arXiv:2304.12498v2 [math.GR] 6 Mar 2024

幂零李群的 Tukia 型定理与可解群的拟等距刚性

TULLIA DYMARZ、DAVID FISHER 和 XIANGDONG XIE

Abstract. 本文研究 Carnot-by-Carnot 群的一致拟共形群。我们证明，如果其在不同点对空间上的诱导作用是余紧的，那么它们可以通过共轭化归入共形群。沿用 Eskin-Fisher-Whyte[EFW07] 的方法，这些结果可应用于某些可解群族的拟等距刚性。

Contents

1. 引言 2 2. 主要定理概述 7 3. 预备知识 9 3.1. 拟作用与一致拟相似作用 9 3.2. 幂零李代数与幂零李群 10 3.3. Carnot 代数与 Carnot 群 11 3.4. 导子、半直积、Heintze 群与 SOL 型群 12 3.5. 幂零李群上的齐次距离 13 3.6. 对角 Heintze 对的纤维 Tukia 定理 14 4. 可解群的拟等距刚性 15 4.1. SOL 型群等距群中格的拟等距刚性 15 4.2. 一类可解李群的拟等距分类 18 4.3. 某些 Heintze 群上拟作用的拟等距刚性 19 5. 对角 Heintze 对的双Lipschitz映射 19 6. 双 Lipschitz剪切映射的刻画 22 6.1. Carnot 群上的水平典范一形式 22 6.2. 当 α 不是整数时李代数的结构 22 6.3. 双Lipschitz剪切映射的刻画 23 7. 消去 s_j ，得到
$j < \alpha$ 28

Key words and phrases. 一致拟相似群、拟等距刚性、幂零李群、可解李群。

7.1. 在 E_j 29 上的仿射作用
7.2. $\mathcal{H}_j$ 33 中不动点的存在性 7.3. 消去 s_j 37 8. V_α 方向上的共形结构 37 8.1. F_p、α 38 的微分 8.2. V_α 方向上的可测共形结构 41 8.3. 当 dim(W) ≥ 2 且 dim(N/W) ≥ 2 44 时完成定理 1.2 的证明 9. dim(W) $= 1$ 46
的情形 10. dim(N/W) $= 1$ 51 的情形 附录 A. Carnot-by-Carnot 群的例子 54 附录 B. SOL 型群中的格 55 附录 C. 相容表达式 56 参考文献 59

1. Introduction

动机。本文的动机源于格罗莫夫提出的研究纲领，即对有限生成群进行拟等距等价分类。映射 f: $X \to Y$ 是度量空间之间的准等距，当存在 $A \geq 0$ 和 $L \geq 1$，使得对所有 $x_1, x_2 \in X$

$$-A + d(x_1, x_2)/L \leq d(f(x_1), f(x_2)) \leq L\ d(x_1, x_2) + A$$

且对所有 $y \in Y$存在 $x \in X$ 使得 $d(f(x)\ y) \leq A$。在 [EFW07] 中，Eskin-Fisher-Whyte 宣布了 $SOL = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ 中的格的准等距刚性结果；它是最简单的非幂零单模可解李群。在 [EF10] 中，他们概述了一个猜想及其证明纲领，旨在对所有非幂零多循环群（或等价地，所有非幂零单模可解李群）进行拟等距分类 G。与幂零群的拟等距分类一样，这仍是格罗莫夫研究纲领中最重要的未解问题之一。

所概述的策略[EF10] 包含两个主要步骤:

（1）理解可解李群 G 的自拟等距结构。（2）利用这一结构，将 G 的某些自拟等距群识别为某个可能不同的李群 G 的等距变换群¯的共轭。

关于 SOL，第二步在 Farb-Mosher 的一篇论文的简短附录中得到了证明 [FM99]。在许多其他情形下，这一步需要在齐次群上进行详细的拟共形分析 N，从而得到所谓的 Tukia 型 定理（见下文）。回顾一下，齐次群是一个幂零李群，并配有一个能在其上诱导出齐性度量的膨胀 N。以往的研究集中于以下情形：要么 N 是阿贝尔的 [Dy10]，要么处于 Carnot 情形 [DyX16]，也就是膨胀完全由 N的代数结构决定的情形。在本文中，我们首次理解了非阿贝尔、非 Carnot 齐次群中的这种分析。这一情形称为 *Carnot-by-Carnot* 情形（定义 1.1）。这一情形带来了重大的新挑战，涉及

齐次群的代数结构（源于 N 非阿贝尔性）与齐性度量的几何结构（源于 N 非 Carnot 性）之间微妙的相互作用。为此，我们引入了新的分析技术，并预计这些技术将为证明更一般齐次李群所需的结果奠定基础。该计划完成后，将建立所有 SOL 型 可解李群的拟等距分类（定义 1.4）。

我们的主要定理是下文的定理 1.2 和定理 1.5 。定理 1.5 是关于我们新构造的 SOL 型群族的拟等距刚性，而定理 1.2（其证明构成本文的主要部分）为定理1.5提供步骤（2）。
Carnot-by-Carnot 群以及相应 SOL 型群中的格的具体例子，分别见附录 A 和 B。

Tukia 型定理。Tukia 型定理断言，对度量空间 (X, d) 的一群自映射而言，如果它们以一致受控的程度扭曲距离，那么实际上，这个群在共轭意义下会刚性得多。在本文中，我们的一致受控映射将是拟相似变换，即双射$f : (X, d) \to (X, d)$，满足

$$K_f^- d(x, y) \le d(f(x), f(y)) \le K_f^+ d(x, y) \quad \text{for all } x, y \in X \tag{1}$$

其中 $K_f^+/K_f^- \le K$ 和 K 是对所有群元素均一致的常数。满足方程（1）的映射更常见的术语是 双 Lipschitz 映射，但 K_f^- 通常被定义为 K_f^+ 的逆映射，因此我们意义下的一致性更难描述。我们希望得到的结论是：经过一个双Lipschitz映射的共轭后，该群必须通过相似变换作用，也就是说，映射满足 $K_f^- = K_f^+$。例如，当 $X = \mathbb{R}$ [FM99] 时，这样的定理总是成立；但一般而言，通常还需要对群的大小作出额外假设。

Tukia 的原始定理 [T86] 是针对 n- 球面上的 $n \ge 2$一致拟共形映射群证明的，表明这些群经过共轭后可通过共形映射作用。对于$n = 2$ 这一点，Sullivan 也已证明 [S78]。当 $n \ge 3$需要的附加假设是，在该作用下每一点都是一个 径向极限点 （见定义 8.5）。在我们的情形中也需要这样的假设。Tukia 定理首先在Ch96] 中推广到配备 Carnot-Carathéodory度量的实 Heisenberg 群上的拟共形群。对于所有配备 Carnot-Carathéodory度量的 Carnot 群，也有类似的推广（见定理 3.6），但结论中的共形作用可能是相对于另一种 Carnot-Carathéodory度量而言的。在DyX 16] 中可以找到 Tukia 定理针对一致拟相似群的其他推广，其中 $N = \mathbb{R}^n$ 所使用的是不同于标准欧几里得距离的齐次距离。本文包含了针对非阿贝尔非 Carnot 齐次群的第一个 Tukia 型定理。

定义 1.1. 设 N 是一个单连通幂零李群，其李代数为 $\mathfrak{n}$。设 D 是 $\mathfrak{n}$ 的一个具有正特征值的可对角化导子。设 $\mathfrak{w}$ 是由 D 中对应于最小特征值的特征子空间生成的李子代数。若满足以下条件，则称 (N, D) 为 Carnot-by-Carnot 群：

(1) $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的真理想；(2) $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 是 Carnot 代数；¯(3) D 在 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 上诱导出一个导子 D，该导子是 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 上标准 Carnot 导子的倍数。

我们注意到 $\mathfrak{w}$ 本身是一个 Carnot 代数，参见引理 3.3。Carnot-by-Carnot 群十分常见。显然的例子是两个 Carnot 群的直积（其中导子是两个因子的李代数上标准 Carnot 导子的不同倍数的直积）。更有趣的例子则由中心积和半直积

积给出。利用李代数上同调，还可以得到并非半直积的 Carnot-by-Carnot 群。详见附录A 。

借用 [LDNG21], 中的术语，我们称 N 上的距离 d是 D-齐次的，如果它是左不变的、在 N 上诱导出流形拓扑，并且对所有x、 $y \in N$和 $t \in \mathbb{R}$都有 $d(e^{tD}x, e^{tD}y) = e^t d(x, y)$，其中 $\{e^{tD} | t \in \mathbb{R}\}$ 是由导子 D生成的 N的单参数自同构群。在 N 上存在许多 D-齐次距离 d ，并且容易看出，任意两个 D-齐次距离都是彼此双Lipschitz等价的。当我们谈到 N的双Lipschitz映射 F时，是指 F 相对于N上的某个 D-齐次距离是双Lipschitz的。不过请注意，对于 N上的两个 D-齐次距离 d_1、 d_2，映射 F: $(N, d_1) \to (N, d_1)$是相似变换，并不意味着 $F : (N, d_2) \to (N, d_2)$是相似变换。若 N 上的 D-齐次距离 d_0 满足：对于 N 上的任意 D-齐次距离 d ，都存在一个双Lipschitz自同构 ϕ ，使得 $\phi\mathrm{Sim}(N, d)\phi^{-1} \subset \mathrm{Sim}(N, d_0)$，则称其为极大对称的，其中Sim$(N, d)$表示$(N, d)$的相似变换群。我们注记， N 总是存在一个极大对称的D-齐次距离 d_0，见3, [DFX]中的引理2。

定理 1.2. 设 (N, D) 是一个 Carnot-by-Carnot 群， Γ 是一个带有 N 的一致拟相似作用的群，并且 N 中几乎每个点都是径向极限点。当 $\dim(\mathfrak{w}) = 1$ 时，我们进一步假设 Γ 是局部紧可和的。则存在一个 F_0 到 N 的双Lipschitz映射，使得 $F_0 \Gamma F_0^{-1} \subset \mathrm{Sim}(N, d_0)$，其中 d_0 是 N 上一个固定的极大对称 D-齐次距离。

我们指出，无需给出一致拟共形群版本的定理 1.2，因为根据 [CP17] ，当 N 是 Carnot-by-Carnot 群时， $N \cup \{\infty\}$ 的每个拟共形映射都固定 ∞ ，而 $N \cup \{\infty\}$ 的一致拟共形群与 N 的一致拟相似群是一回事。定理 1.2 对 Carnot 群也成立，但在这种情形下，只需在额外假设所有相关映射都固定 ∞ 且为双Lipschitz映射的条件下，执行定理 3.6 的证明。在一般齐次群中，度量畸变有两个来源：一个来自括号运算，另一个来自导子 D 所导致的不同收缩速率。Carnot 情形恰好是这两种畸变一致的情形。超越 Carnot 情形的一大困难，出现在 [DFX] 和阿贝尔情形 [Dy] 中，因为这时难以区分这两种畸变来源。一般 (N, D) 的情形涉及更多这类在 Carnot-by-Carnot 情形中尚未出现的现象。对于 Carnot 群的乘积情形，这比一般的 Carnot-by-Carnot 情形更容易。事实上，我们可以很容易地证明 (N, D) 的一致拟相似群满足一个类似的定理，其中 $N = \prod_i N_i$ ，每个 N_i 都是 Carnot 群，其李代数为 $\mathfrak{n}_i$ ，而 $D|_{\mathfrak{n}_i}$ 是 Carnot 导子的一个递增倍数（见定理 10.1）。

当 $\dim(\mathfrak{w}) = 1$ 时，可和性条件是证明中应用 Day不动点定理所必需的。该定理指出，可和群在局部凸拓扑向量空间的紧凸子集上的仿射作用具有不动点。实际上，在 $\dim(\mathfrak{w}) \geq 2$ 的情形下，我们也使用了 Day不动点定理，但在该情形下，我们能够推出作用群的可和性。这一额外的可和性条件并不影响我们的定理在拟等距刚性中的应用，因为离散群的可和性在拟等距变换下保持不变。然而，了解是否可以去除这一条件仍然十分有趣。

定理 1.2 的证明占据了本文的大部分篇幅，因此我们将在下一节中对其进行更为详细的概述。

可解群的拟等距刚性。Tukia 型定理在几何群论中的强大之处在于，它常可用于证明拟等距刚性结果。这是通过拟作用的概念实现的。群 Γ 在度量空间 X 上的拟作用，是一种赋值$\gamma \mapsto G_\gamma$ ，其中 G_γ 是 X 的一个自拟等距，使得

(1) G_γ 是一个（L， A）拟等距，其中 L 和 A 对于所有 $\gamma \in \Gamma$均一致有界。(2) 对于所有 γ、$\eta \in \Gamma$， $G_{\gamma\eta}$与 $G_\gamma \circ G_\eta$ 在上确界范数下的距离一致有界。(3) G_{Id} 与 X上的恒等映射相距有界。

如果存在一个有界集合 $S \subset X$，使得对任意 $x \in X$，都存在 $\gamma \in \Gamma$，满足 $G_\gamma(x) \in S$，则称该拟作用为余有界的。

余有界拟作用的标准例子如下：设 Γ 是一个具有左不变度量的群（例如，具有词度量的有限生成群，或具有左¯不变黎曼度量的李群），并且 ϕ： $\Gamma \to X$ 是一个拟等距映射，其粗逆为 ϕ。那么$_\gamma \mapsto \phi \circ L_\gamma \circ \phi$ 定义了 Γ 在 X 上的一个余有界拟作用，其中 L_γ 是将 Γ 左平移γ所得的映射。

如果 X 是格罗莫夫双曲的，那么 X 上的拟等距映射对应于理想边界 ∂X上的拟共形映射（更准确地说，是拟对称映射），而X 上的拟作用对应于 ∂X 上的一致拟共形作用。此外，对 X 和 ∂X 上的度量作适当选择后， X 的等距变换通常对应于 ∂X 上的共形映射，或对应于 ∂X 的一点补空间上的相似变换。因此，在格罗莫夫双曲空间X 上拟作用的群 Γ 会在 ∂X 上诱导出一致拟共形作用；如果存在 Tukia 型定理，那么该一致拟共形作用可通过 ∂X 上的一个拟共形映射共轭为 Γ 在 ∂X 上的共形作用，这意味着原拟作用可通过一个拟等距映射共轭为 X上的等距作用。

现在，在 X 是所谓的 Heintze 群的情形下，我们应用上一段的概要：给定一个单连通幂零李群 N，其李代数为 $\mathfrak{n}$，以及 $\mathfrak{n}$ 的一个导子 D，可以构造半直积 $S = N \rtimes_D \mathbb{R}$，其中 $\mathbb{R}$ 在 N 上的作用是由导子 D 生成的自同构 e^{tD}。如果 D 的特征值全都具有正实部，则称这样的群 S 为 Heintze 群。例如，当 (N, D) 为 Carnot-by-Carnot 时，相应的扩张 S 是一个 Heintze 群。根据 [H74], ，Heintze 群是格罗莫夫双曲的。应用我们的 Tukia 型定理，我们得到如下结果（当 N 是 Carnot 群时，也有类似的陈述，见 [DFX] 中的推论 1.2 ）：

定理 1.3. 设 (N, D) 为 Carnot-by-Carnot， $S = N \rtimes_D \mathbb{R}$ 为相应的 Heintze 群。则 S 上存在一个左不变黎曼度量 g_0，具有如下性质：如果 Γ 是一个在 S 上拟作用且余有界的群（并且当 $\dim(W) = 1$时，我们进一步假设 Γ 是局部紧可和的），那么该拟作用拟共轭于 Γ 在 (S, g_0) 上的等距作用。

更一般地，Tukia 型定理已被用于证明某些可解李群的拟等距刚性；这些群本身并非负曲率空间，而是由负曲率空间组成叶层。最著名的例子是 Eskin-Fisher-Whyte 关于 SOL 的拟等距刚性定理 [EFW07] ，该定理利用了 SOL 由双曲平面组成叶层这一事实 $\mathbb{H}^2$，其视觉边界可以与 $S^1 \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$相识别。回忆 $SOL \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ 其中 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用由 e^{tA} 给出，其中 A 是对角线上含有 1 和 -1 的对角矩阵，并且左不变度量可以定义为 $ds^2 = e^{-2t}dx^2 + e^{2t}dy^2 + dt^2$。通过固定 x坐标或 y 坐标中的一个，可以得到两个双曲平面叶层。根据 Eskin-Fisher-Whyte 关于 SOL 上拟等距变换结构的粗微分定理，SOL 上的一个拟作用会在双曲平面上诱导出两个拟作用（从而在 $\mathbb{R}$上诱导出两个拟相似作用），每个叶层对应一个。

定义 1.4。如果一个群具有 $(N_1 \times N_2) \rtimes \mathbb{R}$ 的形式，其中 N_i 是一个单连通幂零李群，其李代数为 $\mathfrak{n}_i$，且 $\mathbb{R}$ 在 $N_1 \times N_2$ 上的作用由 e^{tD} 给出，其中 D 是 $\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2$ 的导子，由 $D := (D_1, -D_2)$ 给出，而 D_i 是 $\mathfrak{n}_i$ 的一个导子，其特征值的实部均为正，则称该群为 SOL 型群。

叶状化 $(N_1 \times N_2) \rtimes \mathbb{R}$ 的负曲率空间就是 $N_i \rtimes \mathbb{R}$，其中 $\mathbb{R}$ 的作用由导子 D_i 定义。$N_i \rtimes \mathbb{R}$ 的视觉边界就是 $N_i \cup \{\infty\}$，但在 SOL 型群的拟等距背景下，点 ∞ 总是保持不变。SOL 型群的拟等距变换结构源自 Eskin-Fisher-Whyte 的粗微分技术[EFW07、EF10]（另见 [Fe22]，其中对更一般情形下的“非单模”情形作了详细论述）。Eskin-Fisher-Whyte 论证的一个推论是，群 Γ 在 $(N_1 \times N_2) \rtimes \mathbb{R}$ 上的任意拟作用都会诱导出 Γ 在 $N_i \rtimes \mathbb{R}$ 上的拟作用，其中 $i = 1$、2。随后可以应用 Tukia 型定理（如果存在），得到 Γ 在 $N_1 \rtimes \mathbb{R}$ 上以及 $N_2 \rtimes \mathbb{R}$ 的等距作用。接着尝试证明这两个等距作用结合后，给出 Γ 在 $(N_1 \times N_2) \rtimes \mathbb{R}$ 上的等距作用。运用这一策略和我们的 Tukia 型定理，我们得到：

定理 1.5. 设 $S = (N_1 \times N_2) \rtimes \mathbb{R}$ 是一个 SOL 型群，其中每个 (N_i, D_i) 或为 Carnot，或为 Carnot-by-Carnot。在 (N_i, D_i) 为 Carnot-by-Carnot 且对于至少一个i有 $\dim(\mathfrak{w}_i) = 1$ 的情形下，其中 $\mathfrak{w}_i$ 是由D_i的最小特征值对应的特征子空间生成的 $\mathfrak{n}_i$ 的李子代数，我们进一步假设 Γ 是可和的，或者对于某个 g 上的左不变黎曼度量 S，等距群 $\mathrm{Isom}(S, g)$ 含有一个一致格。存在 S 上的左不变黎曼度量 g_0，具有如下性质。设有限生成群 Γ 与 S准等距。那么，除去有限指数和有限核的影响，Γ 是 $\mathrm{Isom}(S, g_0)$ 中的一个格。

注意，任意两个仅相差有限指数或有限核的有限生成群都自动地准等距，因此不可能删去这些条件。$\mathrm{Isom}(S, g)$ 含有一致格这一假设意味着 Γ 是可和的，因此我们可以应用定理 1.2：根据[W00], 中的定理 3，$\mathrm{Isom}(S, g)$ 中的一个一致格 Γ_0 是虚拟可解的；另一方面，Γ 与 S 准等距，因此也与 Γ_0准等距；由于可 amenable 性是有限生成群之间的拟等距不变量，所以可知 Γ 是可和的。在附录 B 中，我们给出了具有格的 SOL 型群 S 的例子（在这种情况下，对于任意左不变黎曼度量 g，$\mathrm{Isom}(S, g)$ 都含有一致格）。定理 1.5 的证明见第 4 节。

定理 1.5 与 [LDPX22] 中的猜想 1.2.2(2) 有关。定理 1.5 对其等距群不含格的 SOL 型群也有推论。

猜想 1.6。设 S 是一个 SOL 型群。假设对于任意左不变黎曼度量 g，S 上的 $\mathrm{Isom}(S, g)$ 都不含一致格。那么 S 不与任何有限生成群准等距。

根据定理 1.5，当 N_i 都是 Carnot 或 Carnot-by-Carnot，且 $\dim(\mathfrak{w}_i) \geq 2$ 时，该猜想成立。在 $\dim(\mathfrak{w}_i) = 1$ 的情形下，我们只能得出 S 不与任何有限生成可 amenable 群准等距。

可解李群的拟等距分类。关于李群大尺度几何的一个开放问题是单连通可解李群的拟等距分类。若一个具有李代数 $\mathfrak{s}$ 的单连通可解李群 S 满足：对于所有 $X \in \mathfrak{s}$，$\mathrm{ad}(X)$ 的全部特征值均为实数，则称其为实型（也称为完全可解或分裂可解）。根据 [CKLGO21] 中的定理 4.21，对于任意单连通可解李群 S，存在唯一的实型单连通可解李群 $S_{\mathbb{R}}$，称为 S 的实影，使得 S 和 $S_{\mathbb{R}}$ 可以彼此等距。回顾一下，若存在 S_i 上的左不变黎曼度量 g_i（$i = 1$，2），使得（S_1，g_1）与（S_2，g_2）等距，则称两个李群 S_1 和 S_2 可以彼此等距。注意，这一结果还意味着，两个实型单连通可解李群 S_1 和 S_2 可以彼此等距，当且仅当它们同构。因此，要将单连通可解李群按拟等距分类，只需将注意力限制在实型单连通可解李群这一类上。下面是 Y. Cornulier 提出的一个猜想。

猜想 1.7。（[dC18], 猜想 19.113）两个实型单连通可解李群 S_1 和S_2 是拟等距的，当且仅当它们同构。

以下 两个结果证实了上述猜想对两类可解李群成立 .

定理 1.8. 设 $\mathcal{S}$ 是 SOL 型群 $S = (N_1 \times N_2) \rtimes \mathbb{R}$ 的类，其中（N_i， D_i）（$i = 1$，2）或者是 Carnot，或者是 Carnot-by-Carnot。那么，两个成员 S_1、$S_2 \in \mathcal{S}$ 准等距当且仅当它们同构。

在 S 非幺模且（N_i， D_i）（$i = 1$，2）为 Carnot 的特殊情形下，定理 1.8 与定理 C 相同， [Fe 22]。类似地，定理 1.9 在（N， D）为 Carnot 的情形下由 Pansu 可微性定理推出。

定理 1.9. 设 $\mathcal{S}$ 是形如 $S = N \rtimes_D \mathbb{R}$ 的单连通可解李群的类，其中（N， D）或者是 Carnot，或者是 Carnot-by-Carnot。那么，两个成员 S_1、$S_2 \in \mathcal{S}$ 准等距当且仅当它们同构。

如上所述， S_1与 S_2 之间的拟等距会在 S_2上诱导 S_1 的拟作用。随后，我们的 Tukia 型定理和 Eskin-Fisher-Whyte 粗微分方法表明，该拟作用可以共轭为 S_2上的 S_1 的等距作用。由此不难证明， S_1 与 S_2 同构。

论文结构： 我们在第 3 节汇总预备知识。拟等距刚性定理的证明安排在第 4 节。定理 1.2 的证明从第 5 节延续至第 10 节，证明概要见第 2 节。附录A 给出了 Carnot 群的若干示例。在附录B 中，我们回顾了一些具有格的 SOL 型群示例。附录 C 的内容是引理 5.4 的证明。

致谢。T. Dymarz 得到了 NSF 职业生涯基金 1552234 的资助。D. Fisher 得到了 NSF 基金 DMS-1906107 和 DMS-2246556 的资助。X. Xie 得到了 Simons 基金会基金 #315130 的资助。X. Xie 谨此感谢威斯康星大学麦迪逊分校数学系在其 2020 年 2 月访问期间提供的经济支持。我们还要感谢 Dave Witte Morris 的有益交流，并感谢 Tom Ferragut 和 Gabriel Pallier 对早期版本提出的宝贵意见。

2. Outline of main theorem

本节概述定理 1.2 的证明。

设 Γ 是一个群，它通过关于满足定理1.2 条件的 D-齐次距离 的一致拟相似变换作用在 Carnot-by-Carnot 群（N， D）上。我们采用¯记号 W， $\mathfrak{w}$ 以及 D，它们来自 Carnot-by-Carnot 群的定义 1.1 。不失一般性，可以假设 D 在 $\mathfrak{n}$ 的第一层（等价地， $\mathfrak{w}$的第一层）上按比例 1 缩放，并在 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$的第一层上按比例 α缩放。例如，如果 $N \simeq \mathbb{R}^n$，则 D 是一个对角矩阵，其对角元素为 1 和 α。（详见第 3 节。）

¯如果存在 Carnot-Carathéodory度量 d_{CC} 和 d_{CC}，分别定义在 N/W 和 W 上，使得 f 是 N 的一个双Lipschitz映射，则它是一个纤维相似映射。

¯(1) f 诱导出$(N/W, d_{CC})$的一个相似变换；(2) f 沿着 W的陪集作用为相似变换，即对于每个 $g \in N$，映射 $L_{f(g)^{-1}} \circ f \circ L_g : (W, d_{CC}) \to (W, d_{CC})$是一个相似变换。

¯我们称 Γ 是一个 纤维相似群，如果存在 Carnot-Carathéodory度量 d_{CC} 和 d_{CC} 定义在 N/W 和 W 上，使得每个元素 $\gamma \in \Gamma$ 都是关于d_{CC}和 d_{CC}的纤维相似映射。当 $\dim(N/W) \geq 2$, 且 $\dim(W) \geq 2$时，定理 3.7 表明 Γ 可以共轭到一个纤维相似群中。

单个双Lipschitz映射（第 5 节）。在第 5 节中，我们研究 N 的单个纤维相似映射的结构。一般而言，纤维相似映射并不是 N 的相似变换，因为在 N/W 上诱导的相似变换可能与 W 的陪集上的相似变换不相容，并且沿着 W 的陪集可能存在剪切。当 N 是阿贝尔群时，可以证明，任意纤维相似映射都是 N 上的一个相似变换与一个剪切映射的复合（w, h）$\mapsto$（$w + s(h)$ h），该剪切映射沿着 W 的陪集作用（在 [Dy10] 中，这些被称为“几乎相似映射”）。当 N 是 W 与 H 的直积时，结论同样成立：除去左平移外，任意这样的映射都具有如下形式：（w, h）$\mapsto$（$\phi(w)s(h)$ $B(h)$），其中 ϕ： $W \to W$ 和 B： $H \to H$ 是自同构，（w, h）$\mapsto$（$\phi(w)$ $B(h)$）是 N 的一个自同构（并且关于某个 D-齐次距离是一个相似变换），而 s: $H \to W$ 是剪切量。

一般情形更为复杂。为了理解 W 与 N/W 之间的相互作用，我们将 N 的李代数 $\mathfrak{n}$ 和 W 的李代数 $\mathfrak{w}$ 分解为特征子空间

$$\mathfrak{n} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} \text{ and } \mathfrak{w} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m.$$

这里， V_{λ_j} 是 D 中与特征值 λ_j 对应的特征子空间，而 W_i 是 $D|_{\mathfrak{w}}$中与特征值 i对应的特征子空间。回顾一下，我们不失一般性地假设了 $\lambda_1 = 1$，因此，由于 $\mathfrak{w}$ 相对于 $D|_{\mathfrak{w}}$是 Carnot 的，其特征值全为正整数。特征值 λ_j 要么是整数，要么是 α 的倍数（也可能两者皆是），其中 α 是 N/W 的李代数上的¯诱导导子的最小特征值 D。

If 若 k 不是 α 的整数倍，则 $V_k = W_k$；否则 $k = j\alpha$，并记

$$V_k = W_{j\alpha} \oplus H_j$$

对某个 $W_{j\alpha}$ 的补空间 $H_j \subset V_k$（详情见第 3 节）。于是存在从 $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_s$ 到 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 的双射，使得 H 是 $\mathfrak{n}$中 $\mathfrak{w}$ 的横截面。注意，纤维相似映射不一定保持 H。引理 5.4 表明，任何此类映射都必须具有相容表达式。相容表达式的严格定义见定义 5.3；但从本质上说，它仍涉及一个自同构 ϕ: $W \to W$，以及由映射 s: $N/W \to W$ 确定的 N 上的剪切映射，不过现在 B: $H \to \mathfrak{n}$ 只是一个从横截面 H 到 $\mathfrak{n}$的线性映射，并满足与 ϕ之间的以下相容条件：对任意 $w \in \mathfrak{w}$ 和 $h \in H$, $[d\phi(w)$ $Bh] = d\phi[w, h]$。特别是， $w + h \mapsto d\phi(w) + Bh$ 不一定定义 $\mathfrak{n}$的自同构。此外， B 和剪切 s都取决于横截面 H的选取。

非 α 为整数的情形。注意，当 α 不是整数时， $V_\alpha = H_1$ 与 $\mathfrak{n}$ 是一个中心积（见第6.2节）。这简化了我们的许多论证。事实上，我们后续分析的相当一部分都在 $V_\alpha = W_\alpha \oplus H_1$ 上进行，其中 $W_\alpha \neq 0$。

剪切映射（第 6 节）。在第 6 节中，我们刻画满足以下条件的映射 s： $N/W \to W$，使得相应的剪切映射 $g \mapsto g \cdot s(gW)$ 是 N 的双Lipschitz映射。双 Lipschitz 剪切映射用于将一致拟相似群进行共轭，从而消除群元素相容表达式中的 W_j 剪切分量 $j < \alpha$。与上文一样，我们使用李代数坐标，通过指数映射将 W 识别为 $\mathfrak{w}$，将 N/W 识别为 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$，并将 s 写作 s： $\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to \mathfrak{w}$。首先我们证明，所有这类映射 s 的像都包含于 $Z(\mathfrak{w})$ 中，即 $\mathfrak{w}$ 的中心。在阿贝尔情形，任意 $\frac{1}{\alpha}$-赫尔德映射 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$ 都会诱导出 N 的双Lipschitz映射。当 α 不是整数时，这类可容许映射 s 还有一种简单的描述。一般而言，其描述更为复杂。为描述 s： $\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$，我们首先分解 $s = (s_i)$，其中 s_i： $H \to Z_i$： $= W_i \cap Z(\mathfrak{w})$。然后我们证明，只要每个 s_i 都属于函数空间 $\mathcal{H}_i$， s 就是可容许的；该函数空间通过递归方式定义

其定义是沿水平闭曲线的某些积分为零。（详见第 6.3 节，尤其是命题 6.4 和6.7 。）

Day 定理（第**7**节）。现在我们准备考察整个一致群 Γ，其通过纤维相似映射作用于 N。本步骤的目标是证明，共轭后，每个群元素的剪切分量s_j 对于 $j < \alpha$ 都必须为零。这正是 Day 定理发挥作用的地方。回顾一下，Day 定理表明：任何在局部凸拓扑向量空间的紧凸子集上具有仿射作用的可和群，都有一个不动点。在先前的情形中，例如 [DyX16], 所涵盖的情形，Day 定理直接适用于 Γ上的 Banach空间$\frac{1}{\alpha}$-Hölder 函数空间。利用所得到的不动点，可以使用相应的双Lipschitz剪切映射，将群作用共轭为一种所有剪切分量都平凡的作用。在本文中，我们需要证明该不动点位于 $\mathcal{H}_j$中，即前文定义的 Hölder 连续映射子空间。这样做是为了构造一个共轭双Lipschitz剪切映射，见前一段。

沿 V_α 方向的共形结构（第 **8** 节）。此时，每个群元素的剪切分量s_j 对应的 $j < \alpha$ 均为零。在第 8 节中，我们再次进行共轭，使得s_α 成为同态。这一部分需要多得多的工作。首先，我们应用一个经过修改的叶状Tukia型论证版本（如 [Dy10] 和 [DFX] 中的论证），该论证仅使用沿 V_α 方向定义的可测共形结构。由于我们的映射不一定保持 V_α，因此定义这一结构时需要格外谨慎。一旦我们知道 s_α 是一个同态，就不难证明我们的映射是 N 上的仿射映射，因此相对于 D-齐次距离 N而言是相似变换。本节仅在 α 为整数时才需要。

一维（第**9** 节和第**10**节）。定理3.7仅适用于 $\dim(N/W)$ 和 $\dim(W)$ 均至少为二的情形。当 $\dim(W) = 1$ 时，我们无法沿着 W 定义叶状共形结构，而是利用群在导数映射空间上的W 作用。再次需要 Day 定理，并将其应用于这一作用。我们能够构造一个共轭映射，将群作用共轭为由纤维相似映射构成的作用。若 $\dim(N/W) = 1$，则有两种情形。如果 N 是直积，我们可以利用 Farb-Mosher[FM99] 将其在 N/W上的作用共轭。否则，我们利用代数结构证明该群作用本来就是由纤维相似映射构成的。

3. Preliminary

3.1. 拟作用与一致拟相似作用。设 $L \geq 1$, $A \geq 0$。两个度量空间之间的一个（不一定连续的）映射 $f\colon X \to Y$ 若满足以下条件，则称为（L, A）-拟等距：（1）对所有 $x_1, x_2 \in X$， $d(x_1, x_2)$ $/L - A \leq d(f(x_1)\ f(x_2)) \leq L\, d(x_1, x_2) + A$；（2）对任意 $y \in Y$，存在某个 $x \in X$，使得 $d(f(x)$ $y) \leq A$。（L, 0）-拟等距也称为 L-双Lipschitz映射。

研究拟等距的一个主要动机来自几何群论。具有对称有限生成集 S 的有限生成群 Γ，带有一个相应的左不变词度量，定义为 $d_S(g, h) = \|g^{-1}h\|_S$，其中 $\|a\|_S$ 表示满足$a = s_1 s_2 \cdots s_k$且 $s_i \in S$ 对于 $i = 1, \ldots, k$ 成立的最小 $k \in \mathbb{Z}_+$。简单验证可知，对于任意两个有限生成集 S, S'，(Γ, d_S) 与 $(\Gamma, d_{S'})$ 拟等距。

拟作用的定义可参见引言。

设 $\Lambda \geq 1$ 和 $C > 0$。两个度量空间之间的双射 $F\colon X \to Y$ 称为（Λ, C）-拟相似，如果

$$\frac{C}{\Lambda}\, d(x,y) \leq d(F(x),F(y)) \leq C\,\Lambda\, d(x,y)$$

对所有 x、$y \in X$。当 $\Lambda = 1$ 时，我们称 F 是一个相似变换。显然，一个映射是拟相似映射，当且仅当它是一个双Lipschitz映射。使用拟相似映射这一概念的意义在于，有时可以控制 Λ，但无法控制 C。群 Γ 在度量空间 X 上的作用 $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(X)$ 称为一致拟相似作用，如果存在某个 $\Lambda \geq 1$ 具有如下性质：对于每个 $\gamma \in \Gamma$，存在一个常数 $C_\gamma > 0$，使得 $\Phi(\gamma)$ 是一个 (Λ, C_γ)-拟相似映射。

设 X 是一个格罗莫夫双曲空间，Γ 是一个在 X 上拟作用的群。如果存在一点 $\infty \in \partial X$，使得对于任意 $\gamma \in \Gamma$，由 G_γ 在 ∂X 上诱导的同胚固定 ∞，并且相对于 ∂X 上的一个固定视觉度量是双Lipschitz的，那么 Γ 在 X 上的拟作用会在 $(\partial X \backslash \{\infty\}, d)$ 上诱导出 Γ 的一致拟相似作用，其中所用的是某个以 ∞ 为基点的抛物视觉度量 d。反之，如果 X 是一个视觉格罗莫夫双曲空间，并且 Γ 在 $(\partial X \backslash \{\infty\}, d)$ 上承认关于某个以 ∞ 为基点的抛物视觉度量 d 的一致拟相似作用，那么该作用可扩展为 Γ 在 X 上的拟作用。更一般地说，还存在一致拟莫比乌斯作用这一概念；视觉格罗莫夫双曲空间上的拟作用与视觉边界上的一致拟莫比乌斯作用相对应。由于我们不需要一致拟莫比乌斯作用这一概念，故不在此回顾其定义。

3.2. 幂零李代数与幂零李群。设 $\mathfrak{n}$ 是一个李代数。下中心列递归定义如下：$\mathfrak{n}^{(1)} = \mathfrak{n}$、$\mathfrak{n}^{(k)} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{(k-1)}]$。若对于某个 $t \geq 1$ 有 $\mathfrak{n}^{(t+1)} = 0$，则称李代数 $\mathfrak{n}$ 为幂零李代数。满足此条件的最小 t 称为 $\mathfrak{n}$ 的幂零性。一个连通李群是幂零的，当且仅当其李代数是幂零的。

设 N 是一个单连通幂零李群，其李代数为 $\mathfrak{n}$。则指数映射 $\exp : \mathfrak{n} \to N$ 是一个微分同胚。在此同一化下，$\mathfrak{n}$ 上的勒贝格测度是 N 上的 Haar 测度（[CG90], 第 19 页）。可以将群运算从 N 拉回，从而在 $\mathfrak{n}$ 上得到一个群结构。$\mathfrak{n}$ 上的这一群结构可以用 Baker-Campbell-Hausdorff公式（简称BCH公式）描述，该公式用 X 和 Y 的迭代李括号表示乘积 $X * Y$（X，$Y \in \mathfrak{n}$）。N 中的群运算记为 $\cdot$。$\mathfrak{n}$ 上的拉回群运算 $*$ 定义如下。对于 X、$Y \in \mathfrak{n}$，定义

$$X * Y = \exp^{-1}(\exp X \cdot \exp Y).$$

那么，BCH公式（[CG90], 第 11 页）表明

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \cdots .$$

我们还回顾以下公式（[Hel78], 第 127、128 页）：

$$Y * X * (-Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{ad}\, Y)^k (X) = X + [Y,X] + \cdots + \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}\, Y)^k (X) + \cdots . \tag{2}$$

回想一下，若 $\phi\colon G_1 \to G_2$ 是一个李群同态，而 $d\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 表示相应的李代数同态，则 $\phi \circ \exp = \exp \circ\, d\phi$。

约定。本文中（特别是第 6–8 节和附录C中），我们常将单连通幂零李群 N 通过指数映射与其李代数 $\mathfrak{n}$ 等同起来。在这种等同下，元素 $X \in \mathfrak{n}$ 相对于 $*$的逆元为 $-X$：$X^{-1} = -X$。因此，我们用 0 表示李群的单位元。

以下结论是已知的（例如参见 [P11a], 第980页）。为完整起见，我们在此列出。

引理 3.1。设 ϕ、$\tilde{\phi}: N_1 \to N_2$ 是两个单连通幂零李群之间的李群同态。设 N_2 配备左不变度量 d，使得 d 诱导流形拓扑，且闭球是紧的。假设 $C := \sup_{x\in N_1}\{d(\phi(x), \tilde{\phi}(x))\} < \infty$。则 $\phi = \tilde{\phi}$。

证明。只需证明相应的李代数同态一致。反设存在某个 $X \in \mathfrak{n}_1$，使得 $d\phi(X) \neq d\tilde{\phi}(X)$。设 $\{\mathfrak{n}_2^{(j)}\}_j$ 为 $\mathfrak{n}_2$ 的下中心列，且 $\pi_j: \mathfrak{n}_2 \to \mathfrak{n}_2/\mathfrak{n}_2^{(j)}$ 为商同态。设 $k \geq 2$ 为满足 $d\phi(X) - d\tilde{\phi}(X) \in \mathfrak{n}_2^{(k-1)} \backslash \mathfrak{n}_2^{(k)}$ 的整数。令 $Y = \pi_k(d\phi(X))$、$\tilde{Y} = \pi_k(d\tilde{\phi}(X))$ 以及 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_2/\mathfrak{n}_2^{(k)}$。于是，对于中心于 $\mathfrak{g}$ 中的某个 $Z \neq 0$，有 $\tilde{Y} = Y + Z$。该假设意味着对于所有 $t \in \mathbb{R}$，均有 $\bar{d}(tY, t\tilde{Y}) \leq C$，其中 $\bar{d}$ 是由 d 在 $\mathfrak{g}$ 上诱导的距离：$\bar{d}(\bar{a}, \bar{b}) = \inf\{d(a,b) | a \in \pi_k^{-1}(\bar{a})\ b \in \pi_k^{-1}(\bar{b})\}$。这里我们将 N_2 与 $\mathfrak{n}_2$ 视为相同，因此 d 是 $\mathfrak{n}_2$ 上的距离。另一方面，BCH 公式给出 $(-tY) * (tY) = tZ$，因此 $C \geq d(tY, t\tilde{Y}) = d(0, (-tY) * (t\tilde{Y})) = d(0, tZ)$。取 $z \in \pi_k^{-1}(Z)$。于是存在某个 $a_t \in \mathfrak{n}_2^{(k)}$，满足 $d(a_t, tz) \leq C$。我们可以将 $tz = a_t * b_t$ 写成某个 $b_t \in B$ 的形式：$= \{x \in \mathfrak{n}_2 | d(0,x) \leq C\}$。由于 $\mathfrak{n}_2^{(k)}$ 是 $\mathfrak{n}_2$ 的理想，根据BCH 公式，我们可以将 $a_t * b_t = c_t + b_t$ 写成某个 $c_t \in \mathfrak{n}_2^{(k)}$ 的形式。我们有 $tz = c_t + b_t$，因此 $z = \frac{c_t}{t} + \frac{b_t}{t}$。由于球 B 是紧的，当 $t \to \infty$ 时有 $\frac{b_t}{t} \to 0$。这意味着当 $t \to \infty$ 时有 $\frac{c_t}{t} \to z$。由于 $\frac{c_t}{t} \in \mathfrak{n}_2^{(k)}$ 且 $\mathfrak{n}_2^{(k)}$ 在 $\mathfrak{n}_2$ 中是闭的，我们得出 $z \in \mathfrak{n}_2^{(k)}$，这与 $Z \neq 0$ 的事实矛盾。

□

3.3. Carnot 代数与 Carnot 群。Carnot 代数构成幂零李代数的一个特定类别。Carnot李代数是一个有限维李代数 $\mathfrak{n}$，并带有非平凡向量子空间的直和分解 $\mathfrak{n} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$，使得对于所有 $1 \leq i \leq r$ 都有 $[V_1, V_i] = V_{i+1}$，其中我们设 $V_{r+1} = \{0\}$。对于每个 Carnot 代数 $\mathfrak{n} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$，Carnot 导子 $D: \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 定义为 $D(x) = ix$，其中 $x \in V_i$。由 Carnot 导子生成的 $\mathfrak{n}$ 的自同构称为 Carnot膨胀，并表示为 $\delta_t: \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}, t \in (0, +\infty)$，其中 $\delta_t(x) = t^i x$，对于 $x \in V_i$成立。设 $\mathfrak{n} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$ 和 $\mathfrak{n}' = V_1' \oplus V_2' \oplus \cdots \oplus V_s'$为两个 Carnot 代数。李代数同态 $\phi: \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}'$ 称为分次的，如果对于所有 $1 \leq i \leq r$都有 $\phi(V_i) \subset V_i'$。
如果一个单连通幂零李群的李代数是 Carnot 代数，则称该单连通幂零李群为 Carnot 群。设 N 是一个李代数为 $\mathfrak{n} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ 的 Carnot 群。子空间 V_1 在 N 上定义了一个左不变分布 $HN \subset TN$。若 γ 是 N 中的一条绝对连续曲线，且其速度向量 $\gamma'(t)$ 对几乎处处的 t 都包含于 $H_{\gamma(t)}N$ 中，则称其为水平曲线。根据 Chow定理（[BR，定理 2.4]），N 中任意两点都可以通过水平曲线连接。固定 HN 上的一个左不变内积。设 p、$q \in N$，两者之间的 Carnot-Carathéodory度量 $d_{CC}(p,q)$ 定义为连接 p 和 q 的水平曲线长度的下确界。由于 HN 上的内积是左不变的，N 上的 Carnot 度量也是左不变的。对 HN 选择不同的内积所得的 Carnot 度量彼此双Lipschitz等价。相对于 Carnot 度量，N 的 Hausdorff维数由 $\sum_{i=1}^{r} i \cdot \dim(V_i)$ 给出。

定义 3.2. 设 G 和 G' 是赋予 Carnot-Carathéodory度量的两个 Carnot 群，$U \subset G$ 和 $U' \subset G'$ 是开子集。若存在分次同态 $L: G \to G'$，则称映射 $F: U \to U'$ 在 $x \in U$ 处 Pansu可微，即

$$\lim_{y \to x} \frac{d(F(x)^{-1} * F(y),\ L(x^{-1} * y))}{d(x,y)} = 0.$$

在此情形下，分次同态 $L\colon G \to G'$ 称为 F 在 x 处的 Pansu微分，记作 $DF(x)$。

Pansu [P89] 证明了，Carnot 群之间的 Lipschitz映射几乎处处是 Pansu可微的；如果该映射是双 Lipschitz的，那么其 Pansu微分是一个分次同构。

3.4. 导子、半直积、Heintze 群和 SOL 型群。设 $\mathfrak{n}$ 是一个李代数。若线性映射 $D\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 满足 $D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$对所有 X、$Y \in \mathfrak{n}$均成立，则称其为导子。令 $\mathrm{der}(\mathfrak{n})$ 表示 $\mathfrak{n}$的导子集合。显然，它是一个向量空间。按照自同态的通常括号运算，它构成一个李代数：对于 D_1、$D_2 \in \mathrm{der}(\mathfrak{n})$，定义$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$。

设 $\mathfrak{w}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是两个李代数，且 $\phi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{der}(\mathfrak{w})$是一个李代数同态。半直积 $\mathfrak{w} \rtimes_\phi \mathfrak{h}$ 是向量空间 $\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{h}$，其李括号定义如下：

$$[(W_1,H_1),(W_2,H_2)] = ([W_1,W_2] + \phi(H_1)(W_2) - \phi(H_2)(W_1), [H_1,H_2]).$$

设 $\mathfrak{n}$ 为一个李代数，且 $D \in \mathrm{der}(\mathfrak{n})$。于是我们可以定义同态 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{der}(\mathfrak{n})$，其定义为$\phi(t) = tD$。记 $\mathfrak{n} \rtimes_D \mathbb{R} := \mathfrak{n} \rtimes_\phi \mathbb{R}$。当 $\mathfrak{n}$ 为一个幂零李代数，且 $D \in \mathrm{der}(\mathfrak{n})$ 的特征值具有正实部时，我们称 $\mathfrak{n} \rtimes_D \mathbb{R}$ 为 Heintze 代数。在这种情形下，李代数为 $\mathfrak{n} \rtimes_D \mathbb{R}$ 的单连通可解李群称为 Heintze 群，而对 $(\mathfrak{n}, D)$（以及 (N, D)）称为 Heintze 对。如果一个 Heintze 代数（或 Heintze 群，或对 $(\mathfrak{n}, D)$）的 D 的所有特征值都是实数，则称其为纯实的。根据 [Ale75], ，每个 Heintze 群都与某个纯实 Heintze 群双Lipschitz 等价。由于本文只关注 Heintze 群的拟等距变换，因此我们只需考虑纯实 Heintze 群。

如果 $\mathfrak{n}$ 是纯实 Heintze 对，则称其为对角的；如果 D 可对角化。

引理 3.3. 设 $(\mathfrak{n}, D)$ 是一个对角 Heintze 对，且 $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_r$ 是 D 的特征值。记与 λ_i 相关联的特征子空间为 V_{λ_i}。则

(1) $\mathfrak{n} = \oplus_{i=1}^r V_{\lambda_i}$ 和 $[V_{\lambda_i}, V_{\lambda_j}] \subset V_{\lambda_i+\lambda_j}$；

(2) 设 $\mathfrak{w}$ 是由 V_{λ_1}生成的 $\mathfrak{n}$ 的李子代数。则 $\mathfrak{w}$ 是一个 Carnot 代数，并且 $D(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}$。如果 $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的一个理想，则 D 投影为 $\bar{\mathfrak{n}}$ 上的一个导子 $D\colon = \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$，其具有 $\bar{}$ 个正特征值。此外，D 的最小特征值严格大于 λ_1。

证明. (1) $\mathfrak{n} = \oplus_{i=1}^r V_{\lambda_i}$ 由线性代数推出，而 $[V_{\lambda_i}, V_{\lambda_j}] \subset V_{\lambda_i+\lambda_j}$ 由导子的定义推出。

(2) 令 $W_1 = V_{\lambda_1}$ 和 $W_j = [W_1, W_{j-1}]$ 为 $j \geq 2$。由 (1) 可得 $W_j \subset V_{j\lambda_1}$。因此，$\mathfrak{w} = \oplus_j W_j$ 是 Carnot 分次，且 $D(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}$。现在假设 $\mathfrak{w}$ 是一个理想。由于 $D(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}$，$D^{\bar{}}$ 诱导出一个导子 $D\colon \bar{\mathfrak{n}} \to \bar{\mathfrak{n}}$。

由于 $\mathfrak{w}$ 是分次的，即 $\mathfrak{w} = \oplus_i (\mathfrak{w} \cap V_{\lambda_i})$，我们有 $\bar{\mathfrak{n}} = \oplus_i (V_{\lambda_i}/(\mathfrak{w} \cap V_{\lambda_i})$。由于 $D|_{V_{\lambda_i}}$ 是由 λ_i 进行乘法 $\bar{}$，当限制在 $V_{\lambda_i}/(\mathfrak{w} \cap V_{\lambda_i})$ 上时，D 也是由 λ_i 进行乘法。由此可知，D 也可对角化，且其特征值集合是 D 的特征值集合的子集。由于 $W_1 = V_{\lambda_1}$ 我们有 $V_{\lambda_1}/(\mathfrak{w} \cap V_{\lambda_1}) = 0$，因此 λ_1 不是 D 的特征值。由此可知，D 的最小特征值 $\bar{}$ 是 $> \lambda_1$。

□

Heintze 对（$\mathfrak{n}$，D）（Heintze 代数、Heintze 群）称为 Carnot 型，如果它是纯实的，并且具有D 对角的形式，使得 $\mathfrak{w} = \mathfrak{n}$，其中 $\mathfrak{w}$ 如引理 3.3所述。否则，Heintze 对称为非 Carnot 型。

设（$\mathfrak{n}_i$, D_i）（$i=1$, 2）为一个 Heintze 对。设 D为由 $D=$（D_1, $-D_2$）给出的 $\mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2$的导子。我们将（$\mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2$）$\rtimes_D\mathbb{R}$ 称为 SOL 类代数，并将李代数为（$\mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2$）$\rtimes_D\mathbb{R}$ 的单连通可解李群称为 SOL 型群。

For 李代数 $\mathfrak{n}$ 的任意李子代数 $\mathfrak{h}$， $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{n}$ 中的正规化子定义为 :

$$N(\mathfrak{h})=\{x\in\mathfrak{n}:[x,\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}\}.$$

引理 3.4. 若李代数 $\mathfrak{n}$ 的一个导子 D 满足 $D(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{h}$, 则 $D(N(\mathfrak{h}))\subset N(\mathfrak{h})$。

证明. 令 $X\in N(\mathfrak{h})$ 和 $Y\in\mathfrak{h}$ 为任意对象。则

$$[D(X),Y]=D[X,Y]-[X,D(Y)]\in\mathfrak{h}$$

这意味着 $D(X)\in N(\mathfrak{h})$。

□

3.5. 幂零李群上的齐次距离. 设 (N,D) 是一个对角 Heintze 对。若距离 d 定义在 N 上，称其为 D-齐次的，若它是左不变的，在N上诱导出流形拓扑，并且对于所有 x、$y\in N$ 和 $t\in\mathbb{R}$，都有 $d(e^{tD}x,e^{tD}y)=e^td(x,y)$，其中 $\{e^{tD}|t\in\mathbb{R}\}$ 表示由导子 D 生成的 N 的自同构。设 $\mathfrak{n}=\oplus_jV_{\lambda_j}$ 是将$\mathfrak{n}$ 分解为 D 的特征子空间直和的分解。$\mathfrak{n}$ 上的一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 称为 D-内积，如果对应于不同特征值的特征子空间关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 正交。根据 [HSi90], 中的定理 2 的构造，对于 $\mathfrak{n}$ 上的任意 D-内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，存在 N 上的一个 D- 1 齐次距离 d，使得当 $x\in V_{\lambda_j}$ 时， $d(0,x)=\langle x,x\rangle^{\frac{}{2\lambda_j}}$。在定理 1.2 的证明过程中，我们将多次修改这些 D-内积，因此也会修改相应的D-齐次距离。

容易看出， N 上的任意两个 D齐次距离都是双Lipschitz等价的。我们始终在 N 上赋予一个 D齐次距离。因此，在不指定 D齐次距离的情况下讨论 N 的双Lipschitz映射是有意义的。

为便于计算，我们还定义了一个函数 ρ，它与 d上的一个 D齐次距离双Lipschitz等价。对于 $\mathfrak{n}$ 上的任意 D内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，在 $\mathfrak{n}$ 上定义一个“范数”为

$$||v||=\sum_i|v_i|^{\frac{1}{\lambda_i}},$$

其中， $v=\sum_iv_i$满足 $v_i\in V_{\lambda_i}$。然后定义 ρ为 $\rho(x,y)=||x^{-1}*y||$。我们将 $\mathfrak{n}$与 N视为相同。显然，ρ是左不变的，诱导出流形拓扑，并且对于所有 x、$y\in\mathfrak{n}$ 和 $t\in\mathbb{R}$，满足 $\rho(e^{tD}x,e^{tD}y)=e^t\rho(x,y)$。由此可知，对于 $\mathfrak{n}$上的任意 D齐次距离 d，存在一个常数$L\geq1$，使得对于所有 x、$y\in\mathfrak{n}$， $d(x,y)/L\leq\rho(x,y)\leq L\cdot d(x,y)$。$\rho$的显式公式将使计算容易得多。在估计中，我们将经常使用 ρ 而不是 d。

引理3.5. 设 ϕ 是 N的自同构。那么，当且仅当 $d\phi$ “保持层结构”时， ϕ 是双Lipschitz的；也就是说，对于每个 j， $d\phi(V_{\lambda_j})=V_{\lambda_j}$。

证明。首先假设 ϕ是双Lipschitz。令 $0\neq v\in V_{\lambda_j}$并写作 $d\phi(v)=\sum_ix_i$，其中 $x_i\in V_{\lambda_i}$。于是 $d\phi(tv)=\sum_itx_i$。我们有

$$\rho(0,tv)=|v|^{\frac{1}{\lambda_j}}|t|^{\frac{1}{\lambda_j}}$$

and

$$\rho(0,d\phi(tv))=\sum_i|x_i|^{\frac{1}{\lambda_i}}|t|^{\frac{1}{\lambda_i}}.$$

双Lipschitz条件表明，当 $i \neq j$ 时， $x_i = 0$ 成立，令 $t \to \infty$ 或 $t \to 0$.

逆命题 地假设 $d\phi$ 保持层结构。那么存在某个常数 $C \geq 1$ ，使得 t
(3) $|v|/C \leq |d\phi(v)| \leq C|v|$
对所有 $v \in V_{\lambda_j}$、 $\forall j$均成立。现在令 $v \in \mathfrak{n}$。将 $v = \sum_j v_j$写作 $v_j \in V_{\lambda_j}$。则 $d\phi(v) = \sum_j d\phi(v_j)$。我们有 1 1 $\rho(0, v) = \sum_j |v_j|^{\overline{\lambda_j}}$，以及 $\rho(0, d\phi(v)) = \sum_j |d\phi(v_j)|^{\overline{\lambda_j}}$。现在断言由 (3) 得证。

□

An a自同构 ϕ 的 N 如果满足引理3.5中的条件，则称为分次的。

设 G 是一个连通李群，配备左不变距离 d ，该距离诱导流形拓扑，并设 H 是 G 的闭正规子群。我们在 G/H 上定义距离 $d(xH, yH) = \inf\{d(xh_1, yh_2) | h_1, h_2 \in H\}$。那么 d 是 G/H 上的左不变距离，并诱导流形拓扑，且商映射 $(G, d) \to (G/H, d)$ 是 1-Lipschitz。由于 H 是正规的，我们有 $d(xH, yH) = d(xh_1, yH) = d(yh_2, xH) = d_H(xH, yH)$，对任意 h_1、 $h_2 \in H$ 均成立，其中 d_H 表示豪斯多夫距离。如果 F 是 (G, d) 的一个双 Lipschitz 映射，并且置换 H 的陪集，那么 F 诱导出一个双 Lipschitz映射 $F\colon (G/H, d) \to (G/H, d)$，其双 Lipschitz 常数与 F 相同。

设 $(\mathfrak{n}, D)$ 是一个对角 Heintze 对，且 d 是 D 上的齐次距离。假设 $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的一个理想，使得 $D(\mathfrak{w}) \subset \mathfrak{w}$。那么 D 诱导出 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 的一个导子 D ，并且 $(\mathfrak{n}/\mathfrak{w}, D)$ 是一个对角 Heintze 对。在这种情形下，由 d 诱导的 N/W 上的距离 d 是一个 D-齐次距离，其中 W 是 N 中李代数为 $\mathfrak{w}$ 的李子群。

3.6. 对角 Heintze 对的纤维 Tukia 定理。 这里我们回顾 Carnot 群的 Tukia 型定理，以及对角 Heintze 对的纤维版 Tukia 定理，详见 [DFX]。

ˆ定理 3.6。 （定理 1。*1,* [DFX]）设 N 是一个 Carnot 群，且 $N = N \cup \{\infty\}$ 是 N 的一点紧化。存在一个定义在 N 上的左不变 Carnot-Carathéodory 度量 d_0 ，具有ˆ以下性质。设 G 是 N 的一致拟共形群。如果 G 在 ˆ ˆˆ 的互异三元组空间上的作用 N 是余紧的，那么存在某个拟共形映射 $f\colon N \to N$ ，使得fGf^{-1} 关于 d_0 由共形映射组成。

度量 d_0 具有最大的共形群，也就是说，任意左不变 Carnot-Carathéodory 度量的共形群都共轭包含于 d_0的共形群中。一般而言，不可能将一致拟共形群共轭到任意左不变 Carnot-Carathéodory 度量的共形群中，例子见第 6, [DFX] 节。

接下来，设 $(\mathfrak{n}, D)$ 是一个对角 Heintze 对。则存在一个 D-不变李子代数序列 $\{0\} = \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_s = \mathfrak{n}$ ，满足以下性质：每个 $\mathfrak{n}_{i-1}$ 都是 $\mathfrak{n}_i$ 的理想，且其商空间 $\mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_{i-1}$ 是一个 Carnot李代数； D 诱导一个导子 $D : \mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_{i-1} \to \mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_{i-1}$ ，它是 $\mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_{i-1}$的 Carnot 导子的倍数。设 N_i 是 N 中李代数为 $\mathfrak{n}_i$ 的连通李子群。则 N/N_i 是一个齐性流形，且自然映射 π_i : $N/N_{i-1} \to N/N_i$ 是一个纤维为 Carnot 群 N_i/N_{i-1} 的纤维丛。我们称子群序列 $0 = N_0 < N_1 < \cdots < N_s = N$ 为保持不变的子群序列。

设 d 是 D 上的 N-齐次距离。一般而言，当 N_i 不是 N 中的正规子群时， d 不会在齐次空间 N/N_i 上诱导出任何度量。尽管如此，它会在 π_i 的纤维 N_i/N_{i-1} 上诱导出度量： $N/N_{i-1} \to N/N_i$。此外，对于每个 i， N 的每个双 Lipschitz 映射 F 都会置换 N_i 的陪集。因此， F 诱导出映射 F_i : $N/N_i \to N/N_i$ ，以及 π_i 的丛映射： $N/N_{i-1} \to N/N_i$。 F_i 在 π_i 的纤维上的限制是 Carnot 群的双Lipschitz映射

群 N_i/N_{i-1}，其意义如下。对于每个 $p \in N$，令 $F_p = L_{F(p)^{-1}} \circ F \circ L_p$，其中 L_x 表示将 N 左平移 x 所得到的映射。注意，映射 $(F_p)_{i-1}$：$N/N_{i-1} \to N/N_{i-1}$ 满足 $(F_p)_{i-1}(N_i/N_{i-1}) = N_i/N_{i-1}$。上述陈述的含义仅仅是，$(F_p)_{i-1}|_{N_i/N_{i-1}}$：$N_i/N_{i-1} \to N_i/N_{i-1}$ 关于 N_i/N_{i-1} 上任意左不变 Carnot-Carathéodory度量都是双Lipschitz映射。

定理 3.7。（定理 1.3, [DFX]）设 (N, D) 是一个对角 Heintze 对，且 Γ 是 N 的一个一致拟相似群，其在 N 的不同点对空间上余紧地作用（或等价地说，Γ 是一个在 $S = N \rtimes_D \mathbb{R}$上拟作用且余有界的群）。设 $I = \{i | 1 \le i \le s, \dim(N_i/N_{i-1}) \ge 2\}$。则存在一个双Lipschitz映射 $F_0 : N \to N$ 以及 N_i/N_{i-1} 上的一个左不变 Carnot-Carathéodory 度量 d_i，使得对于每个 $i \in I$、每个 $p \in N$ 和每个 $g \in F_0 \Gamma F_0^{-1}$，映射 $(g_p)_{i-1}|_{N_i/N_{i-1}} : (N_i/N_{i-1}, d_i) \to (N_i/N_{i-1}, d_i)$ 是一个相似变换。

4. Quasi-isometric rigidity of solvable groups

本节将 Tukia 型定理与 Eskin- Fisher-Whyte 的粗分化方法结合起来 [EFW12], [EFW13] 以建立可解群的拟等距刚性结果。

4.1. SOL 型群的等距群中的格的拟等距刚性。Tukia 型定理在幂零群上的主要应用之一，是 SOL 型群的等距群中的格的拟等距刚性。回顾一下，SOL 型群具有 $S = (N_1 \times N_2) \rtimes \mathbb{R}$ 的形式，并且允许由 Heintze 群 $N_1 \rtimes_{D_1} \mathbb{R}$ 和 $N_2 \rtimes_{D_2} \mathbb{R}$ 形成的两个叶层。

证明 SOL 型群的拟等距刚性可分为两个步骤:

(1) 证明：经过与一个等距变换复合后，SOL 型群的任意自拟等距都与一个乘积映射相距有界

$$(x, y, t) \to (f(x), f(y), t) \text{ where } x \in N_1,\ y \in N_2,\ t \in \mathbb{R}.$$

(2) 为在 N_i, $i = 1,2$上通过准相似变换作用的群证明一个 Tukia 型定理。

这一策略源于 Eskin-Fisher-Whyte 关于 SOL 本身拟等距刚性的开创性研究。在他们的工作中 [EFW07、EFW12、EFW13] 他们主要关注步骤 (1)，并提出了一种新的“粗微分”技术，用于理解 SOL 型群的拟等距。为清楚起见，他们的论文主要研究三维 SOL 以及其离散对应物 Diestel-Leader 图的情形。尽管如此，正如 [EF10, 第 4 节] 中已指出，他们的结果同样适用于所有 SOL 型群。事实上，在她关于 [P11b、P11c] 中高秩交换群扩交换群 SOL 型群（即具有如下形式的群 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}^m$，其中作用满足适当条件$\mathbb{R}^m$）的研究中，Peng 已指出，Eskin-Fisher-Whyte 的论证在更一般的情形下也适用，即当 SOL 型群中的 N_i 为阿贝尔群时。最近，Ferragut 在其论文 [Fe22] 中致力于寻找 Eskin-Fisher-Whyte 工作适用的最一般框架。在此过程中，他将 [EFW12] 的工作扩展到了带有 horo-pointed 结构的度量测度空间这一类空间，并计划对 [EFW13] 做同样的扩展。

我们将简要回顾在 SOL 情形下，如何结合步骤 (1) 和 (2) 得出 SOL 中格的拟等距刚性。

SOL 的准等距刚性概要。设 Γ 是一个与 SOL 准等距的有限生成群（因此也与 SOL 中任意一个格准等距）。那么，Γ 在 SOL 上诱导出一个由 $L \ge 1$、$C \ge 0$ 准等距映射构成的拟作用，其中 L、C 对所有 $\gamma \in \Gamma$ 一致。将 Γ 替换为一个二阶子群后，我们可以应用 Eskin-Fisher-Whyte（即步骤（1）），得到所有 $\gamma \in \Gamma$ 都通过形如 $\gamma(x, y, t) = (f_\gamma(x)\, g_\gamma(y)\ t + c_\gamma)$ 的映射作用。这诱导出两个一致的拟相似

在 $\mathbb{R}$ 上的作用（分别通过 f_γ 和 g_γ）。根据步骤（2）（在我们的情形中，即通过 [FM99]），这两个作用都可以共轭为在 $\mathbb{R}$上的相似变换作用。也就是说，共轭之后， f_γ 将$\mathbb{R}$ 上的距离按某个常数 n_γ 缩放，而g_γ 按某个常数 m_γ缩放。注意，这两个共轭共同定义了 SOL 上原拟作用的一个拟共轭。如果 $n_\gamma = m_\gamma$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$ 都成立，那么该拟作用与一个等距变换作用相距有界。另一种情形不可能发生，因为如果 $n_{\gamma_0} \neq m_{\gamma_0}$ 对哪怕一个 γ_0 成立，那么由 γ_0^k 诱导的映射的准等距常数会随着 $k \to \infty$ 趋于无穷大，从而违反拟作用的一致性。现在我们得到， Γ 在有限指数子群及有限核意义下通过等距变换作用于 SOL。但 SOL 是其等距群的指数为 8 的子群，因此 Γ 必为 SOL 中的虚拟格。

定理 1.5 的证明也遵循这一纲要，不过在我们更一般的情形下还需考虑若干额外因素。首先，我们的共轭可能只能相对于不同于初始度量的另一个度量给出一个等距作用。其次，更一般的 SOL 型群的等距群 S 可能远大于 S （一般而言，它们的维数并不相同）。

定理 **1.5**的证明。 现在我们详细证明定理1.5 。

设 $S = (N_1 \times N_2) \rtimes \mathbb{R}$ 是一个赋予左不变黎曼度量 g的 SOL 型群，其中（N_i， D_i）是 Carnot 或 Carnot-by-Carnot。设 Γ 是一个与 S拟等距的有限生成群。 Γ 与 S 之间的拟等距诱导出 Γ 在 S上的一个拟作用。特别地，每个$\gamma \in \Gamma$ 都对应于一个（L， C）-拟等距 $\phi(\gamma)$： $S \to S$，其中 $L \geq 1$、 $C \geq 0$ 是与 γ无关的常数。如上文所述，Eskin-Fisher-Whyte 的论证表明， $\phi(\gamma)$ 与一个乘积映射的距离有界。将 C 替换为一个更大的常数，并将$\phi(\gamma)$替换为一个乘积映射后，我们可以假设 $\phi(\gamma)$ 是一个乘积映射。如有必要，取一个二重指标子群后，我们还可以进一步假设每个 $\phi(\gamma)$ 都保持 S 按 $S_i = N_i \rtimes_{D_i} \mathbb{R}$的陪集所定义的叶层。因此，对于每个 $\gamma \in \Gamma$，存在映射 γ_1： $N_1 \to N_1$、 γ_2： $N_2 \to N_2$、 h_γ： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $\phi(\gamma)$ 由下式给出：

$$\phi(\gamma)(n_1, n_2, t) = (\gamma_1(n_1), \gamma_2(n_2), h_\gamma(t)).$$

设 $\tilde{\gamma}_i$： $S_i \to S_i$ 由 $\tilde{\gamma}_i(n_i, t) = (\gamma_i(n_i)\ h_\gamma(t))$ 给出。于是， $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}_i$ 定义了 Γ 在 S_i上的一个拟作用。由于该拟作用由保持高度的拟等距给出， Γ 在 (N_i, d_i) 上诱导出一个一致拟相似作用，其中 d_i 是 N_i上的一个 D_i-齐次距离。由于 $\tilde{\gamma}_i$的特殊形式， Γ 在 N_i 上的这一诱导作用由 $\gamma \mapsto \gamma_i$给出。

现在我们假设每个 (N_i, D_i) $(i = 1, 2)$ 要么是 Carnot 情形，要么是 Carnot-by-Carnot 情形，且 $\dim(\mathfrak{w}_i) \geq 2$，其中 $\mathfrak{w}_i$ 是由 D_i的最小特征值对应的特征子空间生成的 $\mathfrak{n}_i$ 的李子代数。根据定理 1.2 （Carnot-by-Carnot 情形）或定理 3.6 （Carnot 情形），存在 N_i的一个双Lipschitz映射 f_i 以及 N_i 上的一个极大对称的 D_i- 齐次距离 d_i，使得对于每个 $\gamma \in \Gamma$， $f_i \circ \gamma_i \circ f_i^{-1}$ 都是 (N_i, d_i) 的相似变换。 [KLD17] 定理 **1.2** 蕴含 $f_i \circ \gamma_i \circ f_i^{-1}$具有如下形式 $f_i \circ \gamma_i \circ f_i^{-1} = L_{a_i} \circ e^{v_{i,\gamma} D_i} \circ \phi_i$ 其中 $a_i \in N_i$为某个元素，且 ϕ_i 是 N_i 的一个自同构，同时也是 (N_i, d_i) 的一个等距变换。.

引理 **4.1.** 对所有 $\gamma \in \Gamma$，等式 $v_{1,\gamma} + v_{2,\gamma} = 0$ 均成立。

证明。注意，左平移 $L_{(0,-v_{1,\gamma})}$： $S_1 \to S_1$ （这是 S_1 的一个等距变换）由 $L_{(0,-v_{1,\gamma})}(x, t) = (e^{-v_{1,\gamma} D_1} x,$ $t - v_{1,\gamma})$ 给出。因此， $L_{(0,-v_{1,\gamma})} \circ \tilde{\gamma}_1$ 是一个 (L, C)-拟等距，并由 $L_{(0,-v_{1,\gamma})} \circ \tilde{\gamma}_1(x, t) = (e^{-v_{1,\gamma} D_1} \gamma_1(x)\ h_\gamma$ $(t) - v_{1,\gamma})$ 给出。由于 $e^{-v_{1,\gamma} D_1} \circ \gamma_1$ of$L_{(0,-v_{1,\gamma})} \circ \tilde{\gamma}_1$ 的边界映射是一个等距变换， [SX12] 中的引理 5.1 蕴含 $|h_\gamma(t) - v_{1,\gamma} - t| \leq C_1$，其中常数 C_1 仅取决于 L, C 和 N_1。类似地，考虑 $L_{(0,v_{2,\gamma})} \circ \tilde{\gamma}_2$ 可得 $|h_\gamma(t)$ $+ v_{2,\gamma} - t| \leq C_2$，其中常数 C_2 仅取决于 L, C 和 N_2。结合这两个不等式，我们得到

$|v_1,\ \gamma + v_2,\ \gamma| \le C_1 + C_2$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$ 均成立。由于 $v_i,\ \gamma^n = nv_i,\ \gamma$ 对任意 $n \ge 1$ 均成立，将上述不等式应用于 γ^n 可得 $|v_1,\ \gamma + v_2,\ \gamma| \le (C_1 + C_2)/n$。由于这对所有 $n \ge 1$ 都成立，引理得证。

□

引理 4.2. 设 $f_i : (N_i, d_i) \to (N_i, d_i)$ $(i = 1, 2)$ 是一个双Lipschitz映射。设 d 是 S 上的左不变黎曼度量，使得 N_1、N_2 和 $\mathbb{R}$ 两两正交。定义 $F : \tilde{}(S, d) \to (S, d)$ 为 $F(n_1, n_2, t) = (f_1(n_1)\ f_2(n_2)\ t)$。则 F 是某个~常数 $C \ge 0$ 下的 $(1, C)$-拟等距映射。

证明. 对度量进行缩放后，不妨设竖直线 $c_{(n_1,n_2)} : \mathbb{R} \to S$, $c_{(n_1,n_2)}(t) = (n_1, n_2, t)$ 是单速测地线。设 $\pi_1 : S \to S_1$ 由 $\pi_1(n_1, n_2, t) = (n_1, t)$ 给出，且$\pi_2 : S \to S_2$ 由 $\pi_2(n_1, n_2, t) = (n_2, t)$ 给出。另设 $h : S \to \mathbb{R}$ 是高度函数$h(n_1, n_2, t) = t$。根据 [Fe20] 中的推论 4.13 或 [LDPX22] 中的定理 4.1，存在一个常数$C_1 \ge 0$，使得对于任意 p、$q \in S$，我们有

$$|d(p, q) - d^{(1)}(\pi_1(p), \pi_1(q)) - d^{(2)}(\pi_2(p), \pi_2(q)) + |h(p) - h(q)|| \le C_1,$$

其中，$d^{(1)}$ 是 $S_1 \sim (N_1 \times \{0\}) \rtimes \mathbb{R} \subset S$ 上由 d 诱导的度量，$d^{(2)}$同理。分别用 $F(p)$和 $F(q)$替换p、q，得到

$$|d(F(p)\ F(q)) - d^{(1)}(\pi_1(F(p))\ \pi_1(F(q))) - d^{(2)}(\pi_2(F(p))\ \pi_2(F(q))) + |h(F(p)) - h(F(q))|| \le C_1.$$

该引理由以下断言推出，因为根据 F 的定义，对于任意 $x \in S$，我们有 $h(F(x)) = h(x)$。

~断言：存在一个常数 C_i，它仅取决于 S_i 的格罗莫夫双曲性常数和 f_i 的双 Lipschitz 常数，使得对于所有 p_1、$p_2 \in S$：$|d^{(i)}(\pi_i(F(p_1))\ \pi_i(F(p_2))) - d^{(i)}(\pi_i(p_1)\ \pi_i(p_2))| \le C_i$。

断言的证明：我们只考虑 $i = 1$ 的情形，因为 $i = 2$ 的情形是类似的。令 $p_1 = (x_1, y_1, t_1)$，$p_2 = (x_2, y_2, t_2)$。那么该断言可写为

$$|d^{(1)}(f_1(x_1), t_1), (f_1(x_2), t_2)) - d^{(1)}((x_1, t_1), (x_2, t_2))| \le \tilde{C}_1.$$

令 t_{x_1,x_2} 为两条竖直测地线 c_{x_1} 和 c_{x_2} 在 S_1 中彼此分离的高度（即 $c_{x_1}(t_{x_1,x_2})$ 与 $c_{x_2}(t_{x_1,x_2})$ 之间的距离为 1），其中对于 $x \in N_1$, $c_x : \mathbb{R} \to S_1$由 $c_x(t) = (x, t)$ 给出。那么我们有

$$|d^{(1)}((x_1, t_1), (x_2, t_2)) - (t_{x_1,x_2} - t_1) - (t_{x_1,x_2} - t_2)| \le C_2$$

若 $t_{x_1,x_2} >$为 $\{t_1, t_2\}$ 的最大值，且 $|d^{(1)}((x_1, t_1), (x_2, t_2))$，否则，对于某个仅依赖于 S_1的 Gromov 双曲性常数的常数 C_2。类似地

$$|d^{(1)}((f_1(x_1), t_1), (f_1(x_2), t_2)) - (t_{f_1(x_1),f_1(x_2)} - t_1) - (t_{f_1(x_1),f_1(x_2)} - t_2)| \le C_2$$

若 $t_{f_1(x_1)\ f_1(x_2)} > \max\{t_1, t_2\}$ 且 $|d^{(1)}((f_1(x_1)\ t_1), (f_1(x_2)\ t_2)) - |t_1 - t_2|| \le C_2$ 否则。现在只需证明存在一个常数 C_3，使得 $|t_{f_1(x_1)\ f_1(x_2)} - t_{x_1,x_2}| \le C_3$ 对所有 $x_1, x_2 \in N_1$ 均成立。这可由以下事实推出：$d_1(x_1, x_2)$ 与 $e^{t_{x_1,\ x_2}}$ 相当，且 f_1 是双Lipschitz。

□

定理 1.5 的证明。回顾一下，D_i-齐次距离 d_i 在 N_i 上与内积 $\langle\ ,\ \rangle_i$ 相关联，该内积定义在 $\mathfrak{n}_i$上。由于 ϕ_i 是 N_i 的自同构，同时也是 $(N_i,\ d_i)$ 的等距变换，根据引理3.5，$d\phi_i$ 保持层结构，并且相对于 $\langle\ ,\ \rangle_i$是正交变换。令 $\langle\ ,\ \rangle_0$ 为 $T_eS = (\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2) \rtimes \mathbb{R}$ 上的内积，使其在 $\mathfrak{n}_i$上与 $\langle\ ,\ \rangle_i$一致，满足 $\langle (0, 0, 1), (0, 0, 1)\rangle_0 = 1$，并且使 $\mathfrak{n}_1$、$\mathfrak{n}_2$ 和 $\mathbb{R}$ 两两正交。令 g_0 为由 $\langle\ ,\ \rangle_0$确定的 S 上的左不变黎曼度量。

对于每个 $\gamma \in \Gamma$，定义映射 $\Psi(\gamma): S \to S$ 如下：

$$\Psi(\gamma)(n_1, n_2, t) = (f_1 \circ \gamma_1 \circ f_1^{-1}(n_1), f_2 \circ \gamma_2 \circ f_2^{-1}(n_2), t + v_{1,\gamma}).$$

由于 $f_i \circ \gamma_i \circ f_i^{-1} = L_{a_i} \circ e^{v_{i,\ \gamma} D_i} \circ \phi_i$，引理 4.1 推出 $\Psi(\gamma)(n_1, n_2, t) = L_{(a_1,a_2,v_{1,\gamma})}(\phi_1 n_1, \phi_2 n_2, t)$。$\phi_i$ 的性质表明，映射 $S \to S$，$(n_1, n_2, t) \mapsto (\phi_1 n_1, \phi_2 n_2, t)$ 是 S的自同构，并且是 (S, g_0) 的等距变换。因此，$\Psi(\gamma)$ 是 (S, g_0) 的等距变换。

按照引理 4.2，定义 $F: S \to S$，令 $F(n_1, n_2, t) = (f_1(n_1)\ f_2(n_2)\ t)$。于是，$F$是 S 的拟等距。注意，$\Psi(\gamma)$ 和 $F \circ \phi(\gamma) \circ F^{-1}$ 在 S_i 上诱导相同的边界映射。因此，$\Psi(\gamma)$ 与 $F \circ \phi(\gamma) \circ F^{-1}$之间的距离是有界的。将 $F \circ \phi(\gamma) \circ F^{-1}$替换为$\Psi(\gamma)$后可见，$\Gamma$ 在 S 上的原拟作用现在拟共轭于 Γ 在 (S, g_0) 上的等距作用。由于原拟作用是余有界的，该等距作用是余紧的，因此 $\Psi(\Gamma)$ 是 $\mathrm{Isom}(S, g_0)$ 中的一致格。当每个 (N_i, D_i) $(i = 1, 2)$ 均为 Carnot 或 Carnot-by-Carnot 且 $\dim(\mathfrak{w}_i) \geq 2$ 时，证明完成。

如果对于至少一个 $\mathfrak{w}_i$的维数 $= 1$ 为 i 且 Γ 是可和的，则定理 1.2 仍然适用，上述证明也成立。现在假设$\mathfrak{w}_i$的维数为 $= 1$ 且 $\mathrm{Isom}(S, g)$ 对某个左不变黎曼度量 Γ_0 存在一致格，该度量 g 定义在 S 上。根据 [W00] Γ_0 中的定理 3，Γ_0 在某个单连通可解李群中是虚拟格。特别地，Γ 是有限生成可和群。因此 Γ_0也是可和的，因为它与 Γ 准等距。因此定理 1.2 再次适用，上述证明也成立。

□

4.2. 一类可解李群的拟等距分类。 这里我们给出定理 1.8 和定理 1.9的证明。

定理 1.8 的证明。一个方向是显然的。对于另一个方向，假设 S_1 和 $S_2 \in \mathcal{S}$ 准等距。于是 S_1 在 S_2 上拟作用。由于 S_1 是可和的，定理 1.5 的证明适用（对于 $\Gamma := S_1$，$S := S_2$），因此我们得出存在 g_2 上的左不变黎曼度量，使得 S_1 在 S_2 上的拟作用与 S_1 在（S_2，g_2）上的等距作用拟共轭。这诱导出一个连续同态 ϕ： $S_1 \to \mathrm{Isom}$（S_2，g_2）。由于李群之间的连续同态是李群同态，我们看到 S_1 在（S_2，g_2）上的等距作用是光滑作用；也就是说，相应的映射 F： $S_1 \times S_2 \to S_2$，F（s_1，s_2）$= \phi$（s_1）（s_2）是光滑映射。固定某个 $x \in S_2$。则映射 f： $S_1 \to S_2$ 由 f（s_1）$= F$（s_1，x）$= \phi$（s_1）（x）给出，是光滑的。容易看出，对于所有 $s_1' \in S_1$，ϕ（s_1'）$\circ f = f \circ L_{s_1'}$，其中 $L_{s_1'}$ 是通过 s_1' 对 S_1 进行左平移得到的。这意味着映射 f 的微分具有常秩。如果该秩小于 $\dim$（S_1），则存在 $h \in f^{-1}$（x）$\backslash\{e\}$。那么所有幂 h^n，$n \in \mathbb{Z}$ 都会固定 $x \in S_2$。这是矛盾的，因为 $\{h^n | n \in \mathbb{Z}\}$ 在 S_1 中无界，而 $\{\phi$（h^n）（x）$| n \in \mathbb{Z}\} = \{x\}$ 在 S_2 中有界，并且 S_1 在 S_2 上的作用与 S_1 通过左平移作用于自身的作用拟共轭。因此 f 的秩至少为 $\dim$（S_1），这意味着 $\dim$（S_2）$\geq \dim$（S_1）。交换 S_1 和 S_2 的角色，我们得到反向不等式，因此 $\dim$（S_2）$= \dim$（S_1）。所以 f 是从 S_1 到 S_2 的局部微分同胚。上述论证还表明 f 是单射，因此它是到 S_2 的一个开子集上的微分同胚。由于 f 的像是 S_1 作用于 S_2 上的一个轨道，我们看到 f 必须是满射，否则 S_2 将是至少两个开子集的不交并。因此 f 是从 S_1 到 S_2 的微分同胚。

接下来我们采用在 [FLD21], 命题 2.1中发现的一个想法。令 g_1 为 g_2 在 f下的拉回黎曼度量。则 $f: (S_1, g_1) \to (S_2, g_2)$ 是一个等距变换。最后，等式 $\phi(s_1') \circ f = f \circ L_{s_1'}$ 意味着，对于任意 $s_1' \in S_1$，$L_{s_1'}: (S_1, g_1) \to (S_1, g_1)$ 是一个等距变换。换言之，g_1 是左不变的。因此，可以使 S_1 和 S_2 等距。由于它们都属于实型，[CKLGO21] 中的定理 4.21意味着它们同构。

□

利用定理 1.3 （将在下文证明）和推论 1.2, [DFX] 替代定理 1.5 ，上述论证给出定理 1.9。

4.3. 某些 Heintze 群上拟作用的拟等距刚性。 最后，我们给出定理 1.3的证明。

定理 1.3 的证明。设 (N, D) 是 Carnot-by-Carnot，且 Γ 是一个在 $N \rtimes_D \mathbb{R}$ 上共有界地进行拟作用的群。我们进一步假设，当 $\dim(W) = 1$ 时， Γ 是可和的。于是， Γ 在 N 上诱导出一个一致拟相似作用，使得 N 中的每一点都是径向极限点（因为 Γ 在 N 的不同点对空间上的诱导作用是余紧的）。根据定理 1.2，存在一个从 N 到 F_0 的双 Lipschitz 映射，使得 $F_0 \Gamma F_0^{-1} \subset \mathrm{Sim}(N, d_0)$，其中 d_0 是 N 上一个固定的极大对称 D-齐次距离。回忆一下， d_0 这一 D-齐次距离与 $\mathfrak{n}$ 上的一个内积 $\langle , \rangle_0$ 相关联。设 $\langle , \rangle$ 为 $T_e(N \rtimes_D \mathbb{R}) = \mathfrak{n} \times \mathbb{R}$ 上满足 $\langle , \rangle|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}} = \langle , \rangle_0$, $\langle \mathfrak{n}, \{0\} \times \mathbb{R} \rangle = 0$ 以及 $\langle (0, 1), (0, 1) \rangle = 1$ 的内积。设 g_0 为由内积 $\langle , \rangle$ 确定的 $N \rtimes_D \mathbb{R}$ 上的左不变黎曼度量。设 $\gamma \in \Gamma$。回忆一下， $F_0 \gamma F_0^{-1}$ 在 N 上作为仿射映射作用，其形式为 $F_0 \gamma F_0^{-1} = L_{a_\gamma} \circ e^{t_\gamma D} \circ \phi_\gamma$，其中 $a_\gamma \in N, t_\gamma \in \mathbb{R}$ 是某些元素， L_{a_γ} 是 N 上由 a_γ 给出的左平移，而 ϕ_γ 是一个分次自同构，使得 $d\phi_\gamma$ 是 $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle_0)$ 的线性等距变换。现在令 $F_0 \gamma F_0^{-1}$ 在 $N \rtimes_D \mathbb{R}$ 上通过 $F_0 \gamma F_0^{-1}(n, t) = L_{(a_\gamma, t_\gamma)}(\phi_\gamma(n)\ t)$ 作用，其中 $L_{(a_\gamma, t_\gamma)}$ 是 $N \rtimes_D \mathbb{R}$ 上由 (a_γ, t_γ) 给出的左平移。容易验证，这定义了 Γ 在 $(N \rtimes_D \mathbb{R}, g_0)$ 上的一个等距作用，并且诱导出 $F_0 \Gamma F_0^{-1}$ 在 $N = \partial S \backslash \{\infty\}$ 上给定的作用。

□

5. BiLipschitz maps of diagonal Heintze pairs

本节研究对角 Heintze 对的单个双Lipschitz映射（见第 3.4 节）。我们证明，如果一个双Lipschitz映射置换某个连通分次正规子群的陪集，那么它具有一种具备良好性质的表达式（我们称之为相容表达式），参见引理 5.4。

对于任意双Lipschitz映射 $F\colon\ N \to N$和 $g \in N$，我们用 $F_g := L_{F(g)^{-1}} \circ F \circ L_g$ 表示。注意， $F_g(0) = 0$。

引理 5.1. 设 $(\mathfrak{n}, D)$ 是一个对角 Heintze 对， $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的一个理想，并且 $D(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}$。设 $F : N \to N$ 是一个双Lipschitz映射，它置换 W 的陪集，其中 W 是 N 中李代数为 $\mathfrak{w}$ 的连通李子群。此外，假设对于每个 $g \in N$，映射 $F_g|_W : W \to W$ 是 W 的一个自同构。那么存在一个自同构 $\phi : W \to W$，使得 $d\phi : \mathfrak{w} \to \mathfrak{w}$ 保持层结构，且对任意 $g \in N$， $F(gw) = F(g)\phi(w)$ 和 $(\chi_{F_0(g)}|_W) \circ \phi = \phi \circ (\chi_g|_W)$ 成立，其中 χ_x 表示由 x 作共轭。

注记 5.2. 如果我们从一个 Carnot-by-Carnot 群的一致拟相似群 Γ N 且 W 是 N 的连通李子群，其李代数由 D的最小特征值对应的特征子空间生成，那么当 *3.7* 中的纤维 Tukia 定理（定理 $\dim(W) \geq 2$, 使得 Γ 的双Lipschitz共轭中的每个元素都满足引理中的假设时，我们便可以应用该定理。

证明。将 F替换为 F_0后，不妨设 $F(0) = 0$。由于 W在 N中正规， $gW = Wg$对任意$g \in N$成立。 F置换 W的陪集这一事实意味着， $F(gW) = F(g)W$，且 $F(Wg) = WF(g)$。因此，存在两个函数 ϕ_g、ψ_g： $W \to W$，使得对任意 $w \in W$， $F(gw) = F(g)\phi_g(w)$，以及$F(wg) = \psi_g(w)F(g)$。注意到 $\phi_g = F_g|_W$，因此根据假设，它是 W的自同构。根据定义， $\psi_g(w) = F(wg)F(g)^{-1} = F(g \cdot g^{-1}wg)F(g)^{-1} = F(g)\phi_g(g^{-1}wg)F(g)^{-1}$。

由此可得

$$\psi_g = (\chi_{F(g)}|_W) \circ \phi_g \circ (\chi_{g^{-1}}|_W) \tag{4}$$

是 W 的自同构的复合，因此也是 W的自同构。这里我们使用了 W 在 N 中是正规的假设，因此对于任意 $x \in N$， $\chi_x|_W$ 是 W 的自同构。

我们断言， $\psi := \psi_g$与 g无关。设 $g_1, g_2 \in N$。那么对于任意 $w \in W$， $d(wg_1, wg_2) = d(g_1, g_2)$。由于 F是某个 $L \geq 1$下的双Lipschitz映射，我们有 $d(F(wg_1)\ F(wg_2)) \leq Ld(g_1, g_2)$。由于$F(wg_i) = \psi_{g_i}(w)F(g_i)$，我们得到

$$\begin{aligned} d(\psi_{g_1}(w), \psi_{g_2}(w)) &\leq d(\psi_{g_1}(w), F(wg_1)) + d(F(wg_1), F(wg_2)) + d(F(wg_2), \psi_{g_2}(w)) \\ &\leq d(0, F(g_1)) + Ld(g_1, g_2) + d(F(g_2), 0) \end{aligned}$$

对所有 $w \in W$。由引理 3.1 我们有 $\psi_{g_1} = \psi_{g_2}$。

现在我们证明 $\phi := \phi_g$ 也与 g无关。由于 $D(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}$，将$D$-齐次距离限制到 W 上所得的是 W 上的 $D|_{\mathfrak{w}}$-齐次距离。作为双Lipschitz映射的限制，自同构 ϕ_g 是 W的双Lipschitz映射。由引理 3.5， $d\phi_g : \mathfrak{w} \to \mathfrak{w}$保持层结构。将$\mathfrak{w} = W_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus W_{\mu_m}$ 写成 $D|_{\mathfrak{w}}$的特征子空间的直和，其中 $0 < \mu_1 < \cdots < \mu_m$是 $D|_{\mathfrak{w}}$的互异特征值。于是 $d\phi_g(W_{\mu_j}) = W_{\mu_j}$。设 $g, h \in N$。我们将证明，对于每个 j ，等式 $d\phi_g|_{W_{\mu_j}} = d\phi_h|_{W_{\mu_j}}$ 成立。为此，注意对于任意i和 $x \in N$，若记 $I_i = \oplus_{k \geq i} W_{\mu_k}$，则(2)蕴含 $d\chi_x(I_i) \subset I_i$，且 $d\chi_x$在$I_j/I_{j+1} \cong W_{\mu_j}$上诱导恒等映射。因此，由 $d(\chi_F(g)|_W)$在 I_j/I_{j+1} 上诱导的映射$\circ d\phi_g \circ d(\chi_{g^{-1}}|_W)$等于 $d\phi_g|_{W_{\mu_j}}$。将 g 替换为 h时同样成立。现在由(4)以及 $d\psi_g = d\psi_h$ 这一事实可得 $d\phi_g|_{W_{\mu_j}} = d\phi_h|_{W_{\mu_j}}$。

最后，取 $g = 0$在（4）中，我们得到 $\phi = \psi$作为 F（0） $= 0$。等式（$\chi_{F_0\ (g)}\ |_W$）$\circ \phi = \phi \circ$（$\chi_g|_W$）对任意 $g \in N$ 也由（4）得到。

□

下文中，当我们说 F： $\mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 是一个双Lipschitz映射时，我们将 $\mathfrak{n}$ 与 N 视为相同，并且 $\mathfrak{n}$ 配备了一个D-齐次距离。

李群的一个自同胚 F： $G \to G$ 被称为仿射映射，如果 $F = L_g \circ \phi$，其中 ϕ 是 G 的一个自同构，而 L_g 是由 $g \in G$给出的左平移。我们称 ϕ 为仿射映射 F的自同构部分。

¯设（$\mathfrak{n}$， D）和 $\mathfrak{w}$ 如引理 5.1 中所述。记 D： $\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 为由_ _D 诱导的 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 的导子，并记 σ（D）为 D的特征值集合。设 $H \subset \mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{n}$ 的一个分次子空间，且与 $\mathfrak{w}$互补；¯也就是说，对于每个 $\lambda \in \sigma$（D）， $H_\lambda \subset V_\lambda$ 是 W_λ 在 V_λ 中的补线性子空间（如果 $W_\lambda = \{0\}$，则 $H_\lambda = V_\lambda$），并且 $H = \oplus_{\lambda \in \sigma(\bar{D})} H_\lambda$。注意，对于每个 $g \in \mathfrak{n}$，存在唯一的 $h \in H$、 $w \in \mathfrak{w}$使得 $g = h * w$。

对于 $x \in \mathfrak{n}$，我们用 $\bar{x}$ 表示 $\pi(x)$，其中 π： $\mathfrak{n} \to \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 是商映射。为方便起见，我们引入以下术语。

定义 5.3. 设 $(\mathfrak{n}, D)$ 是一个对角 Heintze 对，且 $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的理想，使得 $D(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}$。设 $F : N \to N$ 是一个置换 W 的陪集的双 Lipschitz 映射，其中 W 是 N 的连通李子群，其李代数为 $\mathfrak{w}$。此外，假设 F 诱导出 N/W¯的一个仿射映射，并且对于每个 $g \in N$，映射 $F_g|_W$: $W \to W$ 是 W 的自同构。令 B 为由 F 诱导的 N/W 的仿射映射的自同构部分。若表达式 $F(h * w) = F(0)$ $* Bh * Aw * As(h)$ $(h \in H, w \in \mathfrak{w})$（其中 $A = d\phi$， ϕ 是引理 5.1 中 W 的自同构）满足以下条件，则称其为 F 的相容表达式：

¯1. $B\colon H \to \mathfrak{n}$ 是满足 $B(H_\lambda) \subset V_\lambda$ 且满足 $dB \circ \pi|_H = \pi \circ B$ 的线性映射，其中 $\pi\colon \mathfrak{n} \to \bar{\mathfrak{n}}$ 是商映射；2. 对任意 $h \in H$， $[Bh, Aw] = A[h, w]$ $w \in \mathfrak{w}$；3. s 是一个映射 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$，其中 $Z(\mathfrak{w})$ 表示 $\mathfrak{w}$ 的中心。

我们将证明（见引理 5.5），上述条件 1–2 蕴含条件 3。但要证明这一点，我们需要相容表达式的存在性（引理5.4）。

一般而言，双Lipschitz映射 F 并不具有唯一的相容表达式。原因是可能存在不止一个线性映射 $B\colon H \to \mathfrak{n}$ 满足上述条件 1 和 2。因此，映射 s 也不唯一。然而，若 α 表示 D 的最小特征值，且 $\pi_\lambda\colon \mathfrak{w} \to W_\lambda$ 是关于分解 $\mathfrak{w} = \oplus_\lambda W_\lambda$ 的投影，那么对于 $\lambda < \alpha$， $\pi_\lambda \circ s$ 是唯一的，因为改变 B 只会影响 $\lambda \geq \alpha$ 的 $\pi_\lambda \circ s$。另一种理解方式是注意到，对于 $\lambda < \alpha$，$(\pi_\lambda \circ s)(\bar{h}) = A^{-1}(\pi_\lambda(F(0)^{-1} * F(h)))$。

引理 5.4。 设 $(\mathfrak{n}, D)$、 $\mathfrak{w}$ 和 F 如定义 *5.3* 所述。则 F 具有一个相容表达式。

引理 5.4 的证明较为繁琐。为提高可读性，我们将引理5.4 的证明置于附录 C 中。证明的主要依据是 $\phi \circ \chi_g = \chi_{G(g)} \circ \phi$，其中$G = F_0$。参见引理 5.1。我们还隐含地（并反复地）使用了以下事实：$[Z(\mathfrak{w})\ \mathfrak{n}] \subset Z(\mathfrak{w})$。这由 Jacobi 恒等式以及 $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的理想这一事实推出。

请注意 ¯在下文的 (1) 和 (2) 中， Aw 与 $As(h)$ 的出现顺序不同 .

引理 5.5。 设 $(\mathfrak{n}, D)$、 $\mathfrak{w}$ 和 F 如定义 *5.3* 所述。使用记号 $p = h * w \in \mathfrak{n}$ 其中$h \in H$， $w \in \mathfrak{w}$:

(1) 如果表达式 $F(h * w) = F(0) * Bh * As(h) * Aw$ 对 F 满足定义 *5.3* 的条件 1-2，则它也满足条件 3；

¯(2) 如果表达式 $F(h * w) = F(0) * Bh * As(h) * Aw$ 对 F 满足定义 ¯*5.3*的条件 1-2，则它也满足条件 3 ($s(h) \in Z(\mathfrak{w})$，因此 $F(h * w) = F(0) * Bh * Aw * As(h)$ 是一个相容表达式。

¯证明。（1）设 $F(h*w) = F(0) * B_1 h * Aw * As_1(h)$ 是一个相容表达式。条件 1 表明$B_1 h - Bh \in \mathfrak{w}$ 对所有 $h \in H$均成立。由条件 2，我们得到 $[Bh, Aw] = A[h, w] = [B_1 h, Aw]$ 对所有$h \in H$ 及所有 $w \in \mathfrak{w}$均成立。因此 $[B_1 h - Bh, Aw] = 0$，从而 $s'(h) := B_1 h - Bh \in Z(\mathfrak{w})$。利用 BCH公式以及 $[\mathfrak{n}, Z(\mathfrak{w})] \subset Z(\mathfrak{w})$ 这一事实，我们得到 $(-Bh) * B_1 h \in Z(\mathfrak{w})$。最后， ¯ ¯由 $F(h)$ 的两个表达式可得 $As(h) = (-Bh) * B_1 h * As_1(h) \in Z(\mathfrak{w})$。

¯(2) 上述证明同样表明，在这种情形下 $s(h) \in Z(\mathfrak{w})$。这使我们能够交换 Aw and $As(h)$，从而得到一个相容表达式。

□

我们注意到，如果对所有 $h \in H$、 $w \in \mathfrak{w}$ 都有 $[Bh, Aw] = A[h, w]$，那么

$$Bh * Aw * (Bh)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathrm{ad}\,(Bh))^i (Aw) = A(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathrm{ad}\,(h))^i (w)) = A(h * w * h^{-1}). \tag{5}$$

为了后续使用（见引理8.8），我们记录如下引理。该引理的要点是，同一个线性映射 B 适用于 F_p。

引理 5.6. 设 $F\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 是一个双Lipschitz映射，具有相容表达式 $F(h * w) = F(0) * Bh * Aw * As(h)$。那么，对于任意 $p \in N$，映射 F_p都存在相容表达式，其¯形式为 $F_p(h * w) = Bh * Aw * A\tilde{s}(h)$，其中映射 $\tilde{s}\colon \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$。

证明. 注意，对于任意 $p,q \in N$，都有 $(F_p)_q = F_{pq}$，因此同一个 A 也适用于 F_p。根据引理 5.1，我们可以写成 $F_p(h*w) = F_p(h) * Aw$。由于 F_p 在 N/W 上诱导自同构 B，我们可以写成 $F_p(h) = Bh * A\tilde{s}(h)$，其中映射 $\tilde{s}: \bar{\mathfrak{n}} \to \mathfrak{w}$。因此，我们有 $F_p(h*w) = Bh * A\tilde{s}(h) * Aw$，且满足定义 5.3 的条件 1 和 2。根据引理 5.5 (2)，$F_p(h*w) = Bh * Aw * A\tilde{s}(h)$ 是 F_p的一个相容表达式。

□

6. 双Lipschitz剪切映射的刻画

在第 **6**–**8** 节以及附录 C 中，我们将经常通过指数映射把单连通幂零李群与其李代数等同起来。（参见第 3.2节。）

从现在起，除非另有说明，(N, D) 将是 Carnot-by-Carnot，而 W 将是 N 的李子群，其李代数 $\mathfrak{w}$ 由 D 的最小特征值对应的特征子空间生成。在本节中，我们将刻画连续映射 $s: N/W \to W$，使得由 $F(g) = g\,s(gW)$ 给出的剪切映射 $F: (N,d) \to (N,d)$ 是双Lipschitz的。双Lipschitz剪切映射将用于把一致拟相似群共轭到相似变换群中。我们只关注 $s(0) = 0$ 的情形。在此情形下，$F(0) = 0$。我们首先介绍 Carnot 群上的一个有用的微分一形式，它将用于双Lipschitz剪切映射的刻画。

6.1. Carnot 群上的水平典范一形式。我们首先回顾李群上的典范一形式，然后定义 Carnot 群上的水平典范一形式。最后给出水平典范一形式在指数坐标下的表达式。

对于李群 G 及其李代数 $\mathfrak{g} = T_eG$，典范一形式 θ 是定义在 G 上的一个取值于 $\mathfrak{g}$ 的左不变一形式，定义如下。对于每个 $x \in G$、$\theta_x: T_xG \to \mathfrak{g}$ 是由 $\theta_x(X) = X_e$给出的线性映射，其中 X 是 G 上的满足 $X_x = X$ 的左不变向量场，而 X_g 表示 X 在 $g \in G$处的值。“典范”这一名称源于以下事实：对于每个 $x \in G$，在将切向量与相应的左不变向量场相识别后，θ_x 就是恒等映射。

水平典范一形式是典范一形式在 Carnot 群情形下的对应物。设 G 是一个具有李代数分次 $\mathfrak{g} = \oplus_{j=1}^{n} V_j$的 Carnot 群。那么，水平典范一形式 θ_H 是定义在 G上的一个取值于 V_1的左不变一形式。令 $\pi_1: \mathfrak{g} \to V_1$ 为关于分解 $\mathfrak{g} = \oplus_{j=1}^{n} V_j$的投影。定义 $\theta_H = \pi_1 \circ \theta$；也就是说，对于每个$x \in G$，$(\theta_H)_x: T_xG \to V_1$ 定义为复合映射 $\pi_1 \circ \theta_x$。

设 e_1、$\cdots$、e_{k_n} 是 $\mathfrak{g} = T_eG$ 的一组基，使得 $\{e_1, \cdots, e_{k_1}\}$ 是 V_1 的一组基。对于每个 i，令 X_i 为 G 上的左不变向量场，并且其在 e 处等于 e_i。令 $\{\theta_1, \cdots, \theta_{k_n}\}$ 为 G 上左不变一形式空间的基，且与 $\{e_1, \cdots, e_{k_n}\}$ 对偶。因此我们有 $\theta_i(X_j) = \delta_{ij}$。现在容易看出，$\theta_H = \sum_{i=1}^{k_1} \theta_i e_i$ 满足 $(\sum_{i=1}^{k_1} \theta_i e_i)(\sum_{j=1}^{k_n} a_j X_j) = \sum_{i=1}^{k_1} a_i e_i$。若使用指数坐标 $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}} \to G$，$(x_1, \cdots, x_{k_n}) \mapsto \exp(\sum x_j e_j)$，则对于 $1 \le i \le k_1$，θ_i 由 $\theta_i = dx_i$ 给出。因此，θ_H 的表达式为 $\theta_H = \sum_{i=1}^{k_1} dx_i e_i$。

6.2. α 不是整数时的李代数结构。我们回到（N, D）为 Carnot-by-Carnot 的情形。我们进行缩放，使得 D 的最小特征值为 1。令 $\alpha > 1$ 为诱导导子 D 的最小特征值：$\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$。在假设 α 不是整数的情况下，我们阐明 $\mathfrak{n}$ 的代数结构，并证明 $\mathfrak{n}$ 是一个中心积。

回顾一下，假设 $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}/\mathfrak{w} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ 是一个 Carnot 代数，并且 $\pi: \mathfrak{n} \to \bar{\mathfrak{n}}$ 是商映射。

引理 6.1. (1) 若 $\alpha > 1$ 是无理数，则 $\mathfrak{n}$ 有一个理想 $\mathfrak{h}$，它在 π 下同构地映射到 $\bar{\mathfrak{n}}$。特别地，$\mathfrak{n}$是两个理想 $\mathfrak{w}$ 和 $\mathfrak{h}$的直和。

(2) 假设 $\alpha > 1$ 是有理数但不是整数。令 $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} | k\alpha \text{ 是整数}\}$。那么存在一个包含于 $\oplus_l W_{lk_0\alpha}$ 的 $\mathfrak{w}$ 的分次中心理想 I，一个带有包含于 $\oplus_l H_{lk_0}$ 的分次中心理想 J 的 Carnot 代数 $\mathfrak{h} = \oplus_j H_j$，以及一个满足$\phi(I \cap W_{lk_0\alpha}) = J \cap H_{lk_0}$的线性同构 $\phi : I \to J$，使得 $\mathfrak{n}$ 同构于中心积 $\mathfrak{w} \times_\phi \mathfrak{h} = (\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{h})/K$，其中 $K = \{(x, \phi(x)) | x \in I\}$。

证明。令 $H_1 = V_\alpha$ 和 $\mathfrak{h}$ 分别为由 H_1 生成的 $\mathfrak{n}$ 的李子代数。那么 $\pi(H_1) = V_1$ 和 $\pi(\mathfrak{h}) = \bar{\mathfrak{n}}$。此外，性质 $[V_a, V_b] \subset V_{a+b}$ 意味着 $\mathfrak{h}$ 是一个 Carnot 代数。

(1) 假设 α 是无理数。由于 $\mathfrak{h} \subset \oplus_l V_{l\alpha}$ 和 $\mathfrak{w} \subset \oplus_{j\geq 1} V_j$，我们有 $\mathfrak{w} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$。由于 $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的理想，性质 $[V_a, V_b] \subset V_{a+b}$ 蕴含 $[\mathfrak{w}, \mathfrak{h}] = 0$。因此，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的理想，并且 $\mathfrak{n} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{h}$ 是两个理想的直和。

(2) 假设 $\alpha > 1$ 是有理数但不是整数。事实 $[H_1, W_1] \subset V_{1+\alpha} \cap \mathfrak{w} = \{0\}$ 蕴含$[\mathfrak{w}, \mathfrak{h}] = 0$，因此 $\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{n}$ 的理想。然而在这种情形下，$\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{w}$ 可能有非平凡交集。事实 $[\mathfrak{w}, \mathfrak{h}] = 0$ 蕴含 $\mathfrak{w} \cap \mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{n}$ 中是中心的，因此它在 $\mathfrak{w}$ 和 $\mathfrak{h}$中也都是中心的。定义 $f : \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{n}$，使得 $f(w, h) = w + h$。于是 f 是一个满射李代数同态，其核为 $f^{-1}(0) = \{(w, h) | w \in \mathfrak{w} \cap \mathfrak{h}, h = -w\}$。令 $I = J = \mathfrak{w} \cap \mathfrak{h}$，并定义 $\phi : I \to J$，使得 $\phi(w) = -w$。于是 $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{w} \times_\phi \mathfrak{h}$。最后，由于 $\mathfrak{w}$、$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的两个分次理想的交集，$\mathfrak{w} \cap \mathfrak{h} (= I = J)$ 是 $\mathfrak{w}$ 和 $\mathfrak{h}$ 中的分次理想。

□

由于 $[\mathfrak{w}, \mathfrak{h}] = 0$ 和 $\mathfrak{n} = \mathfrak{w} + \mathfrak{h}$，我们看到 $Z(\mathfrak{w})$ 位于 $\mathfrak{n}$ 的中心中。

6.3. 双 Lipschitz 剪切映射的刻画。令 $s : N/W \to W$ 是一个满足$s(0) = 0$的映射，并令 $F : (N, d) \to (N, d)$ 由 $F(g) = gs(gW)$ 给出。

引理 6.2。一个 如上所述的 F 是双Lipschitz的。则 s 的取值位于 $Z(W)$ 的中心 W 中 .

证明。由于 $s(gW) \in W$，F 将 W 的每个陪集映射到自身。令 $g \in N$ 和 $A_g : W \to W$ 由 $A_g = F_g|_W$ 给出。注意到 A_g 是 W 的一个内自同构：$A_g(w) = s(gW)^{-1} w s(gW)$。由于 F 是双Lipschitz的，A_g 也是如此。Carnot 群的双Lipschitz自同构必然是分次的（见引理3.5），因此完全由其在第一层上的作用决定。另一方面，内自同构在 $\mathfrak{w}/[\mathfrak{w}, \mathfrak{w}]$ 上诱导出平凡映射。因此，A_g 是平凡自同构，从而 $s(gW)$ 必须位于 $Z(W)$ 中。

□

我们需要介绍 一些函数空间，然后才能给出该刻画的陈述 .

这些空间为 $\mathcal{H}_j$。设 $\pi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 为自然投影。对于任意 $X \in \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 和 $z \in Z(\mathfrak{w})$，我们定义 $[X, z] := [X, z]$，其中 $X \in \mathfrak{n}$ 满足 $\pi(X) = X$。这是良定义的，因为 $z \in Z(\mathfrak{w})$，而 X 的不同选择之差是 $\mathfrak{w}$中的一个元素。注意 $[X, z] \in Z(\mathfrak{w})$。

设 θ_H 是 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 上的水平典范一形式。对于任意 $j \geq 1$，记满足以下条件的所有连续映射 $c : \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_j(\mathfrak{w})$ 所构成的空间为 P_j（回忆 $Z_j(\mathfrak{w}) = Z(\mathfrak{w}) \cap W_j$）：$c(0) = 0$，并且对 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 中的所有闭水平曲线 γ，$\int_\gamma [c(x)\ \theta_H(x)] = 0$。这里我们使用了针对 $z \in Z(\mathfrak{w})$ 的括号 $[z, X]$ 的定义，$X \in \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$。注意，由于 $c(x) \in Z_j(\mathfrak{w})$ 且 $\theta_H(x) \in \bar{V}_1$，有 $[c(x)\ \theta_H(x)] \in Z_{j+\alpha}(\mathfrak{w})$。对于任意 $c \in P_j$，定义映射 $c^{(1)} : \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_{j+\alpha}(\mathfrak{w})$，其中 $c^{(1)}(p) = \int_\gamma [c(x)\ \theta_H(x)]$,

γ 是从 0 到 p 的任意水平路径。根据 P_j 的定义，这一定义是良定义的。若 $c^{(1)} \in P_{j+\alpha}$，则定义 $c^{(2)} = (c^{(1)})^{(1)}$。类似地，当 $c^{(k-1)} \in P_{j+(k-1)\alpha}$ 时，我们可以定义 $c^{(k)}$：$\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_{j+k\alpha}(\mathfrak{w})$。

对于每个整数 $1 \le j \le \alpha$，令 E_j 表示满足 $c(0) = 0$ 的 $\frac{j}{\alpha}$-Hölder 连续映射 c：$\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_j(\mathfrak{w})$ 所构成的空间，并令 $\mathcal{H}_j$ 表示满足 $c^{(k)}$ 对所有 $k \ge 1$（即 $c^{(k-1)} \in P_{j+(k-1)\alpha}$）都有定义的元素 $c \in E_j$ 的集合。这里，$\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 上的度量是 Carnot 度量，而 $Z_j(\mathfrak{w})$ 上的度量是欧几里得度量。注意，由于 $\mathfrak{n}$ 是幂零的，当 k 足够大时，$c^{(k)} \equiv 0$。

特殊情形。我们注意到，当 α 不是整数时，对于所有 $1 \le j < \alpha$，都有 $\mathcal{H}_j = E_j$。这是因为在此情形下，$[Z(\mathfrak{w}), \mathfrak{n}] = 0$，因此对于所有 $c \in E_j$ 以及所有 $i \ge 1$，都有 $c^{(i)} \equiv 0$。

给定满足 $s(0) = 0$ 的连续映射 s：$\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$，定义 K：$\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \times \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$ 为

$$K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = s(\bar{g}_2) * (g_1^{-1} * g_2)^{-1} * (-s(\bar{g}_1)) * (g_1^{-1} * g_2).$$

注意，K 是良定义的，因为 s 取值于 $Z(\mathfrak{w})$。由于 $s(\bar{g}_2)$和$(g_1^{-1}*g_2)^{-1}$*$(-s(\bar{g}_1))$*$(g_1^{-1}*g_2)$都属于 $Z(\mathfrak{w})$，BCH公式蕴含 $K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = s(\bar{g}_2)+(g_1^{-1}*g_2)^{-1}*(-s(\bar{g}_1))*(g_1^{-1}*g_2)$。

Le引理 6.3. 记 $s = \sum_j s_j$，其中s_j：$\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_j(\mathfrak{w})$是 W_j 分量 s.

$_1$(1) 假设 α 不是整数。如果存在常数 $C > 0$，使得对于所有 $j \ge 1$ 以及所有 $\bar{g}_1$、$\bar{g}_2 \in \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$，都有 $|\pi_j(K(\bar{g}_1, \bar{g}_2))|^{\frac{1}{j}} \le_1 C d_{CC}^{\frac{\alpha}{}}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$，那么对于 $1 \le j < \alpha$ 有 $s_j \in E_j$，并且对于 $j > \alpha$ 有 $s_j \equiv 0$；

(2) 假设 α 是整数，j_0 是满足 $1 \le j_0 \le \alpha$ 的整数。如果存在常数 $C > 0_1$ $_1$，使得对于所有 $k \ge 0$ 以及所有 $\bar{g}_1$、$\bar{g}_2 \in \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$，都有 $|\pi_{k\alpha+j_0}(K(\bar{g}_1, \bar{g}_2))|^{\frac{1}{k\alpha+j_0}} \le C d_{CC}^{\alpha}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$，那么对于所有 $k \ge 1$，都有 $s_{j_0} \in \mathcal{H}_{j_0}$ 和 $s_{k\alpha+j_0} = s_{j_0}^{(k)}$。

证明。注意

$$K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = s(\bar{g}_2) - s(\bar{g}_1) + [-(g_1^{-1} * g_2), -s(\bar{g}_1)] + \sum_{k \ge 2} \frac{1}{k!} (ad(-(g_1^{-1} * g_2)))^k (-s(\bar{g}_1)).$$

$^-$ $^-$由于 s 的取值属于 $Z(\mathfrak{w})$，根据我们对 $[X, z]$ 与 $X \in \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$、$z \in Z(\mathfrak{w})$ 的括号定义，可以写成

$$K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = s(\bar{g}_2) - s(\bar{g}_1) + [-(\bar{g}_1^{-1} * \bar{g}_2), -s(\bar{g}_1)] + \sum_{k \ge 2} \frac{1}{k!} (ad(-(\bar{g}_1^{-1} * \bar{g}_2)))^k (-s(\bar{g}_1)).$$

(1) 假设 α 不是整数。由于在此情形下 $[Z(\mathfrak{w}), \mathfrak{n}] = 0$，我们有 $K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = s(\bar{g}_2) - s(\bar{g}_1)$。$_1$ $_1$该假设意味着对于所有 $j \ge 1$ 以及所有 $\bar{g}_1$、$\bar{g}_2 \in \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$，都有 $|s_j(\bar{g}_2) - s_j(\bar{g}_1)|^{\frac{1}{j}} \le C d_{CC}^{\alpha}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$。当 $1 \le j < \alpha$ 时，这意味着 $s_j \in E_j$。当 $j > \alpha$ 时，这意味着 s_j 是常值函数，因此 $s_j \equiv 0$，因为 $s_j(0) = 0$。

(2) 假设 α 是一个整数。由于 $[-(\bar{g}_1^{-1} * \bar{g}_2) - s(\bar{g}_1)] \in \oplus_{i \ge \alpha+1} W_i$，我们有 $\pi_j K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = s_j(\bar{g}_2) - s_j(\bar{g}_1)$，其中 $1 \le j \le \alpha$。该假设意味着 $s_{j_0} \in E_{j_0}$。令 $\bar{\gamma}$：$[a, b] \to \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 为一条以弧长参数化的可求长水平曲线。那么对于任意 $a \le t_1, t_2 \le b$，$d_{CC}(\bar{\gamma}(t_1), \bar{\gamma}(t_2)) \le |t_2 - t_1|$。写作 $\bar{\gamma}(t_1)^{-1} * \bar{\gamma}(t_2) = \sum_j \bar{p}_j$，其中 $\bar{p}_j = \bar{p}_j(t_1, t_2) \in \bar{V}_j$。由于 $\bar{\gamma}$ 是一条水平曲线，对于 $j \ge 2$（因为 $t_2 \to t_1$），我们有 $\bar{p}_j = o(t_2 - t_1)$。如果 $\bar{\gamma}$ 在 t_1 处有切向量，那么 $\frac{\bar{p}_1}{t_2 - t_1} \to \bar{\gamma}'(t_1)$，因为 $t_2 \to t_1$。

对于 $k \ge 1$，我们有

$$\pi_{k\alpha+j_0} K(\bar{\gamma}(t_1), \bar{\gamma}(t_2)) = s_{k\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(t_2)) - s_{k\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(t_1)) + [\bar{p}_1, s_{(k-1)\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(t_1))] + o(t_2 - t_1).$$

由于 $d_{CC}(\bar{\gamma}(t_1)\ \bar{\gamma}(t_2)) \le |t_2 - t_1|$，该假设意味着

$$\frac{\pi_{k\alpha+j_0} K(\bar{\gamma}(t_1), \bar{\gamma}(t_2))}{t_2 - t_1} \to 0$$

如 $t_2 \to t_1$。如果 $\bar{\gamma}$ 在 t_1处有切向量，则

$$\frac{d}{dt} s_{k\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(t))|_{t=t_1} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s_{k\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(t_2)) - s_{k\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(t_1))}{t_2 - t_1} = [s_{(k-1)\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(t_1)), \bar{\gamma}'(t_1)].$$

根据微积分基本定理，有

$$(6) \qquad s_{k\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(b)) - s_{k\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(a)) = \int_a^b [s_{(k-1)\alpha+j_0}(\bar{\gamma}(t)), \bar{\gamma}'(t)]dt = \int_{\bar{\gamma}} [s_{(k-1)\alpha+j_0}(x), \theta_H(x)].$$

特别地，$\int_{\bar{\gamma}} [s_{(k-1)\alpha+j_0}(x)\ \theta_H(x)] = 0$当 $\bar{\gamma}$是 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$中的闭水平曲线时，因此 $s_{(k-1)\alpha+j_0} \in P_{(k-1)\alpha+j_0}$。此外，(6)还表明 $s_{k\alpha+j_0} = s^{(1)}{}_{(k-1)\alpha+j_0}$。通过归纳法可知，对于所有 $k \ge 1$，$s_{j_0} \in \mathcal{H}_{j_0}$和 $s_{k\alpha+j_0} = s_{j_0}^{(k)}$。

□

命题 6.4。设 $s : \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$ 是满足 $s(0) = 0$ 的连续映射，且 $F : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}, F(g) = g * s(\bar{g})$ 是相关剪切映射。记 $s = \sum_j s_j$，其中 $s_j : \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_j(\mathfrak{w})$ 是 s的 W_j 分量。假设 F 是双Lipschitz。

(1) 若 α 不是整数，则对于 $1 \le j < \alpha$ 有 $s_j \in E_j$，对于 $j > \alpha$ 有 $s_j \equiv 0$；
(2) 若 α 是整数，则对于每个 $1 \le j \le \alpha$ 有 $s_j \in \mathcal{H}_j$，对于所有 $k \ge 1$ 和$1 \le j \le \alpha$有 $s_{k\alpha+j} = s_j^{(k)}$。

证明。存在某个 $L > 0$，使得对任意 g_1、$g_2 \in \mathfrak{n}$，$d(F(g_1)\ F(g_2)) \le L \cdot d(g_1, g_2)$。令 g_1、$g_2 \in \mathfrak{n}$。则 $F(g_1) = g_1 * s(\bar{g}_1)$且 $F(g_2) = g_2 * s(\bar{g}_2)$。由于

$$(F(g_1))^{-1} * F(g_2) = (s(\bar{g}_1))^{-1} * g_1^{-1} * g_2 * s(\bar{g}_2),$$

我们有 $K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = (g_1^{-1} * g_2)^{-1} * (F(g_1))^{-1} * F(g_2)$。由此可得

$$\begin{aligned} d(0, K(\bar{g}_1, \bar{g}_2)) &= d(g_1^{-1} * g_2, (F(g_1))^{-1} * F(g_2)) \\ &\le d(g_1^{-1} * g_2, 0) + d(0, (F(g_1)^{-1} * F(g_2))) \\ &= d(g_1, g_2) + d(F(g_1), F(g_2)) \le (L+1) d(g_1, g_2). \end{aligned}$$

因此，对于任意 $i \ge 1$，我们有

$$\begin{aligned} |\pi_i(K(\bar{g}_1, \bar{g}_2))|^{\frac{1}{i}} \le d(0, K(\bar{g}_1, \bar{g}_2)) &\le (L+1) \inf_{w_1, w_2 \in \mathfrak{w}} d(g_1 * w_1, g_2 * w_2) \\ &= (L+1) d(g_1 * \mathfrak{w}, g_2 * \mathfrak{w}) \\ &\le (L+1) C d_{CC}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

存在某个 $C > 0$，因为陪集之间的距离 $d(g_1 * \mathfrak{w},\ g_2 * \mathfrak{w})$ 与 $d_{CC}(\bar{g}_1,\ \bar{g}_2)^{\frac{1}{\alpha}}$相当。该命题现由引理6.3得证。

□

引理 6.5. 给定任意 Carnot 群 G，存在一个整数 n_0 和一个常数 $C > 0$，使其具有以下性质：对于任意 $g \in G$，存在一条从 0 到 g 的水平曲线 c，它至多由 n_0 条水平线段首尾相接而成，并且 c 的长度至多为 $C \cdot d(0, g)$。这里，G 中的一条水平线段是形如 $c : [0, a] \to G$ 的路径 $c(t) = g\exp(tX)$，其中 X 位于 G 的李代数的第一层中。

证明。 这由 [BLD], 中命题 2.26 的证明得出；另见 [AS04] （特别是定理 8.1 和命题 8.5）。

□

回想一下， $H_1 \subset V_\alpha$ 是与 W_α互补的线性子空间。

引理 6.6. 存在一个仅依赖于 N 的常数 $C > 0$ ，具有以下性质。对于任意 b_1、 $b_2 > 0$以及任意 $w \in Z(\mathfrak{w})$， 若 $h \in H_1$ 满足 $d(0, w) \leq b_1^{\alpha}$且 $|h| < b_2$， 则不等式$d(0, (-h) * w * h) \leq C \cdot (\max\{b_1, b_2\})^{\frac{1}{\alpha}}$成立。

证明。将 $w = w_1 + \cdots + w_m$写为 $w_j \in W_j$。 假设 $d(0, w) \leq b_1^{\alpha}$， 则对每个 j都有 $|w_j| \leq b_1^{\alpha}$。我们计算

$$(-h) * w * h = w + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k!} (ad(h))^k w.$$

由于 N 是幂零的， 上式是有限和。我们有

$$\pi_j((-h) * w * h) = w_j + \sum_{k \geq 1, j - k\alpha \geq 1} \frac{(-1)^k}{k!} (ad(h))^k w_{j-k\alpha}.$$

利用 $|[X, Y]| \leq C_0 \cdot |X| \cdot |Y|$， 得到（其中 $b = \max\{b_1, b_2\}$）

$$|\frac{(-1)^k}{k!} (ad(h))^k w_{j-k\alpha}| \leq \frac{C_0^k}{k!} |h|^k |w_{j-k\alpha}| \leq \frac{C_0^k}{k!} b_2^k b_1^{\frac{j-k\alpha}{\alpha}} \leq \frac{C_0^k}{k!} b^{\frac{j}{\alpha}}.$$

由此显然可知， 对于某个仅取决于 N 的 C， 有 $|\pi_j((-h) * w * h)| \leq C b^{\frac{j}{\alpha}}$， 引理得证。

□

命题 6.7. 对每个整数 $1 \leq j \leq \alpha$， 给定 $s_j \in \mathcal{H}_j$。
(1) 如果 α 不是整数， 则对 $j > \alpha$ 和 $s = \sum_j s_j$， 令 $s_j \equiv 0$；
(2) 如果 α 是整数， 则对所有 $k \geq 1$ 和 $s = \sum_j s_j$， 令 $s_{k\alpha + j} = s_j^{(k)}$。则与 s 相关联的剪切映射是双Lipschitz的。

证明。我们将证明， 与 s 相关联的剪切映射 F 是 Lipschitz 的。由于 F^{-1} 是与 $-s$ 相关联的剪切映射， 同样的论证表明 F^{-1} 也是 Lipschitz 的。

根据三角不等式，

$$\begin{aligned} d(F(g_1), F(g_2)) &= d(0, F(g_1)^{-1} * F(g_2)) \\ &= d((g_1^{-1} * g_2)^{-1}, (g_1^{-1} * g_2)^{-1} * F(g_1)^{-1} * F(g_2)) \\ &\leq d((g_1^{-1} * g_2)^{-1}, 0) + d(0, (g_1^{-1} * g_2)^{-1} * F(g_1)^{-1} * F(g_2)) \\ &= d(g_1, g_2) + d(0, K(\bar{g}_1, \bar{g}_2)). \end{aligned}$$

因此， 只需证明存在某个 $C > 0$ ， 使得

$$d(0, K(\bar{g}_1, \bar{g}_2)) \leq C \cdot d(g_1, g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in \mathfrak{n}. \tag{7}$$

（1）假设 α 不是整数。在这种情形下， 我们有 $K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = s(\bar{g}_2) - s(\bar{g}_1)$， 且（7）由该假设推出。

（2）假设 α 是整数。我们首先证明7在 $\bar{g}_1^{-1} * \bar{g}_2$ 属于 $\bar{V}_1$的情形下成立。因此，假设 $\bar{g}_1^{-1} * \bar{g}_2 = t\bar{h} \in \bar{V}_1$，其中 $|\bar{h}| = 1$ 且 $t > 0$。我们有

$$\begin{aligned} K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) &= s(\bar{g}_2) - s(\bar{g}_1) + [-t\bar{h}, -s(\bar{g}_1)] + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k!}(ad(-t\bar{h}))^k(-s(\bar{g}_1)) \\ &= s(\bar{g}_2) - s(\bar{g}_1) + t[\bar{h}, s(\bar{g}_1)] + \sum_{k\geq 2} \frac{(-1)^{k+1}t^k}{k!}(ad(\bar{h}))^k s(\bar{g}_1). \end{aligned}$$

由于在我们的情形下， $d(g_1, g_2) \geq d_{CC}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)^{\frac{1}{\alpha}} = t^{\frac{1}{\alpha}}$，只需证明存在某个常数 $C > 0$，使得对每个 $j \geq 1$，以下不等式成立：

$$|\pi_j K(\bar{g}_1, \bar{g}_2)|^{\frac{1}{j}} \leq C \cdot t^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{8}$$

当 $1 \leq j \leq \alpha$， $\pi_j K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = s_j(\bar{g}_2) - s_j(\bar{g}_1)$ 时，由此（8）在该情形下成立，因为根据假设$s_j \in E_j$。现在令 $k_0 \geq 1$，并假设存在某个常数 $C > 0$，使得对所有 $k < k_0$ 和所有 $1 \leq j \leq \alpha$， $|\pi_{k\alpha+j} K(\bar{g}_1, \bar{g}_2)|^{\frac{1}{k\alpha+j}} \leq C \cdot t^{\frac{1}{\alpha}}$成立。我们将证明，对于 $k = k_0$，也存在类似的不等式（常数不同）。我们有

$$\begin{aligned} &\pi_{k_0\alpha+j} K(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \\ &= s_{k_0\alpha+j}(\bar{g}_2) - s_{k_0\alpha+j}(\bar{g}_1) + t[\bar{h}, s_{(k_0-1)\alpha+j}(\bar{g}_1)] + \sum_{k=2}^{k_0} \frac{(-1)^{k+1}t^k}{k!}(ad(\bar{h}))^k(s_{(k_0-k)\alpha+j}(\bar{g}_1)). \end{aligned}$$

令 $\bar{\gamma}: [0, t] \to \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 是由 $\bar{\gamma}(t_1) = \bar{g}_1 * (t_1 h)$ 给出的水平曲线。对于所有t_1，我们有 $\bar{\gamma}'(t_1) = h$。根据 $s_{k\alpha+j}$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned} &s_{k_0\alpha+j}(\bar{g}_2) - s_{k_0\alpha+j}(\bar{g}_1) + t[\bar{h}, s_{(k_0-1)\alpha+j}(\bar{g}_1)] \\ &= \int_0^t [s_{(k_0-1)\alpha+j}(\bar{g}_1 * (t_1\bar{h})), \bar{h}]dt_1 - \int_0^t [s_{(k_0-1)\alpha+j}(\bar{g}_1), \bar{h}]dt_1 \\ &= \int_0^t [s_{(k_0-1)\alpha+j}(\bar{g}_1 * (t_1\bar{h})) - s_{(k_0-1)\alpha+j}(\bar{g}_1), \bar{h}]dt_1 \\ &= \int_0^t [\int_0^{t_1} [s_{(k_0-2)\alpha+j}(\bar{g}_1 * (t_2\bar{h})), \bar{h}]dt_2, \bar{h}]dt_1 \\ &= \int_0^t \int_0^{t_1} [[s_{(k_0-2)\alpha+j}(\bar{g}_1 * (t_2\bar{h})), \bar{h}], \bar{h}]dt_2 dt_1 \\ &= (-1)^2 \int_0^t \int_0^{t_1} (ad(\bar{h}))^2(s_{(k_0-2)\alpha+j}(\bar{g}_1 * (t_2\bar{h}))dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

另一方面，注意到

$$\frac{(-1)^{k+1}t^k}{k!}(ad(\bar{h}))^k(s_{(k_0-k)\alpha+j}(\bar{g}_1)) = -(-1)^k \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} (ad(\bar{h}))^k(s_{(k_0-k)\alpha+j}(\bar{g}_1))dt_k \cdots dt_1.$$

由归纳法可得

$$\begin{aligned} &K_{k_0\alpha+j}(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \\ &= (-1)^{k_0} \int_0^t \cdots \int_0^{t_{k_0-1}} (ad(\bar{h}))^{k_0}(s_j(\bar{g}_1 * t_{k_0}\bar{h}) - s_j(\bar{g}_1))dt_{k_0} \cdots dt_1. \end{aligned}$$

存在一个仅依赖于 $\mathfrak{n}$ 的常数 $C_1>0$，使得 $|[X,Y]|\le C_1|X|\cdot|Y|$ 对任意 X、$Y\in\mathfrak{n}$ 均成立。由于 s_j 在 $1\le j\le\alpha$ 上是 $\frac{j}{\alpha}$-Hölder 连续的，我们有

$$\begin{aligned}
|K_{k_0\alpha+j}(\bar g_1,\bar g_2)| &\le \int_0^t\cdots\int_0^{t_{k_0-1}} |(ad(\bar h))^{k_0}(s_j(\bar g_1 * t_{k_0}\bar h)-s_j(\bar g_1))|dt_{k_0}\cdots dt_1\\
&\le \int_0^t\cdots\int_0^{t_{k_0-1}} C_1^{k_0}|\bar h|^{k_0}|(s_j(\bar g_1 * t_{k_0}\bar h)-s_j(\bar g_1))|dt_{k_0}\cdots dt_1\\
&\le C_1^{k_0}\int_0^t\cdots\int_0^{t_{k_0-1}} Cd_{CC}(\bar g_1*(t_{k_0}\bar h),\bar g_1)^{\frac{j}{\alpha}}dt_{k_0}\cdots dt_1\\
&= C_1^{k_0}C\int_0^t\cdots\int_0^{t_{k_0-1}} t_{k_0}^{\frac{j}{\alpha}}dt_{k_0}\cdots dt_1\\
&= C_2 t^{\frac{k_0\alpha+j}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

因此，当 $\bar g_1^{-1}*\bar g_2\in\bar V_1$ 时，(8) 进而 (7) 成立。

现在考虑一般情形。设 g、$g'\in\mathfrak{n}$。由于 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 是 Carnot 群，根据引理 6.5，存在 $\bar g=\bar g_0$、$\bar g_1$、$\cdots$、$\bar g_k=\bar g'$，使得 $k\le n_0$、$\bar g_{i-1}^{-1}*\bar g_i\in\bar V_1$ 以及 $\sum_i d_{CC}(\bar g_{i-1},\bar g_i)\le Cd_{CC}(\bar g,\bar g')$，其中 $C>0$ 和 n_0 仅依赖于 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$。特别地，我们有 $d_{CC}(\bar g_{i-1},\bar g_i)\le Cd_{CC}(\bar g,\bar g')$。设 $g_0=g$。我们归纳定义 g_i，对于 $1\le i\le k$，使得 $d(g_i,g_{i-1})=d(g_i*\mathfrak{w},g_{i-1}*\mathfrak{w})$。存在一个常数 $C_4>0$，使得对于所有 x、$y\in\mathfrak{n}$，$\frac{1}{C_4}d_{CC}(\bar x,\bar y)^{\frac{1}{\alpha}}\le d(x*\mathfrak{w},y*\mathfrak{w})\le C_4d_{CC}(\bar x,\bar y)^{\frac{1}{\alpha}}$。我们有

$$\begin{aligned}
d(g,g_k)&\le\sum_{i=1}^k d(g_{i-1},g_i)=\sum_{i=1}^k d(g_{i-1}*\mathfrak{w},g_i*\mathfrak{w})\\
&\le\sum_{i=1}^k C_4d_{CC}(\bar g_{i-1},\bar g_i)^{\frac{1}{\alpha}}\le C_4n_0C^{\frac{1}{\alpha}}d_{CC}(\bar g,\bar g')^{\frac{1}{\alpha}}\\
&\le C_4^2n_0C^{\frac{1}{\alpha}}d(g*\mathfrak{w},g'*\mathfrak{w})\le C_4^2n_0C^{\frac{1}{\alpha}}d(g,g').
\end{aligned}$$

由三角不等式可得 $d(g_k,g')\le(1+C_4^2n_0C^{\frac{1}{\alpha}})d(g,g')$。现在由特殊情形可得

$$d(F(g),F(g_k))\le\sum_i d(F(g_{i-1}),F(g_i))\le\sum_i C_3d(g_{i-1},g_i)\le C_3C_4^2n_0C^{\frac{1}{\alpha}}d(g,g').$$

另一方面，容易看出，F 在 W 的陪集上的限制是等距变换，因此 $d(F(g_k)\ F(g'))=d(g_k,g')\le(1+C_4^2n_0C^{\frac{1}{\alpha}})d(g,g')$。最后，由三角不等式，$d(F(g)\ F(g'))\le d(F(g)\ F(g_k))+d(F(g_k)\ F(g'))\le(1+(1+C_3)C_4^2n_0C^{\frac{1}{\alpha}})d(g,g')$。

□

7. Eliminating s_j for $j<\alpha$

本节的目标是证明以下结果。

命题 7.1。设 (N,D) 是 Carnot-by-Carnot，满足 $\dim(W)\ge2$、$\dim(N/W)\ge2$，且 Γ 是 N的一个一致拟相似群。那么存在一个双Lipschitz映射 F_0，使得共轭群 $F_0\Gamma F_0^{-1}$中的每个元素都有相容表达式 $a*Bh*Aw*As(\bar h)$，其中对于每个 $1\le j<\alpha$，s 的 W_j分量 s_j 均为零。

我们将采用 [DyX16] 中的方法来证明命题 7.1。情形 $\dim(W)=1$ 和 $\dim(N/W)=1$ 将分别在第 9 节和第 10 节中讨论。

设 N 和 Γ 如命题 7.1 中所述。将 Γ 替换为一个双Lipschitz共轭后，不妨设 Γ 是一个纤维相似群（纤维相似映射和纤维相似群的定义见第2节）。更准确地说，应用定理 3.7（以及引理 5.1）后，我们可以设在 W 和 N/W 上分别存在 Carnot 度量 d_{CC} 和 d_{CC}，使得每个 $\gamma \in \Gamma$ 都诱导出一个从 $(N/W, d_{CC})$ 到自身的相似变换 $\bar{\gamma}$；并且存在 W 的一个分次自同构 A_γ，它同时是 (W, d_{CC}) 的一个相似变换，使得 $A_\gamma = \gamma_p|_W$ 对任意 $p \in N$ 均成立。

令 $\mathrm{Aut}_I(W, d_{CC})$ 表示 (W, d_{CC}) 的等距分次自同构群，$\mathrm{Aut}_C(W, d_{CC})$ 表示 W 的分次自同构群，其中的元素均可表示为 Carnot 膨胀与等距分次自同构的复合。于是 $\mathrm{Aut}_I(W, d_{CC})$ 是紧群，且 $\mathrm{Aut}_C(W, d_{CC}) \cong \mathrm{Aut}_I(W, d_{CC}) \times \mathbb{R}$ 是可和的。类似地，$\mathrm{Aut}_C(\mathfrak{n}/\mathfrak{w}, d_{CC})$ 是可和的，$(\mathfrak{n}/\mathfrak{w}, d_{CC})$ 的相似变换群 $\mathrm{Sim}(\mathfrak{n}/\mathfrak{w}, d_{CC}) = \mathbb{R}(\mathfrak{n}/\mathfrak{w}) \rtimes \mathrm{Aut}_C(\mathfrak{n}/\mathfrak{w}, d_{CC})$ 也是如此。记 $G_0 = \mathrm{Aut}_C(W, d_{CC}) \times \mathrm{Sim}(\mathfrak{n}/\mathfrak{w}, d_{CC})$，并定义映射 $\Psi\colon \Gamma \to G_0$，使得 $\Psi(\gamma) = (A_\gamma, \bar{\gamma})$。容易看出 Ψ 是一个同态。令 G 为 $\Psi(\Gamma)$ 在 G_0 中的闭包。注意到 G 是可和的，因为它是可和群 G_0 的闭子群。

设 $1 \le j < \alpha$ 和 $E_j = \{s\colon (\mathfrak{n}/\mathfrak{w}, \bar{d}_{CC}) \to Z_j(\mathfrak{w}) | s \text{ 是 } \frac{j}{\alpha} - \text{Hölder } s(0) = 0\}$。我们将定义 G 在 E_j 上的仿射作用，然后证明该仿射作用在 $\mathcal{H}_j \subset E_j$ 中具有一个不动点，最后利用这个不动点构造从 N 到 Γ 的双Lipschitz剪切映射，从而将 Γ 共轭到一个具有所需性质的群中。

7.1. E_j 上的仿射作用。我们首先在 E_j 上定义一个范数，然后定义 E_j 上的线性等距作用，最后定义该仿射作用的平移部分。

由于紧群 $\mathrm{Aut}_I(W, d_{CC})$ 保持 W_j 不变，因此在 W_j 上存在一个 $\mathrm{Aut}_I(W, d_{CC})$-不变内积 $\langle , \rangle_j$。令 $|\cdot|_j$ 为 W_j 上的相应范数。注意，关于该范数，E_j 是一个Banach空间

$$||s|| = \sup_{p \neq q} \frac{|s(p) - s(q)|_j}{(\bar{d}_{CC}(p, q))^{\frac{j}{\alpha}}}.$$

对于度量空间 X 的相似变换 $f\colon X \to X$，我们用 λ_f 表示 f 的相似常数：$d(f(x_1), f(x_2)) = \lambda_f d(x_1, x_2)$。设 $G_1 := \{(A, B) \in G_0 | \lambda_B = \lambda_A^\alpha\}$。我们先定义 G_1 在 E_j 上的作用。设 $c \in E_j$ 和 $(A, B) \in G_1$。我们将 $\pi_{(A,B)}c\colon \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_j(\mathfrak{w})$ 定义为如下函数：

$$(\pi_{(A,B)}c)(\bar{h}) = A^{-1}c(B(\bar{h})) - A^{-1}c(B(0)).$$

显然，$(\pi_{(A,B)}c)(0) = 0$，且 $\pi_{(A,B)}c$ 关于 c 是线性的。

引理 7.2. $\pi_{(A,B)}$ 通过线性等距变换定义了反群 G_1^*（G_1 的反群）在 E_j 上的作用。

证明。设 $A = \delta_{\lambda_A} \circ A'$，其中 δ_{λ_A} 是 Carnot 膨胀，且 $A' \in \mathrm{Aut}_I(W, d_{CC})$。对于 $w \in W_j$，我们有 $A(w) = \lambda_A^j A'(w)$，因此 $|A(w_1) - A(w_2)|_j = \lambda_A^j |w_1 - w_2|_j$ 对于 $w_1, w_2 \in W_j$。现在令

h_1、 $h_2 \in \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 和 $c \in E_j$。则

$$\begin{aligned}\frac{|(\pi_{(A,B)}c)(\bar{h}_1) - (\pi_{(A,B)}c)(\bar{h}_2)|_j}{\bar{d}_{CC}(\bar{h}_1,\bar{h}_2)^{\frac{j}{\alpha}}} &= \frac{|A^{-1}c(B(\bar{h}_1)) - A^{-1}c(B(\bar{h}_2))|_j}{\bar{d}_{CC}(\bar{h}_1,\bar{h}_2)^{\frac{j}{\alpha}}} \\ &= \frac{\lambda_A^{-j}|c(B(\bar{h}_1)) - c(B(\bar{h}_2))|_j}{\bar{d}_{CC}(\bar{h}_1,\bar{h}_2)^{\frac{j}{\alpha}}} \\ &= \frac{|c(B(\bar{h}_1)) - c(B(\bar{h}_2))|_j}{(\lambda_B\bar{d}_{CC}(\bar{h}_1,\bar{h}_2))^{\frac{j}{\alpha}}} \\ &= \frac{|c(B(\bar{h}_1)) - c(B(\bar{h}_2))|_j}{(\bar{d}_{CC}(B(\bar{h}_1),B(\bar{h}_2)))^{\frac{j}{\alpha}}}.\end{aligned}$$

从而证明了 $\pi_{(A,B)}c \in E_j$ 和 $||\pi_{(A,B)}c|| = ||c||$。我们已经注意到，$\pi_{(A,B)}c$ 关于 c是线性的。因此，映射 $E_j \to E_j$, $c \mapsto \pi_{(A,B)}c$ 是一个线性等距变换。
容易验证，对于任意 $(A_1,B_1),(A_2,B_2) \in G_1$，$\pi_{(A_2,B_2)(A_1,B_1)} = \pi_{(A_1,B_1)} \circ \pi_{(A_2,B_2)}$ 成立，因此 $\pi_{(A,B)}$ 定义了 G_1 在 E_j上的反群 G_1^* 的作用。

□

为了得到 G^* 在 E_j上的线性等距作用，我们将证明 $G \subset G_1$。

引理 7.3。公式 $\lambda_{\bar{\gamma}} = \lambda_{A_\gamma}^{\alpha}$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$成立。

证明。由于 d_{CC} 和 $d|_W$ （d 是 N上的一个固定的 D-齐次距离）都是 W上的齐次距离，因此存在一个常数 $L \geq 1$，使得对于所有 $w_1, w_2 \in W$， $d_{CC}(w_1,w_2)/L \leq d(w_1,w_2) \leq Ld_{CC}(w_1,w_2)$。类似地，由于 d（回顾一下， d是由 d诱导的 N/W上的距离，见第 3.5 节末尾）和 d_{CC}^{α}都是 N/W上的 D-齐次距离，因此存在一个常数 $L \geq 1$，使得对于任意 $x, y \in N/W$，1 1
$d_{CC}^{\alpha}(x,y)/L \leq d(x,y) \leq Ld_{CC}^{\alpha}(x,y)$。在必要时将 L和 L都替换为 $\max(L,L)$后，不妨设 $L = L$。

令 $\gamma \in \Gamma$。令 $w_1 \neq w_2 \in W$。由于 γ 是关于 d 的（Λ， C_γ）-拟相似变换，其中 $C_\gamma > 0$，我们有

$$\begin{aligned}\lambda_{A_\gamma}d_{CC}(w_1,w_2) &= d_{CC}(\gamma_p(w_1),\gamma_p(w_2)) \leq Ld(\gamma_p(w_1),\gamma_p(w_2)) \\ &= Ld(\gamma(pw_1),\gamma(pw_2)) \leq L\Lambda C_\gamma d(pw_1,pw_2) \\ &\leq L^2\Lambda C_\gamma d_{CC}(w_1,w_2),\end{aligned}$$

因此有 $\lambda_{A_\gamma} \leq L^2\Lambda C_\gamma$。同理，我们从 $\lambda_{A_\gamma} \geq \frac{C_\gamma}{L^2\Lambda}$ 得到

$$\begin{aligned}\lambda_{A_\gamma}d_{CC}(w_1,w_2) &= d_{CC}(\gamma_p(w_1),\gamma_p(w_2)) \geq \frac{1}{L}\cdot d(\gamma_p(w_1),\gamma_p(w_2)) \\ &= \frac{1}{L}\cdot d(\gamma(pw_1),\gamma(pw_2)) \geq \frac{C_\gamma}{L\Lambda}d(pw_1,pw_2) \\ &\geq \frac{C_\gamma}{L^2\Lambda}d_{CC}(w_1,w_2).\end{aligned}$$

选取 p、$q \in N$，使得 $pW \neq qW$，并且使 p、q 实现陪集 pW 与 qW 之间的距离。现在

$$\begin{aligned}(\lambda_{\bar{\gamma}}\bar{d}_{CC}(pW,qW))^{\frac{1}{\alpha}} &= \bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(\bar{\gamma}(pW),\bar{\gamma}(qW)) \leq L\bar{d}(\bar{\gamma}(pW),\bar{\gamma}(qW))\\ &= Ld(\gamma(p)W,\gamma(q)W) \leq Ld(\gamma(p),\gamma(q))\\ &\leq L\Lambda C_\gamma d(p,q) = L\Lambda C_\gamma \bar{d}(pW,qW)\\ &\leq L^2\Lambda C_\gamma \bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(pW,qW),\end{aligned}$$

[1]从而得到 $\lambda_{\bar{\gamma}}^{\frac{\alpha}{}} \leq L^2\Lambda C_\gamma$。类似地，选取 p、$q \in N$，使得 $pW \neq qW$ 和 $d(\gamma(p)\ \gamma(q))$ $=d(\gamma(p)W,\ \gamma(q)W)$，我们得到 $\lambda_{\bar{\gamma}}^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{C_\gamma}{L^2\Lambda}$。结合上述四个不等式，对于所有 $\gamma \in \Gamma$，我们得到 $\frac{1}{L^4\Lambda^2} \leq \frac{\lambda_{\bar{\gamma}}^{\frac{1}{\alpha}}}{\lambda_{A_\gamma}} \leq L^4\Lambda^2$。注意，对于任意整数 $n \geq 1$，都有 $\lambda_{A_\gamma{}^n} = \lambda_{A_\gamma}^n$ 和 $\lambda_{\bar{\gamma}^n} = \lambda_{\bar{\gamma}}^n$。将上述不等式应用于 γ^n，得到

$$\frac{1}{L^4\Lambda^2} \leq \left(\frac{\lambda_{\bar{\gamma}}^{\frac{1}{\alpha}}}{\lambda_{A_\gamma}}\right)^n \leq L^4\Lambda^2$$

对于所有 $n \geq 1$，因此我们必有 $\lambda_{\bar{\gamma}} = \lambda_{A_\gamma}^{\alpha}$。

□

引理 7.3 意味着 $\Psi(\Gamma) \subset G_{1}$。由于 G_1 是 G_0的闭子群，我们有 $G \subset G_{1}$。将 G^* 的线性等距作用限制到 G_1^* 上 E_j，我们得到 G^* 在E_j上的线性等距作用。为了在 E_j 上得到仿射作用，我们接下来定义平移部分。

定义映射 $b_j:\ \Gamma \to E_j$ 由 $b_j(\gamma) = s_{\gamma,\ j}$ 给出，其中 $s_{\gamma,\ j} = \pi_j \circ s_\gamma$ 且 s_γ 如相容¯表达式 $\gamma(h*w) = \gamma(0) * B_\gamma h * A_\gamma w * A_\gamma s_\gamma(h)$ 中所述，γ。回想一下，即使 γ 可能有多个相容表达式，对于 $j < \alpha$，$\pi_j \circ s_\gamma$ 也是唯一的。在引理 7.8 中，我们将证明 $s_{\gamma,\ j} \in \mathcal{H}_j$；特别地，$s_{\gamma,\ j} \in E_j$。

Lem命题 **7.4**。对于任意 γ_1、$\gamma_2 \in \Gamma$，等式 $b_j(\gamma_2\gamma_1) = b_j(\gamma_1) + \pi_{\Psi(\gamma_1)}b_j(\gamma_2)$ 成立。

证明。证明过程可能繁琐，但思路很简单：它源于计算 $\gamma_2\gamma_1(h)$ 的两种不同方法。首先注意，若 X、$Y \in \mathfrak{n}$和 $X \in \oplus_{\lambda_j \geq \alpha} V_{\lambda_j}$，则对于 $1 \leq j < \alpha$，有 $\pi_j(X*Y) = \pi_j(Y)$。我们将反复隐式地使用这一事实。另请回想，$s_{\gamma,\ j}(\bar{h}) = A_\gamma^{-1}\pi_j(\gamma(0)^{-1} * \gamma(h))$。

设 γ_1、$\gamma_2 \in \Gamma$ 和 $h \in H$。令 $\gamma_1(0) = h_1 * w_1$ 和 $\gamma_1(0) * B_{\gamma_1}h = h_2 * w_2$，其中 h_1、$h_2 \in H$ 和 w_1、$w_2 \in \mathfrak{w}$。则

$$w_1^{-1} * w_2 = [w_1^{-1} * (h_2^{-1} * h_1) * w_1] * B_{\gamma_1}h$$

由此可得 $w_1^{-1} * w_2 \in \oplus_{j \geq \alpha} W_j$。我们有 $(\gamma_2 \circ \gamma_1)(0) = \gamma_2(0) * B_{\gamma_2}h_1 * A_{\gamma_2}w_1 * A_{\gamma_2}s_{\gamma_2}(\bar{h}_1)$，并且

$$\begin{aligned}\gamma_2(\gamma_1(h)) &= \gamma_2(\gamma_1(0) * B_{\gamma_1}h * A_{\gamma_1}s_{\gamma_1}(\bar{h}))\\ &= \gamma_2(h_2 * w_2 * A_{\gamma_1}s_{\gamma_1}(\bar{h}))\\ &= \gamma_2(0) * B_{\gamma_2}h_2 * A_{\gamma_2}w_2 * A_{\gamma_2}A_{\gamma_1}s_{\gamma_1}(\bar{h}) * A_{\gamma_2}s_{\gamma_2}(\bar{h}_2).\end{aligned}$$

现在我们有

$$
\begin{aligned}
&s_{\gamma_2\gamma_1,j}(\bar{h})\\
&= A^{-1}_{\gamma_2\gamma_1}\pi_j(\gamma_2\gamma_1(0)^{-1} * (\gamma_2\gamma_1)(h))\\
&= A^{-1}_{\gamma_2\gamma_1}\pi_j\{A_{\gamma_2}(s_{\gamma_2}(\bar{h}_1))^{-1} * A_{\gamma_2}w_1^{-1} * (B_{\gamma_2}h_1)^{-1} * B_{\gamma_2}h_2 * A_{\gamma_2}w_2 * A_{\gamma_2}A_{\gamma_1}s_{\gamma_1}(\bar{h}) * A_{\gamma_2}s_{\gamma_2}(\bar{h}_2)\}\\
&= A^{-1}_{\gamma_2\gamma_1}\pi_j\{A_{\gamma_2}(s_{\gamma_2}(\bar{h}_1))^{-1} * A_{\gamma_2}w_1^{-1} * A_{\gamma_2}w_2 * A_{\gamma_2}A_{\gamma_1}s_{\gamma_1}(\bar{h}) * A_{\gamma_2}s_{\gamma_2}(\bar{h}_2)\}\\
&= A^{-1}_{\gamma_2\gamma_1}\pi_j\{A_{\gamma_2}(s_{\gamma_2}(\bar{h}_1))^{-1} * A_{\gamma_2}(w_1^{-1} * w_2) * A_{\gamma_2}A_{\gamma_1}s_{\gamma_1}(\bar{h}) * A_{\gamma_2}s_{\gamma_2}(\bar{h}_2)\}\\
&= A^{-1}_{\gamma_2\gamma_1}\pi_j\{A_{\gamma_2}(s_{\gamma_2}(\bar{h}_1))^{-1} * A_{\gamma_2}A_{\gamma_1}s_{\gamma_1}(\bar{h}) * A_{\gamma_2}s_{\gamma_2}(\bar{h}_2)\}\\
&= \pi_j\{A^{-1}_{\gamma_1}(s_{\gamma_2}(\bar{h}_1))^{-1} * s_{\gamma_1}(\bar{h}) * A^{-1}_{\gamma_1}s_{\gamma_2}(\bar{h}_2)\}.
\end{aligned}
$$

由于 s_γ 取值于 $Z(\mathfrak{w})$，由 BCH公式并注意到 $h_2 = \bar{\gamma}_1(h)$、 $h_1 = \bar{\gamma}_1(0)$，我们得到

$$s_{\gamma_2\gamma_1,j}(\bar{h}) = s_{\gamma_1,j}(\bar{h}) + A^{-1}_{\gamma_1}s_{\gamma_2,j}(\bar{h}_2) - A^{-1}_{\gamma_1}s_{\gamma_2,j}(\bar{h}_1) = s_{\gamma_1,j}(\bar{h}) + (\pi_{\Psi(\gamma_1)}s_{\gamma_2,j})(\bar{h}).$$

□

回顾一下，我们有两个映射 $\Psi\colon\ \Gamma \to G$ 和 $b_j\colon\ \Gamma \to E_j$。

引理 7.5. 设 $\{g_i\}$ 和 $\{\tilde{g}_i\}$ 是 Γ 中的两个序列，并且 $(A,B) \in G$ 满足 $\Psi(g_i) \to (A,B)$，以及 $\Psi(\tilde{g}_i) \to (A,B)$。若 s、 $\tilde{s} \in E_j$ 满足：当 $i \to \infty$ 时， $b_j(g_i) \to s$ 且 $b_j(\tilde{g}_i) \to \tilde{s}$ 逐点成立，则 $s = \tilde{s}$。

证明。 令 $\gamma_1 = \gamma^{-1}$ 和 $\gamma_2 = \gamma$ 代入引理 7.4，可得 $b_j(\gamma^{-1}) = -\pi_{\Psi(\gamma^{-1})}b_j(\gamma)$。类似地，若令 $\gamma_1 = g_i$ 和 $\gamma_2 = \tilde{g}_i^{-1}$，则可得

$$b_j(\tilde{g}_i^{-1}g_i) = b_j(g_i) + \pi_{\Psi(g_i)}b_j(\tilde{g}_i^{-1}) = b_j(g_i) + \pi_{\Psi(g_i)}(-\pi_{\Psi(\tilde{g}_i^{-1})}b_j(\tilde{g}_i)) = b_j(g_i) - \pi_{\Psi(\tilde{g}_i^{-1}g_i)}b_j(\tilde{g}_i).$$

该假设意味着 $\Psi(\tilde{g}_i^{-1}g_i) \to (\mathrm{Id},\mathrm{Id})$。另一方面，根据推论 7.10，存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $\gamma \in \Gamma$，$||b_j(\gamma)|| \le C$。由此可知， $b_j(\tilde{g}_i^{-1}g_i) \to s - \tilde{s}$逐点成立，因为 $i \to \infty$。现在只需证明：若 $\{\gamma_i\}$ 是 Γ 中的一个序列，且 $\Psi(\gamma_i) \to (\mathrm{Id},\mathrm{Id})$，并且对于某个 $s \in E_j$，$b_j(\gamma_i) \to s$ 逐点成立，则 $s \equiv 0$。

我们假设 $s \not\equiv 0$ 并将导出矛盾。存在某个 $h \in \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 使得 $s(h) \neq 0$。取某个 $m \ge 1$ 使得 $m \cdot |s_{(\bar{h})_2}|_j \ge C \cdot \bar{d}_{CC}(\bar{h},\ 0)^{\frac{j}{\alpha}}$. 注意 $\Psi(\gamma_i^k) \to (\mathrm{Id},\ \mathrm{Id})$，对 $1 \le k \le m$。另一方面，利用引理 7.4 进行简单的归纳可得

$$b_j(\gamma_i^m) = b_j(\gamma_i) + \pi_{\Psi(\gamma_i)}b_j(\gamma_i) + \cdots + \pi_{\Psi(\gamma_i^{m-1})}b_j(\gamma_i).$$

由于 $\Psi(\gamma_i^k) \to (\mathrm{Id},\mathrm{Id})$，且 $b_j(\gamma_i) \to s$逐点成立，因此，对于所有$0 \le k \le m-1$以及所有充分大的 i，都有$|\pi_{\Psi(\gamma_i^k)}b_j(\gamma_i)(\bar{h}) - s(\bar{h})|_j < |s_{(\bar{h})_2}|_j$。由三角不等式可得 $|b_j(\gamma_i^m)(h)$ $ms(\bar{h})| < m \cdot |s_{(\bar{h})_2}|_j$，进而有 $|b_j(\gamma_i^m)(\bar{h})|_j > m \cdot |s_{(\bar{h})_2}|_j > C \cdot \bar{d}_{CC}(\bar{h},0)$，这与对所有 $\gamma \in \Gamma$ 均有 $||b_j(\gamma)|| \le C$ 的事实矛盾。

□

引理 7.5 特别表明，只要 $\Psi(\gamma) = \Psi(\tilde{\gamma})$，就有 $b_j(\gamma) = b_j(\tilde{\gamma})$ 成立（取 $g_i = \gamma$ 和 $\tilde{g}_i = \tilde{\gamma}$ 即可）。由于对于所有 $\gamma \in \Gamma$， $b_j(\gamma)$ 都位于闭球 $B(0,C) \subset E_j$ 中，而 $B(0,C)$ 在逐点收敛拓扑下是紧的，故引理 7.5 表明：对于任意 $(A,B) \in G$ 以及满足 $\Psi(\gamma_i) \to (A,B)$ 的任意序列 $\{\gamma_i\}$，序列 $b_j(\gamma_i)$ 逐点收敛到某个 $s \in B(0,C)$，并且 s 与序列 $\{\gamma_i\}$ 的选取无关。我们将这个 s 记为 $b_j(A,B)$。由此可得

˜映射 $b_j:\ G \to E_j$ 是良定义且连续的，其中 E_j 配备了˜逐点收敛拓扑。该映射 b_j 是该仿射作用的平移部分。

˜为了证明映射 b_j 确实是某个仿射作用的平移部分，我们需要证明b_j 是与 G^*-模 E_j相关联的 1-余循环；也就是说，

$$\tilde{b}_j((A_2,B_2)(A_1,B_1)) = \tilde{b}_j(A_1,B_1) + \pi_{(A_1,B_1)}\tilde{b}_j(A_2,B_2)$$

˜对所有 $(A_1,B_1),(A_2,B_2) \in G$均成立。这由引理 7.4 以及 b_j的定义可得。相应的 G^* 在 E_j 上的仿射作用定义为

$$(A,B)\cdot c = \pi_{(A,B)}c + \tilde{b}_j(A,B),$$

˜其中 $c \in E_j$ 且 $(A,B) \in G$。由于 b_j 连续，很容易看出仿射作用$G^* \times E_j \to E_j$ 分别连续，其中 E_j 赋予逐点收敛拓扑。

7.2. $\mathcal{H}_j$中不动点的存在性。取定某个 $c \in \mathcal{H}_j \subset E_j$，令 $G^*\cdot c$ 为 G^*对 c 的仿射作用轨道。令 K 为 $G^*\cdot c$ 在 E_j 中的凸包相对于逐点收敛拓扑的闭包。为了利用 Day不动点定理在 $\mathcal{H}_j$中得到一个不动点，我们需要证明 K 是紧的且包含于 $\mathcal{H}_j$中。下面的引理对此很有用。

¯ ¯引理 7.6. 设 $Y \subset \mathcal{H}_j$关于范数 $||\cdot||$有界。则 $Y \subset \mathcal{H}_j$，其中 Y是 Y在 E_j 中逐点收敛拓扑下的闭包。

证明. 由于 Y在 $(E_j,||\cdot|)$ 中有界，存在常数 $C_0>0$，使得对于任意 $s\in Y$，都有 $||s|| \le C_0$。因此，对于任意 $i\ge 1$ 和任意紧子集 $M \subset \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$，存在常数 $C(C_0,M,i)>0$，使得对所有 $x\in M$和所有 $s\in Y$，均有 $|s^{(i)}(x)| \le C(C_0,M,i)$。设 $s_k \in Y$, $k=1,\cdots$和 $s\in E_j$满足：对于任意 $x\in\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$， $s_k(x)\to s(x)$。于是，由控制收敛定理可得，对于 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 中的任意水平曲线 γ，都有$\int_\gamma [s_k,\theta_H(x)] \to \int_\gamma [s,\theta_H(x)]$。这说明 $s^{(1)}$有定义且$s_k^{(1)} \to s^{(1)}$ 逐点成立。现在，利用归纳法可得 $s^{(i)}$ 对所有 i 均有定义，因此 $s\in\mathcal{H}_j$。

□

如果 α 不是整数，那么 $\mathcal{H}_j = E_j$，因此 $K\subset\mathcal{H}_j$ 自动成立。为证明 $K\subset\mathcal{H}_j$，我们可以假设 $\alpha\ge 2$ 是整数。我们首先证明 $G^*\cdot c\subset\mathcal{H}_j$。根据仿射作用的定义，我们需要证明对任意 $1\le j\le\alpha-1$:

(1) $\pi_{(A,B)}c\in\mathcal{H}_j$ 对任意 $(A,\ B)\in G$ 以及任意 $c\in\mathcal{H}_j$；见引理 7.7。˜(2) $b_j(A,\ B)\in\mathcal{H}_j$对任意 $(A,\ B)\in G$；见引理 7.8之前的段落。

引理 7.7。 $\pi_{(A,B)}c\in\mathcal{H}_j$ 对任意整数 $1\le j<\alpha$，$(A,B)\in G$ 以及任意 $c\in\mathcal{H}_j$。

证明。设 $(A,B)\in G$且 $c\in\mathcal{H}_j$。则存在一个序列 $\{\gamma_i\}$，其位于 Γ中，使得 $\Psi(\gamma_i)\to(A,B)$。注意到 $\pi_{\Psi(\gamma_i)}c\to\pi_{(A,B)}c$ 逐点成立。由于$||\pi_{\Psi(\gamma_i)}c|| = ||c||$，根据引理 7.6，要证明 $\pi_{(A,B)}c\in\mathcal{H}_j$只需证明对所有 $\gamma\in\Gamma$都有 $\pi_{\Psi(\gamma)}c\in\mathcal{H}_j$。为此，我们将证明存在一个双Lipschitz剪切映射 $f_2(g) = g*\tilde{s}(\bar{g})$，满足 $\tilde{s}_j = \pi_{\Psi(\gamma)}c$。该引理随后由命题 6.4 得证。
取定 $c\in\mathcal{H}_j$ 和 $\gamma\in\Gamma$。令 $s:\ \mathfrak{n}/\mathfrak{w}\to Z(\mathfrak{w})$ 由 $s=\sum_i s_i$ 给出，其中对于$1\le i\le\alpha$，$s_j = c$、$s_i = 0$；对于 $k\ge 1$ 和 $1\le i\le\alpha$，$i\ne j$ 和 $s_{k\alpha+i} = s_i^{(k)}$。根据命题 6.7，剪切映射 $f(g) = g*s(\bar{g})$ 是双Lipschitz的。我们将证明 $f_2 := L_{f_1(0)^{-1}}\circ f_1$，其中 $f_1 := \gamma^{-1}f\gamma$ 正是所需的双Lipschitz剪切映射。

注意，对于任意两个映射 F、G：$N \to N$ 以及任意 $p \in N$，都有 $(F \circ G)_p = F_{G(p)} \circ G_p$。显然， f_1 是 N 的一个双Lipschitz映射，并将 W 的陪集进行置换。由于 $f_p|_W = \mathrm{Id}$ 和 $\gamma_p|_W = A_\gamma$，可知 $(f_1)_p|_W = \mathrm{Id}$。另一方面，由于 f 在 N/W 上诱导恒等映射， f_1 也如此。因此，引理 5.4 的假设得到满足，并且 f_1 具有相容表达式 $f_1(h*w) = f_1(0) * h * w * \tilde{s}(h)$，其中某个映射 $\tilde{s}\colon \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$。由此可知， $f_2(h*w) = h*w*\tilde{s}(h)$ 是一个双 Lipschitz 剪切映射。剩下的工作是证明 $\tilde{s}_j = \pi_{\Psi(\gamma)}c$。注意 $\tilde{s}_j = \pi_j(f_1(0)^{-1} * f_1(h))$。

固定一个相容表达式 $\gamma(h*w) = \gamma(0) * B_\gamma h * A_\gamma w * A_\gamma s_\gamma(h)$。我们计算 $f_1(h)$：

$$\begin{aligned} f_1(h) = \gamma^{-1} f \gamma(h) &= \gamma^{-1} f(\gamma(0) * B_\gamma h * A_\gamma s_\gamma(\bar{h})) \\ &= \gamma^{-1}(\gamma(0) * B_\gamma h * A_\gamma s_\gamma(\bar{h}) * s(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h})) \\ &= h * A_\gamma^{-1} s(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h}), \end{aligned}$$

其中最后一个等式是由 γ 为双射这一事实以及

$$\gamma(h * \{A_\gamma^{-1} s(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h})\}) = \gamma(0) * B_\gamma h * s(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h}) * A_\gamma s_\gamma(\bar{h}).$$

特别地， $f_1(0) = A_\gamma^{-1} s(\gamma(0)\overline{)}$。现在， $f_2(h) = A_\gamma^{-1} s(\gamma\overline{(0))^{-1}} * h * A_\gamma^{-1} s(\gamma\overline{(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h})$，由此可见

$$s_{f_2,j}(\bar{h}) = A_\gamma^{-1} s_j(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h}) - A_\gamma^{-1} s_j(\overline{\gamma(0)}) = A_\gamma^{-1} c(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h}) - A_\gamma^{-1} c(\overline{\gamma(0)}) = (\pi_{\Psi(\gamma)} c)(\bar{h}).$$

□

设 $(A, B) \in G$。根据 b_j的定义，存在一个序列 $\{\gamma_i\}$，其属于 Γ，使得 $b_j(\gamma_i) \to b_j(A, B)$逐点成立。由于 $b_j(\gamma_i)$ 位于闭球 $B(0, C)$ 中（见推论 7.10），引理 7.6 蕴含$b_j(A, B) \in \mathcal{H}_j$，前提是对所有 $\gamma \in \Gamma$均有 $b_j(\gamma) \in \mathcal{H}_j$。根据以下引理的 (2)，这确实成立。

引理 7.8。设 $F\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 是一个纤维相似映射，且 $F(h*w) = F(0) * Bh * Aw * As(h)$ 是 F 的一个相容表达式。那么
(1) 对于 $1 \le j < \alpha$， $s_j \in E_j$，其中 $||s_j||$ 有一个仅依赖于 H 和 F 的双Lipschitz 常数的常数上界。

(2) 若 α 是整数，则对于任意 $1 \le j < \alpha$， $s_j \in \mathcal{H}_j$。
(3) 若 α 是整数，则 $s_\alpha \in E_\alpha$ 有一个仅依赖于 H、F 的双Lipschitz 常数以及映射 B 的常数上界。

注记 7.9。映射 F 可能有许多不同的相容表达式： B 和 s_α 都可能改变，因此即使 F 固定，它们的 Lipschitz 常数也可能任意大。

证明。我们将使用这样一个事实：存在一个仅依赖于 H 的常数 $L_1 \ge 1$，使得
$(1/L_1) \cdot d_{CC}^{\alpha}(0, h) \le d(0, h) \le L_1 \cdot d_{CC}^{\alpha}(0, h)$ 对任意 $h \in H$ 都成立，其中 d_{CC} 是 $\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 上的 Carnot 度量。由于 F 对某个 $L_2 \ge 1$ 是 L_2-双Lipschitz 的，对于任意 h_0、$h \in H$，我们有

$$d(0, F(h_0)^{-1} * F(h_0 * h)) = d(F(h_0), F(h_0 * h)) \le L_2 \cdot d(h_0, h_0 * h) = L_2 \cdot d(0, h) \le L_2 L_1 d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(0, \bar{h}).$$

存在一个依赖于 B 的常数 $L > 0$，使得对于任意 $h \in H$，我们都有

$$d(0, Bh) \le L \cdot d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(0, \bar{B}\bar{h}) = L \lambda_{\bar{B}}^{\frac{1}{\alpha}} \cdot d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(0, \bar{h}),$$

其中， $\lambda_{\bar{B}}$ 表示 B的相似常数。我们还可以得到

$$\begin{aligned} &d(0, (Bh)^{-1} * F(h_0)^{-1} * F(h_0 * h)) = d(Bh, F(h_0)^{-1} * F(h_0 * h)) \\ &\le d(Bh, 0) + d(0, F(h_0)^{-1} * F(h_0 * h)) \le (L \lambda_{\bar{B}}^{\frac{1}{\alpha}} + L_2 L_1) d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(0, \bar{h}). \end{aligned}$$

设 $F_0:\ \mathfrak{n}\to\mathfrak{n}$ 是由 $F_0(g)=g*s(\bar{g})$给出的剪切映射。

断言：第(a)部分 $\pi_j(F(h_0)^{-1}*F(h_0*h))=As_j(\overline{h_0}*\bar{h})-As_j(\overline{h_0})$ 对于 $1\le j<\alpha$成立；第(b)部分 $\pi_i((Bh)^{-1}*F(h_0)^{-1}*F(h_0*h))=A\pi_i(h^{-1}*F_0(h_0)^{-1}*F_0(h_0*h))$ 对任意不是 α 的整数倍的整数 i 成立，其中 $\pi_i:\mathfrak{n}\to V_i=W_i$ 是关于分解$\mathfrak{n}=\oplus V_\lambda$ 的投影。

(c) $\pi_\alpha((\overset{k}{Bh})^{-1}*F(h_0)^{-1}*F(h_0*h))=As_\alpha(\overline{h_0}*\bar{h})-As_\alpha(\overline{h_0})$.

我们首先假设该断言，并完成引理的证明。断言的第(a)部分对$1\le j<\alpha$意味着，

$$\begin{aligned}|s_j(\overline{h_0}*\bar{h})-s_j(\overline{h_0})|^{\frac{1}{j}}&\le L_2\cdot|\pi_j(F(h_0)^{-1}*F(h_0*h))|^{\frac{1}{j}}\\&\le L_2\cdot L_2L_1d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(0,\bar{h})\\&=L_2^2L_1d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(\overline{h_0},\overline{h_0}*\bar{h}),\end{aligned}$$

因此(1)成立。现在注意到 $h^{-1}*F_0(h_0)^{-1}*F_0(h_0*h)=K(\overline{h_0},\ \overline{h_0*h})$，其中 $K(\bar{g}_1,\ \bar{g}_2)$在引理6.3之前对 $g_1,\ g_2\in\mathfrak{n}$ 定义。因此，当 α 为整数时，断言的第(b)部分意味着

$$|\pi_{k\alpha+j}(K(\overline{h_0},\overline{h_0*h}))|^{\frac{1}{k\alpha+j}}\le L_2(L\lambda_{\bar{B}}^{\frac{1}{\alpha}}+L_2L_1)\cdot d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(0,\bar{h})\tag{9}$$

对所有 $k\ge0$ 以及所有 $1\le j<\alpha$。于是，由（9），引理 6.3 的假设得到满足，因此（2）成立。最后，由部分（c）可得（3）：

$$|s_\alpha(\overline{h_0}*\bar{h})-s_\alpha(\overline{h_0})|^{\frac{1}{\alpha}}\le L_2|\pi_\alpha((Bh)^{-1}*F(h_0)^{-1}*F(h_0*h))|^{\frac{1}{\alpha}}\le L_2(L\lambda_{\bar{B}}^{\frac{1}{\alpha}}+L_2L_1)d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(0,\bar{h}).$$

接下来证明该断言。设 $h_0*h=h_1*w_1$，其中 $h_1\in H$、 $w_1\in\oplus_iW_{i\alpha}$。对等式两边应用 π_α，得到 $\pi_\alpha(h_0)+\pi_\alpha(h)=\pi_\alpha(h_1)+\pi_\alpha(w_1)$。由于 $V_\alpha=W_\alpha\oplus H_1$ 是直和，我们得到 $\pi_\alpha(h_0)+\pi_\alpha(h)=\pi_\alpha(h_1)$ 以及 $\pi_\alpha(w_1)=0$; 因此 $\pi_\alpha(Bh_0)+\pi_\alpha(Bh)=\pi_\alpha(Bh_1)$，且 $w_1\in\oplus_{i\ge2}W_{i\alpha}$。注意 $h_1=h_0*h$。我们有 $F(h_0)=F(0)*Bh_0*As(\overline{h_0})$ 以及 $F(h_0*h)=F(h_1*w_1)=F(0)*Bh_1*Aw_1*As(\overline{h_0}*\bar{h})$。两次使用 $Bh*Aw*(Bh)^{-1}=A(h*w*h^{-1})$，得到:

$$\begin{aligned}&(Bh)^{-1}*(F(h_0))^{-1}*F(h_0*h)\\&=(Bh)^{-1}*A(-s(\overline{h_0}))*(Bh_0)^{-1}*Bh_1*Aw_1*As(\overline{h_0}*\bar{h})\\&=(Bh)^{-1}*(Bh_0)^{-1}*\{Bh_0*A(-s(\overline{h_0}))*(Bh_0)^{-1}\}*Bh_1*Aw_1*As(\overline{h_0}*\bar{h})\\&=(Bh)^{-1}*(Bh_0)^{-1}*A(h_0*(-s(\overline{h_0}))*h_0^{-1})*Bh_1*Aw_1*As(\overline{h_0}*\bar{h})\\&=(Bh)^{-1}*(Bh_0)^{-1}*Bh_1*\{(Bh_1)^{-1}*A(h_0*(-s(\overline{h_0}))*h_0^{-1})*Bh_1\}*Aw_1*As(\overline{h_0}*\bar{h})\\&=(Bh)^{-1}*(Bh_0)^{-1}*Bh_1*A(h_1^{-1}*h_0*(-s(\overline{h_0}))*h_0^{-1}*h_1)*Aw_1*As(\overline{h_0}*\bar{h})\\&=(Bh)^{-1}*(Bh_0)^{-1}*Bh_1*A(w_1*h^{-1}*(-s(\overline{h_0}))*h*w_1^{-1})*Aw_1*As(\overline{h_0}*\bar{h})\\&=(Bh)^{-1}*(Bh_0)^{-1}*Bh_1*Aw_1*A(h^{-1}*(-s(\overline{h_0}))*h)*As(\overline{h_0}*\bar{h}),\end{aligned}$$

其中，在第六个等式中我们使用了 $h_1*w_1=h_0*h$。我们先证明第 (c) 部分：由于 $\pi_\alpha(Bh_0)+\pi_\alpha(Bh)=\pi_\alpha(Bh_1)$ 和 $w_1\in\oplus_{i\ge2}W_{i\alpha}$，上述计算得到

$$\begin{aligned}\pi_\alpha((Bh)^{-1}*F(h_0)^{-1}*F(h_0*h))&=\pi_\alpha(A(h^{-1}*(-s(\overline{h_0}))*h)*As(\overline{h_0}*\bar{h}))\\&=As_\alpha(\overline{h_0}*\bar{h})-As_\alpha(\overline{h_0}).\end{aligned}$$

上述计算还给出 $(Bh)^{-1}*(F(h_0))^{-1}*F(h_0*h)=P*Az$，其中 $P=(Bh)^{-1}*(Bh_0)^{-1}*Bh_1*Aw_1$ 和 $z=s(\overline{h_0}*\bar{h})+h^{-1}*(-s(\overline{h_0}))*h$。由于 z 属于 $Z(\mathfrak{w})$，BCH

公式给出 $(Bh)^{-1} * (F(h_0))^{-1} * F(h_0 * h) = P + Az + Q$，其中 Q 是由 P 和 Az构成的迭代括号之和，并且 Az 在这些迭代括号中恰好各出现一次。注意，BCH公式还意味着 P 是由项 Bh、Bh_0、Bh_1、Aw_1构成的迭代括号之和。现在~~~

7.3. 消去s_j。

引理 7.12。设 $1 \le j < \alpha$。
假设 G^* <style id='4}>在 E_j 上的仿射作用具有不动点 $c \in \mathcal{H}_j$。令 $s:\ \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$ 为命题 *6.7* 所给出的映射，满足 $s_j = c$ 和 $s_i = 0$，其中 $1 \le i \le \alpha$、$i \ne j$ 使相应的剪切映射 $F_0(g) = g * s(\bar{g})$ 为双Lipschitz。于是，每个元素 $\tilde{\gamma} \in F_0 \Gamma F_0^{-1}$都有一个相容表达式 $\tilde{\gamma}(h*w) = \tilde{\gamma}(0) * B_\gamma h * A_\gamma w * A_\gamma \tilde{s}_\gamma(h)$，其中 $\tilde{s}_{\gamma,\ j} = 0$。

证明。对于 $\gamma \in \Gamma$，记 $\tilde{\gamma} = F_0 \circ \gamma \circ F_0^{-1}$。考虑 γ的一个相容表达式 $\gamma(h*w) = \gamma(0) * B_\gamma h *_- A_\gamma w * A_\gamma s_\gamma(h)$。由于 c 是不动点，我们对于所有$\gamma \in \Gamma$都有 $\pi_{\Psi(\gamma)} c + s_{\gamma,\ j} = c$。注意到 F_0和 F_0^{-1} 的表达式为：$F_0(h*w) = h*w*s(\bar{h})$，$F_0^{-1}(h*w) = h*w*(-s(\bar{h}))$。现在计算

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(h) = F_0 \circ \gamma(h * (-s(\bar{h}))) &= F_0(\gamma(0) * B_\gamma h * A_\gamma[s_\gamma(\bar{h}) * (-s(\bar{h}))]) \\ &= \gamma(0) * B_\gamma h * A_\gamma[s_\gamma(\bar{h}) * (-s(\bar{h}))] * s(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h}).\end{aligned}$$

特别地，$\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) * s(\gamma(0)\overline{)}$。现在

$$\begin{aligned}s_{\tilde{\gamma},j}(\bar{h}) &= A_\gamma^{-1} \pi_j(\tilde{\gamma}(0)^{-1} * \tilde{\gamma}(h)) \\ &= A_\gamma^{-1} \pi_j\{(-s(\overline{\gamma(0)})) * B_\gamma h * A_\gamma[s_\gamma(\bar{h}) * (-s(\bar{h}))] * s(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h})\} \\ &= A_\gamma^{-1} \pi_j\{(-s(\overline{\gamma(0)})) * A_\gamma[s_\gamma(\bar{h}) * (-s(\bar{h}))] * s(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h})\} \\ &= A_\gamma^{-1}\{-c(\overline{\gamma(0)}) + A_\gamma s_{\gamma,j}(\bar{h}) + A_\gamma(-c(\bar{h})) + c(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h})\} \\ &= s_{\gamma,j}(\bar{h}) - c(\bar{h}) + A_\gamma^{-1} c(\overline{\gamma(0)} * \bar{B}_\gamma \bar{h}) - A_\gamma^{-1} c(\overline{\gamma(0)}) \\ &= s_{\gamma,j}(\bar{h}) - c(\bar{h}) + (\pi_{\Psi(\gamma)} c)(\bar{h}) = 0.\end{aligned}$$

□

命题7.1 的证明至此完成。

8. Conformal structures in the V_α direction

我们继续证明定理 1.2。在第 7 节中，我们证明了经过共轭后可以去掉 $s_{\gamma,j}$ for$j < \alpha$。本节继续假设 $\dim(W) \ge 2, \dim(N/W) \ge 2$。我们首先证明，若 α 是一个整数，则经过共轭后，对任意 $\gamma \in \Gamma$，$s_{\gamma,\alpha} : \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\alpha(\mathfrak{w})$ 都是李群同态；随后在假设 $\dim(W) \ge 2, \dim(N/W) \ge 2$ 的条件下完成定理 1.2 的证明。这里我们利用指数映射，将单连通幂零李群与其李代数对应起来。

我们将仿照 Tukia 定理的证明，但最后一步有所不同。由于 Carnot-by-Carnot 群之间的双 Lipschitz映射一般不可微，我们无法直接使用微分。相反，我们考察沿 V_α 方向的可微性。对于每个双Lipschitz映射$F : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 以及每个 $p \in \mathfrak{n}$，我们考虑映射

$$F_{p,\alpha} := (\pi_\alpha \circ F_p)|_{V_\alpha} : V_\alpha \to V_\alpha,$$

在 $F_p = L_{F(p)^{-1}} \circ F \circ L_p$ 处的微分，其中 L_g 是由元素 g 给出的左平移，而 $\pi_\alpha : \mathfrak{n} \to V_\alpha$ 是关于分解 $\mathfrak{n} = \oplus_j V_{\lambda_j}$的投影。
在接下来的两个小节中，我们假设 α 是一个整数。

8.1. 的微分$F_{p,\ \alpha}$。 在本小节中，我们首先求出$F_{p,\ \alpha}$ 在 0 处的微分公式，然后证明该微分满足链式法则（引理 8.2）。

设 (N, D) 为 Carnot-by-Carnot，且 $F\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 是满足引理 5.4 的假设¯的双Lipschitz映射。则 F 有相容表达式 $F(h * w) = F(0) * Bh * Aw * As(h)$。记作$s = \sum_j s_j$，其中 $s_j\colon \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_j(\mathfrak{w})$。根据引理 7.8 s_j 对每个 $1 \le j \le \alpha$ 都是 $\frac{j}{\alpha}$-Hölder 的。

为简化计算，我们将在 $\mathfrak{n}$ 的一个适当商空间中进行。注意，$\oplus_{\lambda_j > \alpha} V_{\lambda_j}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的理想。记 $\bar{\mathfrak{n}}_\alpha = \mathfrak{n}/(\oplus_{\lambda_j > \alpha} V_{\lambda_j})$，并令 $P_\alpha\colon \mathfrak{n} \to \bar{\mathfrak{n}}_\alpha$ 为商同态。注意，若 $x \in \oplus_{\lambda_j \ge \alpha} V_{\lambda_j}$，则 $P_\alpha(x)$ 属于 $\bar{\mathfrak{n}}_\alpha$ 的中心。令 $h \in H$, $w \in \mathfrak{w}$。存在某个 $w' \in \mathfrak{w}$ 使得 $h + w = h * w'$。将 P_α 应用于 $h + w = h * w'$ 两边，并注意到 $P_\alpha(h)$ 属于 $\bar{\mathfrak{n}}_\alpha$ 的中心，可得 $P_\alpha(w) = P_\alpha(w')$。现在将 $p = h_0 * w_0$ 写为 $h_0 \in H$ 和 $\tilde{} \quad \tilde{} \quad \tilde{} \quad \tilde{} \quad \tilde{} w_0 \in \mathfrak{w}$，并令 $h_0 * h = h + \tilde{w} = h * \tilde{w}$，其中某个 $h \in H$ 和 $\tilde{w}, \tilde{w} \in \mathfrak{w}$。利用 BCH公式可知

$\tilde{} \quad \tilde{} \quad \tilde{} \tilde{w}, \tilde{w} \in \oplus_{j > \alpha} W_j$。将 P_α 应用于 $h_0 * h = h + \tilde{w}$ 两边，可得 $P_\alpha(h) = P_\alpha(h_0) + P_\alpha(h)$。由此可得 $P_\alpha(B\tilde{h}) = P_\alpha(Bh_0) + P_\alpha(Bh)$，因此 $P_\alpha((Bh_0)^{-1} * B\tilde{h}) = P_\alpha(Bh)$。

我们现在可以为 $F_{p,\ \alpha}$ 找到一个公式。回顾 $p = h_0 * w_0$。记作

$$p *(h + \ w) = h_0 * w_0 * h * w' = h_0 * h * (h^{-1} * w_0 * h) * w' = \tilde{h} * \tilde{\tilde{w}} * (h^{-1} * w_0 * h) * w'$$

So

$$F(p) = F(0) * Bh_0 * Aw_0 * As(\overline{h_0})$$

and

$$F(p * (h + w)) = F(0) * B\tilde{h} * A\tilde{\tilde{w}} * A(h^{-1} * w_0 * h) * Aw' * As(\overline{h_0} * \bar{h}).$$

因此（见显示公式后的解释）

$$\begin{aligned}
& P_\alpha(L_{F(p)^{-1}} \circ F \circ L_p(h + w)) \\
= \ & P_\alpha(L_{F(p)^{-1}}(F(0) * B\tilde{h} * A\tilde{\tilde{w}} * A(h^{-1} * w_0 * h) * Aw' * As(\overline{h_0} * \bar{h}))) \\
= \ & P_\alpha(As(\overline{h_0})^{-1} * Aw_0^{-1} * (Bh_0)^{-1} * B\tilde{h} * A\tilde{\tilde{w}} * Aw_0 * Aw * As(\overline{h_0} * \bar{h})) \\
= \ & P_\alpha(As(\overline{h_0})^{-1} * Aw_0^{-1} * (Bh_0)^{-1} * B\tilde{h} * Aw_0 * Aw * As(\overline{h_0} * \bar{h})) \\
= \ & P_\alpha(As(\overline{h_0})^{-1} * (Bh_0)^{-1} * B\tilde{h} * Aw * As(\overline{h_0} * \bar{h})) \\
= \ & P_\alpha(As(\overline{h_0})^{-1} * Bh * Aw * As(\overline{h_0} * \bar{h})) \\
= \ & P_\alpha(Bh + Aw + As(\overline{h_0} * \bar{h}) - As(\overline{h_0})).
\end{aligned}$$

对于第二个等式，我们使用了 $P_\alpha(h^{-1} * w_0 * h) = P_\alpha(w_0)$（因为 $P_\alpha(h)$ 位于 $\bar{\mathfrak{n}}_\alpha$ 的中心），以及 $P_\alpha(w') = P_\alpha(w)$。对于第三个等式，我们使用了 $P_\alpha(\tilde{\tilde{w}}) = 0$（因为 $\tilde{\tilde{w}} \in \oplus_{j > \alpha} W_j$）。对于第四个等式，我们使用了 $P_\alpha(Aw_0^{-1} * Bh_0^{-1} * B\tilde{h} * Aw_0) = P_\alpha(Bh_0^{-1} * B\tilde{h})$（因为 $P_\alpha(Bh_0^{-1} * B\tilde{h})$ 位于 $\bar{\mathfrak{n}}_\alpha$ 的中心）。对于第五个等式，我们使用了 $P_\alpha((Bh_0)^{-1} * B\tilde{h}) = P_\alpha(Bh)$。对于最后一个等式，我们使用了这样一个事实：$P_\alpha(Bh)$ 位于 $\bar{\mathfrak{n}}_\alpha$ 的中心，并且 Aw、$As(\overline{h_0} * h)$ 和 $As(\overline{h_0})$ 两两交换（因为 s 取值于 $Z(\mathfrak{w})$）。

对上述公式两边应用 π_α 后，我们得到

$$\pi_\alpha \circ F_p(h + w) = B\pi_\alpha(h) + A\pi_\alpha(w) + As_\alpha(\overline{h_0} * \bar{h}) - As_\alpha(\overline{h_0}). \tag{10}$$

该计算将用于引理8.1 和8.2的证明中。当 $h \in H_1$ 和 $w \in W_\alpha$ 时，我们有 $\pi_\alpha(h) = h$ 和 $\pi_\alpha(w) = w$，因此 $F_{p,\ \alpha}\colon V_\alpha \to V_\alpha$ 由公式给出

$$F_{p,\alpha}(h + w) = Bh + Aw + As_\alpha(\overline{h_0} * \bar{h}) - As_\alpha(\overline{h_0}).$$

引理 8.1。设 $\psi(F)\colon \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to V_\alpha$ 是由 $\psi(F)(h) = Bh_1 + As_\alpha(h)$ 给出的映射，其中 h_1 是 $h \in H$ 的 H_1 分量。那么 $\psi(F)$ 是 Lipschitz 的，其 Lipschitz 常数的上界是一个仅依赖于 H 和 F 的双 Lipschitz 常数的常数。

证明。 在公式 $w = 0$ （10）中设

$$\pi_\alpha(F(p)^{-1} * F(p * h)) = Bh_1 + As_\alpha(\overline{h_0} * \bar{h}) - As_\alpha(\overline{h_0}) = \psi(F)(\bar{h}_0 * \bar{h}) - \psi(F)(\bar{h}_0)$$

由于 F 对某个 $L \geq 1$ 是 L-双Lipschitz的，我们有

$|\psi(F)(\bar{h}_0 * \bar{h}) - \psi(F)(\bar{h}_0)|^{\frac{1}{\alpha}} \leq d(0, F(p)^{-1} * F(p * h)) = d(F(p), F(p * h)) \leq L\, d(p, p * h) = L\, d(0, h)$。

另一方面，由于 $\pi|_H\colon H \to \bar{\mathfrak{n}}$ 是线性双射， H 在自同构 e^{tD} 下保持不变（D 在每个 V_{λ_j} 上按欧氏膨胀作用），并且 $(\pi|_H) \circ (e^{tD}|_H) = e^{t\bar{D}} \circ (\pi|_H)$，存在一个常数 $1 \leq L_0 \geq 1$，它取决于 H，但与双Lipschitz映射 F 无关，使得对于任意 $h \in H$，$(1/L_0) d_{CC}^{\alpha}(0, h) \leq d(0, h) \leq L_0 d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(0, \bar{h})$。因此，

$|\psi(F)(\bar{h}_0 * \bar{h}) - \psi(F)(\bar{h}_0)|^{\frac{1}{\alpha}} \leq L L_0 d_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(0, \bar{h})$。

□

现在我们可以尝试计算原点 0 处的微分 $dF_{p,\,\alpha}(0)$ of $F_{p,\,\alpha}$：

$$\begin{aligned} dF_{p,\alpha}(0)(h + w) &= \lim_{t \to -\infty} \frac{F_{p,\alpha}(e^{\alpha t}(h + w))}{e^{\alpha t}} \\ &= \lim_{t \to -\infty} \frac{Be^{\alpha t}h + Ae^{\alpha t}w + As_\alpha(\overline{h_0} * e^{\alpha t}\bar{h}) - As_\alpha(\overline{h_0})}{e^{\alpha t}} \\ &= Bh + Aw + A \lim_{t \to -\infty} \frac{s_\alpha(\overline{h_0} * e^{t\bar{D}}\bar{h}) - s_\alpha(\overline{h_0})}{e^{\alpha t}}. \end{aligned}$$

上文使用了 $D|_{\bar{V}_1} = \alpha \cdot \mathrm{Id}_{\bar{V}_1}$ 这一事实。注意，在点 $\overline{h_0}$ 处，如果 Lipschitz映射 $s_\alpha\colon \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\alpha$ (w) Pansu可微，则有 $\lim_{t \to -\infty} {}^{s_\alpha\,(\overline{h_0} * e^{t\bar{D}}\bar{h})\, - s_\alpha\,(\overline{h_0})}_{e^{\alpha t}} = Ds_\alpha(\overline{h_0})(\bar{h})$，其中 $Ds_\alpha(\overline{h_0})$：$\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\alpha(\mathfrak{w})$ 是 s_α 在 $\overline{h_0}$ 处的 Pansu微分。回顾一下，Carnot 群之间的 Lipschitz映射 几乎处处 Pansu可微，参见 [P89]。由于 s_α 在几乎处处的 $\overline{h_0} \in \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 处 Pansu可微，我们看到，在几乎处处的 $p = h_0 * w_0 \in \mathfrak{n}$ 处，映射 $F_{p,\,\alpha}\colon V_\alpha \to V_\alpha$ 在原点可微，其微分 $dF_{p,\,\alpha}(0)$ 为:

$$dF_{p,\alpha}(0)(h + w) = Bh + Aw + ADs_\alpha(\overline{h_0})(\bar{h}). \tag{11}$$

我们将 $D_\alpha F(p)$ 记作 $= dF_{p,\,\alpha}(0)$。

微分 $D_\alpha F(p)$ 应被视为 Pansu微分在第一层上的限制的对应物，尽管我们的群不是 Carnot 群。它满足链式法则。

引理 8.2. 设 F， $F\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 是满足引理 *5.4* 的假设的双Lipschitz映射。那么

$D_\alpha(F \circ F)(p) = D_\alpha F(F(p)) \circ D_\alpha F(p)$ 对几乎处处的 $p \in \mathfrak{n}$成立。

证明。设 $p \in \mathfrak{n}$是一个点，使得 $D_\alpha(F \circ F)(p)$、 $D_\alpha F(F(p))$ 和 $D_\alpha F(p)$ 均存在。我们需要证明

$$D_\alpha(F \circ \tilde{F})(p)(X) = D_\alpha F(\tilde{F}(p)) \circ D_\alpha \tilde{F}(p)(X), \quad \forall X \in V_\alpha. \tag{12}$$

由于 $V_\alpha = W_\alpha \oplus H_1$，只需对 $X \in W_\alpha$ 和 $X \in H_1$ 证明 (12)。

映射 F和 F具有相容表达式 $F(h * w) = F(0) * Bh * Aw * As(h)$， $F(h * w) = F(0) * Bh * Aw * A\tilde{s}(h)$。令 $X = w \in W_\alpha$。由（11）， $D_\alpha F(p)(w) = Aw$。因此， $D_\alpha F(F(p)) \circ D_\alpha F(p)(w) = D_\alpha F(F(p))(Aw) = A(Aw)$。另一方面， $D_\alpha(F \circ F)(p)(w) = AA(w)$，正如

˜ ˜的陪集 W 映射 $F\circ F$ 按 AA作用。因此（12）对 $X\in W_\alpha$成立。接下来考虑情形$X=h\in H_1$。

˜考虑路径 $\tilde{c}(t)=L_{\tilde{F}(p)_{-1}}\circ F(p*(th))$ 和 $c(t)=L_{(F\circ\tilde{F}(p))^{-1}}\circ F\circ L_{\tilde{F}(p)}(\tilde{c}(t))$，并设 $\tilde{c}_\alpha(t)=$ ˜ ˜ ˜$\pi_\alpha(\tilde{c}(t))$， $c_\alpha(t)=\pi_\alpha(c(t))$。由于 $D_\alpha F(p)$ 和 $D_\alpha(F\circ F)(p)$ 存在，我们有 $\tilde{c}'_\alpha(0)=D_\alpha F(p)(h)$ 以及$c'_\alpha(0)=D_\alpha(F\circ F)(p)(h)$。

写成 $\tilde{c}(t)=h(t)+w(t)$，其中 $h(t)\in H$ 和 $w(t)\in\mathfrak{w}$。于是

$$D_\alpha\tilde{F}(p)(h)=\tilde{c}'_\alpha(0)=\lim_{t\to0}\frac{\pi_\alpha h(t)}{t}+\lim_{t\to0}\frac{\pi_\alpha w(t)}{t}.$$

令 $h_1=\lim_{t\to0}\frac{\pi_\alpha h_{(t)}}{t}\in H_1$ 以及 $w_1=\lim_{t\to0}\frac{\pi_\alpha w_{(t)}}{t}\in W_\alpha$。于是 $D_\alpha\tilde{F}(p)(h)=h_1+w_1$.

˜ ˜ ˜我们还将 $F(p)=h_0*\tilde{w}_0$ 记作，其中 $h_0\in H$ 和 $\tilde{w}_0\in\mathfrak{w}$。我们有

$$D_\alpha F(\tilde{F}(p))(D_\alpha\tilde{F}(p)(h))=D_\alpha F(\tilde{F}(p))(h_1+w_1)=Bh_1+Aw_1+ADs_\alpha(\overline{\tilde{h}_0})(\overline{h_1}).$$

由（10），

$$c_\alpha(t)=\pi_\alpha\circ L_{(F\circ\tilde{F}(p))^{-1}}\circ F\circ L_{\tilde{F}(p)}(\tilde{c}(t))=B\pi_\alpha h(t)+A\pi_\alpha w(t)+As_\alpha(\overline{\tilde{h}_0}*\overline{h(t)})-As_\alpha(\overline{\tilde{h}_0}).$$

因此

$$\begin{aligned}D_\alpha(F\circ\tilde{F})(p)(h)=c'_\alpha(0)&=B\lim_{t\to0}\frac{\pi_\alpha h(t)}{t}+A\lim_{t\to0}\frac{\pi_\alpha w(t)}{t}+A\lim_{t\to0}\frac{s_\alpha(\overline{\tilde{h}_0}*\overline{h(t)})-As_\alpha(\overline{\tilde{h}_0})}{t}\\&=Bh_1+Aw_1+A\lim_{t\to0}\frac{s_\alpha(\overline{\tilde{h}_0}*\overline{h(t)})-s_\alpha(\overline{\tilde{h}_0})}{t}.\end{aligned}$$

现在只需证明

$$\lim_{t\to0}\frac{s_\alpha(\overline{\tilde{h}_0}*\overline{h(t)})-s_\alpha(\overline{\tilde{h}_0})}{t}=Ds_\alpha(\overline{\tilde{h}_0})(\overline{h_1}).$$

˜ ˜ ˜由于 $\pi\circ F(x)=F(0)*B(\bar{x})$，我们得到

$$\overline{h(t)}=\pi(\tilde{c}(t))=((\pi\circ\tilde{F})(p))^{-1}*(\pi\circ\tilde{F})(p*th)=\bar{\tilde{B}}(\bar{p})^{-1}*\bar{\tilde{B}}(\bar{p}*t\bar{h})=\bar{\tilde{B}}(t\bar{h})=t\bar{\tilde{B}}(\bar{h}).$$

因此

$$\lim_{t\to0}\frac{s_\alpha(\overline{\tilde{h}_0}*\overline{h(t)})-s_\alpha(\overline{\tilde{h}_0})}{t}=\lim_{t\to0}\frac{s_\alpha(\overline{\tilde{h}_0}*t\bar{\tilde{B}}(\bar{h}))-s_\alpha(\overline{\tilde{h}_0})}{t}=Ds_\alpha(\overline{\tilde{h}_0})(\bar{\tilde{B}}(\bar{h})).$$

˜ ˜ ˜

$(\mathfrak{w}, d_{CC})$ 的一个等距变换，而 $B'_\gamma = e^{-t_\gamma D} \circ B_\gamma$ 使得 $\bar{B}'_\gamma$ 是 $(\mathfrak{n}/\mathfrak{w}, d_{CC})$ 的一个等距变换。根据 $D_\alpha F(p)$ 的公式，我们有 $D_\alpha(\gamma')(p)$ 是 $D_\alpha(\gamma)(p)$ 与一个标准欧氏膨胀的复合：$D_\alpha(\gamma')(p)(h+w) = e^{-t_\gamma \alpha} D_\alpha \gamma(p)(h+w)$，其中 $h \in H_1, w \in W_\alpha$。因此，只需证明存在一个常数 $C \geq 1$，使得对于每个 $\gamma \in \Gamma$，微分 $D_\alpha \gamma'(p)$ 对几乎处处的 $p \in N$ 都是 C-拟共形的。

我们在 V_α 上固定一个内积，使得 H_1 与 W_α 彼此正交。注意到 $\bar{}$ 等式 $D_\alpha \gamma'(p)(h+w) = A'_\gamma w + D\psi(\gamma')(\bar{p})(h)$ 成立，其中 $\psi(F)$ 已在引理 8.1 中定义。由于 A'_γ 是一个等距变换，且 $\psi(\gamma')$ 是 Lipschitz 的，其 Lipschitz 常数上界仅取决于 H 和 γ' 的双 Lipschitz 常数，因此我们看到，存在一个常数 $C_1 > 0$，使得对于每个 $\gamma \in \Gamma$，线性映射 $D_\alpha \gamma'(p) : V_\alpha \to V_\alpha$ 的范数对几乎处处的 $p \in N$ 均有上界 C_1。特别地，对 γ^{-1} 也成立。将引理 8.2 应用于复合映射 $\gamma \circ \gamma^{-1} = \mathrm{Id}$，可知 $D_\alpha \gamma'(p)$ 是 C_1-双Lipschitz 的，因此 C_1^2 也是拟共形的。

□

8.2. 方向上的可测共形结构 V_α 方向。本小节将证明，经过共轭后，$s_{\gamma,\ \alpha} :\ \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\alpha(\mathfrak{w})$ 对每个 $\gamma \in \Gamma$都是李群同态。见命题 8.6。我们将修改 Tukia 定理的证明 [T86], 另见 [Dy10]，以得到叶层版本。

在 V_α 上固定一个内积，并取相对于此内积的 V_α 的一组正交归一基。记 $n_\alpha = \dim(V_\alpha)$。于是，我们可以将 V_α 上的线性变换与一个 $n_\alpha \times n_\alpha$ 矩阵对应起来。记 $SL(V_\alpha)$（特殊线性群）为由 V_α 上矩阵行列式等于 1 的线性变换构成的群，而 $SO(V_\alpha) \subset SL(V_\alpha)$ 是由保持该内积的线性变换构成的子群。令 $X = SL(V_\alpha)/SO(V_\alpha)$。回忆一下，$X$ 是非紧型对称空间（见 [Hel78] 第 518 页的表 V），因此其截面曲率非正。我们用 ρ 表示 X 上的距离。

N 在 V_α 方向上的可测共形结构是一个本质有界的可测映射

$$\mu : U \to X$$

定义在满测度子集 $U \subset N$上。这只是在 V_α方向上分配内积（相差一个标量倍数）的一种可测方式。为简化表述，我们将省略“在 V_α方向上”，而只称其为“可测共形结构”。

设 μ 是 N 上的一个可测共形结构，且 $F :\ N \to N$ 是一个纤维相似映射。拉回可测共形结构$F^*\mu$ 定义如下:

$(F^*\mu)(p) = (D_\alpha F(p))[\mu(F(p))] := (\det D_\alpha F(p))^{-\frac{2}{\text{维数}V_\alpha}} (D_\alpha F(p))^T \mu(F(p)) D_\alpha F(p)$，几乎处处 $p \in N$.

这类似于在微分同胚下对黎曼度量的拉回。这里我们使用了 $D_\alpha F$（p）几乎处处存在这一事实，参见第 8.1节。

推论 8.4. $(\gamma_2\gamma_1)^*\mu = \gamma_1^*(\gamma_2^*\mu)$ 对所有 γ_1、$\gamma_2 \in \Gamma$ 均成立。

证明。由链式法则 $D_\alpha(\gamma_2\gamma_1)(p) = D_\alpha\gamma_2(\gamma_1(p)) \circ D_\alpha\gamma_1(p)$ 立即可得。

□

纤维相似映射 F 称为关于可测共形结构 μ共形的 $F^*\mu = \mu$。Tukia 的论证结合推论8.4 和引理8.3 从而得到 Γ 具有不变可测共形结构；也就是说，存在一个可测共形结构 μ 在N 上，使得每个 $\gamma \in \Gamma$ 关于 μ都是共形的。我们可以假设 Γ 是可数的：令 Γ_0 为

一个 Γ 的可数子群，该子群在 N的紧子集上一致收敛拓扑下稠密于 Γ ；如果 Γ_0可以共轭到（N，d）的相似变换群中，其中的距离 d是某个 D-齐次距离，那么同一个映射也会将 Γ 共轭到（N， d）的相似变换群中，因为相似变换的极限仍是相似变换。

接下来我们回顾径向极限点的概念。令 $S = N \rtimes_D \mathbb{R}$ 为与 (N, D) 相关联的 Heintze 群，并令 $\mathcal{H}$：$S \to \mathbb{R}$为由 $\mathcal{H}(x,t) = t$给出的高度函数。令 $\mathcal{P}(N) = \{(\xi_1,\xi_2) \in N \times N | \xi_1 \neq \xi_2\}$，其中我们将 $N = \partial S \backslash \{\infty\}$视为。令 χ：$\mathcal{P}(N) \to S$为这样一个映射：它将每一对 $(\xi_1,\xi_2) \in \mathcal{P}(N)$ 映射到测地线 $\xi_1\xi_2$ 上的最高点；也就是说， $\mathcal{H}(\chi(\xi_1,\xi_2)) = \max\{\mathcal{H}(p) | p \in \xi_1\xi_2\}$。从某种意义上说， $\chi(P)$ 是三元组 (∞, ξ_1, ξ_2) 的一个中心：它是连接 ∞ 与 ξ_1 以及 ξ_2 的两条测地线彼此分离的位置。我们注意到，对于任意紧 $C \subset S$，集合 $\chi^{-1}(C)$ 在 $\mathcal{P}(N)$ 中是紧的。

群 Γ 在 $\mathcal{P}(N)$ 上按对角方式作用： $g(\xi_1,\xi_2) = (g(\xi_1)\ g(\xi_2))$。

定义 8.5。如果存在元素 $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的序列 Γ，并满足以下性质，则称点 $\xi \in N$ 是 Γ 的径向极限点：对于任意一对 $P = (\xi_1,\xi_2) \in \mathcal{P}(N)$，以及任意一条与 ξ 渐近的完备测地线 σ ，都存在常数 $C > 0$ ，使得 $\chi(h_i(P)) \to \xi$ ，并且 $d(\chi(h_i(P))\ \sigma) \leq C$。

命题 8.6。存在一个从 F 到 N 的双Lipschitz映射，使得 $F\Gamma F^{-1}$ 的每个元素都有一个相容表达式 $\bar{}(h * w \mapsto a * Bh * Aw * As)$，满足： $\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\alpha(\mathfrak{w})$ 是一个李群同态。

证明。我们在 $S = N \rtimes_D \mathbb{R}$ 上赋予一个左不变黎曼度量，使得 N 与 $\mathbb{R}$ 彼此正交。左平移 $L_{(0,t)}$ 是 S 的等距变换，并将 $\sigma(s) = (0, s)$ 上方的竖直测地线平移；它们所诱导的边界同胚是由导子 D 生成的 N 的自同构 e^{tD} 。

设 μ 是 N 上一个 Γ-不变可测共形结构。由于 μ 是可测的，它在 N 中几乎处处近似连续，参见 [F 69] 中的定理 2.9.13。设 $p \in N$ 是 Γ 的一个径向极限点，同时也是 μ 近似连续的点。经过一次左平移后，我们可以假设 $p = 0$ 是 N 的原点。固定一对 $P \in \mathcal{P}(N)$，并令 σ 为 0 上方的竖直测地线（位于 S 中）。由于 0 是 Γ 的径向极限点，存在一列 Γ 中的元素 $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ 以及一个常数 $C > 0$，使得 $\chi(\gamma_i(P)) \to 0$ 且 $d(\chi(\gamma_i(P))\ \sigma) \leq C$。固定一点 $x_0 \in \sigma$。对每个 i，都存在某个 $t_i' \in \mathbb{R}$，使得 $t_i' \to +\infty$ 作为 $i \to \infty$，且 $d(L_{(0,t_i')}(\chi(\gamma_i(P)))\ x_0) \leq C$。由于 $L_{(0,t_i')}$ 是 S 的等距变换，我们有 $L_{(0,t_i')} \circ \chi = \chi \circ e^{t_i' D}$。因此 $d(\chi \circ e^{t_i' D} \circ \gamma_i(P)\ x_0) \leq C$，于是集合 $\{e^{t_i' D} \circ \gamma_i(P)\}_{i=1}^{\infty}$ 包含于紧子集 $\chi^{-1}\bar{B}(x_0, C)$ 中。由此可知， $\{e^{t_i' D} \circ \gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 N 上一个双Lipschitz映射紧族。回忆一下， W 上存在一个 Carnot 度量 d_{CC} ，具有如下性质：对每个 $\gamma \in \Gamma$ ，都存在某个 $t_\gamma \in \mathbb{R}$ ，使得 $\gamma' := e^{-t_\gamma D} \circ \gamma$ 有一个相容表达式 $_-\gamma'(h * w) = \gamma'(0) * B_\gamma h * A_\gamma w * A_\gamma s_\gamma(h)$，其中 A_γ 是 W 的分次同构，同时也是 (W, d_{CC}) 的等距变换。映射族 $\{e^{t_i' D} \circ \gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的紧性意味着 $\{t_i' + t_{\gamma_i}\}$ 是有界序列，因此映射族 $\{e^{-t_{\gamma_i} D} \circ \gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ 也是紧的。令 $f_i = e^{-t_{\gamma_i} D} \circ \gamma_i$。取一个子序列后，我们可以假设 f_i 在紧子集上一致收敛到一个双Lipschitz映射 f：$N \to N$。由于每个 f_i 都是纤维相似变换， f 也是如此。

令 $\gamma \in \Gamma$ 并记 $\tilde{\gamma} = f\gamma f^{-1}$、 $\tilde{\gamma}_i = f_i \gamma f_i^{-1}$。令 $\mu_i = (f_i^{-1})^* \mu$。由于 μ 是 Γ-不变的， $\tilde{\gamma}_i$ 关于 μ_i 是共形的：

$$\tilde{\gamma}_i^* \mu_i = (f_i^{-1})^* \gamma^* f_i^* (f_i^{-1})^* \mu = (f_i^{-1})^* \gamma^* \mu = (f_i^{-1})^* \mu = \mu_i.$$

注意 $\mu_i = (f_i^{-1})^* \mu = (e^{t_{\gamma_i} D})^* (\gamma_i^{-1})^* \mu = (e^{t_{\gamma_i} D})^* \mu$。因此对于 $q \in N$，

$$\mu_i(q) = (e^{t_{\gamma_i} D})^* \mu(q) = D_\alpha e^{t_{\gamma_i} D}(q)[\mu(e^{t_{\gamma_i} D}(q))] = \mu(e^{t_{\gamma_i} D}(q))$$

由于 $D_\alpha e^{t\gamma_i D}$： $V_\alpha \to V_\alpha$ 是关于 $e^{\alpha t\gamma_i}$ 的标准膨胀，因此也是共形的 l.

令 $U \subset N$ 为一个包含 0 的有界开子集。存在一个有界开子集 U_0 ，使得 $U \bigcup \cup_i \tilde{\gamma}_i(U) \subset U_0$。由于 μ 在 0 处近似连续且 $t_{\gamma_i} \to -\infty$，等式 $\mu_i(q) = \mu(e^{t_{\gamma_i} D}(q))$ 表明，对于任意 $\epsilon > 0$ ，存在子集 $C_i \subset U_0$ ，其中 $|C_i| \to 0$ 以 $i \to \infty$ 为 $\rho(\mu_i(x)\ \mu(0)) \leq \epsilon$ ，且对于 $x \in U_0 \backslash C_i$。这里，$|E|$ 表示子集 $E \subset N$ 的测度，而 ρ 是对称空间 X 上的距离。

映射 $\tilde{\gamma}_i^{-1}$ 和 $\tilde{\gamma}^{-1}$ 构成一个双Lipschitz映射的紧族。存在某个 $L \geq 1$ ，使得这些映射全都是 L-双Lipschitz 的。因此， $|\tilde{\gamma}_i^{-1}(C_i)| \to 0$ 作为 $i \to \infty$。令 $D_i = C_i \cup \tilde{\gamma}_i^{-1}(C_i)$。现在我们有 $|D_i| \to 0$ 作为 $i \to \infty$，并且对于 $x \in U \backslash D_i$， $\rho(\mu_i(x)\ \mu(0)) \leq \epsilon$，以及 $\rho(\mu_i(\tilde{\gamma}_i(x))\ \mu(0)) \leq \epsilon$。由于 $\tilde{\gamma}_i$ 是 μ_i-共形的，对于几乎处处的 x，有 $\mu_i(x) = D_\alpha \tilde{\gamma}_i(x)[\mu_i(\tilde{\gamma}_i(x))]$ 。现在

$$\rho(\mu_i(x), D_\alpha \tilde{\gamma}_i(x)[\mu(0)]) = \rho(\mu_i(\tilde{\gamma}_i(x)), \mu(0)) \leq \epsilon$$

对几乎处处的 $x \in U \backslash D_i$。结合 $\rho(\mu_i(x)\ \mu(0)) \leq \epsilon$，可得

$$\rho(\mu(0), D_\alpha \tilde{\gamma}_i(x)[\mu(0)]) \leq 2\epsilon \tag{13}$$

对几乎处处的 $x \in U \backslash D_i$。

我们考虑相容表达式 $\tilde{\gamma}(h * w) = \tilde{\gamma}(0) * Bh * Aw * As(h)$ 和 $\tilde{\gamma}_i(h * w) = \tilde{\gamma}_i(0) * B_i h * A_i w * A_i s_i(h)$。我们知道， $\tilde{\gamma}_i$ 在紧子集上一致收敛到 $\tilde{\gamma}$。由此可得 $\tilde{\gamma}_i(0) \to \tilde{\gamma}(0)$ 以及 $A_i \to A$。一般而言，我们无法得出 $s_i \to s$ 和 $B_i \to B$ ，因为相容表达式并不唯一。定义函数 g_i, g： $\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to V_\alpha$ ，使得 $g_i(h) = B_i h_1 + A_i s_{i,\alpha}(h)$ 和 $g(h) = Bh_1 + As_\alpha(h)$，其中 h_1 是 $h \in H$的 H_1 分量。考察 $\tilde{\gamma}_i(h)$ 和 $\tilde{\gamma}(h)$ 的 V_α 分量，可知 $g_i \to g$ 在紧子集上一致收敛。

在证明的其余部分中，当我们谈到“正交”“正交归一”、向量 $|X|$ 的长度$X \in V_\alpha$、内积 $\langle \cdot \cdot \rangle$时，它们均是相对于 $\mu(0)$而言的。设 $X_1 \cdots X_k (k = \dim(W_\alpha))$是 W_α的一个正交归一基。对于 $1 \leq l \leq k$，设 $g_l(x) = \langle g(x)\ X_l \rangle$、 $g_{il}(x) = \langle g_i(x)\ X_l \rangle$。由于 $\tilde{\gamma}$和 $\tilde{\gamma}_i$ 是 L-双Lipschitz的，根据引理 8.1，存在某个常数 $L_1 > 0$ ，使得对于所有 $i \geq 1$， g 和 g_i都是 L_1-Lipschitz的。因此，对于所有$i \geq 1$， g_l 和g_{il} 是 N/W 上的 L_1-Lipschitz函数 $1 \leq l \leq k$。

设 ϕ： $H_1 \to W_\alpha$ 为满足 $\{h + \phi(h) | h \in H_1\}$ 与 W_α正交的线性映射。记 ψ： $\bar{\mathfrak{n}} \to H_1$ 为由 $\psi(\bar{h}) = (\pi|_{H_1})^{-1}(\bar{\pi}_1(\bar{h}))$给出的线性映射，其中 $\bar{\pi}_1$： $\bar{\mathfrak{n}} \to \bar{V}_1$ 是相对于分解$\bar{\mathfrak{n}} = \oplus_j V_j$ 的投影，而 π： $\mathfrak{n} \to \bar{\mathfrak{n}}$ 是商映射。对于 $1 \leq l \leq k$，设L_l： $\bar{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ 为定义如下的线性映射

$$L_l(\bar{h}) = -\left\langle X_l, A\phi(\psi(\bar{h})) \right\rangle .$$

断言：对于每个 $1 \leq l \leq k$、 $Dg_{i,\ l}$ 在 $L^1_{\text{loc}}(N/W)$ 中当 $i \to \infty$ 时收敛于 L_l 。

我们首先假设该断言，并完成命题的证明。该断言意味着，对于任意$h \in H_1$ 以及定义在 N/W上的具有紧支集的光滑函数 φ ，

$$\begin{aligned}\int_{N/W} \varphi(x) L_l(\bar{h}) dx &\longleftarrow \int_{N/W} \varphi(x) Dg_{i,l}(x)(\bar{h}) dx \\ &= -\int_{N/W} g_{i,l}(x) D_{\bar{h}} \varphi(x) dx \longrightarrow -\int_{N/W} g_l(x) D_{\bar{h}} \varphi(x) dx = \int_{N/W} \varphi(x) Dg_l(x)(\bar{h}) dx,\end{aligned}$$

从而得到 $\int_{N/W} \varphi(x)(Dg_l(x)(\bar{h}) - L_l(\bar{h})) dx = 0$。这里，第一个收敛由断言得到；第二个收敛由以下事实得到：$g_{i,\ l}$ 在紧子集上一致收敛于 g_l ；而等式则由分部积分得到。因此，对于几乎处处的 $x \in N/W$，有 $Dg_l(x) = L_l$ 。这意味着，对于几乎处处的 $x \in N/W$ 以及所有 $1 \leq l \leq k$，有 $\langle X_l, ADs_\alpha(x)(h) + A\phi(\psi(h)) \rangle = -\langle X_l, Bh \rangle$。

因此， $ADs_\alpha(x)(h) + A\phi(\psi(h))$ 定义了一个常值李群同态（与 x 无关），其从 N/W 映射到 W_α。由于 $A\phi(\psi(h))$ 也是一个群同态，我们看到， s_α 的 Pansu微分是一个常值群同态。由 $s_\alpha(0) = 0$ 可知， s_α 是一个李群同态。

现在我们来证明这个断言。回忆 $\rho(D_\alpha\tilde{\gamma}_i(x)[\mu(0)], \mu(0)) \leq 2\epsilon$ for $x \in U\backslash D_i$。这意味着，对于 $x \in U\backslash D_i$ ，线性映射 $D_\alpha\tilde{\gamma}_i(x): V_\alpha \to V_\alpha$ 相对于 $(V_\alpha, \mu(0))$ 的一组正交归一基的矩阵表示，是一个常数倍的矩阵，而该矩阵与某个正交矩阵非常接近。由于 $D_\alpha\tilde{\gamma}_i(x)(W_\alpha) = W_\alpha$，我们看到，若 $x \in U\backslash D_i$，则 $D_\alpha\tilde{\gamma}_i(x): V_\alpha \to V_\alpha$将 V_α 中与 W_α 正交的向量映射为几乎与 W_α正交的向量。另一方面，由于 $D_\alpha\tilde{\gamma}_i(x)(w) = A_i w$ for $w \in W_\alpha$ ，且 $\{A_i | i \geq 1\}$ 具有紧闭包（因为 $A_i \to A$），存在某个 $M > 0$ ，使得对于所有 i 和所有 $x \in U\backslash D_i$， $D_\alpha\tilde{\gamma}_i(x)$ 的算子范数均有界于 M。任取满足 $|h| = 1$的 $h \in H_1$。根据 ϕ 的定义： $H_1 \to W_\alpha$，我们有 $\langle W_\alpha, h + \phi(h)\rangle = 0$。由于$D_\alpha\tilde{\gamma}_i(x)(h + \phi(h))$ $= B_i h + A_i\phi(h) + A_i Ds_i$，且 $\alpha(\bar{x})(h)$，存在一个仅依赖于 ϵ 的常数 $\delta > 0$，使得当 $\epsilon \to 0$ 时， $\delta \to 0$

$$|\left\langle X_l, B_i h + A_i\phi(h) + A_i Ds_{i,\alpha}(\bar{x})(\bar{h})\right\rangle| < \delta$$

对所有 $x \in U\backslash D_i$ 和所有 $1 \leq l \leq k$均成立。注意到 $\psi(h) = h$ （因为 $h \in H_1$）。由于 $A_i \to A$ 和Dg_i， $\iota(\bar{x})(\bar{h}) = \left\langle B_i h + A_i Ds_i$， $\alpha(\bar{x})(\bar{h})$ $X_l\right\rangle$，因此我们看到，对于所有 $x \in U\backslash D_i$以及所有充分大的 i，有 $|Dg_i$， $\iota(\bar{x})(\bar{h}) - L_l(\bar{h})| \leq 2\delta$。这意味着当$i$充分大时，$\int_{U\backslash D_i} |Dg_i$， $\iota(\bar{x})(\bar{h}) - L_l(\bar{h})|dx \leq 2\delta|U|$。另一方面，由于$g_i$， ι， $i \geq 1$， $1 \leq l \leq k$都是 L_1-Lipschitz的，存在一个常数 $C > 0$ ，使得对所有 $x \in N$，有$|Dg_i$， $\iota(\bar{x})$ $(\bar{h}) - L_l(\bar{h})| \leq C$。由此可得$\int_{D_i} |Dg_i$， $\iota(\bar{x})(\bar{h}) - L_l(\bar{h})|dx \leq C|D_i|$。由于 $|D_i| \to 0$，我们得出

$$\overline{\lim}_{i\to\infty} \int_U |Dg_{i,l}(\bar{x})(\bar{h}) - L_l(\bar{h})|dx \leq 2\delta|U|.$$

由于这对所有 $\epsilon > 0$ 均成立，我们有$\lim_{i\to\infty} \int_U |Dg_i$， $\iota(\bar{x})(\bar{h}) - L_l(\bar{h})|dx = 0$。由于这对所有有界开子集 $U \subset N$ 及所有 $h \in H_1$均成立，我们有 Dg_i， $\iota \to L_l$ in $L^1_{\text{loc}}(N/W)$。

□

8.3. 当 $\dim(W) \geq 2$ 且 $\dim(N/W) \geq 2$时完成定理 1.2 的证明。我们假设定理 1.2 的假设，并额外假设 $\dim(W) \geq 2$且 $\dim(N/W) \geq 2$。我们首先利用第 7 节消除 s_γ、$_j$ （对 $j < \alpha$），如果 α 是整数，则应用命题 8.6，得出对于所有 $\gamma \in \Gamma$， s_γ、α 是李群同态（在可能进一步进行双 Lipschitz 共轭之后）。我们注意到，对于 $j < \alpha$ ，性质 s_γ、$_j \equiv 0$ 在应用命题 8.6 时保持不变：这是因为命题 8.6 的证明中的共轭映射 f 是一个序列 $\{f_i\}$ 的极限，而每个 f_i 都是某个群元素 $\gamma_i \in \Gamma$与 $e^{t_i D}$ 的复合，其中 t_i 满足某个条件；由于 γ_i 具有上述性质， f_i 及其极限 f也具有该性质；最后，计算表明，如果 N 上的两个双Lipschitz映射 f_1、f_2 具有该性质，那么它们的复合映射 $f_1 \circ f_2$也具有该性质。

此时， Γ 中的每个元素都有一个相容表达式 $F(h * w) = F(0) * Bh * Aw * As(h)$，其中 $s: \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$ 满足以下性质： $1 \leq j < \alpha$ 时， $s_j = 0$ ；如果 α 是整数，那么 $s_\alpha: \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\alpha(\mathfrak{w})$ 是李群同态。接下来我们证明，这样的映射 F 是仿射映射；也就是说， $L_{F(0)^{-1}} \circ F$ 是李群自同构。

引理 8.7。设 $F, \tilde{F}: \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 是具有相容表达式 $F(h * w) = Bh * Aw * As(h)$ 和 $\tilde{F}(h * w) = Bh * Aw * A\tilde{s}(h)$ 的双Lipschitz映射。如果 $s, \tilde{s}$ 满足 $1 \leq j \leq \alpha$ 时的 $s_j = \tilde{s}_j$，那么 $F = \tilde{F}$。

证明。我们注意到 $F(h * w * (s(\bar{h}))^{-1} * \tilde{s}(\bar{h})) = \tilde{F}(h * w)$。因此， $(F^{-1} \circ \tilde{F})(h * w) = h * w * (s(\bar{h})^{-1} * \tilde{s}(\bar{h}))$ 是一个双Lipschitz剪切映射，其剪切函数 $\tilde{\tilde{s}}$ 由 $\tilde{\tilde{s}} = \tilde{s} - s$给出。该

˜假设意味着 $\tilde{s}_j \equiv 0$ 对所有 $1 \le j \le \alpha$。另一方面，根据命题 6.4，如果 α 不是整数，则 $\tilde{\tilde{s}}_j \equiv 0$ 对所有 $j > \alpha$；如果 α 是整数，则 $\tilde{\tilde{s}}_{k\alpha+j} = \tilde{\tilde{s}}_j^{(k)} \equiv 0$ 对每个 $k \ge 1$ 且˜ ˜ $1 \le j \le \alpha$。由此可得 $\tilde{s} = 0$ 且 $F = F$。

□

引理 8.8. 设 $F\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 是一个具有相容表达式 $F(h*w) = Bh * Aw *_A s(h)$ 的双Lipschitz映射。假设 $s_j = 0$ 对于 $1 \le j < \alpha$，并且如果 α 是一个整数 $s_\alpha\colon \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\alpha(\mathfrak{w})$ 是李群同态。那么 F 是李群自同构。

˜证明。注意，只需证明 $F_p = F$ 对任意 $p \in N$。令 $p \in N$ 并设 $F = F_p$。根据 ˜ ˜ ¯引理 5.6，F 具有如下相容表达式：$F(h*w) = Bh * Aw * A\tilde{s}(h$，其中某个映射 $\tilde{s}\colon \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z(\mathfrak{w})$。根据引理 8.7，现在只需证明 $\tilde{s}_j = s_j$ 对所有 $1 \le j \le \alpha$。

设 $h \in H$。由于 $\tilde{F}(h) = Bh * A\tilde{s}(\bar{h})$，我们有 $\tilde{s}(\bar{h}) = A^{-1}((Bh)^{-1} * \tilde{F}(h))$。将 $p = h_0 * w_0$ 和 $h_0 * h = h_1 * w_1$ 写成 h_0、$h_1 \in H$、w_0、$w_1 \in \mathfrak{w}$。注意到 $w_1 \in \oplus_{j \ge 2\alpha} W_j$。我们有 $p*h = h_0 * w_0 * h = h_0 * h * (h^{-1} * w_0 * h) = h_1 * w_1 *(h^{-1} * w_0 * h)$。在下面的计算中，我们使用商同态 $P_\alpha\colon \mathfrak{n} \to \bar{\mathfrak{n}}_\alpha = \mathfrak{n}/(\oplus_{\lambda_j > \alpha} V_{\lambda_j})$：

$$
\begin{aligned}
&P_\alpha((Bh)^{-1} * \tilde{F}(h)) \\
&= P_\alpha((Bh)^{-1} * (F(h_0 * w_0))^{-1} * F(h_1 * w_1 * (h^{-1} * w_0 * h))) \\
&= P_\alpha((Bh)^{-1} * As(\overline{h_0})^{-1} * Aw_0^{-1} * (Bh_0)^{-1} * Bh_1 * Aw_1 * A(h^{-1} * w_0 * h) * As(\overline{h_0} * \bar{h})) \\
&= P_\alpha((Bh)^{-1} * As(\overline{h_0})^{-1} * Aw_0^{-1} * (Bh_0)^{-1} * Bh_1 * Aw_1 * (Bh)^{-1} * Aw_0 * (Bh) * As(\overline{h_0} * \bar{h})) \\
&= P_\alpha((Bh)^{-1} * As(\overline{h_0})^{-1} * Aw_0^{-1} * (Bh_0)^{-1} * Bh_1 * Aw_0 * As(\overline{h_0} * \bar{h})) \\
&= P_\alpha((Bh)^{-1} * (Bh_0)^{-1} * Bh_1 * As(\overline{h_0})^{-1} * As(\overline{h_0} * \bar{h})) \\
&= P_\alpha(A(s(\overline{h_0} * \bar{h}) - s(\overline{h_0}))).
\end{aligned}
$$

第三个等式用到了 (5)。第四个等式用到了 $P_\alpha(Aw_1) = 0$ 和 $P_\alpha(Bh) \in Z(\bar{\mathfrak{n}}_\alpha)$。第五个等式用到了 $P_\alpha(Bh_0)$ $P_\alpha(Bh_1) \in Z(\bar{\mathfrak{n}}_\alpha)$。最后一个等式用到了 $P_\alpha((Bh_0)^{-1}*$ $Bh_1) = P_\alpha(Bh)$。由此可得，对于 $1 \le j \le \alpha$，$\tilde{s}_j(h) = s_j(h_0 * h) - s_j(\overline{h_0})$。根据关于 s 的假设，对于 $1 \le j < \alpha$，我们有 $\tilde{s}_j = 0$；并且，如果 α 是整数，那么 $\tilde{s}_\alpha(h) = s_\alpha(h_0 * h) - s_\alpha(h_0) = s_\alpha(h)$，因为 $s_\alpha\colon \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\alpha(\mathfrak{w})$ 是一个同态。现在，对于 $1 \le j \le \alpha$，我们有 $\tilde{s}_j = s_j$。根据引理 8.7，˜$F = F$，因此 F 是一个自同构。

□

在最后这一段中，我们切换回李群记号。此时，Γ 通过仿射映射作用于 N，并且是 N上的一致拟相似群。我们记作 $\gamma = L_{\gamma(0)} \circ \phi_\gamma$，其中 ϕ_γ是自同构$L_{\gamma(0)^{-1}} \circ \gamma$。由引理3.5可知，$\phi_\gamma$保持层结构，也就是说，对所有 j，都有 $d\phi_\gamma(V_{\lambda_j}) = V_{\lambda_j}$。每个$\gamma \in \Gamma$ 都通过 A_γ 上的自同构 A_γ 作用于 W 的陪集，而 A_γ 是 W上的 Carnot 膨胀与等距分次同构的复合。因此，对每个 γ，都存在唯一的 $t_\gamma \in \mathbb{R}$，使得 $e^{-t_\gamma D} \circ \gamma$ 通过等距分次同构作用于 W。由于 Γ 是 N上的一致拟相似变换群，存在常数 $L > 0$，使得对所有 $\gamma \in \Gamma$，$e^{-t_\gamma D} \circ \gamma$都是 L-双Lipschitz的。因此，对每个 $j \ge 1$，线性同构 $d(e^{-t_\gamma D} \circ \phi_\gamma)|_{V_{\lambda_j}}\colon V_{\lambda_j} \to V_{\lambda_j}$都是 L-双Lipschitz的。现在我们看到，由 $\gamma \mapsto d(e^{-t_\gamma D} \circ \phi_\gamma)|_{V_{\lambda_j}}$给出的映射 $\Gamma \to GL(V_{\lambda_j})$是一个同态，其像在 $GL(V_{\lambda_j})$中具有紧闭包。因此，V_{λ_j}上存在一个内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$，使得每个 $d(e^{-t_\gamma D} \circ \phi_\gamma)|_{V_{\lambda_j}}$相对于此内积都是等距变换。令 $\mathfrak{n}$ 上的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 与 V_{λ_j} 上的 $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ 一致，并使 V_{λ_i} 与 V_{λ_j} 彼此正交

对 $i \neq j$成立。令 N 上的 D-齐次距离 d_1 与此内积相对应。尽管$d(e^{-t_\gamma D} \circ \phi_\gamma)$是$(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$的线性等距变换，但尚不清楚 $e^{-t_\gamma D} \circ \phi_\gamma$是否为$(N, d_1)$的等距变换。然而， $\{e^{-t_\gamma D} \circ \phi_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$是具有紧闭包的分次自同构群 $\mathrm{Auto}_{\mathfrak{g}}(N)$ 的子群（我们将该闭包记为 K）。令 K上的归一化 Haar 测度为 m 。在 N上定义一个新距离 d_2： $d_2(x, y) = \int_K d_1(k(x)\ k(y))dm(k)$。现在容易验证， d_2是 N上的 D-齐次距离，并且在 K作用下保持不变，且与 $\langle , \rangle$相对应。因此， Γ通过相似变换作用于(N, d_2)。最后，我们将 Γ 共轭到 $\mathrm{Sim}(N, d_0)$ 中，其中 d_0 是 N上的一个固定的极大对称D-齐次距离。

我们已经完成了定理 1.2在 $\dim(W) \geq 2$、$\dim(N/W) \geq 2$的情形下的证明。

9. 情形 dim(W) = 1

本节证明定理 1.2在 $\dim(W) = 1$、$\dim(N/W) \geq 2$且 Γ为可和时的情形。在此情形下，不能使用 Tukia 的论证来证明纤维 Tukia 定理。不过，Day不动点定理再次可以用来沿着 W的陪集“校正”作用。我们指出，本节中的论证对形如 $\mathbb{R} \times Y$的乘积度量空间 Γ 上的一致拟相似群 $\mathbb{R} \times Y$同样有效，见定理 9.7。下文证明中唯一使用的性质是： H 是一个真度量空间， Γ 在 $\mathbb{R} \times H$ 上的作用置换子集 $\{\mathbb{R} \times \{h\} : \ h \in H\}$ 并且在 H 上的诱导作用由相似变换给出。

在本节中，我们始终假设 $\dim(W) = 1$且 $\dim(N/W) \geq 2$。令 $\mathfrak{h} = \oplus_{\lambda>1} V_\lambda$。由于$W = V_1$ 是 $\mathfrak{n}$ 的一个理想，由性质 $[V_a, V_b] \subset V_{a+b}$可知， $\mathfrak{n} = W \oplus \mathfrak{h}$ 是若干理想的直和，其中 $W \simeq \mathbb{R}$。因此在这种情形下，我们的群 N 是一个 $\mathbb{R}$ 的副本与一个 Carnot 群的直积；我们也将后者记作 W 和 H，其中 H 是李代数为 $\mathfrak{h}$的单连通李群。由此，我们可以将 $w * h \in N$ 写作 $(w, h) \in W \oplus H$，而我们的群 Γ 通过如下形式的映射作用于N

$$\gamma(w, h) = (\gamma^{\mathbb{R}}(w, h), \gamma^H(h))$$

其中 $\gamma^H : \ H \to H$ 是双Lipschitz的，并且对每个 $h \in H$，映射 $\gamma^{\mathbb{R}}(\cdot, h) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 也都是双Lipschitz的。这里给出的证明沿用了 [Dy10] 中第 3.3 节的证明，但我们以略有不同的方式构造共轭映射，以修正原论文中的一个疏漏；也就是说，尚不清楚 [Dy10] 中的共轭映射是否确实是双Lipschitz的。为了构造我们的映射，我们需要利用 Γ 是可和的。

由于 $\dim(N/W) \geq 2$，我们可以先将 Carnot 群的 Tukia 型定理（定理 3.6）应用于 Γ 在 $N/W \simeq H$ 上的诱导作用。因此，存在一个 H 上的双Lipschitz映射 f_0，使得经 f_0 共轭后， Γ 在 H 上的诱导作用由相似变换给出。令 $F_0 = (\mathrm{Id}\ f_0)$: $W \oplus H \to W \oplus H$。于是，我们可以用 F_0 将 Γ 在 N 上的作用共轭，得到一个作用，其中 $\gamma^{\mathbb{R}}(\cdot, h)$ 仍是双Lipschitz映射，而 γ^H 是 $(H, \bar{d}_{CC})$ 上的相似变换。设 $t_\gamma \in \mathbb{R}$ 满足 $e^{\alpha t_\gamma}$ 是 γ^H: $(H, \bar{d}_{CC}) \to (H, \bar{d}_{CC})$ 的相似常数，并令 $\tilde{\gamma}$: $W \times H \to W$ 为由 $\tilde{\gamma}(w, h) = e^{-t_\gamma}\gamma^{\mathbb{R}}(w, h)$ 给出的映射。于是 $\gamma^{\mathbb{R}}(w, h) = e^{t_\gamma}\tilde{\gamma}(w, h)$。由于 Γ 是一致拟相似群，存在常数 $\Lambda \geq 1$，使得对于所有 $\gamma \in \Gamma$ 和所有 $h \in H$， $\tilde{\gamma}(\cdot, h)$ 都是 Λ-双Lipschitz映射。如有必要，取一个二阶子群后，我们可以假设 $\tilde{\gamma}(\cdot, h)$ 是保定向的，因此其导数属于区间$[1/\Lambda, \Lambda]$。对于每个 $\gamma \in \Gamma$，定义函数 u_γ: $N \to \mathbb{R}$，使得当 $\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial w}(w, h)$ 存在时，$u_\gamma(w, h) = \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial w}(w, h)$；否则，$u_\gamma(w, h) = 1$。这里， $\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial w}(w, h)$ 表示函数 $\tilde{\gamma}(\cdot, h)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在点 w 处的导数（若存在）。于是 $u_\gamma \in L^\infty(N)$ 取值于 $[1/\Lambda, \Lambda]$。本节在定义 L^p 空间时使用 N 上的 Hausdorff 测度。当然， N 上的 Hausdorff 测度是一种 Haar 测度。关键在于，将$N = \mathbb{R} \times H$ 替换为积度量空间 $\mathbb{R} \times Y$ 后，本节中的论证仍然成立。

令 $L^\infty(N) = (L^1(N))^*$ 配备弱*拓扑。则 $L^\infty(N)$ 是一个局部凸拓扑向量空间（见第 3.14, [R91] 节）。我们还考虑 $L^\infty(N)$ 上的 L^∞ 范数 $||\cdot||$。需要强调的是， L^∞ 范数所诱导的拓扑不同于弱* 拓扑。下文中，若称子集 $X \subset L^\infty(N)$ 是闭（紧）的，指它在弱* 拓扑下是闭（紧）的；子集的闭包和映射的连续性也同样如此；若称 X 有界，指它相对于 L^∞ 范数有界。根据 Banach–Alaoglu定理， $L^\infty(N)$ 的有界闭子集是紧的。

接下来，我们定义反群 Γ^* 在 $L^\infty(N)$ 上的作用，其中 Γ 。对于 $\gamma \in \Gamma$ 和 $\phi \in L^\infty(N)$，定义 $\gamma \cdot \phi \in L^\infty(N)$ 为 $\gamma \cdot \phi = u_\gamma(\phi \circ \gamma)$，即

$$(\gamma \cdot \phi)(w,h) = u_\gamma(w,h)\phi(\gamma(w,h)) = u_\gamma(w,h)\phi(\gamma^{\mathbb{R}}(w,h), \gamma^H(h)).$$

容易验证，这定义了 Γ^* 在 $L^\infty(N)$ 上的线性作用（特别是仿射作用）。

引理 9.1. 映射 $\Gamma \times L^\infty(N) \to L^\infty(N)$、$(\gamma, \phi) \mapsto \gamma \cdot \phi$ 是分别连续的。

证明。容易看出，对于固定的 $\gamma \in \Gamma$，映射 $L^\infty(N) \to L^\infty(N)$ $\phi \mapsto \gamma \cdot \phi$ 是连续的。接下来我们证明，对于固定的 $\phi \in L^\infty(N)$，映射 $\Gamma \to L^\infty(N)$ $\gamma \mapsto \gamma \cdot \phi$ 也是连续的。设 $\phi \in L^\infty(N)$ 固定，且 γ_j、$\gamma \in \Gamma$ 满足 $\gamma_j \to \gamma$。我们需要证明 $\gamma_j \cdot \phi \xrightarrow{w^*} \gamma \cdot \phi$。设 $C_c(N)$ 为 N 上紧支连续函数构成的空间。由于 $C_c(N)$ 是 $L^1(N)$ 的稠密子空间，只需证明：对于任意固定的 $f \in C_c(N)$，当 $j \to \infty$ 时，$\int_N f(\gamma_j \cdot \phi)dm \to \int_N f(\gamma \cdot \phi)dm$，其中 m 表示 N 上的 Hausdorff 测度。注意， $\gamma \in \Gamma$ 在点 (w,h) 处的雅可比行列式为 $J\gamma(w,h) = e^{t_\gamma d_0} u_\gamma(w,h)$，其中 d_0 是 (N,d) 的 Hausdorff 维数。将面积公式应用于映射 γ 和函数 $f(\phi \circ \gamma)$，得到

$$\int_N f(\phi \circ \gamma) J\gamma dm = \int_N (f \circ \gamma^{-1})\phi dm.$$

由此可得

$$\int_N f(\gamma \cdot \phi)dm = \int_N f u_\gamma(\phi \circ \gamma)dm = \frac{1}{e^{t_\gamma d_0}} \int_N f(\phi \circ \gamma) J\gamma dm = \frac{1}{e^{t_\gamma d_0}} \int_N (f \circ \gamma^{-1})\phi dm.$$

类似地，我们有

$$\int_N f(\gamma_j \cdot \phi)dm = \frac{1}{e^{t_{\gamma_j} d_0}} \int_N (f \circ \gamma_j^{-1})\phi dm.$$

Now

$$\begin{aligned} &\int_N f(\gamma_j \cdot \phi)dm - \int_N f(\gamma \cdot \phi)dm \\ &= \frac{1}{e^{t_{\gamma_j} d_0}} \int_N (f \circ \gamma_j^{-1} - f \circ \gamma^{-1})\phi dm + \Big(\frac{1}{e^{t_{\gamma_j} d_0}} - \frac{1}{e^{t_\gamma d_0}}\Big) \int_N (f \circ \gamma^{-1})\phi dm. \end{aligned}$$

由于 $t_{\gamma_j} \to t_\gamma$，上式中的第二项显然在 $j \to \infty$ 时趋于 0。由于 f 是具有紧支集的连续函数，并且 γ_j 在 N 的紧子集上一致收敛于 γ，存在一个紧子集 $F \subset N$ 和一个量 $\epsilon_j \to 0$，使得对于所有 $n \in N \backslash F$ 以及所有充分大的 j，$\sup\{|f \circ \gamma_j^{-1}(n) - f \circ \gamma^{-1}(n)| : n \in F\} < \epsilon_j$ 且 $f \circ \gamma_j^{-1}(n) - f \circ \gamma^{-1}(n) = 0$。我们有

$$|\int_N (f \circ \gamma_j^{-1} - f \circ \gamma^{-1})\phi dm| \le \int_F |f \circ \gamma_j^{-1} - f \circ \gamma^{-1}||\phi| dm \le \epsilon_j \int_F |\phi| dm \to 0$$

因此 $\int_N f(\gamma_j \cdot \phi)dm \to \int_N f(\gamma \cdot \phi)dm$。

□

由于 u_γ 的取值落在区间 $[1/\Lambda, \Lambda]$内，我们看到，对于任意$\phi \in L^\infty(N)$以及任意 $\gamma \in \Gamma$，都有 $||\phi||/\Lambda \leq ||\gamma \cdot \phi|| \leq \Lambda||\phi||$。由此可知，每个 Γ轨道都是 $L^\infty(N)$中的有界子集。令 ϕ_0为 N 上的常值函数 1，令 K 为 $\Gamma^* \cdot \phi_0$的凸包的闭包。于是， K 是 $L^\infty(N)$中的紧凸子集。由于 Γ 是可和的，Day不动点定理表明， Γ在 K中有一个不动点 u。

注意到 $\gamma \cdot \phi_0 = u_\gamma$，因此它是一个取值于 $[1/\Lambda, \Lambda]$ 的可测函数。由此可知， K 中的每个元素，特别是 u，几乎处处取值于 $[1/\Lambda, \Lambda]$。根据 Fubini定理，对于几乎处处的 $h \in H$，映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\, w \mapsto u(w, h)$ 是可测的，并且对于几乎处处的 $w \in W$ 取值于 $[1/\Lambda, \Lambda]$。

由于 u 是 Γ 的不动点，对于每个 $\gamma \in \Gamma$，我们有 $u(w, h) = u_\gamma(w, h)u(\gamma^{\mathbb{R}}(w, h)\ \gamma^H(h))$ 对几乎处处的 $(w, h) \in W \times H$ 成立。根据 Fubini定理，对于几乎处处的 $h \in H$， $u(w, h) = u_\gamma(w, h)u(\gamma^{\mathbb{R}}(w, h)\ \gamma^H(h))$ 对几乎处处的 $w \in W$ 成立。

设 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 为一个可数稠密子群。存在一个 Γ_0-不变的满测度子集 $U \subset H$，具有以下性质：

(1) 对每个 $h \in U$和每个 $\gamma \in \Gamma_0$，等式 $u(w, h) = u_\gamma(w, h)u(\gamma^{\mathbb{R}}(w, h)\ \gamma^H(h))$ 对几乎处处的 $w \in W$成立。

(2) 对每个 $h \in U$，映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, w \mapsto u(w, h)$ 是可测的，并且对几乎处处的 $w \in W$取值于 $[1/\Lambda, \Lambda]$。

对每个 $h \in U$，我们定义一个函数 v_h：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其定义为 $v_h(w) = \int_0^w u(s, h)ds$。显然， v_h 是 Λ-双Lipschitz的。我们还定义 G_0：$W \times U \to W \times U$，其定义为 $G_0(w, h) = (v_h(w)\ h)$。我们将证明：(1) ¯(1) G_0 是双Lipschitz映射（引理 9.5），因此存在其双Lipschitz延拓 G_0：$N \to N$；(2) $\bar{G}_0\Gamma\bar{G}_0^{-1}$沿着 W 的陪集作用为相似变换（引理 9.6）。

引理 9.2。函数 v_h 对所有 $\gamma \in \Gamma_0$ 以及所有 w_1、$w_2 \in W$ 满足以下方程：

$$v_{\gamma^H(h)}(\gamma^{\mathbb{R}}(w_1, h)) - v_{\gamma^H(h)}(\gamma^{\mathbb{R}}(w_2, h)) = e^{t_\gamma}(v_h(w_1) - v_h(w_2)).$$

证明。对于每个 $h \in U$， $u_\gamma(w, h) = \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial w}(w, h)$ 几乎处处成立。另一方面，根据 U 的选取，对于每个 $h \in U$ 和每个 $\gamma \in \Gamma_0$，等式 $u(w, h) = u_\gamma(w, h)u(\gamma^{\mathbb{R}}(w, h)\ \gamma^H(h))$ 几乎处处成立。现在我们有

$$\begin{aligned} v_{\gamma^H(h)}(\gamma^{\mathbb{R}}(w_1, h)) - v_{\gamma^H(h)}(\gamma^{\mathbb{R}}(w_2, h)) &= \int_{\gamma^{\mathbb{R}}(w_2,h)}^{\gamma^{\mathbb{R}}(w_1,h)} u(s, \gamma^H(h))ds \\ &= e^{t_\gamma} \int_{w_2}^{w_1} u(\gamma^{\mathbb{R}}(t, h), \gamma^H(h))\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t}(t, h)dt \\ &= e^{t_\gamma} \int_{w_2}^{w_1} u(t, h)dt = e^{t_\gamma}(v_h(w_1) - v_h(w_2)). \end{aligned}$$

□

令 $C_b(\Gamma)$ 为 Γ 上有界连续函数构成的空间。令 M_Γ 为 $C_b(\Gamma)$ 上具有如下形式的均值集

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \delta_{\gamma_j} \quad (n \in \mathbb{N}, \gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma,\ t_1, \cdots, t_n \geq 0,\ t_1 + \cdots + t_n = 1),$$

其中，对于 $\gamma \in \Gamma$， δ_γ： $C_b(\Gamma) \to \mathbb{C}$是由 $\delta_\gamma(f) = f(\gamma)$ 给出的线性泛函。那么， M_Γ 是w^*-稠密的，存在于 $C_b(\Gamma)$ 上所有均值构成的集合中，见 [实数轴02], 第 29 页。令 $\mathbb{Q}M_{\Gamma_0}$ 为定义在

$C_b(\Gamma)$ 具有如下形式

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \delta_{\gamma_j} \quad (n \in \mathbb{N}, \gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma_0,\ t_1, \cdots, t_n \geq 0,\ t_j \in \mathbb{Q},\ t_1 + \cdots + t_n = 1).$$

由于 Γ_0 在 Γ 中稠密，且 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$中稠密，我们可以看出， $\mathbb{Q}M_{\Gamma_0}$ 在 $C_b(\Gamma)$ 上所有均值的集合中也是 w^*-稠密的。令 K_0 为 K 中形如以下形式的点

$$\sum_{j=1}^{n} t_j u_{\gamma_j} \quad (n \in \mathbb{N}, \gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma_0,\ t_1, \cdots, t_n \geq 0,\ t_j \in \mathbb{Q},\ t_1 + \cdots + t_n = 1).$$

引理 9.3. 存在一个 $\{u_i\}$ 序列，它在弱* 拓扑下收敛于 u 。

证明。这可由 Day不动点定理的证明得出，参见 [R02]第 29 页。读者阅读本证明时，应将该证明放在手边。在该证明中，我们选取 $x_0 = \phi_0$。令 $A(K)$ 为 K上所有连续仿射函数构成的集合。对于 $\psi \in A(K)$，定义

$$\phi_\psi : \Gamma \to \mathbb{C},\ \gamma \mapsto \psi(\gamma \cdot \phi_0) = \psi(u_\gamma).$$

设 m 是 $C_b(\Gamma)$ 上的左不变均值。由于 $\mathbb{Q}M_{\Gamma_0}$ 在 $C_b(\Gamma)$ 上所有均值的集合中 w^*-稠密，因此存在一个 $\mathbb{Q}M_{\Gamma_0}$ 中的网 $\{m_\beta\}$，它在弱* 拓扑下收敛于 m。对于每个 $m_\beta = \sum_{j=1}^{n} t_j \delta_{\gamma_j}$，定义 $u_\beta \in K_0$ 为 $u_\beta = \sum_{j=1}^{n} t_j u_{\gamma_j}$。容易验证，对所有 $\psi \in A(K)$，都有 $< \phi_\psi, m_\beta >= \psi(u_\beta)$。由于 K 是紧的，u_β 有一个子网收敛于某个 $u \in K$。在 [R02] 第 30 页证明了，这个 u 是 Γ的不动点。最后，由于 $L^1(N)$可分，根据序列 Banach–Alaoglu 定理， $L^\infty(N) = (L^1(N))^*$ 中的闭球是可度量化的。因此， K 是紧且可度量化的。于是我们可以从网 $\{u_\beta\}$ 中选取一个序列 $\{u_i\}$，使其在弱* 拓扑下收敛于 u 。

□

引理 9.4. 存在一个满测度子集 $U' \subset U$和一个常数 $C > 0$，使得对所有 h_1、 $h_2 \in U'$以及所有 $w \in W$， $|v_{h_1}(w) - v_{h_2}(w)| \leq C \cdot \bar{d}_{CC}(h_1, h_2)^{\frac{1}{\alpha}}$。

证明。我们考虑 N上的如下 D-齐次距离 d：

$$d((w_1, h_1), (w_2, h_2)) = |w_1 - w_2| + \bar{d}_{CC}(h_1, h_2)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

回顾一下，每个 $\gamma \in \Gamma$都可表示为 $\gamma(w, h) = (e^{t_\gamma} \tilde{\gamma}(w, h)\ \gamma^H(h))$，并且 γ^H: $(H, \bar{d}_{CC}) \to (H, \bar{d}_{CC})$ 是一个相似变换，其相似常数为 $e^{\alpha t_\gamma}$。由于 Γ 是一致拟相似群，通过在必要时增大 Λ，我们可以假设每个 γ都是 (Λ, e^{t_γ})- 拟相似变换，作用于 (N, d)。因此，对于所有 h_1、 $h_2 \in H$，所有 $w \in W$ 以及所有 $\gamma \in \Gamma$，有 $|\tilde{\gamma}(w, h_1) - \tilde{\gamma}(w, h_2)| \leq \Lambda \bar{d}_{CC}(h_1, h_2)^{\frac{1}{\alpha}}$。

对于每个整数 $n \geq 1$，令 $B_n \subset H$ 为半径为 n 、中心为原点（ H 的单位元）的球。令 $D_n = [-n, n] \times B_n \subset W \times H$。注意到 $u_i|_{D_n}$、 $u|_{D_n} \in L^\infty(D_n)$，并且在弱* 拓扑下 $u_i|_{D_n} \to u|_{D_n}$。由于 D_n 具有有限测度，我们看到对于任意 $1 \leq p < \infty$， $u_i|_{D_n} \to u|_{D_n}$在 $L^p(D_n)$中弱收敛。根据 Mazur引理，存在由 $u_i's$ 的凸组合构成的序列 $\tilde{u}_j$，使得 $\tilde{u}_j|_{D_n}$ 在 L^p 范数下收敛于 $u|_{D_n}$。然后，如有必要取一个子序列，我们可以假设 $\tilde{u}_j|_{D_n}$ 几乎处处收敛于 $u|_{D_n}$。根据 Fubini，存在一个零测集 $F_n \subset H$，使得对于任意 $h \in B_n \backslash F_n$， $\tilde{u}_j(w、h) \to u(w、h)$ 对几乎处处的 $w \in [-n, n]$成立。另一方面，由于每个 u_i 都是 u_γ 的凸组合，因此每个 $\tilde{u}_j$ 也都是 u_γ 的凸组合。设 $\tilde{u}_j = \sum_{i=1}^{k_j} t_{j、i} u_{\gamma_{j、i}}$ 为某些 $t_{j、i} \geq 0$，其中 $\sum_i t_{j、i} = 1$ 且 $\gamma_{j、i} \in \Gamma$。由于每个 u_γ 都被 Λ 有界，因此 $\tilde{u}_j$ 也如此。由控制收敛定理可知，对于任意 $w \in [-n, n]$及任意 $h \in B_n \backslash F_n$， $\int_0^w \tilde{u}_j(s、h)\, ds \to \int_0^w u(s、h)\, ds = v_h(w)$ 。

令 $U'=U-\cup_n F_n$。则 U' 在 H 中具有全测度。令 h_1、$h_2\in U'$ 及 $w\in W$。选取充分大的 n，使得（w、h_1）、（w、h_2）$\in D_n$。现在

$$\begin{aligned}
|\nu_{h_2}(w)-\nu_{h_1}(w)| &= \lim_{j\to\infty}\left|\int_0^w(\tilde{u}_j(s,h_2)-\tilde{u}_j(s,h_1))\,ds\right| \\
&= \lim_{j\to\infty}\left|\sum_i t_{j,i}\int_0^w(u_{\gamma_{j,i}}(s,h_2)-u_{\gamma_{j,i}}(s,h_1))ds\right| \\
&= \lim_{j\to\infty}\left|\sum_i t_{j,i}(\tilde{\gamma}_{j,i}(w,h_2)-\tilde{\gamma}_{j,i}(0,h_2)-\tilde{\gamma}_{j,i}(w,h_1)+\tilde{\gamma}_{j,i}(0,h_1))\right| \\
&\le 2\Lambda\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2).
\end{aligned}$$

□

引理 9.5. 映射 $G_0|_{W\times U'}$：$(W\times U',d)\to(W\times U',d)$ 是双Lipschitz的。

证明。我们首先证明 $G_0|_{W\times U'}$是Lipschitz的。设 (w_1,h_1)、$(w_2,h_2)\in W\times U'$。则

$$\begin{aligned}
d(G_0(w_1,h_1),G_0(w_2,h_2)) &= d((v_{h_1}(w_1),h_1),(v_{h_2}(w_2),h_2)) \\
&= |v_{h_1}(w_1)-v_{h_2}(w_2)|+\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2) \\
&\le |v_{h_1}(w_1)-v_{h_2}(w_1)|+|v_{h_2}(w_2)-v_{h_2}(w_1)|+\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2) \\
&\le (2\Lambda+1)\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2)+\Lambda|w_1-w_2| \\
&\le (2\Lambda+1)d((w_1,h_1),(w_2,h_2)).
\end{aligned}$$

接下来我们证明 $G_0^{-1}|_{W\times U'}$也是Lipschitz的。首先假设 $|w_1-w_2|\le 4\Lambda^2\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2)$。则

$$d(G_0(w_1,h_1),G_0(w_2,h_2))\ge\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2)\ge\frac{1}{4\Lambda^2+1}d((w_1,h_1),(w_2,h_2)).$$

现在我们假设$|w_1-w_2|\ge 4\Lambda^2\bar{d}_{CC}^{\alpha}(h_1,h_2)$。则

$$\begin{aligned}
d(G_0(w_1,h_1),G_0(w_2,h_2)) &= |v_{h_1}(w_1)-v_{h_2}(w_2)|+\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2) \\
&\ge |v_{h_1}(w_1)-v_{h_1}(w_2)|-|v_{h_1}(w_2)-v_{h_2}(w_2)|+\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2) \\
&\ge \frac{1}{\Lambda}|w_1-w_2|-2\Lambda\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2)+\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2) \\
&\ge \frac{1}{2\Lambda}|w_1-w_2|+\bar{d}_{CC}^{\frac{1}{\alpha}}(h_1,h_2) \\
&\ge \frac{1}{2\Lambda}d((w_1,h_1),(w_2,h_2)).
\end{aligned}$$

□

由于 $W\times U'$在 N 中稠密，引理 9.5表明 $G_0|_{W\times U'}$可延拓为双Lipschitz映射 $G_0\colon N\to N$。

引理 9.6。 对于每个 $\gamma\in\Gamma$，$\bar{G}_0\circ\gamma\circ\bar{G}_0^{-1}$沿着 $e^{t\gamma}$ 的陪集以相似常数 W 作用。

证明。 注意， G_0^{-1}可表示为 $G_0^{-1}(w,h) = (v_h^{-1}(w)\ h)$。如上所述，将 γ写作 $\gamma(w,h) = ($ $\gamma^{\mathbb{R}}\ w\ h\ \ \gamma^{H}\ h$ $G_0 \circ \gamma \circ G_0^{-1}\ w\ h\ =\ v_{\gamma^H\ h}\ \gamma^{\mathbb{R}}\ v_h^{-1}\ w\ \ h\ \ \gamma^H\ h\ .$ $h \in (,)\ (\ )$. 因此 $(,)\ (()\ (\ (\ (\ )\ )\ (\ ))\ (\ ))$ 令 $(\ )$ $U' \cap\ e^{t_\gamma \bar{D}} \circ \bar{\gamma}^{\ -1}\ U'\ \ w_1\ w_2 \in W$ $\gamma \in \Gamma_0$ 9 2 $(\ )$, ,。 先假设 。由引理 。我们有

$$|v_{\gamma^H(h)}(\gamma^{\mathbb{R}}(v_h^{-1}(w_1),h)) - v_{\gamma^H(h)}(\gamma^{\mathbb{R}}(v_h^{-1}(w_2),h))| = e^{t_\gamma}|v_h(v_h^{-1}(w_1)) - v_h(v_h^{-1}(w_2))| = e^{t_\gamma}|w_1 - w_2|.$$

由于 $U' \cap (e^{t_\gamma D^-} \circ \bar{\gamma})^{-1}(U')$ 在 H 中具有全测度，我们看到，将映射 $\bar{G}_0 \circ \gamma \circ \bar{G}_0^{-1}$ 限制在 W 的几乎每个陪集上，都是一个相似变换，相似常数为 e^{t_γ}。由于 $\bar{G}_0 \circ \gamma \circ \bar{G}_0^{-1}$ 是双Lipschitz 映射，我们看到，将 $\bar{G}_0 \circ \gamma \circ \bar{G}_0^{-1}$ 限制在 W 的每个陪集上，都是一个相似变换，相似常数为 e^{t_γ}。

现在考虑一般的 $\gamma \in \Gamma$。存在一个序列 $\gamma_j \in \Gamma_0$，在 N 的紧子集上一致地收敛到 γ。由于将每个 $\bar{G}_0 \circ \gamma_j \circ \bar{G}_0^{-1}$ 限制在 W 的每个陪集上都是一个相似变换，相似常数为 $e^{t_{\gamma_j}}$，因此 $\bar{G}_0 \circ \gamma \circ \bar{G}_0^{-1}$ 也满足类似的结论。□

由引理 9.6可知，必要时经过一次共轭，我们可以假设 $\tilde{\gamma}(\cdot, h)$ 对每个 $\mathbb{R}$ 都是 $\gamma \in \Gamma$ 的平移，并且 $h \in H$。现在我们可以将 γ 写成

$$\gamma(w,h) = \gamma(0,0) \cdot e^{t_\gamma D}(w + s_\gamma(h), Bh),$$

其中 $s_\gamma : H \to \mathbb{R}$ 是满足 $s_\gamma(0) = 0$的映射，而 $B : H \to H$ 是 H的分次自同构，并且相对于 $\bar{d}_{CC}$还是一个等距变换。由于 $\{e^{-t_\gamma D} \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$是一族一致双 Lipschitz 映射，我们看到 $\{s_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ 是一个有界子集

$$E_1 = \{s : H \to \mathbb{R} \text{ is } \tfrac{1}{\alpha}\text{-Holder},\ s(0) = 0\}.$$

现在可以将 Day 定理应用于 K 中的一个紧凸子集 E_1，以消去 s_γ，如第7 节所述（现在简单得多）。此后，每个 γ都具有 $\gamma(w,h) = \gamma(0,0) \cdot e^{t_\gamma D}(w, Bh)$ 的形式，并且 这是 (N,d) 的一个相似变换。

我们已经完成了定理 1.2 在 $\dim(W) = 1$、$\dim(N/W) \geq 2$的情形下的证明。

如上文所述，本节中的论证对积度量空间 $\mathbb{R} \times Y$均有效:

˜定理 9.7。设 Y是带有距离 d的真度量空间。设 $\alpha \geq 1$ 和 d 是 $\mathbb{R} \times Y$上的距离，由 $\tilde{d}((w_1, y_1), (w_2, y_2)) = |w_1 - w_2| + d(y_1, y_2)^{\frac{1}{\alpha}}$定义。设 Γ 是 $(\mathbb{R} \times Y, d)$ 的一个可和一致˜拟相似群。假设 Γ 在 $\mathbb{R} \times Y$上的作用置换子集 $\{\mathbb{R} \times \{y\} : y \in Y\}$，并在 (Y,d) 上诱导一个相似作用。那么， Γ 可以通过双Lipschitz共轭嵌入˜$(\mathbb{R} \times Y, d)$ 的相似变换群中。

证明。 本节中的论证表明，经过一次共轭， Γ 通过相似变换作用于“纤维” $\mathbb{R} \times \{y\}$。此时， Γ 中仍可能包含剪切分量 s。可以通过修改上述论证，或应用[DyX16]中的定理 3.3 来消除这些剪切分量。□

10. Case $\dim(N/W) = 1$

本节讨论 $\dim(N/W) = 1$ 的情形。

与前面一样，我们将进行双 Lipschitz 共轭，使得 Γ 成为一个纤维相似群。首先需要证明（必要时用一个双 Lipschitz 共轭替换 Γ ） Γ通过仿射自同构在商空间上诱导一个作用。当 $\dim(N/W) \geq 2$时，我们可以应用 Tukia 型定理来实现这一点。我们需要单独考虑 $\dim(N/W) = 1$ 的情形，因为此时无法应用 Tukia 型定理。Farb-Mosher 的定理 [FM99] 指出，实直线上的一致拟相似群双 Lipschitz 共轭于一个相似变换群。虽然

Γ 在 N 上的作用在商空间 $N/W=\mathbb{R}$上诱导出 Γ 的一致拟相似作用，但目前尚不清楚如何将 $\mathbb{R}$ 的双 Lipschitz 共轭映射提升为 N的双 Lipschitz 映射。

我们考虑两种情形：
情形 I. 存在一个一维理想 H，使得 $\mathfrak{n}$，且 $H\subset V_\alpha$ 和 $H\cap W_\alpha=\{0\}$。在这种情形下，$\mathfrak{n}=\mathfrak{w}\oplus H$ 是两个理想的直和，而 $N=W\times H$ 是一个直积。情形 II. $\mathfrak{n}$ 不允许进行如情形 I 中的直和分解。

情形 I 很容易处理。由于 Γ 置换 W 的陪集，它在商空间 $N/W=H=\mathbb{R}$ 上诱导出一个作用，并得到一个子群 $\overline{\Gamma}\subset$Homeo($\mathbb{R}$)，该子群是一致拟相似群。Farb–Mosher [FM99] 的结果表明，存在一个双Lipschitz映射 $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得 $f_0\overline{\Gamma}f_0^{-1}$ 由相似变换组成。现在令 $F_0=\mathrm{Id}\times f_0\colon N=W\times H\to W\times H=N$。于是 F_0 是 N 的一个双Lipschitz映射，并且共轭 $F_0\Gamma F_0^{-1}$ 具有如下性质：其在商空间 $N/W=H$ 上的诱导作用由相似变换给出。如果 dim(W) ≥ 2，则可以应用定理 3.7，将 Γ 共轭到一个纤维相似群中。如果 dim(W) $=1$，则现在可以使用第9节来完成证明。情形 I 证毕。

接下来考虑情形 II。在这种情形下，我们将证明 Γ 在商空间$N/W=\mathbb{R}$ 上的诱导作用已经是相似变换，因此无需进行共轭。于是我们假设 $\mathfrak{n}$ 不存在情形 I 中那样的直和分解。注意，在这种情形下 dim(W) ≥ 2。应用定理 3.7 后，我们可以假设 Γ 在 W 的陪集上的作用是相似变换。根据第 5 节的讨论，对于每个 $\gamma\in\Gamma$，存在一个 ϕ_γ 的分次自同构W，使得 $(L_{\gamma(g)^{-1}}\circ\gamma\circ L_g)|_W=\phi_\gamma$ 对任意 $g\in N$都成立。元素 γ 诱导出一个双Lipschitz映射$\bar{\gamma}\colon N/W=\mathbb{R}\to N/W$。

断言 $\bar{\gamma}$ 几乎处处具有常导数，因此是一个相似变换。

假设结论不成立。那么存在两点 $\bar{g}_1\neq\bar{g}_2\in N/W$，使得 $\bar{\gamma}$ 在 $\bar{g}_1$ 和 $\bar{g}_2$ 处可微，且 $b_1\neq b_2$，其中 b_1、b_2 分别是 $\bar{\gamma}$ 在 $\bar{g}_1$ 和 $\bar{g}_2$ 处的导数。令$\phi_i\colon N\to N$ 为 γ 在 g_i处的放大极限；也就是说，存在一个序列 $t_j\to\infty$，使得映射序列 $e^{t_jD}\circ L_{(\gamma(g_i))^{-1}}\circ\gamma\circ L_{g_i}\circ e^{-t_jD}\colon N\to N$ 在紧子集上一致收敛到 ϕ_i。由于 γ 是双Lipschitz映射，根据 Arzelà–Ascoli 定理，这样的序列 $\{t_j\}$ 存在。序列$\{t_j\}$ 的不同选取可能产生不同的极限 ϕ_i，但我们只需要其中一个极限。ϕ_i 仍然通过 ϕ_γ作用于 W 的陪集，但现在还具有一个附加性质：它在 $N/W=\mathbb{R}$ 上的诱导作用是乘以 b_i（因为 $\bar{\gamma}$ 在 $\bar{g}_i$ 处可微，且导数为 b_i）。令 $X\in V_\alpha\backslash W_\alpha$。情形 II 的假设蕴含 $[X,W_1]\neq 0$，因此 α必须是整数，因为 $[X,W_1]\subset W\cap V_{1+\alpha}$。根据引理 5.4，存在一个单射线性映射 $B_i\colon\mathbb{R}X\to V_\alpha$ (B_i 也取决于 γ)，使得 B_i诱导出线性映射 $N/W=\mathbb{R}\to N/W, t\mapsto b_it$，并且对所有 $w\in\mathfrak{w}$，都有 $d\phi_\gamma[X,w]=[B_iX,(d\phi_\gamma)w]$。由此可得，对所有 $w\in\mathfrak{w}$，有 $[(B_1-B_2)X,(d\phi_\gamma)w]=0$。由于 $d\phi_\gamma$是 $\mathfrak{w}$的自同构，我们有 $[(B_1-B_2)X,\mathfrak{w}]=0$。注意，对于某个 $Y\in W_\alpha$，有 $(B_1-B_2)X=(b_1-b_2)X+Y$。由于 $b_1-b_2\neq 0, X\notin\mathfrak{w}$，且 $\mathfrak{w}$ 在 $\mathfrak{n}$中的余维为一，我们看出 $\mathfrak{n}$ 由 $\mathfrak{w}$ 和 $(B_1-B_2)X$张成。令 H'为由 $(B_1-B_2)X$张成的 $\mathfrak{n}$ 的子空间。于是 $\mathfrak{n}=\mathfrak{w}\oplus H'$ 是两个理想的直和，这与我们的假设矛盾。情形 II 的证明至此完成。

我们已经证明 Γ 是一个纤维相似群；必要时可将 Γ 替换为其双Lipschitz共轭。现在可以应用第5–8节中的论证，证明 Γ 可以共轭到 Sim(N,d_0) 中，其中 d_0 是 D上的一个固定的极大对称 N-齐次距离。

现在，我们已经完成了在 dim(N/W) $=1$情形下定理 1.2 的证明。结合第 8 节和第 9 节，我们完成了定理1.2的证明。

可以使用半直积（见附录 A）构造许多情形 II 的例子。例如，令 $\mathfrak{n} = \mathfrak{e} \rtimes \mathbb{R}$，其中 $\mathfrak{e}$ 是 Engel 代数（其基为 e_0、e_1、e_2、e_3，且唯一非平凡的括号运算为 $[e_0, e_j] = e_{j+1}$、$j = 1$、2）；并且 $\mathbb{R} = \mathbb{R}X$ 通过 $[X, e_1] = e_3$ 作用于 $\mathfrak{e}$（其他所有括号运算均为 0）。

最后，我们证明有限个 Carnot 群的乘积的一个 Tukia 型定理（各因子可以具有不同的缩放）。

定理 10.1. 对于 $1 \le i \le m$，令 $\alpha_i \ge 1$ 为一个常数，N_i 为一个 Carnot 群，d_i 为 N_i 上的极大对称 Carnot 度量。令 $N = \prod_{i=1}^m N_i$，并令 d 为 N 上的距离，其定义为 $d((x_i), (y_i)) = \sum_i d_i^{\alpha_i}(x_i, y_i)$。令 Γ 为 (N, d) 的一致拟相似群。如果 Γ 在 N 的不同点对空间上的作用是余紧的，那么 Γ 可以通过一个双Lipschitz映射共轭到 (N, d) 的相似变换群中。如果 $\dim(N_i) = 1$，对于某个 i，我们进一步假设 Γ 是可和的。

证明. 将对应的 α_i 相等的那些 N_i 合并后，不妨设 α_i 彼此均不相同。重新排序后，我们还可假设 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$。令 $M_j = \prod_{i=1}^j N_i$。于是，$\{M_j\}_j$ 构成 N 的保持不变的子群序列。由定理 3.7，不妨设对于所有满足 $\dim(N_j) \ge 2$ 的 j，Γ 通过相似变换作用于纤维 $N_j = M_j/M_{j-1}$ 上。记 $H_j = \prod_{i=m-j}^m N_i$，并令 d_j 为 H_j 上的距离，其定义为 $d_j((x_i), (y_i)) = \sum_{i=m-j}^m d_i^{\alpha_i}(x_i, y_i)$。接下来，我们对 j 进行归纳，从 $j = 0$ 开始，证明在对 Γ 进行双Lipschitz共轭后，Γ 在 (H_j, d_j) 上的诱导作用由相似变换给出。对于基例，令 $j = 0$。如果 $\dim(N_m) \ge 2$，那么在 (H_0, d_0) 上的诱导作用 $= (N_m, d_m^{\alpha_m})$ 已经由相似变换给出。如果 $\dim(N_m) = 1$，则本节情形 I 中的论证适用。

对于归纳步骤，假设 $j \ge 1$，且在 (H_{j-1}, d_{j-1}) 上的诱导作用由相似变换给出。我们需要证明，经过进一步的双Lipschitz共轭后，在 (H_j, d_j) 上的诱导作用由相似变换给出。若 $\dim(N_{m-j}) = 1$，则定理 9.7 表明，存在一个从 到 (H_j, d_j) 的双Lipschitz映射 f_0，它将 (H_j, d_j) 上的诱导作用共轭为一个由相似变换给出的作用。令 F_0 为 N 上的双Lipschitz映射，它在 H_j 上等于 f_0，并且在 N_i, $1 \le i < m - j$ 上是恒等映射。于是，$F_0 \Gamma F_0^{-1}$ 在 $(H_j, \tilde{d}_j)$ 上诱导出相似作用。

接下来假设 $\dim(N_{m-j}) \ge 2$。根据归纳假设，在 (H_{j-1}, d_{j-1}) 上的诱导作用由相似变换给出。由第一段可知，在纤维 $N_{m-j} = M_{m-j}/M_{m-j-1}$ 上的作用由相似变换给出。因此，每个 γ 在 H_j 上的诱导作用可表示为：$\gamma(x_{n-j}, y) = \gamma(0)(A_\gamma(x_{n-j} s_\gamma(y)) B_\gamma y)$，其中 $x_{m-j} \in N_{m-j}$, $y \in H_{j-1}$, A_γ 是 N_{m-j} 的自同构，并且 也相对于 d_{m-j} 是相似变换，B_γ 是 (H_{j-1}, d_{j-1}) 上的相似变换，且 $s_\gamma \colon (H_{j-1}, d_{j-1}) \to (Z(N_{m-j}), d_{m-j}^{\frac{1}{\alpha_{m-j}}})$ 是 Lipschitz 的，且满足 $s_\gamma(0) = 0$。我们通过指数映射将李群与其李代数等同，并记作 $s_\gamma = \sum_i s_{\gamma,\, i}$，其中 $s_{\gamma,\, i} \colon H_{j-1} \to Z_i(\mathfrak{n}_{m-j}) = Z(\mathfrak{n}_{m-j}) \cap \mathfrak{n}_{m-j,\, i}$ 是 i 层分量的 s_γ，而 $\mathfrak{n}_{m-j} = \oplus_i \mathfrak{n}_{m-j,\, i}$ 是 $\mathfrak{n}_{m-j}$ 的 Carnot 分次。对于 $i \ge 1$，令

$$E_i = \{c : (H_{j-1}, \tilde{d}_{j-1}) \to (Z_i(\mathfrak{n}_{m-j}), |\cdot|^{\frac{1}{i\alpha_{m-j}}}) \text{ is Lipschitz and } c(0) = 0\},$$

其中 $|\cdot|$ 是 $Z_i(\mathfrak{n}_{m-j})$ 上的一个固定欧几里得度量。容易看出，对于所有 $\gamma \in \Gamma$，$s_\gamma, i \in E_i$。此外，若 $s = \sum_i s_i$ 满足 $s_i \colon H_{j-1} \to Z_i(\mathfrak{n}_{m-j})$，则剪切映射 $F_s \colon H_j \to H_j$，$F_s(x_{n-j}, y) = (x_{n-j} s(y)\ y)$ 是双Lipschitz映射，当且仅当 $s_i \in E_i$。现在运用第 7 节中的论证，我们可以找到 (H_j, d_j) 的一个双Lipschitz剪切映射 f_0，将 Γ 在 (H_j, d_j) 上的诱导作用共轭为相似变换作用。令 F_0 为 N 的双Lipschitz映射，该映射在 H_j 上与 f_0 一致，并且在满足 $1 \le i < m - j$ 的 N_i 上为恒等映射。由此可见，$F_0 \Gamma F_0^{-1}$ 在 (H_j, d_j) 上诱导出一个相似变换作用

□

AppendixA. Examples of Carnot-by-Carnot groups

在本附录中，我们将给出 Carnot-by-Carnot 群的例子。其要点是，这类群非常丰富。这些群是 Carnot 群通过 Carnot 群扩张得到的群。它们对应于 Carnot 代数通过 Carnot 代数扩张这一类型的李代数扩张。群扩张与群上同调之间的经典联系，在李代数中也有对应物：李代数扩张与李代数上同调之间存在联系，见[S66], [HS]。这里简要回顾这一联系。任意扩张 $0 \to \mathfrak{w} \to \mathfrak{n} \to \mathfrak{h} \to 0$都会诱导一个李代数同态 $\bar{\alpha}$： $\mathfrak{h} \to$out($\mathfrak{w}$)：$=$ der($\mathfrak{w}$)/ad($\mathfrak{w}$)。反过来，任意李代数同态 $\bar{\alpha}$： $\mathfrak{h} \to$ out($\mathfrak{w}$)都会诱导一个李代数同态 β： $\mathfrak{h} \to$ der($\mathcal{Z}(\mathfrak{w})$)；存在一个诱导给定 $\bar{\alpha}$ 的扩张 $0 \to \mathfrak{w} \to \mathfrak{n} \to \mathfrak{h} \to 0$，当且仅当 $H^3(\mathfrak{h}, \mathcal{Z}(\mathfrak{w}))$中的某个特定上同调类为零，其中 $\mathcal{Z}(\mathfrak{w})$上的 $\mathfrak{h}$ 模结构由 β给出。当上述扩张确实存在时，诱导给定 $\bar{\alpha}$ 的、由 $\mathfrak{h}$ 扩张 $\mathfrak{w}$ 所得扩张的等价类集合，与 $H^2(\mathfrak{h}, \mathcal{Z}(\mathfrak{w}))$中的元素一一对应。因此，对于扩张 $0 \to \mathfrak{w} \to \mathfrak{n} \to \mathfrak{h} \to 0$的每个例子，我们都得到一族由 $H^2(\mathfrak{h}, \mathcal{Z}(\mathfrak{w}))$参数化的扩张。如果从一个分裂扩张开始（它对应于半直积），且第二上同调非平凡，那么得到的扩张将不再是分裂扩张。以下的半直积例子正属于这种情形。

下面介绍一些例子。设 $\mathfrak{w} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$和 $\mathfrak{h} = H_1 \oplus \cdots H_n$是两个 Carnot 代数。

平凡扩张。这就是直和 $\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{h}$。

半直积。 回顾一下，每个李代数同态 $\mathfrak{h} \to \mathrm{der}(\mathfrak{w})$ 都确定一个半直积 $\mathfrak{w} \rtimes \mathfrak{h}$。平凡同态给出直和 $\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{h}$。我们将构造非平凡的李代数同态 $\mathfrak{h} \to \mathrm{der}(\mathfrak{w})$。首先回顾一个关于自由幂零李代数的结果，见 [S71]。

命题 A.1. 设 $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_t$ 是一个 t-步自由幂零李代数，且 $L: F_1 \to F$是任意线性映射。则

(1) L 唯一延拓为导子 $d: F \to F$; (2) L 唯一延拓为李代数同态 ϕ: $F \to F$。

设 $\mathfrak{h} = F/I$和 $\mathfrak{w} = F/I$，其中 $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_t$ 和 $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_{\tilde{t}}$是自由幂零李代数，且 $I \subset F$、$I \subset F$是满足 $I \subset F_{k+1} \oplus \cdots \oplus F_t$、$I \subset F_{\tilde{k}+1} \oplus \cdots \oplus F_{\tilde{t}}$的分次理想，其中 k、k为正整数。对于每个整数 $s \geq 0$，令 der$_s$($\mathfrak{w}$) 表示由下式定义的 der($\mathfrak{w}$) 的线性子空间：

$$\mathrm{der}_s(\mathfrak{w}) = \{\rho : \mathfrak{w} \to \mathfrak{w} \text{ is a derivation satisfying } \rho(W_i) \subset W_{i+s}, \forall i\}.$$

引理 A.2。设 $\alpha \geq 2$ 为一个整数，且 $L: H_1 \to$ der$_\alpha$($\mathfrak{w}$) 是一个线性映射。如果 $m \leq (k+1)\alpha$，则 L 唯一延拓为一个李代数同态 $\mathfrak{h} \to$der($\mathfrak{w}$)。

证明。令 L_α 为由 der$_\alpha$($\mathfrak{w}$) 生成的 der($\mathfrak{w}$) 的李子代数。由于 $\mathfrak{w}$ 是 m 步长，假设 $m \leq (k+1)\alpha$ 意味着 L_α 是步长至多为 k 的幂零李代数。由于$\mathfrak{h} = F/I$ 与 $I \subset F_{(k+1)}$，我们可以将 H_1 与 F 的第一层 F_1 等同。现在， F 是步长至少为 k 的自由幂零李代数，而 L_α 的步长至多为 k。根据自由幂零李代数的泛性质，线性映射 $L: H_1 = F_1 \to L_\alpha$ 可唯一延拓为李代数同态$\rho: F \to L_\alpha$。由于 L_α 的步长至多为 k，我们有 $\rho(F^{(k+1)}) = 0$。由于 $\mathfrak{h} = F/I$ 与 $I \subset F^{(k+1)}$， ρ 诱导出一个李代数同态 $\mathfrak{h} \to L_\alpha \subset$ der($\mathfrak{w}$)，它延拓了 L。

□

引理 A.3。令 $L(W_1, W_{\alpha+1})$ 为从 W_1 到 $W_{\alpha+1}$ 的线性映射构成的向量空间，令 $\Phi : \tilde{}\mathrm{der}_\alpha(\mathfrak{w}) \to L(W_1, W_{\alpha+1})$ 为限制映射，$\Phi(\rho) = \rho|_{W_1}$。若 $m \le \alpha + k$，则 Φ 是线性同构。

证明。由于 $\mathfrak{w}$ 由 W_1生成，我们可知 Φ 是单射。我们将通过证明 $L(W_1, W_{\alpha+1})$中的每个映射都可延拓为一个导子来建立 Φ 的满射性，而该导子必然属于 $\mathrm{der}_\alpha(\mathfrak{w})$。设 $L \in L(W_1, W_{\alpha+1})$。由于 $\mathfrak{w} = \tilde{F}/\tilde{I}$且 $\tilde{I} \subset \tilde{F}^{(k+1)}$，我们可以将 W_1等同于 $\tilde{F}_1$，并将 L 视为从 F_1 到 $W_{\alpha+1}$的线性映射。由于 $W_{\alpha+1} = F_{\alpha+1}/(F_{\alpha+1} \cap I)$，我们可以将 L 提升为一个映射，其值域落在$F_{\alpha+1}$中；也就是说，存在一个线性映射 $L : F_1 \to F_{\alpha+1}$，使得 $\pi \circ L = L$，其中 $\pi : F \to \mathfrak{w}$ 是投影。根据命题 A.1，线性映射 L 可延拓为一个导子 $d : F \to F$。注意，$\tilde{d}(\tilde{F}^{(k+1)}) \subset \tilde{F}^{(k+1+\alpha)}$。由于 $\mathfrak{w}$ 是 m步的，假设 $m \le \alpha + k$意味着$(\pi \circ \tilde{d})(\tilde{F}^{(k+1)}) = 0$。由于 $\mathfrak{w} = \tilde{F}/\tilde{I}$且 $\tilde{I} \subset \tilde{F}^{(k+1)}$，容易看出 $\tilde{d}$诱导出一个导子 $d : \mathfrak{w} \to \mathfrak{w}$，它延拓了$L$。

□

下面的推论提供了许多非平凡的 Carnot 代数半直积的例子，从而也提供了许多非平凡的 Carnot 群半直积的例子。

推论 A.4. 设 $m \le \min\{k + \alpha, (k+1)\alpha\}$。那么，对于任意线性映射 $f : H_1 \to L(W_1, W_{\alpha+1})$，映射 $\Phi^{-1} \circ f$ 可唯一延拓为一个李代数同态 $\mathfrak{h} \to \mathrm{der}(\mathfrak{w})$。特别地，对于任意非零线性映射 $f : H_1 \to L(W_1, W_{\alpha+1})$，存在一个非平凡的李代数同态 $\mathfrak{h} \to \mathrm{der}(\mathfrak{w})$，从而存在一个非平凡的半直积 $\mathfrak{w} \rtimes \mathfrak{h}$。

我们列举推论 A.4 的几个特殊情形。

(1) $\alpha = m - 1$。在此情形下，条件 $m \le \min\{k + \alpha, (k+1)\alpha\}$ 自动满足。因此，每个非零线性映射 $f : H_1 \to L(W_1, W_m)$ 都将产生一个非平凡的半直积 $\mathfrak{w} \rtimes \mathfrak{h}$。(2) $\alpha = m - 2$、$m \ge 4$和 $k \ge 2$，在此情形下，条件 $m \le \min\{k + \alpha, (k+1)\alpha\}$ 得到满足。因此，每个非零线性映射 $f : H_1 \to L(W_1, W_{m-1})$ 都将产生一个非平凡的半直积 $\mathfrak{w} \rtimes \mathfrak{h}$。

中心积。设 $\alpha \ge 2$ 是一个整数，$\mathfrak{h} = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$和 $\mathfrak{w} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{\alpha n}$ 是两个 Carnot 代数。设 $W' \subset W_{\alpha n}$ 和 $H' \subset H_n$ 是线性子空间，且 $\phi : W' \to H'$ 是一个线性同构。相应的中心积 $\mathfrak{w} \times_\phi \mathfrak{h}$ 是直和 $\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{h}$ 关于中心理想 $\{(w, -\phi(w)) | w \in W'\}$ 的商空间。显然存在一个短正合列 $0 \to \mathfrak{w} \to \mathfrak{w} \times_\phi \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}/H' \to 0$，因此 $\mathfrak{w} \times_\phi \mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{w}$ 的扩张，其商为 $\mathfrak{h}/H'$。注意，$\mathfrak{h}/H' = H_1 \oplus \cdots \oplus (H_n/H')$ 是一个 Carnot 代数。

Appendix B. Lattices in SOL-like groups

在本附录中，我们给出一些具有格的 SOL 型群的例子。

可解李群中格存在的充要条件见 [M70] 以及 [Au73]的第三章第 6 节中的定理6.2。但这些条件并不容易验证。这里我们引用 Sawai–Yamada 的一个结果 [SY05]，该结果给出了某些可解李群存在格的一个简单充分条件。设 $\mathfrak{n}$ 是一个有理幂零李代数。这里，“有理”均值 $\mathfrak{n}$ 具有一个有理结构常数的基。于是可得 $\mathfrak{n}$ 具有一个$\{X_1, \cdots, X_m\}$ 具有整数结构常数的基。设 $\mathfrak{n}^i\,(i = 1, 2)$ 是 $\mathfrak{n}$ 的一个副本，并具有相应的

基 $\{X_1^i, \cdots, X_m^i\}$。因此， $X_j \mapsto X_j^i$延拓为从 $\mathfrak{n}$ 到 $\mathfrak{n}^i$的一个同构。设 k_j、 $1 \leq j \leq m$为整数，且映射 $X_j^1 \mapsto k_j X_j^1$、 $X_j^2 \mapsto -k_j X_j^2$延拓为 $\mathfrak{n}^1 \times \mathfrak{n}^2$上的一个导子 D。设S为半直积（$N^1 \times N^2$） $\rtimes \mathbb{R}$，其中 N^i是李代数为 $\mathfrak{n}^i$ 的单连通李群，而 $\mathbb{R}$ 对 $N^1 \times N^2$ 的作用由导子 D生成。

定理 B.1. *(*[SY05], 定理 2) 上述可解李群 S 存在一个格。

我们回顾一下，可解李群中的格总是一致的 [M62]。

我们给出两个具体例子。第一个是所谓的 Benson–Gordon 群 [BG], ，它也在 [SY05] 中讨论过。在这个例子中， $\mathfrak{n}^i$ $(i = 1, 2)$ 是一个 Heisenberg 代数的副本，其基为 X^i, Y^i, Z^i，基元素之间唯一非平凡的括号是 $[X^i, Y^i] = Z^i$。设 k_1, k_2 为整数。令 D_i: $\mathfrak{n}^i \to \mathfrak{n}^i$ 为由 $D_i(X^i) = k_1 X^i$, $D_i(Y^i) = k_2 Y^i$, D_i $(Z^i) = (k_1 + k_2) Z^i$ 给出的导子。令 $D = (D_1, -D_2)$ 为 $\mathfrak{n}^1 \times \mathfrak{n}^2$ 的导子。半直积 $S_{k_1,k_2} = (N^1 \times N^2)$ $\rtimes_D \mathbb{R}$ 是一个 Benson-Gordon 群。当 k_1, k_2 为正时，S_{k_1,k_2} 是我们感兴趣的一种 SOL 型群。当 $k_1 = k_2$ 为正时，(N^i, D_i) 属于 Carnot 型。接下来我们给出一个 N 为 Carnot-by-Carnot 的例子。

在第二个例子中， $\mathfrak{n}$是一个半直积 $\mathfrak{n} = \mathfrak{e} \rtimes \mathfrak{h}$，其中 $\mathfrak{e}$ 是 Engel 代数（其基为e_0、 e_1、 e_2、 e_3，且仅有非平凡括号运算 $[e_0, e_i] = e_{i+1}$、 $i = 1$， 2）， $\mathfrak{h}$ 是 Heisenberg 代数（其基为 X、 Y、 Z，且仅有非平凡括号运算 $[X, Y] = Z$），而 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{e}$ 上的作用由$[X, e_0] = e_3$、 $[Y, e_1] = e_3$ 给出（其他括号运算均为 0）。这个半直积属于推论 A.4 之后讨论的情形 (1)。设 D_0 是由 $D_0(e_0) = e_0$、 $D_0(e_j) = j e_j$ $(j = 1, 2, 3)$、D_0 $(X) = 2X$、 $D_0(Y) = 2Y$、 $D_0(Z) = 4Z$给出的 $\mathfrak{n}$ 的导子。令 $D_1 = D_2 = D_0$。那么 $D = (D_1, -D_2)$是 $\mathfrak{n}^1 \times \mathfrak{n}^2$的一个导子。最后，令 $S = (N^1 \times N^2) \rtimes_D \mathbb{R}$。根据定理 B.， 1 S 有一个格。在这个例子中，$(N_i$, $D_i)$是 Carnot-by-Carnot。

Appendix C. Compatible expressions

在本附录中，我们证明引理 5.4。回顾假设：$(\mathfrak{n}, D)$ 是一个对角 Heintze 对， $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的理想，使得 $D(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}$； F: $N \to N$ 是一个双Lipschitz映射，它置换 W 的陪集，其中 W 是 N 中李代数为 $\mathfrak{w}$ 的连通李子群；对于每个 $g \in N$，映射 $F_g|_W$ $^-$ $^-$是 W 的一个自同构 ϕ，而 F 诱导出 N/W 的一个仿射映射 F。令 B 为 F 的自同构$^-$部分。

证明中的主要要点是以下事实： $\phi \circ (\chi_g|_W) = (\chi_{G(g)}|_W) \circ \phi$，其中 $G = F_0$。参见引理 5.1。在以下证明中，我们将默认（并反复）使用以下事实： $[Z(\mathfrak{w}) \ \mathfrak{n}] \subset Z(\mathfrak{w})$。这由 Jacobi 恒等式以及 W 是 $\mathfrak{n}$的理想这一事实推出。

对于有限维向量空间的线性变换 T，我们用 $\sigma(T)$ 表示 $^-$ $^-$的特征值集合。回忆 $\sigma(D) \subset \sigma(D)$，其中 D： $\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to \mathfrak{n}/\mathfrak{w}$ 是由 D 导出的导子。$^-$令 $I = \sigma(D) - \sigma(D)$。

证明。置 $G = F_0 = L_{F(0)^{-1}} \circ F$。于是 $G(0) = 0$。根据引理 5.1，存在一个 ϕ的自同构，使得若置 $A = d\phi$，则 A保持层结构， $A \circ d(\chi_g|_W) \circ A^{-1} = d(\chi_{G(g)}|_W)$ 且$G(h * w) = G(h) * Aw$ 对任意 $g = h * w \in \mathfrak{n}$均成立，其中 $h \in H, w \in \mathfrak{w}$。令 $H' \subset \mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{n}$ 的一个分次的$^-$子空间，与 $\mathfrak{w}$互为补；也就是说，对于每个 $\lambda \in \sigma(D)$， $H'_\lambda \subset V_\lambda$ 是 V_λ 中的 W_λ 的一个补线性子空间（若 $W_\lambda = \{0\}$，则 $H'_\lambda = V_\lambda$），且 $H' = \oplus_{\lambda \in \sigma(\bar{D})} H'_\lambda$。记 B_0: $H \to H'$为线性同构 $(\pi|_{H'})^{-1} \circ d\bar{B} \circ (\pi|_H)$。由于 $\pi(G(h)) = d\overline{B}(\bar{h}) = \pi(B_0 h)$，存在一个映射$S$: $\mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to \mathfrak{w}$，使得 $G(h) = B_0 h * S(h)$。因此，映射 G 具有如下形式

$$G(h * w) = B_0 h * S(\bar{h}) * Aw.$$

一般而言， B_0 和 S 不满足相容表达式定义中的条件 (2) 和 (3)。我们需要修改映射 B_0 （因而也要修改 S）。

对于每个 $\lambda \in \sigma(D|_{\mathfrak{w}})$，记 $Z_\lambda(\mathfrak{w}) := Z(\mathfrak{w}) \cap W_\lambda$，并令 $Z_\lambda^\perp(\mathfrak{w}) \subset W_\lambda$ 为一个子空间，使得$W_\lambda = Z_\lambda(\mathfrak{w}) \oplus Z_\lambda^\perp(\mathfrak{w})$。映射 S 可写为 $S(\bar{h}) = \sum_{\lambda\in\sigma(D|_{\mathfrak{w}})} S_\lambda(\bar{h})$，其中 $S_\lambda := \pi_\lambda \circ S$且 $\pi_\lambda : \mathfrak{w} \to W_\lambda$ 是相对于分解 $\mathfrak{w} = \oplus_\lambda W_\lambda$的投影。存在两个映射 $\tilde{S}_\lambda : \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\lambda(\mathfrak{w})$ 和 $S_\lambda^\perp : \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to Z_\lambda^\perp(\mathfrak{w})$，使得 $S_\lambda(\bar{h}) = \tilde{S}_\lambda(\bar{h}) + S_\lambda^\perp(\bar{h})$。

我们将使用方程 $A \circ d(\chi_g|_W) \circ A^{-1} = d(\chi_{G(g)}|_W)$. 令 $\mu \in \sigma(D|_{\mathfrak{w}})$, $w \in W_\mu$和 $h \in H$为任意对象。接下来计算 $A \circ d(\chi_h|_W) \circ A^{-1}(w)$ 以及 $d(\chi_{G(h)}|_W)(w)$。根据 (2)

$$A \circ d(\chi_h|_W) \circ A^{-1}(w) = w + A[h, A^{-1}w] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} A(\operatorname{ad} h)^i (A^{-1}w)$$

and

$$d(\chi_{G(h)}|_W)(w) = w + [G(h), w] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} (\operatorname{ad}(\mathrm{G(h)}))^i (w).$$

由 $A \circ d(\chi_g|_W) \circ A^{-1} = d(\chi_{G(g)}|_W)$，可得

$$L := A[h, A^{-1}w] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} A(\operatorname{ad} h)^i (A^{-1}w) = [G(h), w] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} (\operatorname{ad}(\mathrm{G(h)}))^i (w) := R. \tag{14}$$

由于 $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{n}$中的理想，（14）中的每一项都属于 $\mathfrak{w}$。根据BCH公式,

$$G(h) = B_0 h * S(\bar{h}) = B_0 h + S(\bar{h}) + \frac{1}{2}[B_0 h, S(\bar{h})] + \cdots . \tag{15}$$

第一断言： $S_\lambda^\perp = 0$ 对 $\lambda \in I$成立；换言之，对 $\lambda \in I$， $S_\lambda(\bar{h}) \in Z_\lambda(\mathfrak{w})$。

证明通过归纳法进行。令 $\lambda_0 \in I$。假设对所有满足 $\lambda < \lambda_0$ 的 $\lambda \in I$，都有 $S_\lambda^\perp = 0$。为简化记号，我们用 w^z 表示 $Z(\mathfrak{w})$ 中的一个元素，用 $w^>$ 表示 $\oplus_{\lambda>\lambda_0} W_\lambda$ 中的一个元素，用 $\bar{x}$、 $\bar{y}$ 等表示 $\sum_{\lambda\in\sigma(\bar{D})} W_\lambda$ 中的元素，并用下标表示不同的此类元素。由此可写出 $S(\bar{h}) = \bar{x}_1 + w_1^z + S_{\lambda_0}(\bar{h}) + w_1^>$。于是 $[B_0 h, S(\bar{h})] = \bar{x}_2 + w_2^z + w_2^>$，且所有由 $B_0 h$ 和 $S(h)$ 构成的迭代括号都具有这种形式。因此我们得到

$$G(h) = B_0 h + \bar{x}_3 + w_3^z + S_{\lambda_0}(\bar{h}) + w_3^>.$$

由此我们得到 $[G(h)\ w] = [B_0 h + \bar{x}_3, w] + [S_{\lambda_0}(\bar{h})\ w] + [w_3^>, w]$，并且对于 $i \geq 2$, $(\operatorname{ad} G(h))^i(w) = y_1 + y_2$, 其中 $y_1 \in \oplus_{\lambda\in\sigma(\bar{D})} W_{\lambda+\mu}$ 和 $y_2 \in \oplus_{\lambda>\lambda_0+\mu} W_\lambda$。由于根据假设 $\lambda_0 \in I$，我们看到 $\pi_{\lambda_0+\mu} L = 0$ 以及 $\pi_{\lambda_0+\mu} R = [S_{\lambda_0}(h)\ w]$。因此，对于任意 $w \in W_\mu$ 以及任意 $\mu \in \sigma(D|_{\mathfrak{w}})$，都有 $[S_{\lambda_0}(h)\ w] = 0$，从而 $S_{\lambda_0}(h) \in Z_{\lambda_0}(W)$。

第二个断言：对于每个 $\lambda \in \sigma(D)$，存在一个线性映射 $B_\lambda : H \to \mathfrak{n}$ 满足 $\mathfrak{g}$ $(a)_\lambda$。 $dB \circ \pi|_H = \pi \circ B_\lambda$ 以及对于任意 $\lambda' \in \sigma(\bar{D})$ 的 $B_\lambda(H_{\lambda'}) \subset V_{\lambda'}$； $(b)_\lambda$。对于 $\lambda' > \lambda$, $B_\lambda|_{H_{\lambda'}} = B_0|_{H_{\lambda'}}$； $(c)_\lambda$。对于任意 $w \in \mathfrak{w}$，以及满足 $\lambda' \leq \lambda$ 的 $h \in H_{\lambda'}$； $(d)_\lambda$。映射 G 可写为 $G(h * w) = B_\lambda h * S^{(\lambda)}(\bar{h}) * Aw$，其中 $S^{(\lambda)} : \mathfrak{n}/\mathfrak{w} \to \mathfrak{w}$ 是满足 $S_{\lambda'}^{(\lambda)}(\bar{h}) \in Z_{\lambda'}(\mathfrak{w})$（对于 $\lambda' \leq \lambda$）的映射，其中 $S_{\lambda'}^{(\lambda)} = \pi_{\lambda'} \circ S^{(\lambda)}$。

第二个断言的证明同样使用归纳法。令 $\lambda_0 \in \sigma(D)$，并假设对于所有 $\lambda < \lambda_0$，满足 B_λ satisfying $(a)_\lambda$ – $(d)_\lambda$ 的对象均已定义。令 $\lambda_1 < \lambda_0$ 为小于 λ_0 的最大 $\lambda \in \sigma(D)$。我们首先证明，$S^{(\lambda_1)}_{\lambda_0}{}^\perp(\bar{h})$ 仅取决于 h 的 H_{λ_0} 分量 h_{λ_0}，并且关于 h_{λ_0} 是线性的。

令 $h\in H$ 和 $w\in W_\mu$，其中某个 $\mu\in\sigma(D|_{\mathfrak{w}})$。我们将对等式 (14) 两边应用 $\pi_{\lambda_0+\mu}$。利用第一断言和归纳假设，我们可以写出 $S^{(\lambda_1)}(\bar{h}) = w_1^z + S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}(\bar{h}) + w_1^>$。由此得到 $[B_{\lambda_1}h, S^{(\lambda_1)}(\bar{h})] = w_2^z + w_2^>$; $G(h) = B_{\lambda_1}h + w_3^z + S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}(\bar{h}) + w_3^>$; $[G(h)\ w] = [B_{\lambda_1}h, w] + [S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}(\bar{h})\ w] + [w_3^>, w]$; 并且对于 $i\geq 2$, $(\mathrm{ad}\ G(h))^i(w) = (\mathrm{ad}B_{\lambda_1}h)^i(w) + y_3$，其中 $y_3\in\oplus_{\lambda>\lambda_0+\mu}W_\lambda$。因此我们有

$$\pi_{\lambda_0+\mu}L = A[h_{\lambda_0}, A^{-1}w] + \sum_{i\geq 2}\frac{1}{i!}\sum_{\lambda_{j_1}+\cdots+\lambda_{j_i}=\lambda_0} A(\mathrm{ad}h_{\lambda_{j_1}}\circ\cdots\circ\mathrm{ad}h_{\lambda_{j_i}}(A^{-1}w)),$$

$$\pi_{\lambda_0+\mu}R = [B_{\lambda_1}h_{\lambda_0}, w] + [S_{\lambda_0}^{(\lambda_1)}(\bar{h}), w] + \sum_{i\geq 2}\frac{1}{i!}\sum_{\lambda_{j_1}+\cdots+\lambda_{j_i}=\lambda_0} \mathrm{ad}B_{\lambda_1}h_{j_1}\circ\cdots\circ\mathrm{ad}B_{\lambda_1}h_{j_i}(w).$$

另一方面，$(c)_{\lambda_1}$ 对 $i\geq 2$成立

$$A(\mathrm{ad}h_{\lambda_{j_1}}\circ\cdots\circ\mathrm{ad}h_{\lambda_{j_i}}(A^{-1}w)) = \mathrm{ad}B_{\lambda_1}h_{j_1}\circ\cdots\circ\mathrm{ad}B_{\lambda_1}h_{j_i}(w).$$

由此可得

$$A[h_{\lambda_0}, A^{-1}w] = [B_{\lambda_1}h_{\lambda_0}, w] + [S_{\lambda_0}^{(\lambda_1)}(\bar{h}), w]. \tag{16}$$

由于两项 $A[h_{\lambda_0}, A^{-1}w]$ 和 $[B_{\lambda_1}h_{\lambda_0}, w]$ 仅依赖于 H_{λ_0} 分量 h_{λ_0} 的 h，且关于 h_{λ_0}是线性的，我们看到 $S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}{}^{\perp}(\bar{h}) = S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}{}^{\perp}(\bar{h}_{\lambda_0})$ 也仅依赖于 h_{λ_0}，并且关于 h_{λ_0} 是线性的。

我们如下定义 B_{λ_0}：当 $\lambda\neq\lambda_0$时，$B_{\lambda_0}|_{H_\lambda} = B_{\lambda_1}|_{H_\lambda}$和 $B_{\lambda_0}h = B_{\lambda_1}h + S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}{}^{\perp}(\bar{h})$ 当 $h\in H_{\lambda_0}$时。我们需要验证 $(a)_{\lambda_0}-(d)_{\lambda_0}$。性质 $(a)_{\lambda_0}$ 和 $(b)_{\lambda_0}$ 显然成立，而 $(c)_{\lambda_0}$ 由 $(c)_{\lambda_1}$、(16) 以及 B_{λ_0}的定义可得。对于 $(d)_{\lambda_0}$: 使用 $(d)_{\lambda_1}$并将 G写成

$$G(h*w) = B_{\lambda_1}h * S^{(\lambda_1)}(\bar{h}) * Aw = B_{\lambda_0}h * S^{(\lambda_0)}(\bar{h}) * Aw,$$

其中 $S^{(\lambda_0)}(\bar{h}) = (-B_{\lambda_0}h) * B_{\lambda_1}h * S^{(\lambda_1)}(\bar{h})$。我们需要证明对于 $\lambda'\leq\lambda_0$，有 $S^{(\lambda_0)}{}_{\lambda'}(\bar{h})\in Z_{\lambda'}(\mathfrak{w})$。根据 B_{λ_0}的定义以及 B_{λ_0}的线性性，我们得到对于任意 $h\in H$，B_{λ_1}有 $B_{\lambda_0}h = B_{\lambda_1}h + S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}{}^{\perp}(\bar{h}_{\lambda_0}) = B_{\lambda_1}h + S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}{}^{\perp}(\bar{h})$。利用这一点，我们得到

$$[-B_{\lambda_0}h, B_{\lambda_1}h] = -[S_{\lambda_0}^{(\lambda_1)\perp}(\bar{h}), B_{\lambda_1}h]\in\oplus_{\lambda\geq(\lambda_0+\alpha)}W_\lambda.$$

根据 BCH公式，$(-B_{\lambda_0}h)*B_{\lambda_1}h = (-B_{\lambda_0}h) + B_{\lambda_1}h + \frac{1}{2}[-B_{\lambda_0}h, B_{\lambda_1}h] + \cdots = -S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}{}^{\perp}(\bar{h}) + w_4$, 其中 $w_4\in\oplus_{\lambda\geq(\lambda_0+\alpha)}W_\lambda$。根据 $(d)_{\lambda_1}$，$[-S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda_0}{}^{\perp}(\bar{h})\ S^{(\lambda_1)}(\bar{h})]\in\oplus_{\lambda\geq 2\lambda_0}W_\lambda$。最后，

$$\begin{aligned} S^{(\lambda_0)}(\bar{h}) &= (-B_{\lambda_0}h) * B_{\lambda_1}h * S^{(\lambda_1)}(\bar{h}) \\ &= -S_{\lambda_0}^{(\lambda_1)\perp}(\bar{h}) + w_4 + S^{(\lambda_1)}(\bar{h}) + \frac{1}{2}[-S_{\lambda_0}^{(\lambda_1)\perp}(\bar{h}) + w_4, S^{(\lambda_1)}(\bar{h})] + \cdots \\ &= S^{(\lambda_1)}(\bar{h}) - S_{\lambda_0}^{(\lambda_1)\perp}(\bar{h}) + w_5, \end{aligned}$$

满足 $w_5\in\oplus_{\lambda\geq(\lambda_0+\alpha)}W_\lambda$。由此，$(d)_{\lambda_1}$ 以及第一断言可知，对于 $\lambda<\lambda_0$，有 $S^{(\lambda_0)}{}_{\lambda}(\bar{h}) = S^{(\lambda_1)}{}_{\lambda}(\bar{h})\in Z_\lambda(\mathfrak{w})$，并且

$$S_{\lambda_0}^{(\lambda_0)}(\bar{h}) = S_{\lambda_0}^{(\lambda_1)}(\bar{h}) - S_{\lambda_0}^{(\lambda_1)\perp}(\bar{h}) = \tilde{S}_{\lambda_0}^{(\lambda_1)}(\bar{h})\in Z_{\lambda_0}(\mathfrak{w}).$$

这验证了（d）$_{\lambda_0}$，并完成了第二个断言的归纳论证 .

记 $\bar{D}$ 的最大特征值为 $\bar{\lambda}$。令 $B = B_{\bar{\lambda}}$ 和 $s = A^{-1} \circ S^{(\bar{\lambda})}$。我们需要验证相容表达式定义中的条件 1–3。条件 1 由（a）$_{\bar{\lambda}}$ 推出，条件 2 由（c）$_{\bar{\lambda}}$推出。由（d）$_{\bar{\lambda}}$，我们得到 F 的一个表达式（即 $G = F_0 = L_{F(0)^{-1}} \circ F$）：

$$F(h * w) = F(0) * Bh * As(\bar{h}) * Aw.$$

– ¯根据第一断言和（d）$_{\bar{\lambda}}$，我们可知 s（h）$\in Z$（$\mathfrak{w}$）。这使我们能够交换 As（h）和 Aw，从而得到 F 的相容表达式。

□

References

[Ale75] D. V. Alekseevski, *Homogeneous Riemannian spaces of negative curvature*, 《数学文集》（新系列）96(138)（1975），93–117，168。[AS04] A.A. Agrachev、Y. L. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, 《数学科学百科全书》第87卷，Springer-Verlag，柏林，2004，控制理论与优化 II。[Au73] L. Auslander, *An exposition of the structure of solvmanifolds I. Algebraic theory*, 《美国数学会公报》79（1973），第2期，227–261。[BG] C. Benson、C. Gordon, *Kähler structures on compact solvmanifolds*, 《美国数学会会刊》108（1990），971–980。[BLD] C. Bellettini、E. Le Donne *Sets with constant normal in Carnot groups: properties and examples*, 《瑞士数学学报》96（2021），第1期，149–198。[Ch96] *Chow, Richard (SGP-SING) Groups quasi-isometric to complex hyperbolic space*, 《美国数学会汇刊》348（1996），181757–1769。[CG90] L. Corwin、F. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications Part I. Basic theory* , 《剑桥高等数学研究》第[卷。剑桥大学出版社，剑桥。

and examples **18** 1990

21] *From homogeneous metric spaces to Lie* CKLGO[M.

groups 1705 09648 3 2021

Cowling、V. Kivioja、E. Le Donne、S. Golo 和 A. Ottazzi, 17] , arXiv 预印本 arXiv: 。v（）。

*Orlicz spaces and the large scale geometry of Heintze groups*CP[M. Carrasco Piaggio, 61] , 《数学年刊》368（2017），第1–2期，433–481。 *Illinois J. Math.* **5** Da[M. Day，紧凸集上的不动点定理。18]（1961），585–590。

*On the quasi-isometric classification of locally compact groups*dC[Y. Cornulier, 10] , 《局部紧群的新方向》，伦敦数学会讲义系列，第447卷，剑桥大学出版社，剑桥，2018，第275–342页。MR 3793294。 *Large scale geometry of certain solvable groups*Dy

[ ] *A fiber Tukia theorem for nilpotent Lie groups preprint.* T. Dymarz, [, 《几何与泛

[16] *Day's fixed point theorem group cohomology and quasiisometric rigidity*

函分析》19（2010），第6期，1650–1687。10] DFX T. Dymarz、D. Fisher、X. Xie, ; DyX T. Dymarz、X. Xie, ; , 《群、几何与动力学》10（2016），第4期，1121–1148。 *Proceedings of the International Congress*

of Mathematicians. 1185 1208, 2010 EF[A. Eskin 和

D. Fisher, 《可解群的拟等距刚性》。

07] *Pure Appl. Math. Q.* 第III卷，–

3 2007 4, 1, 927 947

Hindustan Book Agency，新德里。[EFW12] A. Eskin、D. Fisher 和 K. Whyte, 《拟等距与可解群的刚性》。（），第部分 – 。 *Annals of Mathematics*EFW[A. Eskin、D. Fisher 和 K. Whyte。拟等距的粗微分 I：不准等距于 Cayley图的空间。13] , 176(1):221–260，2012。 *Annals of Mathematics*EFW[A. Eskin、D. Fisher 和 K. Whyte。拟等距的粗微分 II：SOL 与灯笼群的刚性。69] , 177(3):869–910，2013。*Geometric measure theory*F[H. Federer,

21] ¨ *On the quasi-isometric and biLipschitz classification of 3d Riemannian Lie* , 《数学科学基础》，

groups **210** 2021 27 42

第153卷，Springer-Verlag New York Inc.，纽约，1969。[FLD99] K. Fassler 和 E. Le Donne, , 《专论几何学》（），-。 *Quasi-isometric rigidity for the solvable Baumslag-Solitar groups. II.*FM[B. Farb、L. Mosher, 20] , 《数学发明》137（1999），第3期，613–649。 *Geodesics and Visual boundary of Horospherical Products*Fe[Ferragut, Tom 22] , https://arxiv.org/abs/2009.04698。*Geometric rigidity of quasi-isometries in horospherical products*Fe[Ferragut, Tom 74] , https://arxiv.org/abs/2211.04093。 *On homogeneous manifolds of negative curvature*H[E. Heintze, 78] , 《数学年刊》211（1974），23–34。 *Differential Geometry*Hel *Lie Groups*S. Helgason, *and Symmetric Spaces*, [,] , Academic Press，纽约，1978。 *Cohomology of Lie algebras*HSG. Hochschild、J-P. Serre, , 《数学年刊》（第二辑）57（1953），591–603。

[HSi90] W. Hebisch, A. Sikora, *A smooth subadditive homogeneous norm on a homogeneous group*, 《数学研究》96卷第3期（1990年），231–236。[KLD17] V. Kivioja, E. Le Donne, *Isometries of nilpotent metric groups*, 《综合理工学院数学杂志》4（2017年），473–482。[LDNG21] E. Le Donne, S. Nicolussi Golo, *Metric Lie groups admitting dilations*, 《数学档案》59（2021年），第1期，125–163。[LDPX22] E. Le Donne, G. Pallier, X. Xie, *Rough similarity of left-invariant Riemannian metrics on some Lie groups*, https://arxiv.org/abs/2208 06510 。M G.D. Mostow, *Homogeneous spaces with finite invariant measure*, 《数学年刊》（第2辑）75（1962年），17–37。[M70] G.D. Mostow, *Representative functions on discrete groups and solvable arithmetic subgroups*, 《美国数学杂志》92（1970年），1–32。[P89] P. Pansu, *Metriques de Carnot-Caratheodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un*, 《数学年刊》（第2辑）129（1989年），第1期，1–60。[P11a] I. Peng, *Large scale geometry of nilpotent-by-cyclic groups*, 《几何与泛函分析》21（2011年），第4期，951–1000。[P11b] I. Peng。某类可解李群的粗微分与拟等距 I。 *Geom. Topol.*，15 4 1883 1925，2011（）：–。[P11c] I. Peng。某类可解李群的粗微分与拟等距 II。 *Geom. Topol.*，15 4 1927 1981，2011（）：–。[R02] V. Runde, *Lectures on amenability*, 《数学讲义》，1774，Springer-Verlag，柏林，2002年。[R91] W. Rudin, *Functional analysis*，第二版。《纯粹与应用数学国际丛书》。McGraw-Hill, Inc.，纽约，1991年。[S66] U. Shukla, *A cohomology for Lie algebras*, 《日本数学学会杂志》18（1966年），275–289。[S71] T. Sato, *The derivations of the Lie algebras*, 《东北数学杂志》（第2辑）23（1971年），21–36。[SX12] N. Shanmugalingam 和 X. Xie, *A rigidity property of some negatively curved solvable Lie groups*, 《赫尔维蒂数学评论》87（2012年），第4期，805–823。[SY05] H. Sawai, T. Yamada, *Lattices on Benson-Gordon type solvable Lie groups*, 《拓扑学及其应用》149（2005年），85–95。[S78] D. Sullivan，论任意双曲运动离散群在无穷远处的遍历理论，载于 *Riemann Surfaces and Related Topics* 1978 ：《石溪会议论文集》（纽约州立大学，石溪，纽约州石溪，1978年），《数学年刊研究》97，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1981年，465–496。[T86] P. Tukia, *On quasiconformal groups. Journal d'Analyse Mathematique* **46**（1986年），318–346。[W00] B. Wilking, *Rigidity of group actions on solvable Lie groups*, 《数学年刊》317（2000年），195–237。

Department of Mathematics, University of Wisconsin-Madison, 480 Lincoln Drive, Madison, WI 53706 *Email address*: dymarz@math.wisc.eduDepartment of Mathematics, Rice University, 6100 Main Street Houston, TX 77005*Email address*: davidfisher@rice.edu
Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University, Bowling Green, OH 43403*Email address*: xiex@bgsu.edu