arXiv:2304.12444v1 [math.NT] 24 Apr 2023

三项递推所构成的泰勒多项式的零点

JUHOON CHUNG 和 KHANG TRAN

Abstract. 设实数序列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足三项递推关系，由此构造多项式序列 $\{P_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$，其系数是该序列中的数。我们证明，在明确条件下，$P_m(z)$ $m \gg 1$的零点位于圆的一侧，该圆的半径由$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$的生成函数分母的一个零点的模给出。

1. Introduction

对于 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 和 $abc \neq 0$，令 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为满足以下三项递推关系的实数序列

$$ca_{n+2} + ba_{n+1} + aa_n = 0, n \geq 0, \tag{1.1}$$

初值为（a_0, a_1） $\neq$(0,0)。该序列包括数学中的许多经典序列，例如斐波那契、卢卡斯和佩尔序列（见 [1, 2]）。已知我们可以根据特征多项式$c+bt+at^2$的零点（记为 α 和 β）得到 a_n 的闭式公式。在本文中，这些零点在确定与该序列相关的泰勒多项式的零点位置方面发挥着核心作用。与序列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 相关的泰勒多项式序列 $\{P_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$定义为

$$P_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n.$$

研究一般序列（不一定满足 (1.1)）所生成的泰勒多项式的零点位置，是许多数学家感兴趣的课题。一个经典例子是 $a_n = 1/n!$ 的情形，此时相应泰勒多项式的零点趋近于著名的 Szegő曲线（见[3]）。不难证明，当 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 (1.1) 且 $|\alpha| > |\beta|$ 时，随着 $m \to \infty$，$P_m(z)$ 的大多数零点趋近于半径为 $|c|/|a\alpha| = |\beta|$ 的圆（参见注 4）。本文给出了若干条件，使得零点 $P_m(z)$ $m \gg 1$ 位于该圆的一侧。关于零点位于圆或半平面一侧的多项式，已有许多研究。我们请读者参阅 Borcea 和 Branden ([2]) 关于在圆域上保持多项式零点的线性算子的研究进展。下面陈述本文的三个主要定理。

定理 1。设 α 是 $at^2 + bt + c$ 的模最大的零点。如果 $ac < 0$、$a_0 b\,(a_1 c + ba_0) \geq 0$，那么除去至多一个例外零点外，$P_m\,(z)$ 的所有零点 $m \gg 1$ 均位于以 *0* 为中心、半径为 $|c|/|a\alpha|$ 的开球之外。此外，当且仅当以下条件成立时，才会出现这个例外零点：

$$|a_1 c + ba_0| > |a\alpha a_0|.$$

定理 1 的示例见图 1.1。

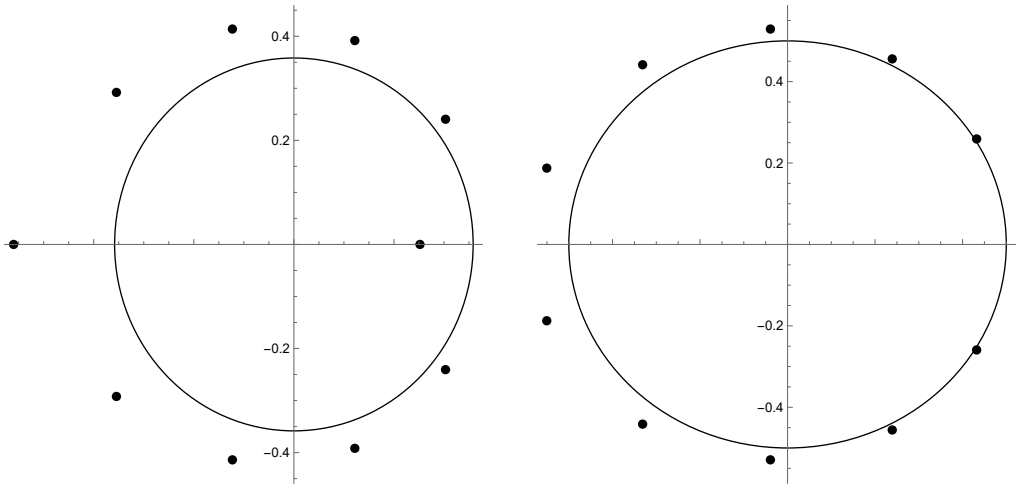

FIGURE 1.1. $H_{10}(z)$ 的零点在 $(a,\ b,\ c,\ a_0,\ a_1)$ 为 $(5,\ 1,\ -1,\ 1,\ -3)$ 时（左）以及 $(2,\ 1,\ -1,\ 2,\ 1)$ 时（右）

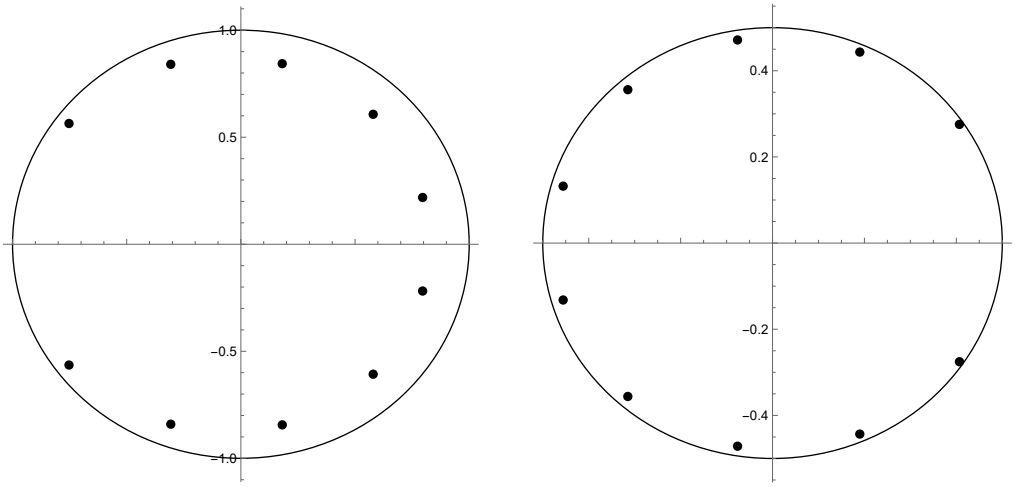

FIGURE 1.2. $H_{10}(z)$ 的零点在 $(a,\ b,\ c,\ a_0,\ a_1)$ 为 $(2,\ 5,\ 3,\ 1,\ -2)$ 时（左）以及 $(2,\ -3,\ 1,\ 2,\ 5)$ 时（右）

定理2。令 α 为 at^2+bt+c 的模最大的零点。若 $ac>0$、$b^2-4ac>0$ 和 $a_0b\left(a_1c+ba_0\right)\leq 0$，则当 m 足够大时，$P_m\left(z\right)$ 的所有零点都位于以 *0* 为中心、半径为 $|c|/|a\alpha|$ 的闭球内。

定理3。设 α 是 at^2+bt+c 的模最大的零点。若 $ac>0$、$b^2-4ac>0$、$a_0b\left(a_1c+ba_0\right)>0$，且 $|a_0c|>|\left(a_1c+ba_0\right)\alpha|$，则当 m 足够大时，$P_m\left(z\right)$ 的所有零点都位于以 *0* 为中心、半径为 $|c|/|a\alpha|$ 的闭球内。

定理2和定理3的示例见图1.2（分别为左图和右图）。

2. The generating function and its reduced form

由于序列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足递推关系 (1.1)，对于较小的 t，我们收集 t^n-的系数

$$(c+bt+at^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$$

并得出该表达式为

$$ca_0+(ca_1+ba_0)t.$$

因此，序列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\frac{ca_0+(ca_1+ba_0)t}{c+bt+at^2}.$$

为了研究序列 $\{P_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ 的零点分布，只需研究其倒数多项式序列的零点分布

$$P_m^*(z):=\sum_{n=0}^{m}a_nz^{m-n}.$$

该倒数多项式序列的生成函数为

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}P_m^*(z)t^m&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}a_nz^{m-n}t^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}a_nz^{m-n}t^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\sum_{m=0}^{\infty}z^mt^m\\&=\frac{ca_0+(ca_1+ba_0)t}{(c+bt+at^2)(1-tz)}.\end{aligned}$$

我们将分子和分母除以 c，并应用代换 $t\to -\text{sign}(ab)\sqrt{|c/a|}t$ 和 $z\to -\text{sign}(ab)\sqrt{|a/c|}z$，从而得出当 t 较小时

$$\sum_{m=0}^{\infty}H_m(z)t^m=\frac{D+Ct}{(1+Bt+\text{sign}(ac)t^2)(1-tz)}$$

其中

$$\begin{aligned}H_m(z)&=\text{sign}^m(-ab)|c/a|^{m/2}P_m^*\left(-\text{sign}(ab)\sqrt{|a/c|}z\right),\\B&=-\text{sign}(ac)|b/\sqrt{ac}|,\\C&=-(a_1+ba_0/c)\,\text{sign}(ab)\sqrt{|c/a|},\\D&=a_0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

令 t_1 和 t_2 为 $1+Bt+\text{sign}(ac)t^2$ 的两个零点，其中 $|t_2|\geq|t_1|$。若 α 是 $c+bt+at^2$ 的最大（按模计）零点，则根据上述代换可得

$$\alpha=-\text{sign}(ab)\sqrt{|c/a|}t_2.\tag{2.2}$$

With

$$\frac{D+Ct}{(1+Bt+\operatorname{sign}(ac)t^2)(1-tz)}=\frac{D+Ct}{\operatorname{sign}(ac)(t-t_1)(t-t_2)(1-tz)}$$

我们应用部分分式（若 $t_1\neq t_2$）将上述表达式重写为 $\operatorname{sign}(ac)$ 乘以

$$\frac{D+Ct_1}{(t_1-t_2)(1-zt_1)(t-t_1)}+\frac{D+Ct_2}{(t_2-t_1)(1-zt_2)(t-t_2)}+\frac{z(C+Dz)}{(1-zt_1)(1-zt_2)(1-zt)}.$$

From

$$\frac{1}{t-t_k}=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{t_k^{m+1}},\qquad k=1,2$$

$$\frac{1}{1-zt}=\sum_{m=0}^{\infty}z^mt^m,$$

我们将上述各项展开为关于 t 的幂级数，并收集 t^m 项的系数，由 $t_1t_2=\operatorname{sign}(ac)$ 可得：若 $t_1\neq t_2$，则

$$\operatorname{sign}(ac)H_m(z)=-\frac{D+Ct_1}{(t_1-t_2)(1-zt_1)t_1^{m+1}}-\frac{D+Ct_2}{(t_2-t_1)(1-zt_2)t_2^{m+1}}+\frac{z^{m+1}(C+Dz)}{(1-zt_1)(1-zt_2)}$$

(2.3)

$$=\frac{-t_2^{m+1}(1-zt_2)(Ct_1+D)-t_1^{m+1}(zt_1-1)(Ct_2+D)+\operatorname{sign}^{m+1}(ac)z^{m+1}(t_1-t_2)(C+Dz)}{\operatorname{sign}^{m+1}(ac)(t_1-t_2)(1-zt_1)(1-zt_2)}.$$

注 4。 作为 [1, 定理 1.5], 的推论，若 $|t_2|>|t_1|$，则极限曲线的主要部分（满足该定理条件 (b) 的部分）中，分子零点在 $m\to\infty$ 时趋近于半径为 $|t_2|$ 的圆。因此，由 (2.1) 和 (2.2) 可推得，$P_m(z)$ 的大多数零点趋近于半径为 $|c|/|a\alpha|$ 的圆。

3. The location of zeros

本节将证明定理 1、2 和 3。在整个本节中，设 $m\in\mathbb{N}$ 很大。

3.1. 情形 $ac<0$。 在情形 $ac<0$下，我们有 $t_1t_2=-1$。由 $t_1+t_2=|b/\sqrt{ac}|>0$和 $|t_2|\geq|t_1|$可知 $-1<t_1<0$ 和 $t_2>1$。恒等式 (2.3) 变为

(3.1)

$$(-1)^mH_m(z)=\frac{-t_2^{m+1}(1-zt_2)(Ct_1+D)-t_1^{m+1}(zt_1-1)(Ct_2+D)+(-1)^{m+1}z^{m+1}(t_1-t_2)(C+Dz)}{(t_1-t_2)(1-zt_1)(1-zt_2)}.$$

为了研究 $H_m(z)$ 的零点，我们将对 (2.3) 右侧的分子应用鲁歇定理。下面的引理在应用该定理时起着重要作用。

命题 5。 对于充分小的 $\epsilon>0$，若 $|z|=t_2+\epsilon$ 和 $CD\geq0$，则

$$\left|z^{m+1}(t_1-t_2)(C+Dz)\right|>\left|t_2^{m+1}(1-zt_2)(Ct_1+D)+t_1^{m+1}(zt_1-1)(Ct_2+D)\right|. \tag{3.2}$$

证明。 在 $Ct_1+D=0$ 的情况下，对于较大的 m，不等式由以下事实立即得到：$|t_2|>|t_1|$。我们考虑 $Ct_1+D\neq0$。由于 $t_1t_2=-1$，(3.2) 的左侧为

$$\begin{aligned}\left|z^{m+1}(t_1-t_2)(C+Dz)\right|&=|z|^{m+1}(1/t_2+t_2)|C+Dz|\\&\geq|z|^{m+1}(1/t_2+t_2)||C|-|Dz||\end{aligned}$$

With $|z| = t_2 + \epsilon$，我们将最后一个表达式展开为关于 ϵ 的级数，并得出其至少为 t

$$t_2^m(t_2^2+1)||C| - |D|t_2| + (t_2^2+1)(||C| - |D|t_2|t_2^{m-1}(m+1) - |D|t_2^m)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.3}$$

在上述表达式的主项中，$CD \geq 0$、$t_2 > 0$ 和 $t_1 t_2 = -1$ 意味着

$$||C| - |D|t_2| = \frac{|Ct_1 + D|}{t_1} \neq 0.$$

另一方面，通过收集 z 的系数，(3.2) 的右侧为

$$\begin{aligned}
&\left|t_2^{m+1}(1-zt_2)(Ct_1+D) + t_1^{m+1}(zt_1-1)(Ct_2+D)\right| \\
=&\left|z(-t_2^{m+2}(Ct_1+D) + t_1^{m+2}(Ct_2+D)) + t_2^{m+1}(Ct_1+D) - t_1^{m+1}(Ct_2+D)\right| \\
\leq&(t_2+\epsilon)\left|t_2^{m+2}(Ct_1+D) - t_1^{m+2}(Ct_2+D)\right| + \left|t_2^{m+1}(Ct_1+D) - t_1^{m+1}(Ct_2+D)\right|
\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们注意到，对于较大的 m

$$|t_2^{m+2}(Ct_1+D)| \geq |t_1^{m+2}(Ct_2+D)|$$

从而

$$\left|t_2^{m+2}(Ct_1+D) - t_1^{m+2}(Ct_2+D)\right| = t_2^{m+2}|Ct_1+D| - \delta|t_1^{m+2}||Ct_2+D|$$

其中 $\delta = \text{sign}((-1)^{m+2}(Ct_1+D)(Ct_2+D)$。由类似的恒等式

$$\left|t_2^{m+1}(Ct_1+D) - t_1^{m+1}(Ct_2+D)\right| = t_2^{m+1}|Ct_1+D| + \delta|t_1^{m+1}||Ct_2+D|,$$

式 (3.4) 变为

$$\begin{aligned}
&(t_2+\epsilon)\left(t_2^{m+2}|Ct_1+D| - \delta|t_1^{m+2}||Ct_2+D|\right) + t_2^{m+1}|Ct_1+D| + \delta|t_1^{m+1}||Ct_2+D| \\
=&t_2^{m+3}|Ct_1+D| + t_2^{m+1}|Ct_1+D| + \left(t_2^{m+2}|Ct_1+D| - \delta|t_1^{m+2}||Ct_2+D|\right)\epsilon \\
=&t_2^{m+2}|C-Dt_2| + t_2^m|C-Dt_2| + \left(t_2^{m+1}|C-Dt_2| - \delta|t_1^{m+1}||C-Dt_2|\right)\epsilon.
\end{aligned}$$

不等式 $CDt_2 \geq 0$ 蕴含 $|C - Dt_2| = ||C| - |D|t_2|$。我们将上面的最后一个表达式与 (3.3) 进行比较，并利用以下事实完成引理:

$$(t_2^2+1)(||C| - |D|t_2|t_2^{m-1}(m+1) - |D|t_2^m) > t_2^{m+1}|C-Dt_2| - \delta|t_1^{m+1}||C-Dt_2|$$

当 m 较大时。 □

根据命题 5 和鲁歇定理，我们得出，对于较小的 ϵ，多项式

$$-t_2^{m+1}(1-zt_2)(Ct_1+D) - t_1^{m+1}(zt_1-1)(Ct_2+D) + (-1)^{m+1}z^{m+1}(t_1-t_2)(C+Dz) \tag{3.5}$$

在球 $|z| < t_2 + \epsilon$ 内为

$$\begin{cases} m+1 & \text{if } |C| > |D|t_2 \\ m+2 & \text{if } |C| \leq |D|t_2. \end{cases}$$

我们可以验证，$-t_2$ 和 $-t_1$ 是（3.5）的两个零点。由（3.1）可推出，H_m（z）具有

$$\begin{cases} m-1 & \text{if } |C| > |D|t_2 \\ m & \text{if } |C| \leq |D|t_2 \end{cases}$$

位于闭球 $|z| \le t_2$内的零点。由

$$C = -(a_1 + ba_0/c)\,\mathrm{sign}(ab)\sqrt{|c/a|},$$
$$D = a_0,$$

以及 (2.2)，不等式 $|C| \le |D|t_2$ 和 $CD \ge 0$ 等价于

$$|a_1 c + ba_0| \le |a\alpha a_0|$$

and

$$a_0 b(a_1 c + ba_0) \ge 0$$

分别。由 (2.1) 和 (2.2)，我们得出：z 是 $H_m(z)$ 的一个零点，且位于闭球$|z| \le t_2$内，当且仅当 $-\mathrm{sign}(ab)\sqrt{|c/a|}z$是 $P_m^*(z)$ 的一个零点，且位于半径为 $\alpha\sqrt{|a/c|}$的闭球内。定理 1 由以下事实得出：$z \ne 0$ 是 $\overline{P_m^*(z)}$ 的一个零点，当且仅当 $1/z$ 是 $P_m(z)$ 的一个零点。

3.2. 情形 $ac > 0$ 和 $b^2 - 4ac > 0$。 在 $ac > 0$ 的情形下，我们有 $t_1 t_2 = 1$ 和 $0 < t_1 < 1 < t_2$。恒等式 (2.3) 变为

$$H_m(z) = \frac{-t_2^{m+1}(1 - zt_2)(Ct_1 + D) - t_1^{m+1}(zt_1 - 1)(Ct_2 + D) + z^{m+1}(t_1 - t_2)(C + Dz)}{(t_1 - t_2)(1 - zt_1)(1 - zt_2)}. \tag{3.6}$$

命题 6。 当 $\epsilon > 0$ 足够小时，若 $|z| = t_2 - \epsilon$ 且 $CD \ge 0$，则

$$\left|z^{m+1}(t_1 - t_2)(C + Dz)\right| < \left|t_2^{m+1}(1 - zt_2)(Ct_1 + D) + t_1^{m+1}(zt_1 - 1)(Ct_2 + D)\right|.$$

证明。 证明与命题 5 的证明非常相似。为避免重复，我们仅给出关键步骤。所考虑不等式的左侧至多为

$$t_2^m(t_2^2 - 1)(|C| + |D|t_2) + (t_2^2 - 1)(-(|C| + |D|t_2)t_2^{m-1}(m + 1) - |D|t_2^m)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

另一方面，合并 z 的系数后，右侧至少为

$$(t_2 - \epsilon)\left|t_2^{m+2}(Ct_1 + D) - t_1^{m+2}(Ct_2 + D)\right| - \left|t_2^{m+1}(Ct_1 + D) - t_1^{m+1}(Ct_2 + D)\right|.$$

令 $\delta = \mathrm{sign}((Ct_1 + D)(Ct_2 + D)$，则最后一个表达式变为

$$(t_2 - \epsilon)\left(t_2^{m+2}|Ct_1 + D| - \delta t_1^{m+2}|Ct_2 + D|\right) - t_2^{m+1}|Ct_1 + D| + \delta t_1^{m+1}|Ct_2 + D|$$

即

$$t_2^{m+2}|C + Dt_2| - t_2^m|C + Dt_2| + \left(-t_2^{m+1}|C + Dt_2| + \delta t_1^{m+1}|C + Dt_2|\right)\epsilon.$$

引理由 $CD \ge 0$ 这一事实得证。 □

现在证明定理2。由 $a_0 b(a_1 c + ba_0) < 0$ 等价于 $CD > 0$ 这一事实以及命题 6，鲁歇定理推出，式 (3.6) 的分子在$|z| < t_2 - \epsilon$ 内部的零点数与

$$t_2^{m+1}(1 - zt_2)(Ct_1 + D) + t_1^{m+1}(zt_1 - 1)(Ct_2 + D).$$

这个线性函数有一个零点

$$z = \frac{t_2^{m+1}(Ct_1 + D) - t_1^{m+1}(Ct_2 + D)}{t_2^{m+2}(Ct_1 + D) - t_1^{m+1}(Ct_2 + D)}$$

它在 $m \to \infty$ 时趋近于 $1/t_2$。因此，当 ϵ 足够小且 m 足够大时，这个零点位于圆 $|z| < t_2 - \epsilon$ 内部。由于 t_1 是式 (3.6) 分子的一个零点，令 $\epsilon \to 0$，便可得出 $H_m(z)$ 的所有零点都位于圆 $|z| \le t_2$ 外部。由式 (2.1) 即得定理 2。

现在我们转而证明定理3。条件 $a_0 b(a_1 c + ba_0) > 0$ 等价于 $CD < 0$。由 (3.6) 可知，只需考虑 $D > 0$ 和 $C < 0$。该

定理3中的条件 $|a_0c| > |(a_1c + ba_0)\alpha|$ 等价于 $|D| > |Ct_2|$。结合 $D > 0$、 $C < 0$ 和 $t_2 > 0$，我们得出 $D + Ct_2 > 0$。同样应用鲁歇定理，即可由下述命题直接推出定理3。

命题 n 7. 当 $\epsilon > 0$ 足够小时，如果 $D > 0$、 $C < 0$、 $D + Ct_2 > 0$ 和 $|z| = t_2 - \epsilon$，则

$$\left|z^{m+1}(t_1 - t_2)(C + Dz)\right| < \left|t_2^{m+1}(1 - zt_2)(Ct_1 + D) + t_1^{m+1}(zt_1 - 1)(Ct_2 + D)\right|. \tag{3.7}$$

证明。由 $t_1t_2 = 1$ 可知，(3.7) 的右侧是

$$t_2^{m+1}(t_1 - z)(C + Dt_2) + t_1^{m+1}(zt_1 - 1)(Ct_2 + D).$$

接下来，我们将上述表达式中第一项的模与 (3.7) 的左侧进行比较。注意，如果 $z = x + iy$，则由 $x^2 + y^2 = (t_2 - \epsilon)^2$，可得

$$\begin{aligned}
&|(t_1 - z)(C + Dt_2)|^2 - |(t_1 - t_2)(C + Dz)|^2 \\
=&(C + Dt_2)^2(t_1^2 - 2t_1x + (t_2 - \epsilon)^2) - (t_1 - t_2)^2(C^2 + 2CDx + D^2(t_2 - \epsilon)^2) \\
=&2(C + Dt_1)(Ct_1 + Dt_2^2)(t_2 - x) - 2t_2(C + Dt_1)(C - Dt_1 + 2Dt_2)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

由于 $D+Ct_2 > 0$ 且 $t_2 > 1 > t_1$，当 ϵ 足够小时，不等式 (3.7) 成立；如果对于某个与 m、ϵ 无关的足够小的 $\eta > 0$， $t_2 - x > \eta$，则当 m 足够大时，该不等式也成立。现在考虑 $z = t_2 + \delta$，其中 $\delta = \delta$ 足够小（m、ϵ）$\in \mathbb{C}$。我们有

$$(t_2 - \epsilon)^2 = |z|^2 = t_2^2 + 2t_2\Re\delta + |\delta|^2$$

由此我们推得

$$|\delta|^2 = -2t_2\Re\delta - 2t_2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.8}$$

注意，令 $t_1t_2 = 1$ 和 $z = t_2 + \delta$，则 (3.7) 右侧表达式为

$$\begin{aligned}
&t_2^{m+1}(t_1 - z)(C + Dt_2) + t_1^{m+1}(zt_1 - 1)(Ct_2 + D) \\
=&t_2^{m+1}(t_1 - t_2)(C + Dt_2) + \left(-t_2^{m+1}(C + Dt_2) + t_1^{m+2}(Ct_2 + D)\right)\delta.
\end{aligned}$$

由 $t_1t_2 = 1$ 可知，最后一个表达式的模的平方为

$$t_2^{2m+2}(t_2 - t_1)^2(C + Dt_2)^2 + (C + Dt_2)^2t_2^{2m+2}(-2(t_1 - t_2)\Re\delta + |\delta|^2) + \mathcal{O}\left(|\Re\delta| + |\delta|^2\right)$$

根据 (3.8)，这与下式相同

$$t_2^{2m+2}(t_2 - t_1)^2(C + Dt_2)^2 + (C + Dt_2)^2t_2^{2m+2}(-2t_2\epsilon - 2t_1\Re\delta) + \mathcal{O}\left(|\Re\delta| + |\delta|^2 + t_2^{2m}\epsilon^2\right). \tag{3.9}$$

现在考虑 (3.7) 的左侧。注意

$$\begin{aligned}
|z|^{m+1} &= (t_2 - \epsilon)^{m+1} \\
&\le t_2^{m+1}\exp\left(-\frac{m+1}{t_2}\epsilon\right).
\end{aligned}$$

结合

$$\begin{aligned}
|C + Dz|^2 &= (C + Dt_2 + D\Re\delta)^2 + D^2(\Im\delta)^2 \\
&= (C + Dt_2)^2 + 2(C + Dt_2)D\Re\delta + D^2|\delta|^2,
\end{aligned}$$

我们得出，(3.7) 左边的平方至多为

$$\exp\left(-2\frac{m+1}{t_2}\epsilon\right)t_2^{2m+2}(t_2 - t_1)^2\left((C + Dt_2)^2 + 2(C + Dt_2)D\Re\delta + D^2|\delta|^2\right).$$

利用 (3.8)，我们将上面的表达式改写为

$$\exp\left(-2\frac{m+1}{t_2}\epsilon\right) t_2^{2m+2}(t_2-t_1)^2\left((C+Dt_2)^2+2CD\Re\delta-2D^2t_2\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right). \tag{3.10}$$

如果 $m\epsilon>\eta_1$ 对于某个足够小的 η_1，且与 m 和 ϵ无关，那么

$$\exp\left(-2\frac{m+1}{t_2}\epsilon\right)<1-\eta$$

对于某个固定的（与 m 和 ϵ无关的） $\eta>0$。我们比较（3.9）和（3.10）的主要项，从而得到该引理。另一方面，当 $m\epsilon$ [1]充分小时，我们有

$$\exp\left(-2\frac{m+1}{t_2}\epsilon\right)=1-2\frac{m+1}{t_2}\epsilon+\mathcal{O}\left(m^2\epsilon^2\right) \tag{3.11}$$

因此（3.10）为

$$\begin{aligned}&t_2^{2m+2}(t_2-t_1)^2(C+Dt_2)^2+t_2^{2m+2}(t_2-t_1)^2\left(2CD\Re\delta-2D^2t_2\epsilon\right)\\&-2\frac{m+1}{t_2}t_2^{2m+2}(t_2-t_1)^2(C+Dt_2)^2\epsilon+\mathcal{O}\left(t_2^{2m}(m|\Re\delta|\epsilon+m^2\epsilon^2)\right).\end{aligned}$$

将上面的表达式从（3.9）中减去，可得

$$\begin{aligned}&(C+Dt_2)^2t_2^{2m+2}(-2t_2\epsilon-2t_1\Re\delta)-t_2^{2m+2}(t_2-t_1)^2\left(2CD\Re\delta-2D^2t_2\epsilon\right)\\&+2\frac{m+1}{t_2}t_2^{2m+2}(t_2-t_1)^2(C+Dt_2)^2\epsilon+\mathcal{O}\left(t_2^{2m}(m|\Re\delta|\epsilon+m^2\epsilon^2)+|\Re\delta|+|\delta|^2\right).\end{aligned} \tag{3.12}$$

如果 $\epsilon>\eta\Re\delta$ 对于某个与 m无关的足够小的 η， ϵ， δ，那么当 m 较大时，（3.12）的第三项支配所有其他项，因此当 m较大时（3.12）为正。另一方面，当 $\epsilon/\Re\delta$ 充分小时，（3.12）的主要项为

$$\begin{aligned}&-2(C+Dt_2)^2t_2^{2m+2}t_1\Re\delta-2CDt_2^{2m+2}(t_2-t_1)^2\Re\delta+2\frac{m+1}{t_2}t_2^{2m+2}(t_2-t_1)^2(C+Dt_2)^2\epsilon\\=&-2t_2^{2m+2}(C+Dt_1)(Ct_1+Dt_2^2)\Re\delta+2\frac{m+1}{t_2}t_2^{2m+2}(t_2-t_1)^2(C+Dt_2)^2\epsilon>0.\end{aligned}$$

引理的证明至此完成。 □

References

[1] Wells, D.《企鹅好奇与有趣数字词典》。英格兰米德尔塞克斯：企鹅出版社，第61–67页，1986年。[2] Hoggatt, V. E. Jr.《斐波那契数与卢卡斯数》。马萨诸塞州波士顿：霍顿·米夫林，1969年。[3] Pritsker, I. E., & Varga, R. S.（1997）。《Szegő曲线、零点分布与加权逼近》。美国数学学会汇刊，

349 10 4085 4105 2155576 （），–。

[1] 13 2004 http://www.jstor.org/stable/ Sokal A.，色根在整个复平面中稠密，《组合学、概率与计算》（），第2期，221 261–。

[2] J. Borcea 和 P. Branden，圆域及其边界上的Pólya–Schur主定理，《数学年刊》，170（2009），465–492。

Department of Mathematics, California State University, 5245 North Backer Avenue M/S PB108 Fresno, CA 93740

[1] $m\epsilon$ 足够小，使得 $\mathcal{O}\left(m^2\epsilon^2\right)$ 被（3.11）中的两个主项所支配。大O常数与 m， ϵ无关。