . / s00454-009-9160-8 [49] A. J. Sommese and C. W. Wampler, *The Numerical Solution of Systems of Polynomials Arising in Engineering and Science* 2005, 10 1142 5763 , 世界科学出版社，https://doi.org/ . / . [50] I. Streinu and L. Theran, *Slider-pinning Rigidity: a Maxwell-Laman-type Theorem*, 《离散与计算几何》, 44 (2010), pp. 812–834, https://doi.org/10.1007/s00454-010-9283-y. [51] W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*, 多伦多大学出版社，多伦多，1966年。[52] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra, 2nd edition*, Fred Blum 和 John R. Schulenberger 译，Springer，柏林、海德堡、纽约，1967年。[53] B. L. van der Waerden, *Algebra. Vol. 2*, John R. Schulenberger 译，Frederick Ungar Publishing Co.，纽约，1970年。[54] D. Walter and M. Husty, *On a nine-bar linkage, its possible configurations and conditions for flexibility*, 收录于 IFFToMM 2007 会议录，Besan.con，法国，M. J.-P. 和 M. Dahan 编，2007年，http: // geometrie.uibk.ac.at/cms/datastore/husty/A681.pdf. [55] W. Whiteley, *Some matroids from discrete applied geometry*, 收录于《拟阵理论》，J. Bonin、J. G. Oxley 和 B. Servatius 编，当代数学第197卷，美国数学学会，1996年，pp. 171–311, https://doi.org/10.1090/conm/197/02540.