VpROM：一种新颖的变分自编码器增强降阶模型，用于处理非线性系统中的参数依赖关系

预印本

Thomas Simpson
土木、环境与测绘工程系
苏黎世联邦理工学院
苏黎世，瑞士
simpson@ibk.baug.ethz.ch

Konstantinos Vlachas
土木、环境与测绘工程系
苏黎世联邦理工学院
苏黎世，瑞士
vlachas@ibk.baug.ethz.ch

Anthony Garland
计算机科学与力学
桑迪亚国家实验室
阿尔伯克基，美国

Nikolaos Dervilis
动力学研究组
谢菲尔德大学
谢菲尔德，英国

Eleni Chatzi土木、环境与测绘工程系 苏黎世联邦理工学院 苏黎世，瑞士

arXiv:2304.12437v1 [math.NA] 11 Apr 2023

2023年4月26日

摘要

降阶模型（ROMs）在许多计算时间存在困难的工程领域中具有相当重要的意义。成熟的方法采用基于投影的降阶，例如本征正交分解；然而，对于参数化模型或强非线性模型，这类方法可能变得低效甚至失效。此类限制通常通过建立局部降阶基库来应对，其中每个局部降阶基均适用于给定的参数向量。然而，这些方法的成功很大程度上依赖于用于将参数向量与局部基关联起来的方法，通常通过聚类或插值方法实现。我们提出使用变分自编码器（VAE）替代这些方法，将其作为生成模型，以概率方式推断与给定参数向量相对应的局部基。由变分自编码器增强的参数化降阶模型*VpROM* 仍然保留了基于投影方法的物理洞见，同时还能更好地处理以下问题：模型依赖性或激励特征导致动态行为跨越多个响应状态。此外，VAE 表示的概率处理方式能够对降阶基进行不确定性量化，随后可将这种不确定性传播至降阶模型响应。所提出方法的性能通过一个具有滞回和多参数依赖性的开源仿真基准，以及一个具有非线性材料行为和模型不确定性的大型风力机塔架进行了验证。

关键词 参数化降阶、降阶模型（ROM）、条件变分自编码器、不确定性

1 引言

降阶模型（ROMs）在结构动力学仿真中的应用，是围绕使用加速代理模型开展结构健康监测（23；62）、数字孪生（68；24）和不确定性量化（70；47）研究的主要组成部分。降阶建模技术通常根据纯数据驱动方法或基于物理 方法进行分类。纯数据驱动 方法利用目标系统的输入和输出仿真，甚至利用记录的数据，来学习其潜在动力学（79；34）。计算能力的提升推动了机器学习架构日益加深，使此类方法能够极其有效地重现甚至复杂的动力学（82；13）。然而，这类方法始终受到用于训练它们的数据广度和质量的限制（58；28）。另一方面，基于物理 方法能够创建结构化的降阶模型（ROM）表示：从运动方程出发，将其投影到一个低维空间中，并在该空间内求解（14；60；51）。这种表述保留了更强的物理内涵，因此通常也更易于解释。

依赖投影原理的降阶方法能够处理非线性和/或参数化系统，通常会采用本征正交分解（POD）（9）。这些方法需要执行全阶模型（FOM）的评估，并利用这些仿真的输出响应，即所谓的快照，来确定适当的降阶基（15；31）。本征广义分解（PGD）是POD方法的一种替代方案（18）。尽管PGD在某些方面受到POD方法的启发，但二者有一个非常关键的区别：PGD是一种先验方法，无需对FOM进行任何仿真即可构建降阶模型。这些方法在各种动力系统中也取得了显著成功（52；17）。

基于POD的模型降阶（MOR）的一种直接方法，是构建一个全局POD基，将在参数空间/相空间中不同点开展的仿真所获得的数据快照全部堆叠在一起。然后，从这一集合中提取出一个单一的（全局）投影基。该方法得到广泛应用，并已证明在多种应用中具有稳健的性能（1；19；29）。然而，对于非线性系统，POD只能提供一个最优的近似线性流形（42）。因此，当非线性程度中等或较高时，相应的基于POD的降阶可能变得低效，需要保留多个模态（以牺牲降阶效果为代价），甚至可能完全失效（83）。同样，对于参数化模型，全局POD降阶基可能导致较差的性能，或在计算上变得低效（6）。

为此，可以采用替代策略加以补救，即依赖于经扩充的低阶子空间或局部POD基库。第一种技术可见于（81；48），其中作者采用了经扩充的降阶基，在这些降阶基中，以线性模态或基于振动模态的子空间为基础，并通过加入模态导数来捕捉中等程度的几何非线性。另一方面，第二种方法依赖于预先组装的局部降阶模型库，这些模型在近似局部现象方面取得了很大成功（61；41）。在此背景下，可以根据时间定义局部降阶模型，即组装投影子空间，从而构建仅捕捉完整行为在某一时间窗口内动力学的降阶模型（5）。因此，相应模型库中的每个降阶模型都对应于响应的不同时间窗口，从而形成局部性。或者，这些基的局部性也可以指输入参数空间中的某些区域或子域（49），这些区域或子域通过均匀误差估计器（35；64）或自适应误差估计器（54）进行估计，并在模型评估期间于各局部降阶模型之间执行模型或基选择操作。由于能够以间接方式对参数空间进行聚类（必要时包括时间），此类局部基可以更好地处理高度非线性且依赖参数的系统，从而为任意参数样本处的运动控制方程提供精确的子空间近似（33）。

尽管这类方案族可以被视为一种成熟路径，但在推导出适用于广泛运行条件的可操作降阶模型时，效率可能会受到影响，并且高度依赖于从已组装的局部降阶模型库中进行基选择所采用的技术。在此背景下，最先进的技术会在适当的流形中执行聚类（30）或插值（5）操作，以最大限度地提高精度。另一方面，近期研究表明，受机器学习启发的技术能够提升降阶模型的实用性和性能，同时实现自动化训练过程（27；20）。受后者启发，本文建议使用基于机器学习的生成模型替代基于插值或聚类的方案，同时保留能够保证全域精度的基于投影的降阶方法。我们的方法旨在通过生成建模近似参数化输入与局部投影基及其所得到的降阶模型之间的广义映射，从而提高降阶模型的效率和稳健性。

生成模型是一类统计模型，可用于在未见过的初始条件、载荷下，或针对原始训练集所采用范围之外的属性，生成观测／模拟系统的输出。这可以通过以反映当前系统特征的参数向量为条件来实现。形式上，这类生成模型学习观测数据 $P(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{p})$ 与参数集$\boldsymbol{p}$的联合分布。因此，生成模型学习的是数据本身的分布，从而可以抽取新的样本用于

模拟新的（此前未观测或未模拟的）输出。对我们的情况而言更为重要的是，生成模型学习分布 $P(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{p})$，即给定某一参数向量时数据的分布。这类生成模型具有双重用途：通过学习降阶基及其相关模型参数的联合分布，我们可以生成与任意参数样本相对应的局部基，同时进一步捕获这一推断中的不确定性。

生成模型的一个热门分支是深度生成模型，它利用深度神经网络作为强大而灵活的非线性逼近器，适用于对复杂依赖关系进行建模。现代深度生成模型中最常见的两种是生成对抗网络（GAN）（32）和变分自编码器（VAE）（44）。这两种架构在广泛的领域中都引起了极大关注，从传统的机器学习领域——计算机视觉（32）和自然语言处理（12；53），到生命科学领域中的新型分子开发（65；40），以及电子显微镜图像的去噪与分析（59；63）。近年来，扩散模型已成为最先进的方法，在图像和视频生成等生成模型的典型任务中，其性能超越了生成对抗网络和变分自编码器（21；36）。在结构工程方面，深度生成模型的重要应用包括将生成对抗网络用于非线性模型分析（72），以及使用变分自编码器估计风力涡轮机叶片疲劳（50）。

本文针对如何在未观测参数/输入值处生成局部基的问题展开研究，并采用变分自编码器作为非线性生成模型。选择VAE模型，是因为它已被证明能够学习高度非线性的流形，并能高效处理高维数据。变分自编码器还有一项优势，即能够估计预测基底的不确定性。本文采用VAE模型取代以往用于基底生成的聚类或插值方法（30；5），旨在提高精度、处理高维依赖关系并实现不确定性量化。本文结构安排如下：第2节介绍参数化降阶建模的背景，以及处理非线性参数化系统的投影方法的最新进展。第3节介绍VAE模型，并说明本文如何利用它取代参数化降阶模型中现有的先进插值或聚类方法。第4节通过两个示例问题展示VAE增强的参数化降阶模型的应用。首先是一个三维剪切框架，其节点采用Bouc-Wen滞回非线性建模，系统属性和激励特性会影响其多参数行为。其次，将该方法应用于一个发生塑性变形的大型风力机塔架有限元（FE）模型。在这一案例中，该方法论与超降阶方案相结合，以展示其在缩短计算时间方面的全部潜力。在这两个案例中，VAE的表现均优于现有先进方法，同时还能捕捉降阶模型预测中的不确定性。第5节总结本文的工作和研究成果，讨论该方法的局限性，并展望未来的发展方向。

2 参数化降阶建模

我们的工作背景是对参数化动力系统进行基于物理的降阶，以推导全阶模型（FOM）的等效低阶代理模型，即用于非线性结构动力学仿真的有限元公式。这类降阶表示能够加速系统评估，对于结构健康监测中的诊断与预测、以及工程系统运行与维护规划的决策支持等下游任务十分有用。在此背景下，基于投影的降阶已被用于获得响应估计（1）、参数估计（71），以及损伤定位与量化任务（2）。

本节首先介绍所研究问题的非线性运动方程。随后描述基于投影的降阶框架，以及处理参数依赖关系所需的其他组件，整体上遵循现有先进方法（11；5）所采用的类似方法论。最后讨论在低阶公式中传播动力学时的效率问题。

2.1 问题陈述

我们假设一个一般性的非线性动力系统，其特征由参数向量 $\boldsymbol{p} = [p_1, ..., p_\mathrm{k}]^\mathrm{T} \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^k$ 描述，该参数向量涵盖所有与系统及激励相关的参数。 $\boldsymbol{p}$ 的每一种实现都对应于当前系统的唯一配置。因此，该系统的动态行为由以下一组非线性运动控制方程给出：

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p})\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{p}\right) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{p}), \tag{1}$$

其中， $\boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{R}^n$ 表示系统在位移方面的响应， $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 表示质量矩阵，而 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{R}^n$ 表示外部激励。系统的阶数由变量 n表示，称为全阶维数；从物理角度看，它表示坐标空间的大小，因此也表示系统中的自由度数量。该变量间接反映了进行

全阶维数下模型评估所需的计算资源。最后，非线性效应被引入恢复力项$\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{u}(t)\ \dot{\boldsymbol{u}}(t)\ \boldsymbol{p}\right) \in \boldsymbol{R}^n$中。该项可能编码不同性质的复杂非线性现象，包括材料非线性、滞回或界面非线性，而这些现象又取决于参数向量实现和系统的响应。

2.2 基于投影的模型降阶

在本研究中，我们采用文献（75）所述的基于伽辽金投影的方案，为第2.1小节所述的问题推导出一种高效且准确的降阶表示。文献（9）中介绍了几种替代方法。我们选择基于投影的方法，是因为它具有可解释性，并且适用于更高层级的结构健康监测（SHM）系统等应用（71）。具体而言，所得到的降阶模型提供了模型完整物理空间的一种低阶但仍基于物理的表示。因此，该降阶模型不仅限于捕获位移，还能够同时推断应力、应变和加速度，而不是针对特定单元或仅针对少数节点分别构建降阶模型（45；66）。参数化降阶模型具备的这一能力，使其能够估计任意给定感兴趣物理场中的全阶模型响应。

下面将以分步方式描述参数化降阶模型的推导过程。该方法假设已有一个高保真全阶模型，在本研究中，即一个有限元模型，用于对公式（1）中的系统全阶表示进行空间离散化。通常，基于投影的降阶模型依赖于这样一个前提：动力响应，在本例中即公式（1）的解，位于一个大小为 r的低阶子空间中，其中 r 比FOM维度小几个数量级，记为 n ($r \ll n$)。因此，有如下近似成立：

$$\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{p}\right) \approx \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{p}\right)\boldsymbol{q} \tag{2}$$

其中， $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N\times r}$ 表示用于表征上述子空间的降阶模型基， $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^r$ 是相应的低阶坐标向量。将 $\boldsymbol{u}$ 代入公式（1），并与 $\boldsymbol{u}^T$相乘，从而执行伽辽金投影，可得到以下等价系统：

$$\tilde{\boldsymbol{M}}\left(\boldsymbol{p}\right)\ddot{\boldsymbol{q}}\left(t\right) + \tilde{\boldsymbol{g}}\left(\ddot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right) = \tilde{\boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{p}, t\right) \tag{3}$$

其中， $\tilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$、 $\tilde{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{g}$和 $\tilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F}$。实现精确低阶表示的关键在于构建投影基 $\boldsymbol{V}$。根据文献（5）的建议，我们采用本征正交分解技术来完成这一过程。该方法针对一组训练参数对公式（1）进行求解，并提取响应信息，形成如下矩阵：

$$\hat{\boldsymbol{S}} = \left[\begin{array}{cccc} \hat{\boldsymbol{U}}\left(\boldsymbol{p}_1\right) & \hat{\boldsymbol{U}}\left(\boldsymbol{p}_2\right) & \ldots & \hat{\boldsymbol{U}}\left(\boldsymbol{p}_{N_s}\right) \end{array}\right] \tag{4}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{S}} \in \mathbb{R}^{N\times(N_t\times N_s)}$ 称为快照矩阵，$\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{p}_i) \in \mathbb{R}^{N\times N_t}$ 包含给定参数实现下每个自由度（DOF）的响应时间历程，以下简称快照。 N_t表示仿真的时间步数， $\boldsymbol{p}_i$ 是快照 i 的参数输入， N_s 是ˆ快照的数量。随后，通过对 $\boldsymbol{S}$进行奇异值分解（SVD）来构建投影基 $\boldsymbol{V}$：

$$\hat{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{Z}^T \tag{5}$$

并在截断 $\boldsymbol{L}$后：

$$\boldsymbol{V} = \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{L}_2 & \ldots & \boldsymbol{L}_r \end{array}\right] \tag{6}$$

其中， $\boldsymbol{L}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{L}$的列，称为模态。通过截断，选取降阶基 $\boldsymbol{V}$的前 r 个主正交归一分量。此处采用（30）中的误差度量来完成这一过程。

2.3 MACpROM：通过聚类处理参数依赖关系

如公式（1）中的运动控制方程所示，系统的动态行为取决于一组参数，这些参数描述系统属性或诱导激励的特征。因此，系统的响应高度依赖于参数向量实现，并且由于非线性项相应地被激活，可能会受到参数空间中局部效应的主导。因此，若假设使用单一投影基，则需要在公式（6）中采用大量截断模态，才能捕捉整个参数域内的潜在行为（1）。这种方法会导致降阶模型维数过大，使降阶效率低下，甚至难以实现（83）。为此，可以采用另一种策略作为补救，即使用一组局部POD基。获取一组全阶模型快照及其对应的POD训练基，可使降阶模型捕捉局部效应，并采用适当的插值或聚类技术来近似中间点处的响应（6）。

在我们先前的工 作（76）中，我们成功采用了一种MAC引导的聚类方案，部分遵循了
中的建议 (4) 并利用余弦相似度度量，也称为模态保证准则 i n

表1：算法 MACpROM 降阶模型框架。在步骤 2 中，可以使用最大簇数代替用户定义的容差。

符号说明： N_s：训练快照数量，N_t：仿真时间步数n：全阶模型维度，r：降阶模型维数**输入：** 参数向量实现 $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{N_s}]$，待近似的参数向量实现$\boldsymbol{p}_q$ **输出：** 参数向量实现的关注量$\mathbf{p}_q$**训练阶段1：对于k=1，...，N_s 执行**

1^a：对 $(\boldsymbol{p}_k)$进行全阶模型仿真并获得 公式（4））。1^b：获得局部基 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}_k) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ （公式（5）、公式（6））

2：启动由模态保证准则（MAC）引导的采样与聚类。

2^a：从初始采样率和聚类中心的假设开始。2^b：计算训练实现的局部基之间的 MAC。2^c：将每个训练基分配到一个簇，该簇的基使相应的 MAC 最小。2^d：确定所得 MAC 的最大值，并检查其是否超过预定义容差。2^e：若超过，则在 MAC 最大值对应的位置定义一个新的聚类中心。2^f：通过在聚类中心与 MAC 最大值对应的位置之间添加训练状态，细化采样域，并从步骤 1 开始重复（如有需要）。

评估阶段

1：使用 $k-NN$ 为 $\boldsymbol{p}_q$ 识别簇 i。2：假设 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}_q)$ 使用相应的 $\boldsymbol{V}_{cluster}^{i}$ 进行近似。3：评估公式（3）中的降阶模型，以近似关注量

结构健康监测域。在此情况下，POD基的局部性是指在原始参数域内形成簇。因此，对于每个参数样本，降阶模型会根据其所属的簇，使用专用的 POD基（称为 $\boldsymbol{V}_{cluster}^{i}$），以准确再现相应的全阶模型行为。

然而，由于每个样本中的动态行为都由局部化的非线性效应主导，而这些效应已被$\boldsymbol{V}_i$捕获，因此，聚类不会直接对参数样本执行，也不会采用常用的距离度量。相反，我们采用一种自适应采样过程，利用依赖于公式（6）中截断模态的聚类技术；这些截断模态源自每次全阶模型评估。具体而言，模态保证准则（MAC）被用作投影基之间的比较度量，用于评估它们捕获相似非线性效应的能力。MAC，即向量余弦或余弦相似度，被定义为一个标量常数，用于表达在评估源自不同来源的信息时的一种间接置信度（3）。在本研究中，MAC 用作邻近局部基的截断模态之间的相似性和相干性度量。假设 $\boldsymbol{w}_r$ 和 $\boldsymbol{w}_s$ 分别对应于投影基 $\boldsymbol{V}_r$ 和 $\boldsymbol{V}_s$ 的公式（6）中的 i_{th} 截断模态，则 MAC 的数学表达式为：

$$\mathrm{MAC}(\boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_s) = \frac{|{\boldsymbol{w}_r}^T \boldsymbol{w}_s|^2}{({\boldsymbol{w}_r}^T \boldsymbol{w}_r)({\boldsymbol{w}_s}^T \boldsymbol{w}_s)} \tag{7}$$

相应地，该度量用于评估每个模态所捕获的新信息的价值，从而在训练阶段引导自适应采样以及后续的聚类构式。

为便于参考，本文将该方法称为模态保证准则参数化降阶模型（MACpROM），其相应的算法框架总结于表1中。该方法的各个要素已在先前的研究中得到验证，并已证明能够为非线性系统提供准确且高效的降阶表示（76；77）。在本文中，该方法作为验证所提出的VAE增强降阶模型的既定参考场景，该模型称为*VpROM*。

2.4 CpROM：通过局部基系数插值处理参数依赖性

针对非线性模型降阶中的参数依赖关系，文献（75）提出了一种替代性处理形式，并通过与先进方法进行比较验证。具体而言，作者基于文献（5）中确立的技术，提出了一种对局部投影基进行插值

的方法。为此，引入了两阶段投影，从而可以将对参数 $\boldsymbol{p}$ 的依赖关系在独立层面上进行表述，而不必与快照过程或局部子空间处于同一层面。因此，在构建局部基集合后，如前文针对MACpROM所述，每个局部基 $\boldsymbol{V}_i$ 都通过系数矩阵 $\boldsymbol{X}$ 投影到该域组装后的全局POD基 $\boldsymbol{V}_{global}$ 上，具体如下：

$$\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{V}_{global}\boldsymbol{X}_i \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{V}_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$、$\boldsymbol{V}_{global} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 和 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{r\times n}$。变量 $\tilde{r}$ 表示全局基底 $\boldsymbol{V}_{global}$中保留的模态数量。由此，便可在系数矩阵 $\boldsymbol{X}_i$层面进行插值；这些矩阵的维度较低（$\tilde{r} \ll n$），从而消除了对较大 FOM维度 n 的依赖，使所需操作更加高效。随后，将相应矩阵 $\boldsymbol{X}_i$ 投影到相应格拉斯曼流形的切空间上，并以逐元素的方式进行插值，再投影回原始空间，从而获得任意验证样本对应的局部降阶模型基 $\boldsymbol{V}$。这种策略对于确保局部基保留一定的正交性和正定性至关重要，详细描述见（6；83）。该方法的示意图及其算法框架见（75）。在本研究中，这一框架称为 CpROM，为便于参考，沿用原文中的相同缩写。它作为另一种对比降阶模型框架，用于验证所提出的*VpROM*的性能。

2.5 超降阶

此前介绍的 MACpROM 和 CpROM 降阶模型框架均与一种称为超降阶的附加操作结合使用，以便在处理非线性系统时大幅降低计算成本。超降阶是第二层近似策略，用于解决由于非线性项的存在而导致在线更新和重构 ROM 系统矩阵这一瓶颈问题（56）。本质上，该技术仅在空间离散化中全部元素的一个子集上，对非线性项相应的投影进行加权评估，从而显著加快模型评估。该方法的详细描述以及对现有替代方法的讨论已在先前的研究中给出，因此不属于本文的讨论范围。感兴趣的读者可参阅（26；55；57）。本文的验证案例研究采用了文献（25；33）中介绍的能量守恒网格采样与加权（ECSW）技术。

3 VpROM：生成模型与基于投影的降阶模型的耦合

当前用于创建参数化非线性动力系统低阶替代模型的最先进方法，依赖于使用插值或聚类方法，为给定的参数配置估计局部基。本文引入了一种非线性生成模型，采用条件变分自编码器（cVAE）形式来替代这些方法，旨在通过允许捕捉参数-基关系中的非线性，并更好地处理高维依赖关系，改善降阶模型的稳健性和性能问题。此外，所推导的 *VpROM* 还能够更有效地捕捉预测基中的不确定性。

3.1 变分自编码器（VAE）

文献（44）首次描述的变分自编码器是一种潜变量模型，即一种假设观测值由某些未观测的 潜在 变量驱动的模型。此类潜变量模型在许多科学与工程领域都很常见，并且通常用于降低数据的有效维度，因为潜变量的维度相较于观测值有所降低（10）。事实上，这一概念在结构动力学中是固有的，因为模态分析及其非线性扩展都利用低维表示来简化所需的分析。从概率意义上讲，模态可以被视为潜变量，它们是未观测的，并驱动系统的观测动力学。因此，VAE 架构通过深度神经网络函数来推断潜变量与观测变量之间的关系。

在模型降阶的背景下，VAE可以视为确定性自编码器的一种贝叶斯实现；确定性自编码器是一种广受欢迎的深度学习技术，常用于降维。Lee 和 Carlberg（46）将卷积自编码器与非线性 Galerkin 方法结合，用于构建针对对流主导问题动力学问题的降阶模型。后续研究将自编码器与统计回归方法结合，为结构动力学中的非线性动力系统构建完全基于数据的降阶模型（66；67）。一种称为有效动力学学习的类似方法，也已证明能够有效地为多个科学学科中的一些较经典非线性动力系统构建降阶模型（78；80）。

在 VAE模型中，假设数据 $\boldsymbol{X}$ 由概率分布 $p(\boldsymbol{X})$表征，我们希望通过一个参数化且可能经过简化的分布 $p_\phi(\boldsymbol{X})$来近似该分布，该分布由向量 ϕ参数化。我们假设，数据的复杂分布由一个维度较低且分布更简单的隐变量集合 $\boldsymbol{Z}$驱动，并假设其先验分布为 $p(\boldsymbol{Z})$。这里的概念是，给定一个足够强大且灵活的近似器，就可以通过学习分布 $p_\phi(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z})$（22），学习一个将分布简单的潜变量$\boldsymbol{Z}$ 映射到分布复杂的数据 $\boldsymbol{X}$ 的函数。这个近似分布以深度神经网络的形式表示，即解码器网络。随后，该网络由 ϕ参数化，对应于权重和偏置。由此得到生成模型的以下表达式：

$$p_\phi(\boldsymbol{X}) = \int p_\phi(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z})p(\boldsymbol{Z})dz \tag{9}$$

此类生成模型的训练需要推断出能够使观测值似然最大化的解码器 参数 ϕ。需要指出的是，此处的“观测值”指根据 FOM 快照合成生成的数据。这可以表示为：

$$\phi = \underset{\phi}{\operatorname{argmax}} \prod_{i=1}^{N} \int p_\phi(\boldsymbol{X}^i|\boldsymbol{Z})p(\boldsymbol{Z})dz \tag{10}$$

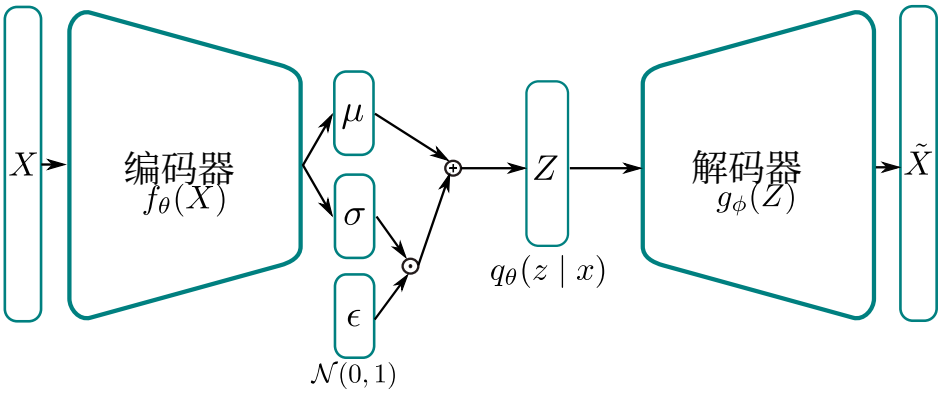


图 1：变分自编码器（VAE）的架构。

然而，该积分的求解存在问题，因为通常无法通过解析方法求解，而通过采样进行近似在计算上效率低下。因此，在典型的 VAE 架构中会引入第二个 编码器 网络，并额外以 θ为参数。这样便可用参数化分布 $q_\theta(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X})$近似难以求解的后验分布 $p(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X})$，从而建立从观测空间到潜空间的映射。此外，还对潜空间变量的分布作出变分近似，即假设潜变量服从某个已知分布 $p(\boldsymbol{Z})$。对真实后验分布进行这种变分近似后，可得到对数似然的以下下界：

$$\mathcal{L}(\theta, \phi, \boldsymbol{X}) = \mathbb{E}_{q_\theta(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X})}[log(p_\phi(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z})] - D_{KL}(q_\theta(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X})||p(\boldsymbol{Z}))) \tag{11}$$

其中， D_{KL} 表示库尔贝克-莱布勒散度，这是一种用于衡量分布相似性的度量。
随后，通过优化两个网络 θ 和 ϕ的参数，使这一被称为证据下界（ELBO）的下界达到最大。最大化该函数旨在：i）提高解码器的期望重构损失，即从潜变量中恢复观测值的效果；ii）最小化潜空间真实后验分布与近似后验之间的 KL散度（从而最大化二者的相似性）。按照这一过程训练好 VAE 后，便可以利用推断得到的变分分布 $q_\theta(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X})$对潜空间进行采样，随后使用解码器重建所需的感兴趣量（输出）。

为了优化方程（11），有必要估计证据下界的梯度。Kingma 等人（44）通过使用重参数化技巧实现了这一点。通过选择由编码器网络参数化的对角高斯分布作为近似后验的形式，可以将从该分布中进行采样重新参数化如下；

$$\eta = \mathcal{N}(0, I) \tag{12}$$
$$q_\theta(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{Z} : \mu_\theta(\boldsymbol{X}), \sigma_\theta(\boldsymbol{X})) \tag{13}$$
$$= \mu_\theta(\boldsymbol{X}) + \eta \odot \sigma_\theta(\boldsymbol{X}) \tag{14}$$

其中，η表示来自对角高斯分布$\mathcal{N}(0,\ I)$的一个样本，而$\mu_\theta(\boldsymbol{X})$ $\sigma_\theta(\boldsymbol{X})$分别是由编码器网络输出的潜空间的均值和标准差值。随后，近似后验被重新表述为随机抽样η，而确定性的均值和标准差值则由编码器预测。

这使得可以通过从标准多元高斯分布中采样来计算期望，同时，对于每个样本，都可以确定性地计算梯度，从而能够使用反向传播进行训练。此外，对于 $p(\boldsymbol{Z})$ 采用球形单位高斯先验时，KL散度项可以通过解析方式计算（44）。由此得到以下针对每个样本的可微代价函数，其中使用每个数据点在潜空间中的N_v个样本来计算期望。

$$\mathcal{L}(\theta, \phi, x^i) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}(1 + log((\sigma_j^{(i)})^2) - (\mu_j^{(i)})^2 - (\sigma_j^{(i)})^2) + \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{N_v} log(p_\phi(X^i, Z^{i,l}) \tag{15}$$

其中，J表示潜空间的维数，$Z^{i,\ j} = \mu_\theta(X^i)\ + \eta^l \odot \sigma_\theta(X^i)$。从潜空间中抽取用于计算期望的样本数甚至可以为1，这与 Kingma 等人（44）的原始表述一致。
如上所述，在 VAE模型中，编码器和解码器函数通过深度神经网络（DNNs）进行近似。深度神经网络是一类应用非常广泛的模型，它们通过依次应用多个神经网络层，以比浅层网络更高效的方式近似非常复杂的函数（8）。关于深度神经网络及其训练的详细介绍可见（32）；本文所使用的深度神经网络仅采用了全连接层。在全连接层中，每层执行的变换包括将输入向量与可训练权重矩阵相乘，并加上可训练偏置向量。随后，通常会对该运算的输出逐元素应用非线性激活函数，例如 $tanh$ 或 $sigmoid$。由此得到一个非常灵活且强大的模型，可用于学习一般的非线性关系（32）。

3.2 VpROM：条件变分自编码器（cVAE）增强的降阶模型

在我们的应用场景中，我们的目标并不只是为目标系统采样可能且合理的基底，而是希望采样在给定系统和载荷（激励）参数条件 下的这些基底。通过将条件参数 $\boldsymbol{p}$ 与 VAE 的输入 $\boldsymbol{X}$以及潜空间变量 $\boldsymbol{Z}$ 进行拼接，我们可以相对直接地实现这一目标，如图2所示。从数学角度来看，编码器所近似的分布现在变为 $q_\theta(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{p})$，而解码器所近似的分布变为 $p_\phi(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{p})$。为阐明 cVAE 在所推导的*VpROM*中的作用，图2中所指的输入对应于公式（8）中的 ROM基底系数 $\boldsymbol{X}$。因此，图2直观展示了 cVAE 所执行的映射过程，即将全阶模型的参数依赖关系与降阶模型投影基底 $\boldsymbol{V}$联系起来。模型依赖性在公式（1）中表达，并由变量 $\boldsymbol{p}$捕获；而其与公式（3）中 $\boldsymbol{V}$的关系，则通过公式（8）中的系数 $\boldsymbol{X}$ 表达。

3.3 VpROM：生成新基

在本研究中，我们提出训练 cVAE 以创建生成模型，并从中采样，以便针对给定的参数向量 $\boldsymbol{p}_i$生成公式（8）中的约化基系数 $\boldsymbol{X}_i$。其中，参数反映系统的某些属性或施加的载荷。具体而言，训练好的 VAE 可用后，便不再使用编码器部分，而是完全通过解码器以及假设的潜空间变分分布进行预测。在本例中，采用对角高斯分布，如图 3 所示。
因此，为了从解码器中采样，我们只需从选定的先验分布 $p(\boldsymbol{Z})$ 中抽取一个样本 ϵ，并将该样本与给定参数 $\boldsymbol{p}$ 拼接起来。然后，将该潜向量输入解码器，从而得到一个来自观测分布 $p_\phi(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{p})$ 的样本。该样本是给定参数向量下预测系数值分布中的一次抽取。之后可以重复这一过程，获取多个样本，以计算预测系数的均值、标准差等量。这一生成过程强调了最小化损失函数中 KL 散度项的重要性。如果 KL 损失较低，近似后验分布 $q_\theta(\boldsymbol{Z}|X, p)$ 就会更接近先验分布 $p(\boldsymbol{Z})$。

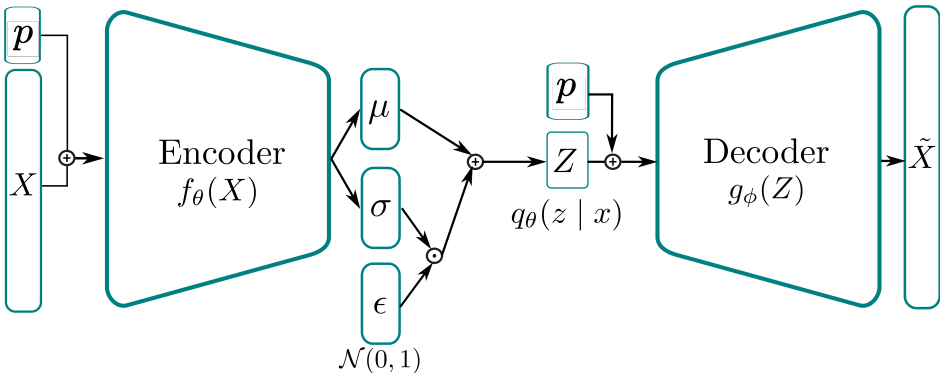


图2：条件变分自编码器（cVAE）的架构，其中条件变量通过与输入向量 $\boldsymbol{X}$ 和潜向量 $\boldsymbol{Z}$拼接的方式注入。输入指的是公式（8）中的ROM基底系数 $\boldsymbol{X}$

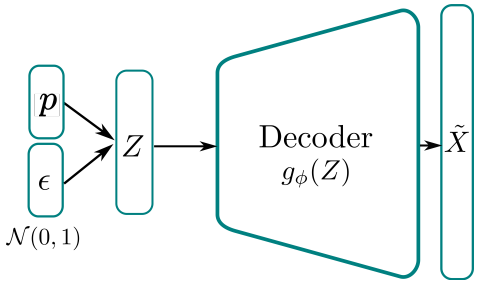


图3：用于基底生成时条件变分自编码器（cVAE）的架构：从先验分布 ϵ 中采样潜向量，并与条件向量 $\boldsymbol{p}$ 拼接，然后对这些潜向量进行解码，以获得公式（8）中的生成基底系数 $\boldsymbol{X}$ 。

3.4 训练VpROM

如前所述，我们希望训练条件变分自编码器，使其生成的不是局部基本身，而是公式（8）中引入的系数矩阵 $\boldsymbol{X}_i$，再利用这些系数矩阵从全局基底生成局部ROM子空间。为此，我们需要由参数向量 $\boldsymbol{p}_i$ 及其对应的系数矩阵 $\boldsymbol{X}_i$ 组成的训练对。首先，使用拉丁超立方采样（LHS）对参数向量进行采样，以创建这些训练对。随后，将每个训练向量用作全阶模型快照的模型/输入参数。生成的快照将用于分别构造局部基 $\boldsymbol{V}_i$ 和全局基底 $\boldsymbol{V}_{global}$，进而按照第 2.4 小节所述的过程构造系数矩阵。经过初步尝试后，我们决定针对系数矩阵 $\boldsymbol{X}_i$ 的每一列分别训练一个条件变分自编码器。这样做是合理的，因为 $\boldsymbol{X}_i$ 的每一列对应一个不同的保留 POD 模态，而这些模态应当相互正交。此外，分别处理每一列能够提升条件变分自编码器生成新基的性能。

˜ ˜为准备训练数据，将系数矩阵 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{R}^{r*n}$ 的各列 $\boldsymbol{X}_c, c = 1,$ $..., n$ 作为向量，并与参数向量 $\boldsymbol{p}_i$ 配对用于训练。此外，参数值在 -1 与 1 之间进行归一化 ˜，系数向量也按公式（16）所示进行归一化。系数向量 $\boldsymbol{X}_c$通过取自然对数进行归一化；这样做的优点是使向量分量的振幅更加接近，从而避免极端值主导代价函数。需要加上常数 2，以确保所有值均大于零，避免对数运算出错。

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_c^{norm} = \ln\left(\tilde{\boldsymbol{X}}_c + 2\right) \tag{16}$$

所有模型均使用 TensorFlow 和 Adam算法（43）构建并训练。在训练 cVAE 时，还必须选择网络架构、层的数量和大小以及所使用的激活函数；不过，这些都可以视为超参数，并可根据网格搜索等常用方法进行优化。网络架构会极大地影响模型的表达能力和泛化能力。所有训练好的模型仅使用了全连接层和Dropout层。全连接层是一种传统的全连接前馈

神经网络层。在每个全连接层之间插入了一个 Dropout层。Dropout 是一种用于对深度神经网络进行正则化的技术，其原理是在每次训练更新期间，将给定层中一定百分比（即 Dropout百分比）的激活值设为零。研究表明，这种技术能够提高深度神经网络的泛化能力和性能（69）。因此，每个模型需要优化的架构超参数包括编码器和解码器中的全连接层数量、这些层中的神经元数量、这些层所使用的激活函数，以及各层之间包含的 Dropout 数量。瓶颈层的大小，换言之，驱动该过程的潜变量数量，对于降阶同样至关重要。不过值得注意的是，在本研究中发现，应用 Dropout 并不能提升性能；因此，最终实现的模型均未使用该方法。

4 结果

本节通过两个案例研究，验证所提出框架性能的各个相关方面。这些案例研究涉及系统属性和激励特征中的参数依赖关系。首先，在一个包含滞回关节的两层剪切框架非线性基准模拟器（73）上验证所提出的 cVAE 增强降阶模型；随后，在一个规模更大的仿真中进行验证，该仿真涉及计算塑性，并基于 NREL 参考 5 兆瓦风力涡轮机塔架（ 39 ）。

如第2节所述，为全面讨论所提出框架的潜力和性能极限，我们对不同的参数化降阶模型配置进行了比较。第一种参数化降阶模型配置为第2.3小节介绍的 MACpROM，它采用基于模态保证准则引导的局部POD基聚类方法。接下来，我们评估第2.4小节介绍的 CpROM，该模型采用文献（75）中的局部基系数插值方法。这两种降阶模型均采用现有的先进方法构建，用于比较。最后两种参数化降阶模型基于本文提出的 cVAE框架构建，以将参数变异性融入局部投影基。我们评估所提出的 cVAE 增强降阶模型（称为 *VpROM*）在包含和不包含超降阶的情况下的性能，超降阶详见第2.5小节。表2汇总了这五种方案的记法和配置，以供参考。下文将介绍不同的案例研究，并比较这些方案的性能。

表2：对比降阶模型的参考表。

模型参考名称	描述
FOM	全阶有限元模型
MACpROM	局部基集合和 MAC引导聚类。该方法被称为 如第 2.3 小节所述。
CpROM	每个局部基和插值的系数公式为 $\boldsymbol{X}$ 如第 2.4 小节所述。
VpROM	第 3 节所述的 cVAE增强降阶模型
HP-*	相应的*还配备了超降阶

关于计算资源和时序，所给示例的验证仿真采用内部构建的有限元代码实现，该代码基于文献（7）的建议，并在配备 11thGen Intel(R) Core(TM) i7-1165G7 处理器（运行频率为 2.80GHz）和 32GB 内存的工作站上进行测试。此外，报告的计算时间是对每组相应配置（训练或测试）中的所有全阶模型或降阶模型评估结果取平均所得。以下报告了各框架在复现相应动态验证案例的时间历程响应方面的性能：

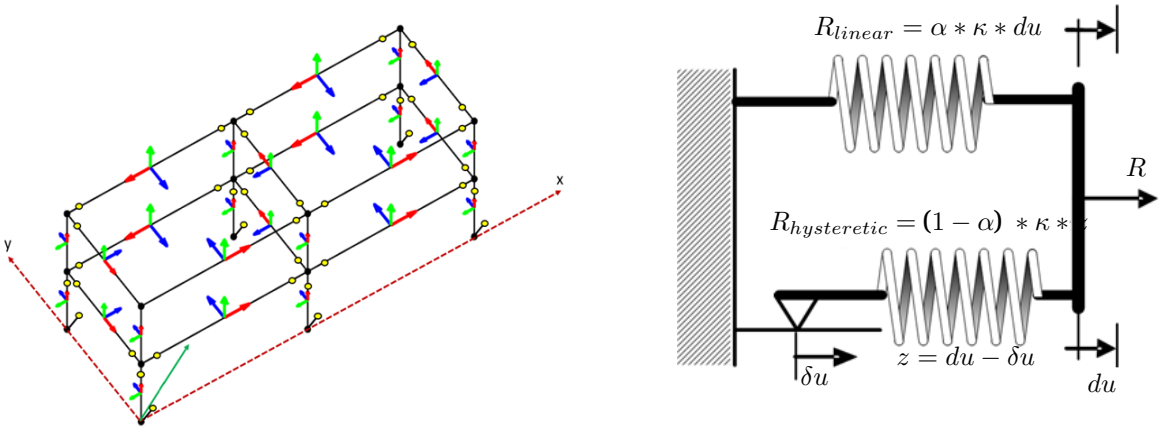
$$err_q = \frac{\sqrt{\sum_{i\in\tilde{N}_{\text{DOF}}}\sum_{j\in\tilde{N}_t}\left(q_i^j-\tilde{q}_i^j\right)^2}}{\sqrt{\sum_{i\in\tilde{N}_{\text{DOF}}}\sum_{j\in\tilde{N}_t}\left(q_i^j\right)^2}}\times 100\% \tag{17}$$

其中 N_{DOF} 表示 一组用于响应比较的自由度， N_t 一组所选时间步， q_i 是感兴趣的全阶模型 M 个关注量在自由度 i处，而 $\tilde{q}_i$ 是使用降阶模型近似计算得到的相应推断值。

4.1 带滞回连接件的两层剪切框架 s

作为初始示例，我们考虑一个具有非线性节点耦合的三维两层剪切框架有限元模型，其中每个节点耦合均表现出Bouc-Wen滞回非线性（38）。选择此示例作为演示性案例，是因为仿真器能够对多个同时激活的非线性实例进行建模，从而对任何所推导降阶模型的精度构成挑战。由于这是一个低维示例，我们使用它的主要目的是评估表2中相应降阶模型的精度，因为该模型过于简单，无法体现显著的计算节省。下一案例研究将展示各种参数化降阶模型在加速模型评估方面的能力，其中将采用一个大规模风力机塔架。

图4a展示了剪切框架的设置示意图，其中滞回连接件长度为零。不过，为便于说明，图4a中将虚拟节点绘制在距参考节点一定距离的位置。可在文献（73）中找到相应的模型文件，以复现相关结果；该示例已作为基准多自由度非线性响应仿真器发表。在材料属性方面，本案例研究采用模板配置（74）。具体而言，所有梁单元均采用钢制HEA截面；该结构由沿轴线 x布置的两个框架组成，每个框架长 $l = 7.5\,m$ ，宽度方向上为一个框架$w = 6\,m$ 。此外，每层高度为 $h = 3.2\,m$。



（a）两层框架示意图。 (b) Bouc-Wen模型在x-方向上的简化示意图 DOF.

图4：框架设置示意图及其连杆中非线性机制的图示。绿色箭头表示地震动方向，彩色箭头表示梁单元的方向。

我们采用Bouc-Wen公式对非线性接头的行为进行建模：该公式反映了一种平滑的滞回模型，常用于模拟材料非线性 (37)。因此，根据 (73) 中的基准描述，在每个节点耦合的每个自由度上引入Bouc-Wen模型，以模拟每个接头的总恢复力$\mathbf{R}$ 。图4b展示了纵向x自由度上的非线性机制示例。Bouc-Wen连杆模型将$\mathbf{R}$ 表示为线性项和非线性项的叠加，分别对应图4b中的两个弹簧。线性项和非线性项（或弹簧）分别取决于瞬时节点响应 δu 以及响应中具有滞回特性的、因而依赖历史的分量 z。相应地，连杆所有自由度的向量化数学公式如下：

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{linear} + \mathbf{R}_{hysteretic} = \alpha * k * \mathbf{du} + (1-\alpha) * k * \mathbf{z} \tag{18}$$

其中， $d\mathbf{u}$ 表示节点位移，而 α, k 是表征每根连杆上Bouc-Wen模型的特征参数。从物理意义上看， α 表示每根连杆屈服后刚度与弹性刚度响应之比的特征值，而 k 是相应的刚度系数。变量$\mathbf{z}$ 表示伸长量中的滞回部分，或一般意义上的位移，并控制滞回力。它满足以下关系：

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{A\mathbf{d\dot{u}} - \nu(t)(\beta|\mathbf{d\dot{u}}|\mathbf{z}|\mathbf{z}|^{w-1} - \gamma\mathbf{d\dot{u}}|\mathbf{z}|^{w})}{\eta(t)} \tag{19}$$

$$\nu(t) = 1.0 + \delta_\nu\epsilon(t), \quad \eta(t) = 1.0 + \delta_\eta\epsilon(t), \quad \epsilon(t) = \int_0^t \mathbf{z}\mathbf{d\dot{u}}dt \tag{20}$$

其中，形状、 平滑度以及滞回曲线的整体振幅决定了动态行为特征
其中每个节点的滞回曲线参数 β、 γ、 w 和 A 分别引入。术语 $\nu(t)$ $\eta(t)$ 被引入 d

用于通过相应的系数 δ_ν 和 δ_{eta}捕捉强度退化和刚度退化效应。反过来，它们随时间的演化取决于吸收的滞回能量 $\epsilon(t)$。这种表示方式使得结构动力学模拟器能够根据系统属性和节点行为特征进行参数化。关于Bouc-Wen模型参数在屈服、软化和滞回行为效应方面的物理内涵，读者可参阅文献（16；73）。

选择该参数化剪切框架仿真器，是因为它能够模拟多种主导响应的非线性动力效应，而这些效应取决于模型的参数配置。在所呈现的案例研究中，定义结构本身的参数以及定义作用荷载的参数都可能显著影响响应。参数集包括激励信号的时间和频谱特征、框架材料属性，以及决定节点滞回效应的特征。本例采用的六个参数汇总于表 3。

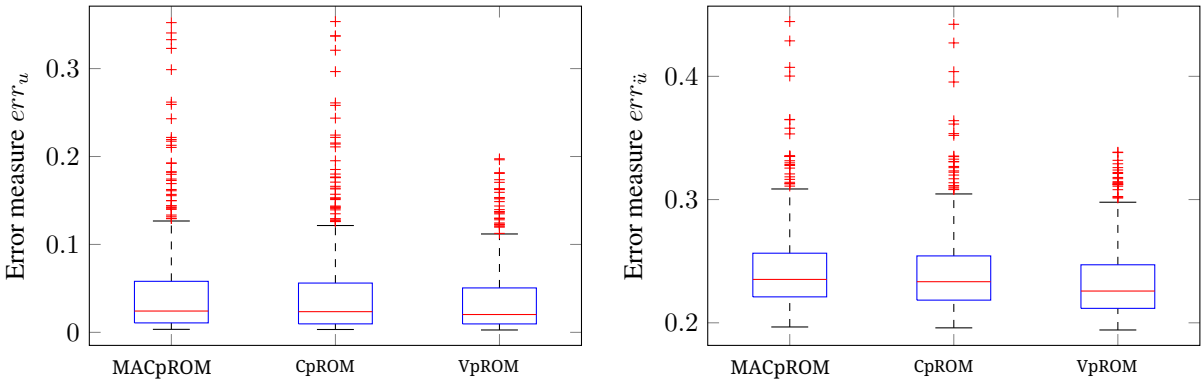
首先，将杨氏弹性模量E 作为模型参数，以此引入系统材料属性的不确定性。其取值范围汇总于表 3。此外，对剪切框架非线性接头的三个特征进行参数化，以便建模并模拟相应滞回行为曲线的各种特性和形状。具体而言，将方程 (18) 中的参数 α 和 k 以及方程 (19) 中的参数 δ_n 作为依赖项引入所推导的降阶模型中。每个参数的数值范围也列于表 3。

表 3：两层框架：降阶模型参数的取值范围。所有参数均遵循均匀分布。

参数：	α	k	Amp	f_{but}	E	δ_η
范围：	[0.25,0.50]	[0.8,1.2]$\times 10^8$	[1.5,3.0]$\times 10^6$	[5,15] Hz	[185,235] GPa	[0.25，0.75]

对框架系统施加代表地震的基底激励。力以相对于 x 轴的 $\theta = \pi/4$ 角施加，如图 4a 所示。为生成激励的参数化版本，使用白噪声模板加速度时程作为参考。随后，将该模板信号通过二阶巴特沃斯低通滤波器，并与幅值因子相乘，从而生成施加于系统运动的实际加速度时程。幅值系数 Amp 和滤波器频率 f_{but} 被视为依赖项。因此，由于模型同时依赖系统参数和激励特征，所研究的动力系统会根据所选的参数配置表现出显著不同的行为。数值研究经过专门设计，用于验证在所推导的代理模型中注入依赖项的必要性，同时利用仿真器输出多种非线性行为的能力，从而对降阶模型的精度极限提出挑战。

此处实现了表2中提及的所有降阶模型，采用相同的训练方案：使用拉丁超立方采样抽取五十个样本。各降阶模型对应的性能度量在一个包含五百个样本的验证集上进行评估，该验证集使用不同的随机种子进行拉丁超立方采样。关于低阶维数，对于每个局部基 $\boldsymbol{V}$保留 $r = 16$ 个模态，并在方程（8）中为 $\boldsymbol{V}_{global}$ 保留 $\tilde{r} = 200$个模态。



（a）位移精度。 （b）加速度精度。

图5：报告位移和加速度时间历程捕捉精度的箱线图。分别误差度量的分布 err_u， $err_{\ddot{u}}$ 来自公式（17）与相应的中位数（红线）和离群值（红色叉号）一并进行了可视化。

对所实现的 表2中降阶模型的精度进行了详细评估，结果如图5所示。精度
各自的 代理模型根据两个指标进行评估，即方程（17）中的 err_u 和 $err_{\ddot{u}}$ ， 分别 at

对应于捕捉位移和加速度时程时的误差。箱线图直观展示了各个降阶模型在位移和加速度方面捕捉全阶模型响应的能力，同时相应数值也列于表4中。尽管总体精度相对较低，但本例仅旨在提供一种比较，并有意采用相对宽泛的参数域，以激发显著不同的动态行为。

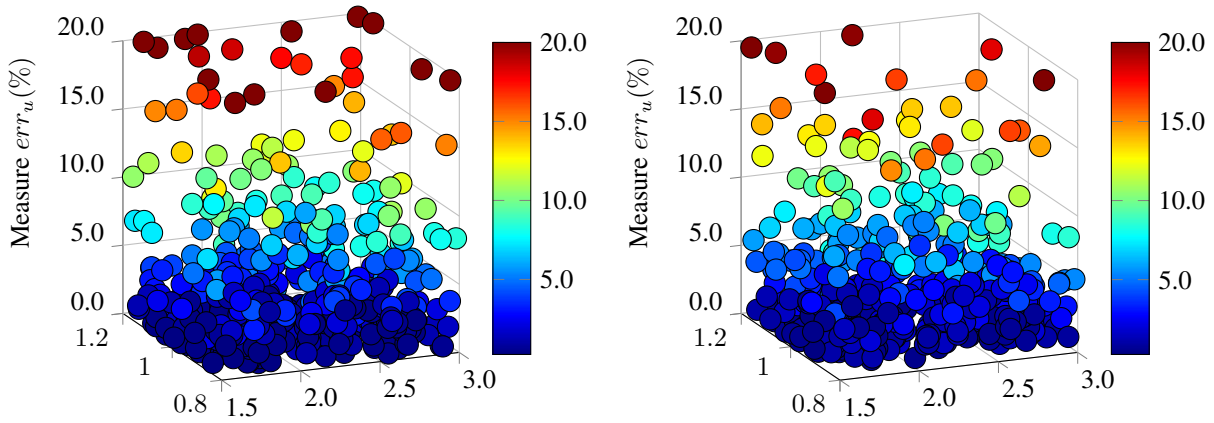
表2中的降阶模型的性能。报告了位移和加速度的中位数误差和最大误差。还报告了效率，但尚未实现超降阶。

	中位数错误		最大值错误		效率	
	err_u	$err_{\ddot{u}}$	err_u	$err_{\ddot{u}}$	加速比因子	CPU时序
FOM	-	-	-	-	1.00	53（秒）
MACpROM	2.42%	35.23%	23.52%	44.44%	2.22	24（秒）
CpROM	2.35%	35.34%	23.33%	44.22%	2.10	25（秒）
VpROM	2.20%	19.62%	22.57%	33.81%	2.41	22（秒）

尽管如此，图5和表4显示，所实现的 MACpROM 在近似位移和加速度时程方面，与参考 CpROM 具有相近的精度。两者的中位误差和箱线图四分位数几乎重合，且似乎产生了相似的离群值分布。另一方面，本文提出的 *VpROM* 性能显著提升。离群值更少，离群样本的偏差显著更低，且可视化分布的中位误差和最大误差也更低。

图6进一步直观比较了所实现降阶模型的精度。为便于展示，选取了一个投影平面，并在纵轴和色标上分别显示验证指标。与图5a类似，err_u 在图6中作为代表性指标进行了可视化，用以衡量降阶模型重现全阶模型位移时程的能力。此外，为了使比例尺更合适、比较更清晰，所有误差超过20%的样本均以20%颜色等级显示。由于图5a中既有的 CpROM 和 MACpROM 在位移精度方面表现相近，为了更清楚地展示结果，图6仅将本研究提出的*VpROM* 与 CpROM 进行比较。

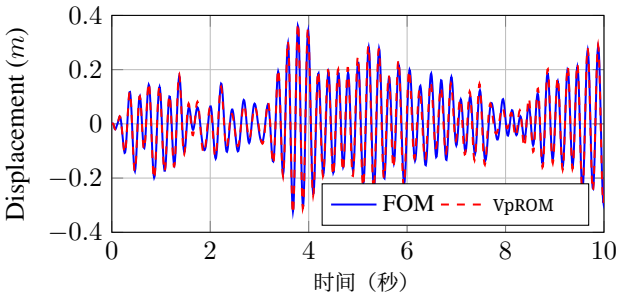
如前所述，*VpROM* 能够以总体更高的精度捕捉参数化输入域内的动力学，其精度离群值也少于 CpROM 或 MACpROM。图6通过以下现象对这一点进行了可视化展示：*VpROM* 位于深红色区域的圆圈更少，并且落在蓝绿色谱带之外的评估结果显著减少。因此，尽管存在少量离群值，该框架的总体精度仍优于所比较的成熟基于物理的模型降阶替代方法。



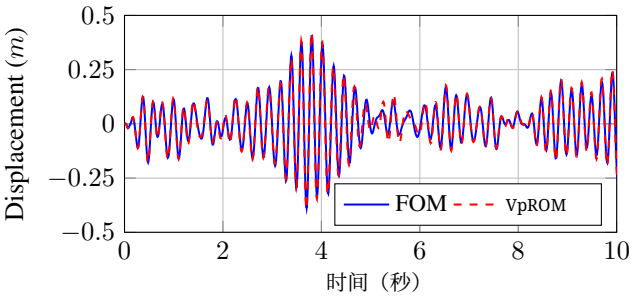
(a) 已建立的 CpROM 的精度。 (b) 所提出的*VpROM*的精度。

图6：位移时程（err_u）方程（17）的误差分布参数可视化。由于 MACpROM 的性能略差（如图5所示），因此将所提出的 *VpROM* 与 CpROM 进行比较。所有误差大于 20% 的样本均以 20%颜色等级显示，以便更清晰地进行比较。

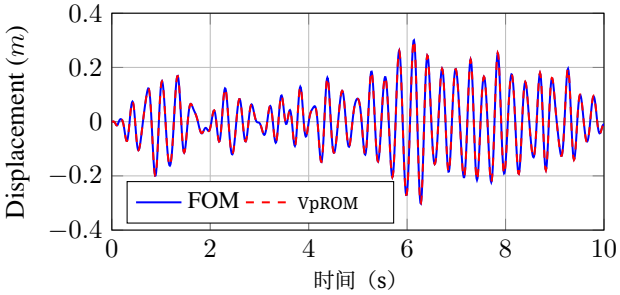
图7展示了对*VpROM* 所实现近似质量的更详细评估。具体而言，图中描绘了不同精度水平下的时程估计，以直观展示并验证*VpROM*的整体性能。图6中色标所表示的每一类样本点中均选取了一个样本进行展示。*VpROM* 针对各种响应模式进行了近似可视化，以突出代理模型推断不同效应主导的动力行为的能力；这些效应通过连杆上滞回曲线的多种形状进行建模。结果表明，在一个复杂示例中，*VpROM* 能够实现稳健的近似：该示例具有丰富的动力行为，其特征是刻画非线性接头行为的滞回曲线呈现出多种不同的形状和振幅。



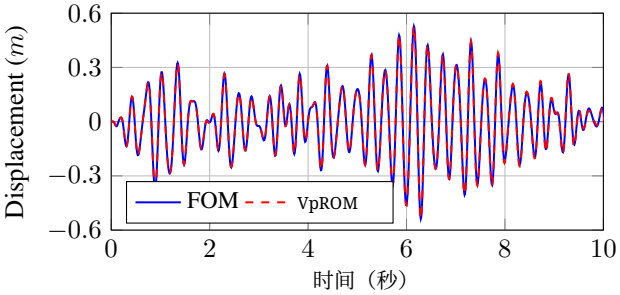
（a）图 6 中深红色区域内某个样本的近似。



（b）图6中红色区域内一个样本的近似。



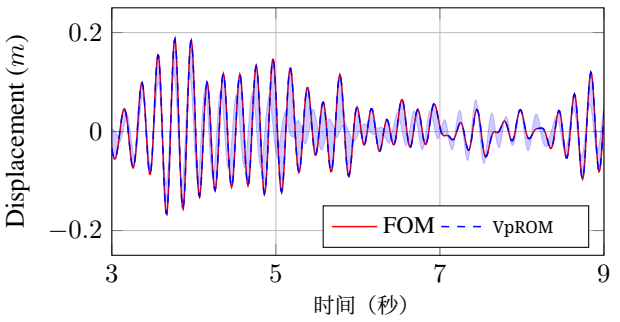
（c）近似 图6中黄色区域内一个样本的近似。



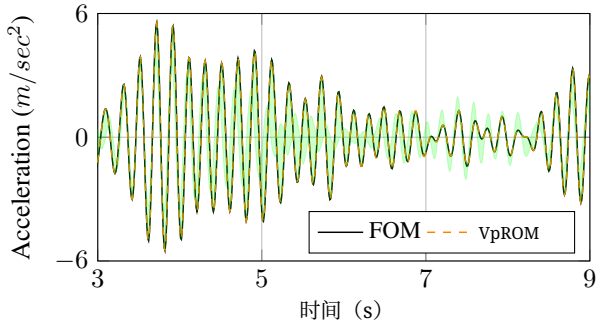
（d）图中青色区域内某个样本的近似 6.

图7：使用*VpROM*实现的不同近似质量等级的可视化。报告了*VpROM*对系统根据其参数特征呈现的各种响应模式的估计。

除了提供一个已证明能够跨参数配置实现泛化的稳健降阶框架之外，所构建的*VpROM* 还具有量化相应估计结果中不确定性的潜力。这是因为 cVAE 组件的潜空间经过训练，可近似给定的变分分布；因此，通过对该变分分布进行采样，除了得到均值之外，还可以捕获预测局部基系数中的不确定性



（a）位移响应的近似。



（b）加速度响应的近似。

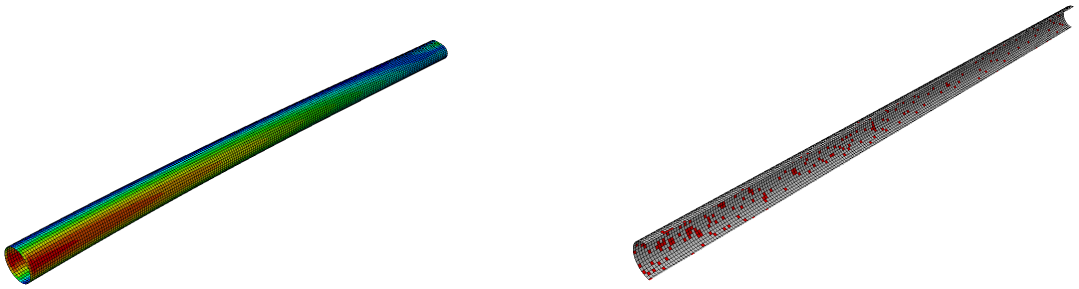
图8：*VpROM* 近似的平均质量。评估针对具有最大绝对响应的自由度进行。阴影区域量化了响应推断的不确定性。

估计值。显然，仅使用系数的预测均值会丢失有关这些值不确定性的大量信息。因此，值得考虑利用该技术来估计每个样本的降阶模型响应中的不确定性。为了传播这种不确定性，采用由 VAE 潜空间中的不同样本生成的不同系数值，对*VpROM* 进行多次并行评估。随后，通过考察响应的分布来评估并量化相应推断中的不确定性。所得近似结果带有置信界，可为结构动力学中的许多问题提供更高的实用价值。

图8给出了相应输出的可视化结果，其中展示了*VpROM* 对位移和加速度的平均性能。相应的阴影区域表示推断方案的置信界，该置信界通过对潜空间的预测分布进行40次采样，并使用解码器为这40个采样向量分别组装的局部基传播响应来评估。阴影区域涵盖了所进行的40次模拟在每个时间点的最大值和最小值。图8中*VpROM* 近似的相应平均质量表明，这是一种高精度的基于物理的代理模型，并且能够对相应估计结果中的不确定性进行量化。为进一步评估所提出框架的适用性，并展示其在降低计算成本方面的实用价值，下一节将讨论一个大规模示例。

4.2 具有塑性的风力机塔架

本节基于对NREL 5-MW参考风力涡轮机塔架动力响应的模拟结果，使用一个大规模示例评估所提出 *VpROM* 的性能。关于该案例研究的配置，读者可参阅文献（75）。简而言之，单桩的三维有限元模型如图9a所示，具有圆形横截面，并从底部到顶部呈线性锥变。单桩底部的相应直径和壁厚分别为 $6m$ 和 $0.027m$，顶部则分别为 $3.87m$ 和 $0.019m$。然而，为简化起见，整个塔架采用恒定厚度假设，并使用8170个壳单元。风力机安装在单桩顶部，采用集中质量方案和常规梁单元，并通过多点约束与塔架连接。关于材料属性，假定材料为钢，其 $E_{steel} = 210GPa$ 和密度为 $\rho = 7850kg/m^3$，并采用以各向同性冯·米塞斯塑性为特征的非线性本构定律。



（a）示例变形状态下的有限元网格。 （b）以红色突出显示的某个簇中的 ECSW单元。

图9：风力机塔架：有限元模型和 ECSW 网格示例。为便于可视化，对 ECSW单元进行了水平剖切。

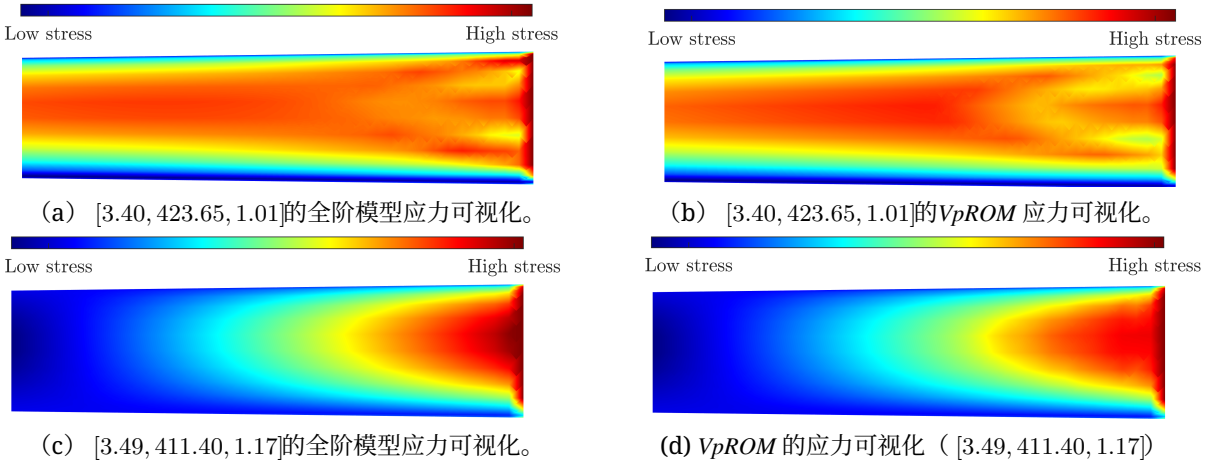
尽管所采用的应力-应变关系可能显得相对简单，但该问题具有广泛的屈服区域（高度的 $\approx 30\%$）、额外的模型不确定性以及会增加复杂性并对高精度降阶模型的推导提出特定要求的随机激励。此外，本大规模案例研究还用于展示超降阶模型的效率，因为超降阶模型能够大幅降低总体计算成本。因此，本文对所有降阶模型的超降阶变体进行了验证，例如表2中的 *HR-VpROM* 。

表5：已实现降阶模型的参数值范围。E_{ref} 指分配给每种材料的典型模量 该模型。

参数:	激励幅值 A	屈服应力 σ_{VM}	杨氏模量 E
范围:	[2.50, 3.75]	[375, 450] (MPa)	[0.80, 1.20]$\times E_{ref}$ (GPa)

关于参数依赖关系，采用神户地震加速度图作为地震动情景，并针对其振幅 A进行参数化。屈服应力 σ_{VM} 和杨氏弹性模量 E 也进行了变化。这些参数依赖关系的范围汇总于表5中。训练与验证域采用拉丁超立方抽样进行设计，与第4.1小节类似。在本案例研究中，选取低阶维数 $r = 4$，同时为 $\boldsymbol{V}_{global}$ 在公式（8）中保留 $\tilde{r} = 32$ 个全局模态，而第2.5小节所讨论的ECSW超降阶技术中的 τ 参数设置为 $\tau = 0.01$。本文展示了所提出的 *HP-VpROM* 准确推断与动态结构系统相关的响应场、同时加速模型评估的能力。

图10展示了两个验证示例中 *HP-VpROM* 对屈服区域内部应力场的近似可视化，这两个示例具有不同的动态行为。此外，还通过全阶模型（FOM）对相应的高保真场进行了可视化，以供参考。应力和应变是许多结构应用中需要监测的重要指标，因此，准确捕捉其分布往往至关重要。尽管观察到一些细微差异，图10所示的*HP-VpROM* 近似总体质量表明，该方法能够有效地进行低阶表示，并提供高精度的应力状态分布估计。这体现了所提出的*HP-VpROM* 在状态监测、疲劳分析或损伤定位方面的潜在用途。



（a） $[3.40, 423.65, 1.01]$的全阶模型应力可视化。 （b） $[3.40, 423.65, 1.01]$的*VpROM* 应力可视化。

（c） $[3.49, 411.40, 1.17]$的全阶模型应力可视化。 (d) *VpROM* 的应力可视化（ $[3.49, 411.40, 1.17]$）

图10：通过所提出的*VpROM* 采用节点平均实现的内部应力近似可视化。图中仅显示屈服区域，其高度为总高度的三分之一。

表6全面总结了降阶模型性能的各个方面。具体而言，表中汇总了表2中所有超降阶代理模型对位移和加速度时程进行近似时的平均误差度量和最大误差度量。此外，还报告了输入域极端区域内两个验证样本的精度，以供参考。

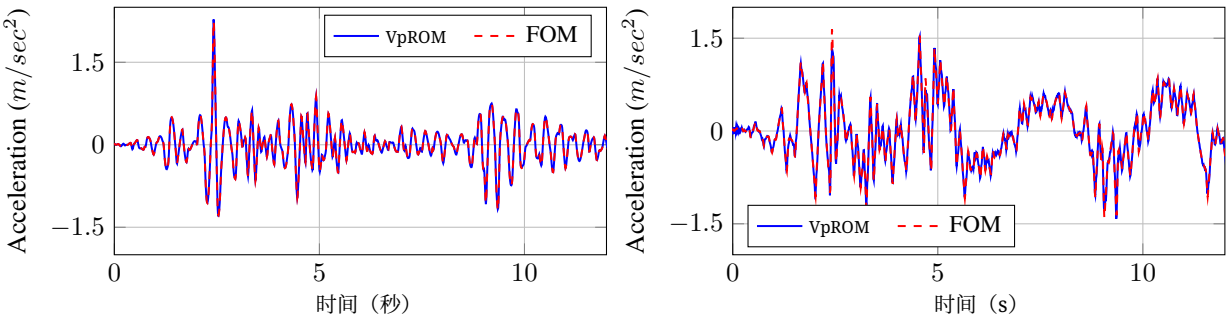
与第4.1小节前一个案例研究中的观察结果类似，*VpROM*的超降阶变体，即*HP-VpROM*，在精度方面提供了更优的代理模型。其捕捉位移时的较低最大 err_u误差度量表明，该近似具有稳健性，而另外两种降阶模型则出现了性能离群值，精度显著下降。同时，*HP-VpROM* 的平均偏差低于1%，表明其表示精度很高。观察作为补充示例提供的两个验证样本的相应度量，也可以得出类似结论。对于加速度响应的推断，*VpROM* 仍保持更高的精度，不过其优势似乎仅略胜于所实现的另外两种降阶模型。

表6还记录了所提出的*HP-VpROM* 在需要（近）实时模型评估的应用中的实用性。超降阶技术与降阶模型在适当低阶子空间中传播动力学的能力相结合，可显著降低计算开销并加快计算速度。表6中报告的相应平均加速比 t_{FOM}/t_{ROM}表明，在模型评估过程中可显著节省计算资源。

报告的性能度量凸显了这样一个事实：即使结合超降阶，所提出的降阶模型框架仍然稳健且精确。所引入的生成模型确保*HP-VpROM* 能够捕捉响应中的不同动态趋势，并避免出现精度离群值。图11对此进行了示意性展示，其中给出了位于输入域边缘附近的验证样本对应的全阶模型加速度响应，以及相应的*HP-VpROM* 近似结果。

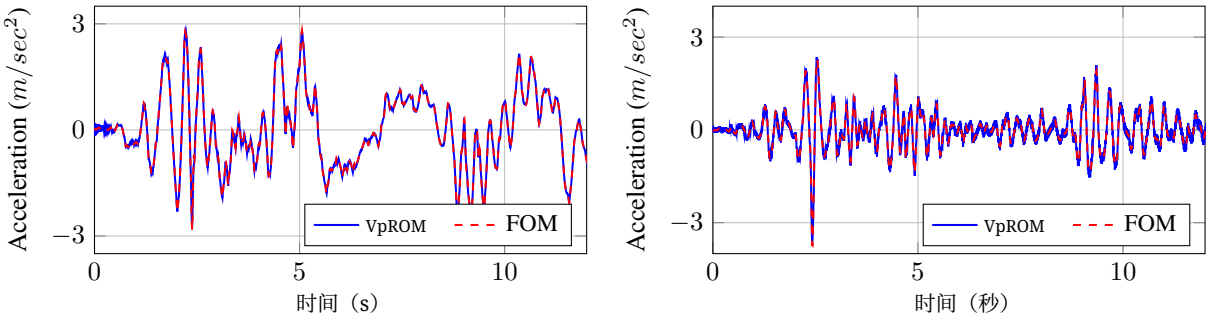
表6：表2中超降阶模型的性能度量。以两个验证样本为例，同时给出了相应的中位数和最大误差度量（公式（17））。此外还报告了效率。

	样本 [2.5,375,0.80]		样本 [3.75,450,1.2]		平均值 误差		最大值 误差		效率 加速比	CPU
	err_u	$err_{\ddot{u}}$	err_u	$err_{\ddot{u}}$	err_u	$err_{\ddot{u}}$	err_u	$err_{\ddot{u}}$	因子	时序
FOM	-	-	-	-	-	-	-	-	1.00	3990秒
HP-MACpROM	2.01%	6.44%	1.54%	5.88%	2.34%	6.24%	8.89%	7.64%	35.40	112（秒）
HP-CpROM	1.44%	6.48%	1.06%	5.87%	2.05%	6.22%	5.09%	7.48%	36.69	109（秒）
HP-VpROM	0.51%	6.44%	0.84%	5.89%	0.91%	5.98%	1.88%	7.13%	35.67	112（秒）



(a) 平均近似质量的可视化。

(b) 最大误差近似的可视化。



(c) $[3.40, 423.65, 1.01]$的近似。

(d) $[3.49, 411.40, 1.17]$的近似。

图11：使用*HP-VpROM*实现的不同近似质量水平的可视化结果。该估计针对系统根据其参数特征所呈现的各种响应模式进行报告。

系统行为中的不同模式得到了清晰展示，同时也体现出所构建的*HP-VpROM*能够以足够高的精度捕捉不同趋势。尽管观察到一些细微差异，尤其是在响应中存在高频分量时（如右下方示例），*HP-VpROM*在整个输入域内仍保持稳健的性能，并提供高质量的近似结果。

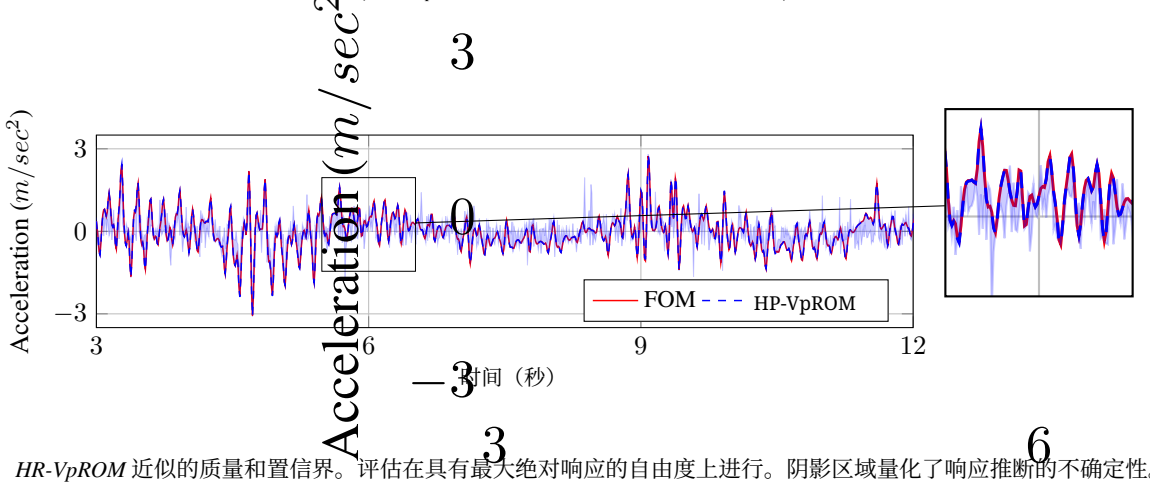


图12：*HR-VpROM*近似的质量和置信界。评估在具有最大绝对响应的自由度上进行。阴影区域量化了响应推断的不确定性。

降阶模型与基于条件变分自编码器的生成模型相结合，还带来了一项额外功能，即量化估计结果中的不确定性。所提出的 *HP-VpROM* 利用所构建的条件变分自编码器潜空间的概率特性，为其预测结果提供置信区间。图12展示了一个示例，其中针对一个具有代表性的验证样本，将加速度近似结果可视化。图12中的阴影区域表示相应预测结果的不确定性，在使用降阶模型预测结果时可用作置信度度量。与确定性方法相比，这提升了该方案的实用性。

5 局限性与结论性说明

本研究展示了如何使用一种基于条件变分自编码器的降阶模型（称为 *VpROM*），将其作为现有最先进方法的扩展，用于为非线性参数化降阶模型生成局部降阶基。
得出以下结论：

- 条件变分自编码器神经网络能够成功用于为具有高维参数化和强非线性行为的非线性参数化降阶模型生成局部基。
- 在大规模系统上对所提出方案进行验证后，模型评估速度显著提升，相较于全阶模型（FOM）几乎快了 40 倍。
- 在降阶模型（RROM）的精度方面，条件变分自编码器（cVAE）能够优于当前最先进的方法，例如插值和聚类算法。
- *VpROM* 的构建还具有额外优势，即能够编码预测局部基中的不确定性，并将其传播至预测响应中。

新开发的方法在两个模拟的非线性系统上进行了验证，这两个系统均同时根据系统特征和载荷特征进行参数化。第一个示例展示了该方法对于具有高维参数依赖性且表现出显著变化的非线性行为的系统的可行性。第二个示例在引入超降阶的情况下，于大规模系统上验证了所提出的方案，以展示该方法在超加速模型评估方面的实用性。在两个示例中，还展示了该方法量化其估计结果不确定性的潜力。

与当前方法相比，该方法的主要局限在于条件变分自编码器模型训练过程的相对复杂性。由于神经网络方法（例如变分自编码器）具有非常灵活的性质，因此通常包含相对较多的超参数，必须对其进行调节以获得最佳性能。在训练 *VpROM* 时，需要选择这些超参数，例如网络中的层数、每层的神经元数量、网络所使用的激活函数，以及优化算法的学习率。选择此类参数有多种启发式方法，例如网格搜索；然而，仍需强调的是，与采用聚类或插值方法的其他最先进方法相比，该过程需要付出更多努力。

数据可用性

支持本研究发现的数据，可根据合理请求向作者**TS**、**KV**获取 st.

利益冲突声明

作者声明，他们不存在任何已知的竞争性经济利益或可能被视为影响本文所报告工作的个人关系。

致谢

本研究获得了桑迪亚国家实验室的资助。桑迪亚国家实验室是一家多任务实验室，由桑迪亚国家技术与工程解决方案有限责任公司（霍尼韦尔国际公司的全资子公司）根据与美国能源部国家核安全管理局签订的合同 DE-NA0003525 负责管理和运营。本文介绍了客观的技术成果与分析。本文中可能表达的任何主观看法或意见并不一定代表美国能源部或美国政府的观点。此外，本研究还获得了欧盟“地平线2020”计划研究与创新项目玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第764547号以及工程与物理科学研究委员会资助协议 EP/R004900/1 的资助。

参考文献

[1] Konstantinos Agathos、Stéphane PA Bordas 和 Eleni Chatzi。裂纹固体的参数化降阶建模。《国际工程数值方法杂志》，121(20):4537–4565，2020年。[2] Konstantinos Agathos、Konstantinos E Tatsis、Konstantinos Vlachas 和 Eleni Chatzi。用于仅基于输出的振动裂纹检测的壳体结构参数化降阶模型。《机械系统与信号处理》，162:108051，2022年。[3] Randall J Allemang。模态保证准则：二十年的使用与误用。《声音与振动》，37(8):14–23，2003年。[4] David Amsallem 和 Charbel Farhat。线性参数化降阶模型插值的在线方法。《SIAM科学计算杂志》，33(5):2169–2198，2011年。[5] David Amsallem 和 Bernard Haasdonk。Pebl-rom：基于投影误差的局部降阶模型。《工程科学高级建模与仿真》，3(1):1–25，2016年。[6] David Amsallem、Matthew J Zahr 和 Charbel Farhat。基于局部降阶基的非线性模型降阶。《国际工程数值方法杂志》，92(10):891–916，2012年。[7] Klaus-Jürgen Bathe。有限元方法。Klaus-Jurgen Bathe，2006年。[8] Yoshua Bengio、Yann LeCun 等。推动人工智能学习算法的扩展。《大规模核机器》，34(5):1–41，2007年。[9] Peter Benner、Mario Ohlberger、Albert Cohen 和 Karen Willcox。模型降阶与近似：理论与算法。SIAM，2017年。[10] Christopher M Bishop。潜变量模型。载于《图模型学习》，第371–403页。施普林格，1998年。[11] Gabriele Boncoraglio 和 Charbel Farhat。主动流形与模型降阶：加速多学科分析与优化。《AIAA期刊》，59(11):4739–4753，2021年。[12] Samuel R. Bowman、Luke Vilnis、Oriol Vinyals、Andrew M. Dai、Rafal Józefowicz 和 Samy Bengio。从连续空间生成句子。CoRR，abs/1511.06349，2015 年。[13] Adam R Brink 、 David A Najera-Flores 和 Cari Martinez。用于求解偏微分方程的神经网络配置法。《神经计算与应用》，33:5591–5608，2021年。[14] Kevin Carlberg 和 Charbel Farhat。面向优化的降阶模型的紧凑本征正交分解基。载于第12届AIAA/ISSMO多学科分析与优化会议，维多利亚，不列颠哥伦比亚，加拿大，2008年。AIAA。[15] Kevin Carlberg 和 Charbel Farhat。面向优化的降阶模型的紧凑本征正交分解基。载于第12届AIAA/ISSMO多学科分析与优化会议，维多利亚，不列颠哥伦比亚，加拿大，2008年。AIAA。[16] Eleni N. Chatzi 和 Andrew W. Smyth。无迹卡尔曼滤波器与粒子滤波器方法：用于采用非共置异构传感的非线性结构系统识别。《结构控制与健康监测》，16(1):99–123，2009年。[17] F. Chinesta、A. Ammar、A. Leygue 和 R. Keunings。本征广义分解概述及其在计算流变学中的应用。《非牛顿流体力学杂志》，166(11):578–592，2011年。第十六届非牛顿流动数值方法国际研讨会。[18] Francisco Chinesta、Roland Keunings 和 Adrien Leygue。用于高级数值模拟的本征广义分解：入门。施普林格科学与商业媒体，2013年。[19] Erik Adler Christensen、Morten Brøns 和 Jens Nørkær Sørensen。评估应用于参数相关非湍流的基于本征正交分解的分解技术。《SIAM科学计算杂志》，21(4):1419–1434，1999年。[20] Ludovica Cicci、Stefania Fresca 和 Andrea Manzoni。Deep-hyromnet：一种基于深度学习的算子近似方法，用于非线性参数化偏微分方程的超降阶。arXiv预印本 arXiv:2202.02658，2022年。[21] Prafulla Dhariwal 和 Alexander Nichol。扩散模型在图像合成方面胜过生成对抗网络。载于 M. Ranzato、A. Beygelzimer、Y. Dauphin、P.S. Liang 和 J. Wortman Vaughan（编），《神经信息处理系统进展》，第34卷，第8780–8794页。Curran Associates, Inc.，2021年。[22] Carl Doersch。变分自编码器教程。arXiv预印本 arXiv:1606.05908，2016年。[23] Hamed Ebrahimian、Rodrigo Astroza、Joel P. Conte 和 Raymond A. de Callafon。利用批量贝叶斯估计进行土木结构损伤识别的非线性有限元模型更新。《机械系统与信号处理》，84:194–222，2017年。

[24] Lara Edington、Nikolaos Dervilis、Anis Ben Abdessalem 和 David Wagg。用于工程动力学应用的时变数字孪生工具。《机械系统与信号处理》，188:109971，2023年。[25] Charbel Farhat、Philip Avery、Todd Chapman 和 Julien Cortial。为提高计算效率，通过有限转动以及基于能量的网格采样与加权，对非线性有限元动力学模型进行降维。《国际工程数值方法杂志》，98(9):625–662，2014年。[26] Charbel Farhat、Todd Chapman 和 Philip Avery。能量守恒采样与加权方法用于非线性有限元动力学模型超降阶时的保结构性、稳定性和精度特性。《国际工程数值方法杂志》，102(5):1077–1110，2015年。[27] Stefania Fresca 和 Andrea Manzoni。POD-DL-ROM：通过本征正交分解增强用于非线性参数化偏微分方程的基于深度学习的降阶模型。《计算力学与工程方法》，388:114181，2022年。[28] Anthony Garland、Kevin Potter 和 Matt Smith。用于智能制造的特征异常检测系统（FADS）。arXiv预印本 arXiv:2204.10318，2022年。[29] Sokratia Georgaka、Giovanni Stabile、Gianluigi Rozza 和 Michael J. Bluck。用于非稳态传热问题的参数化POD-Galerkin模型降阶。《计算物理通讯》，27(1):1–32，2019年。[30] Fariborz Ghavamian、Paolo Tiso 和 Angelo Simone。用于应变软化黏塑性的POD–DEIM模型降阶。《计算力学与工程方法》，317:458–479，2017年。[31] Giorgio Gobat、Andrea Opreni、Stefania Fresca、Andrea Manzoni 和 Attilio Frangi。通过本征正交分解对非线性微结构进行降阶建模。《机械系统与信号处理》，171:108864，2022年。[32] Ian Goodfellow、Jean Pouget-Abadie、Mehdi Mirza、Bing Xu、David Warde-Farley、Sherjil Ozair、Aaron Courville 和 Yoshua Bengio。生成对抗网络。载于《神经信息处理系统进展》。Curran Associates, Inc.，2014年。[33] Sebastian Grimberg、Charbel Farhat、Radek Tezaur 和 Charbel Bou-Mosleh。采用局部降阶基对非线性Petrov–Galerkin降阶模型进行超降阶的网格采样与加权。《国际工程数值方法杂志》，122(7):1846–1874，2021年。[34] Mengwu Guo 和 Jan S Hesthaven。用于时变问题的数据驱动降阶建模。《计算力学与工程方法》，345:75–99，2019年。[35] Bernard Haasdonk、Markus Dihlmann 和 Mario Ohlberger。一种基于参数空间自适应网格的参数化模型降阶训练集与多基生成方法。《动力系统数学与计算机建模》，17(4):423–442，2011年。[36] Jonathan Ho、Tim Salimans、Alexey Gritsenko、William Chan、Mohammad Norouzi 和 David J Fleet。视频扩散模型。arXiv预印本 arXiv:2204.03458，2022年。[37] Fayçal Ikhouane 和 José Rodellar。滞回系统：使用Bouc-Wen模型进行分析、辨识与控制。John Wiley & Sons，2007年。[38] Mohammed Ismail、Fayçal Ikhouane 和 José Rodellar。滞回Bouc-Wen模型综述。《计算工程方法档案》，16(2):161–188，2009年。[39] J. Jonkman、S. Butterfield、W. Musial 和 G. Scott。用于海上系统开发的5兆瓦参考风力机定义。技术报告，美国国家可再生能源实验室，科罗拉多州戈尔登，美国，2009年。[40] Artur Kadurin、Alexander Aliper、Andrey Kazennov、Polina Mamoshina、Quentin Vanhaelen、Kuzma Khrabrov 和 Alex Zhavoronkov。丰富且有价值的候选物：应用深度对抗自编码器进行肿瘤学新药分子开发。《Oncotarget》，8(7):10883–10890，2018年。[41] Michael G Kapteyn、David J Knezevic、DBP Huynh、Minh Tran 和 Karen E Willcox。通过基于组件的降阶模型库构建数据驱动、基于物理的数字孪生。《国际工程数值方法杂志》，123(13):2986–3003，2022年。[42] Gaetan Kerschen、Jean Claude Golinval、Alexander F. Vakakis 和 Lawrence A. Bergman。用于机械系统动力学表征与降阶的本征正交分解方法：综述。《非线性动力学》，41:147–169，2005年8月。[43] Diederik P. Kingma 和 Jimmy Ba。Adam：一种随机优化方法。载于第3届国际学习表征会议（ICLR 2015）会议论文集，圣迭戈（加利福尼亚州），2015年。ICLR。[44] Diederik P. Kingma 和 Max Welling。自编码变分贝叶斯。载于第2届国际学习表征会议（ICLR 2014）会议论文集，班夫（阿尔伯塔省，加拿大），2014年。ICLR。

[45] Kookjin Lee 和 Kevin T Carlberg。使用深度卷积自编码器对非线性流形上的动力系统进行模型降阶。《计算物理学杂志》，404:108973，2020年。[46] Kookjin Lee 和 Kevin T. Carlberg。使用深度卷积自编码器对非线性流形上的动力系统进行模型降阶。《计算物理学杂志》，404，2020年。[47] Nora Lüthen、Stefano Marelli 和 Bruno Sudret。基于轨迹样本计算随机模拟器的谱代理模型。《计算力学与工程方法》，406:115875，2023年。[48] Morteza Karamooz Mahdiabadi、Paolo Tiso、Antoine Brandt 和 Daniel Jean Rixen。使用模态导数对几何非线性结构动力学进行非侵入式模型降阶。《机械系统与信号处理》，147:107126，2021年。[49] Ahmed Amr Morsy、Mariella Kast 和 Paolo Tiso。通过超降阶和模型驱动采样对连接组件进行降阶建模。*arXiv*预印本 *arXiv:2204.12160*，2022年。[50] Charilaos Mylonas、Imad Abdallah 和 Eleni Chatzi。利用监控、控制与数据采集数据，通过条件变分自编码器进行概率性风力涡轮机叶片疲劳估计。《风能》，24，2021年。[51] David A Najera-Flores 和 Michael D Todd。一种嵌入哈密顿约束、用于结构动力学建模的保结构神经微分算子。《计算力学》，第1–12页，2023年。[52] S. Niroomandi、D. González、I. Alfaro、F. Bordeu、A. Leygue、E. Cueto 和 F. Chinesta。实时仿真 o

f

生物软组织：一种 PGD 方法。《生物医学工程数值方法国际期刊》，
29(5):586–600, 2013.[53] Artidoro Pagnoni、Kevin Liu 和 Shangyan Li。用于神经机器翻译的条件变分自编码器。*arXiv* 预印本 *arXiv:1812.04405*，2018.[54] Arthur Paul-Dubois-Taine 和 David Amsallem。用于参数化降阶模型最优训练的自适应高效贪心过程。《国际工程数值方法杂志》，102(5):1262–1292, 2015.[55] Benjamin Peherstorfer。通过在线自适应基和自适应采样，对输运主导问题进行模型降阶。《*SIAM*科学计算杂志》，42(5):A2803–A2836, 2020.[56] Benjamin Peherstorfer、Daniel Butnaru、Karen Willcox 和 Hans-Joachim Bungartz。局部离散经验插值法。《*SIAM*科学计算杂志》，36(1):A168–A192, 2014.[57] Benjamin Peherstorfer 和 Karen Willcox。通过低秩更新对非线性系统进行在线自适应模型降阶。《*SIAM*科学计算杂志》，37(4):A2123–A2150, 2015.[58] Benjamin Peherstorfer 和 Karen Willcox。用于非侵入式基于投影的模型降阶的数据驱动算子推断。《计算力学与工程方法》，306:196–215, 2016.[59] Mangal Prakash、Alexander Krull 和 Florian Jug。利用卷积变分自编码器进行完全无监督多样性去噪。*arXiv* 预印本 *arXiv:2006.06072*，2020.[60] Elizabeth Qian、Boris Kramer、Benjamin Peherstorfer 和 Karen Willcox。提升与学习：面向大规模非线性动力系统的物理信息机器学习。《物理学*D*：非线性现象》，406:132401, 2020.[61] Alfio Quarteroni、Gianluigi Rozza 等。用于建模与计算降阶的降阶方法

，

第9卷。施普林格，2014年。[62] Luca Rosafalco、Matteo Torzoni、Andrea Manzoni、Stefano Mariani和Alberto Corigliano。通过模型降阶和深度学习算法进行在线结构健康监测。《Computers & Structures》，255:106604，2021年。[63] Dan Rosenbaum、Marta Garnelo、Michal Zielinski、Charlie Beattie、Ellen Clancy、Andrea Huber、Pushmeet Kohli、Andrew W Senior、John Jumper、Carl Doersch等。使用变分自编码器从冷冻电镜图像推断原子坐标的连续分布。《预印本 arXiv:2106.14108》，2021年。[64] Gianluigi Rozza、DB Phuong Huynh和Andrea Manzoni。参数化几何中斯托克斯流的约化基近似与后验误差估计：inf-sup 稳定性常数的作用。《Numerische Mathematik》，125(1):115–152，2013年。[65] Benjamin Sanchez-Lengeling和Alán Aspuru-Guzik。使用机器学习进行逆向分子设计：用于物质工程的生成模型。《科学》，361(6400):360–365，2018年。[66] Thomas Simpson、Nikolaos Dervilis和Eleni Chatzi。通过自编码器和长短期记忆网络实现非线性系统模型降阶的机器学习方法。《Journal of Engineering Mechanics》，147，2021年。

[67] Thomas Simpson、George Tsialiamanis、Nikolaos Dervilis、Keith Worden和Eleni Chatzi。论变分自编码器在非线性模态分析中的应用。载于《IMAC XL》，2022年。会议地点：美国佛罗里达州奥兰多；会议日期：2022年2月7日至10日。[68] Helena Solman、Julia Kirch Kirkegaard、Mattijs Smits、Bas Van Vliet和Simon Bush。数字孪生作为风能行业中的一种治理行为。《环境科学与政策》，127:272–279，2022年。[69] Nitish Srivastava、Geoffrey Hinton、Alex Krizhevsky、Ilya Sutskever和Ruslan Salakhutdinov。Dropout：一种防止神经网络过拟合的简单方法。《机器学习研究杂志》，15(56):1929–1958，2014年。[70] B. Sudret、S. Marelii和J. Wiart。不确定性量化的代理模型：综述。载于《2017年第11届欧洲天线与传播会议（EUCAP）》，第793–797页，法国巴黎，2017年。[71] Konstantinos E Tatsis、Konstantinos Agathos、EN Chatzi和Vasileios K Dertimanis。一种用于基于参数化降阶模型进行在线振动裂纹检测的分层仅输出贝叶斯方法。《机械系统与信号处理》，167:108558，2022年。[72] G. Tsialiamanis、M.D. Champneys、N. Dervilis、D.J. Wagg和K. Worden。生成对抗网络在非线性模态分析中的应用。《机械系统与信号处理》，166，2022年。[73] Konstantinos Vlachas、Konstantinos Agathos、Konstantinos E Tatsis、Adam R Brink和Eleni Chatzi。具有Bouc-Wen滞回连接件的两层框架作为多自由度非线性响应模拟器。载于《第5届非线性系统辨识基准研讨会（2021）》，第6页，2021年。[74] Konstantinos Vlachas、K Tatsis、Konstantinos Agathos、Adam Ray Brink和Eleni Chatzi。具有Bouc-Wen滞回连接件的两层框架作为多自由度非线性响应模拟器。技术报告，苏黎世联邦理工学院，2021年。[75] Konstantinos Vlachas、Konstantinos Tatsis、Konstantinos Agathos、Adam R. Brink和Eleni Chatzi。用于非线性参数化模型降阶的局部基近似方法。《声学与振动杂志》，502，2021年。[76] Konstantinos Vlachas、Konstantinos Tatsis、Konstantinos Agathos、Adam R Brink、Dane Quinn和Eleni Chatzi。组件非线性结构的降阶建模与子结构化耦合。载于《动态子结构，第4卷》，第35–43页。施普林格，2022年。[77] Konstantinos Vlachas、Konstantinos Tatsis、Konstantinos Agathos、Adam R Brink、Dane Quinn和Eleni Chatzi。用于局部非线性特征纳入的参数化模型降阶。载于《非线性动力学进展》，第373–383页。施普林格，2022年。[78] Pantelis R Vlachas、Georgios Arampatzis、Caroline Uhler和Petros Koumoutsakos。通过学习有效动力学对复杂系统进行多尺度模拟。《自然·机器智能》，4(4):359–366，2022年。[79] Pantelis R. Vlachas、Wonmin Byeon、Zhong Y. Wan、Themistoklis P. Sapsis和Petros Koumoutsakos。利用长短期记忆网络对高维混沌系统进行数据驱动预测。《皇家学会会刊A辑》，474，2018年5月。[80] Pantelis R. Vlachas、Julija Zavadlav、Matej Praprotnik和Petros Koumoutsakos。通过学习有效动力学加速分子系统模拟。《化学理论与计算杂志》，18(1):538–549，2022年。[81] Long Wu、Paolo Tiso、Konstantinos Tatsis、Eleni Chatzi和Fred van Keulen。一种经模态导数增强的、适用于几何非线性多体系统的Rubin子结构化方法。《多体系统动力学》，45(1):57–85，2019年。[82] Ruiyang Zhang、Yang Liu和Hao Sun。用于非线性结构元建模的物理信息多LSTM网络。《计算力学与工程方法》，369:2323–2326，2020年。[83] Ralf Zimmermann和Kristian Debrabant。通过插值正交基进行参数化模型降阶。载于《欧洲数值数学与高级应用会议》，第683–691页。施普林格，2017年。

CRediT 作者贡献声明

Thomas Simpson：概念化、方法论、软件、写作。**Konstantinos Vlachas**：概念化、方法论、验证、写作。**Anthony Garland**：资源、写作 - 审阅与编辑。**Nikolaos Dervilis**：写作 - 审阅与编辑、监督。**Eleni Chatzi**：概念化、资源、写作 - 审阅与编辑、监督。