arXiv:2304.12510v1 [math.RA] 25 Apr 2023

任意非平凡域上二维内交换卷曲代数的分类

SIN-EI TAKA HASI、KIYOSHI SHIRAYANAGI 和 MAKOTO TSUKADA

Abstract. 内交换代数是一种非结合代数，其中平方映射保持乘法。在本文中，我们完整分类了任意非平凡域上的二维内交换卷曲代数，其中卷曲代数满足任意元素的平方是该元素的标量倍数这一条件。我们列出了这些代数在同构意义下的所有乘法表。

1. Introduction

设 A 是一个非结合代数。从 A 到其自身的平方映射 $x \mapsto x^2$ 引出了 A 的各种重要概念。事实上，若 A 的平方映射是满射，则称 A 可开平方，见 [6, 12]。此外，众所周知，若 A 的平方映射保持加法，则称 A 为反交换的。而且，若 A 的平方映射是零映射，则称 A 为零幂。关于零幂代数的详细内容，请参阅 [7, 11, 12] 。

本文研究的是另一个同样自然地由平方映射引出的概念。若 A 的平方映射保持乘法，即对所有 x、$y \in A$，$x^2y^2 = (xy)^2$ 成立，则称 A 为内交换的。这一术语源自恒等式 $(xx)(yy) = (xy)(xy)$，该恒等式体现了内交换性质。内交换性这一概念最早于 [13]，中引入；我们在那里给出了平凡域 $\mathbb{F}_2$（含两个元素）上二维内交换代数的完全分类。

我们将二维代数分为两类：卷曲的和直的。也就是说，如果任意元素的平方 x 是 x 的标量倍数，则二维代数是卷曲的；否则就是直的。关于卷曲代数的研究可见于 [5, 9]。

本文旨在完全分类任意非平凡域上的二维内交换卷曲代数。分类策略基于 Kobayashi [6] 的方法。我们可以在 [8] 中找到实数域和复数域上的二维结合代数的分类。关于二维代数的其他研究，参见 [1, 2, 3, 4, 10]。

我们的主定理表明，任意非平凡域上的二维内交换卷曲代数可分为三个族 C_0、C_1 和 $\{C_2(a)\}_{a\in K}$，并且在同构意义下分类，其中 K 是基域，C_i 是一种类型 f 结构矩阵，即相对于线性基的结构常数矩阵。详细内容见定理1。作为该

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：17A30；次要分类号：17D99，13 A99。*Key words and phrases.* 非结合代数，内交换代数，交换代数，卷曲代数，直代数。

主定理的应用，我们进一步给出了任意非平凡域上二维内交换卷曲代数在零幂、交换的、反交换和结合的代数这几种情形下的完全分类。详细内容见推论4。注意，尽管规范表示不同，Asrorov-Bekbaev-Rakhimov [2], 中也出现了与主定理类似的结果。

2. A criterion for isomorphism of two-dimensional algebras

设 K 为一个非平凡域，$GL_n(K)$ 为由域 K 上的非奇异 $n \times n$ 矩阵组成的一般线性群。对于任意 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$，定义

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & ab & ab \\ c^2 & d^2 & cd & cd \\ ac & bd & ad & bc \\ ac & bd & bc & ad \end{pmatrix}.$$

于是我们有如下结论。

~引理1。映射 $X \mapsto X$ 是从 $GL_2(K)$ 到 $GL_4(K)$ 的群同构，其中 $|\widetilde{X}| = |X|^4$。

证明。显然。 □

设 A 是 K 上的一个二维代数，其线性基为 $\{e, f\}$。则 A 由乘法表 $\begin{pmatrix} e^2 & ef \\ fe & f^2 \end{pmatrix}$ 确定。记作

$$\begin{cases} e^2 = a_1 e + b_1 f \\ f^2 = a_2 e + b_2 f \\ ef = a_3 e + b_3 f \\ fe = a_4 e + b_4 f \end{cases}$$

其中 a_i、$b_i \in K$ $(1 \le i \le 4)$，矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$ 称为 A 关于基 $\{e, f\}$ 的结构矩阵。

下文中，我们将自由地使用同一个符号 A 表示矩阵和代数，因为代数 A 由其结构矩阵确定。于是有以下结论。

命题1. 设 A 和 A' 是 K 上的二维代数。当且仅当存在 $X \in GL_2(K)$ 使得 A 和 A' 同构时，

$$A' = \widetilde{X^{-1}} A X. \tag{1}$$

证明。设 A 和 A' 分别是 A 在 $\{e, f\}$ 线性基上以及 A' 在 $\{g, h\}$ 线性基上的结构矩阵。记

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \text{ and } A' = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

假设 $\Phi\colon A\to B$ 是一个同构，并设 $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}(a,b,c,d\in K)$ 是与 Φ 相关联的矩阵，即 $\begin{pmatrix}\Phi\\ \Phi\end{pmatrix}(e)\ f)\ \Big)=X\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$。由于 Φ 是一个双射，因此可得 $X\in GL_2(K)$。此外，我们还有

$$\begin{pmatrix}\Phi(e)^2\\ \Phi(f)^2\\ \Phi(e)\Phi(f)\\ \Phi(f)\Phi(e)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi(e^2)\\ \Phi(f^2)\\ \Phi(ef)\\ \Phi(fe)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\Phi(e)\\ \Phi(f)\end{pmatrix}=AX\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}\tag{2}$$

另一方面，我们有

$$\begin{cases}\Phi(e)^2=(ag+bh)^2=a^2g^2+b^2h^2+ab(gh+hg)\\ \Phi(f)^2=(cg+dh)^2=c^2g^2+d^2h^2+cd(gh+hg)\\ \Phi(e)\Phi(f)=\{ag+bh\}\{cg+dh\}=acg^2+bdh^2+adgh+bchg\\ \Phi(f)\Phi(e)=\{cg+dh\}\{ag+bh\}=cag^2+dbh^2+cbgh+dahg,\end{cases}$$

因此

$$\begin{pmatrix}\Phi(e)^2\\ \Phi(f)^2\\ \Phi(e)\Phi(f)\\ \Phi(f)\Phi(e)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & b^2 & ab & ab\\ c^2 & d^2 & cd & cd\\ ac & bd & ad & bc\\ ac & bd & bc & ad\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g^2\\ h^2\\ gh\\ hg\end{pmatrix}\tag{3}$$

由（3）和（2），我们有

$$\begin{pmatrix}a^2 & b^2 & ab & ab\\ c^2 & d^2 & cd & cd\\ ac & bd & ad & bc\\ ac & bd & bc & ad\end{pmatrix}A'\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}=AX\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}\tag{4}$$

because $\begin{pmatrix}g^2\\ h^2\\ gh\\ hg\end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$. By (4), we have

$$\widetilde{X}A'=\begin{pmatrix}a^2 & b^2 & ab & ab\\ c^2 & d^2 & cd & cd\\ ac & bd & ad & bc\\ ac & bd & bc & ad\end{pmatrix}A'=AX,$$

因此我们得到（1），因为根据引理1，$\widetilde{X}^{-1}=\widetilde{X^{-1}}$。

反之，设存在满足（1）的 $X\in GL_2(K)$。令 $\Phi\colon A\to A'$为由 $\begin{pmatrix}\Phi\\ \Phi\end{pmatrix}(e)\ f)\ \Big)=X\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$定义的线性映射。沿用上述论证的逆过程，容易看出 Φ同构，因此 A 与 A' 同构。□

推论1. 设 A 和 A' 为 K上的二维代数。如果 A 与 A' 同构，则秩 $A=$秩 A'。

当（1）成立时，我们称矩阵 A 和 A' 等价，并将 X称为该等价关系$A\cong A'$的变换矩阵。此外，我们也将此 X 称为同构 $A\cong A'$ 的变换矩阵。

3. Two-dimensional endo-commutative algebras

设 A 是非平凡域K 上的二维内交换的代数，其结构矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$。

令 x、$y \in A$ 为任意元素，并记作$\begin{cases} x = x_1 e + x_2 f \\ y = y_1 e + y_2 f \end{cases}$，并令

$$\begin{cases} A = x_1^2 a_1 + x_2^2 a_2 + x_1 x_2 (a_3 + a_4) \\ B = x_1^2 b_1 + x_2^2 b_2 + x_1 x_2 (b_3 + b_4) \\ C = y_1^2 a_1 + y_2^2 a_2 + y_1 y_2 (a_3 + a_4) \\ D = y_1^2 b_1 + y_2^2 b_2 + y_1 y_2 (b_3 + b_4) \\ E = x_1 y_1 a_1 + x_2 y_2 a_2 + x_1 y_2 a_3 + x_2 y_1 a_4 \\ F = x_1 y_1 b_1 + x_2 y_2 b_2 + x_1 y_2 b_3 + x_2 y_1 b_4, \end{cases}$$

因此 $x^2 = Ae + Bf$、$y^2 = Ce + Df$ 和 $xy = Ee + Ff$。然后

$\begin{cases} x^2 y^2 = (ACa_1 + BDa_2 + ADa_3 + BCa_4)e + (ACb_1 + BDb_2 + ADb_3 + BCb_4)f( ) \\ xy \end{cases}$

$^2 = \{E^2 a_1 + F^2 a_2 + EF(a_3 + a_4)\}e + \{E^2 b_1 + F^2 b_2 + EF(b_3 + b_4)\}f.$

因此我们看到，$x^2 y^2 = (xy)^2$ 当且仅当

(5)

$$\begin{cases} ACa_1 + BDa_2 + ADa_3 + BCa_4 = E^2 a_1 + F^2 a_2 + EF(a_3 + a_4) \cdots (5-1) \\ ACb_1 + BDb_2 + ADb_3 + BCb_4 = E^2 b_1 + F^2 b_2 + EF(b_3 + b_4) \cdots (5-2). \end{cases}$$

Put

$$\begin{cases} X_1 = x_1^2 y_1^2 \\ X_2 = x_2^2 y_2^2 \\ X_3 = x_1^2 y_2^2 \\ X_4 = x_2^2 y_1^2 \\ X_5 = x_1 x_2 y_1 y_2 \\ X_6 = x_1^2 y_1 y_2 \\ X_7 = x_1 x_2 y_1^2 \\ X_8 = x_1 x_2 y_2^2 \\ X_9 = x_2^2 y_1 y_2. \end{cases}$$

引理 2. K 上的九个多项式 $X_i\,(1 \le i \le 9)$ 线性无关。

证明。直截了当。 □

注意,

$$AC = a_1^2 X_1 + a_2^2 X_2 + a_1 a_2 X_3 + a_1 a_2 X_4 + (a_3 + a_4)^2 X_5 + a_1 (a_3 + a_4) X_6 + a_1 (a_3 + a_4) X_7 + a_2 (a_3 + a_4) X_8 + a_2 (a_3 + a_4) X_9,$$

$$BD = b_1^2 X_1 + b_2^2 X_2 + b_1 b_2 X_3 + b_1 b_2 X_4 + (b_3 + b_4)^2 X_5 + b_1 (b_3 + b_4) X_6 + b_1 (b_3 + b_4) X_7 + b_2 (b_3 + b_4) X_8 + b_2 (b_3 + b_4) X_9,$$

$$AD = a_1 b_1 X_1 + a_2 b_2 X_2 + a_1 b_2 X_3 + a_2 b_1 X_4 + (a_3 + a_4)(b_3 + b_4) X_5 + a_1 (b_3 + b_4) X_6 + b_1 (a_3 + a_4) X_7 + b_2 (a_3 + a_4) X_8 + a_2 (b_3 + b_4) X_9,$$

$$BC = a_1 b_1 X_1 + a_2 b_2 X_2 + a_2 b_1 X_3 + a_1 b_2 X_4 + (a_3 + a_4)(b_3 + b_4) X_5 + b_1 (a_3 + a_4) X_6$$

$$+ a_1(b_3+b_4)X_7 + a_2(b_3+b_4)X_8 + b_2(a_3+a_4)X_9,$$

$E^2 = a_1^2X_1 + a_2^2X_2 + a_3^2X_3 + a_4^2X_4 + 2\{(a_1a_2 + a_3a_4)X_5 + a_1a_3X_6 + a_1a_4X_7 + a_2a_3X_8 + a_2a_4X_9\}$
$F^2 = b_1^2X_1 + b_2^2X_2 + b_3^2X_3 + b_4^2X_4 + 2\{(b_1b_2 + b_3b_4)X_5 + b_1b_3X_6 + b_1b_4X_7 + b_2b_3X_8 + b_2b_4X_9\}$和

$$EF = a_1b_1X_1 + a_2b_2X_2 + a_3b_3X_3 + a_4b_4X_4 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3)X_5 + (a_1b_3 + a_3b_1)X_6 + (a_1b_4 + a_4b_1)X_7 + (a_2b_3 + a_3b_2)X_8 + (a_2b_4 + a_4b_2)X_9$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&ACa_1 + BDa_2 + ADa_3 + BCa_4\\
&\quad= \{a_1^3 + a_2b_1^2 + a_1a_3b_1 + a_1a_4b_1\}X_1 + \{a_1a_2^2 + a_2b_2^2 + a_2a_3b_2 + a_2a_4b_2\}X_2\\
&\quad\quad + \{a_1^2a_2 + a_2b_1b_2 + a_1a_3b_2 + a_2a_4b_1\}X_3 + \{a_1^2a_2 + a_2b_1b_2 + a_2a_3b_1 + a_1a_4b_2\}X_4\\
&\quad\quad + \{(a_1 + b_3 + b_4)(a_3 + a_4)^2 + a_2(b_3 + b_4)^2\}X_5\\
&\quad\quad + \{(a_1^2 + a_4b_1)(a_3 + a_4) + (a_2b_1 + a_1a_3)(b_3 + b_4)\}X_6\\
&\quad\quad + \{(a_1^2 + a_3b_1)(a_3 + a_4) + (a_2b_1 + a_4a_1)(b_3 + b_4)\}X_7\\
&\quad\quad + \{(a_1a_2 + a_3b_2)(a_3 + a_4) + a_2(a_4 + b_2)(b_3 + b_4)\}X_8\\
&\quad\quad + \{(a_1a_2 + a_4b_2)(a_3 + a_4) + a_2(a_3 + b_2)(b_3 + b_4)\}X_9
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&E^2a_1 + F^2a_2 + EF(a_3 + a_4)\\
&= \{a_1^3 + a_2b_1^2 + a_1b_1(a_3 + a_4)\}X_1 + \{a_1a_2^2 + a_2b_2^2 + a_2b_2(a_3 + a_4)\}X_2\\
&\quad + \{a_1a_3^2 + a_2b_3^2 + a_3b_3(a_3 + a_4)\}X_3 + \{a_1a_4^2 + a_2b_4^2 + a_4b_4(a_3 + a_4)\}X_4\\
&\quad + \{2a_1(a_1a_2 + a_3a_4) + 2a_2(b_1b_2 + b_3b_4) + (a_3 + a_4)(a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3)\}X_5\\
&\quad + \{2a_1^2a_3 + 2a_2b_1b_3 + (a_3 + a_4)(a_1b_3 + a_3b_1)\}X_6\\
&\quad + \{2a_1^2a_4 + 2a_2b_1b_4 + (a_3 + a_4)(a_1b_4 + a_4b_1)\}X_7\\
&\quad + \{2a_1a_2a_3 + 2a_2b_2b_3 + (a_3 + a_4)(a_2b_3 + a_3b_2)\}X_8\\
&\quad + \{2a_1a_2a_4 + 2a_2b_2b_4 + (a_3 + a_4)(a_2b_4 + a_4b_2)\}X_9.
\end{aligned}$$

因此，根据引理 2，我们看到，对于所有 x、$y \in A$，使（5-1）成立的充要条件是

$$\begin{cases}
a_1^3 + a_2b_1^2 + a_1a_3b_1 + a_1a_4b_1 = a_1^3 + a_2b_1^2 + a_1b_1 & (a_3+a_4)\ (a_3+a_4)\ (a_3+a_4)\ (a_3+a_4)\ (\ )(\ )\ (\ )\ (a_1a_2 + a_3a_4)\ + 2a_2(\\
a_1a_2^2 + a_2b_2^2 + a_2a_3b_2 + a_2a_4b_2 = a_1a_2^2 + a_2b_2^2 + a_2b_2 & \\
a_1^2a_2 + a_2b_1b_2 + a_1a_3b_2 + a_2a_4b_1 = a_1a_3^2 + a_2b_3^2 + a_3b_3 & \\
a_1^2a_2 + a_2b_1b_2 + a_2a_3b_1 + a_1a_4b_2 = a_1a_4^2 + a_2b_4^2 + a_4b_4 & \\
a_1 + b_3 + b_4\ \ a_3 + a_4\ ^2 + a_2\ b_3 + b_4\ ^2 = 2a_1 & \\
+ & \\
a_1^2 + a_4b_1\ \ a_3 + a_4\ + \ a_2b_1 + a_1a_3\ \ b_3 + b_4 & \\
a_1^2 + a_3b_1\ \ a_3 + a_4\ + \ a_2b_1 + a_4a_1\ \ b_3 + b_4 & \\
a_1a_2 + a_3b_2\ \ a_3 + a_4\ + a_2\ a_4 + b_2\ \ b_3 + b_4 & \\
a_1a_2 + a_4b_2\ \ a_3 + a_4\ + a_2\ a_3 + b_2\ \ b_3 + b_4 &
\end{cases}$$

$b_1b_2 + b_3b_4)\ (a_3 + a_4)(a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3)\ (\ )(\ )\ (\ )(\ )\ = 2a_1^2a_3 + 2a_2b_1b_3 + (a_3 + a_4)(a_1b_3 + a_3b_1)\ (\ )(\ )\ (\ )(\ )\ = 2a_1^2a_4 + 2a_2b_1b_4 +$
$(a_3 + a_4)(a_1b_4 + a_4b_1)\ (\ )(\ )\ (\ )(\ )\ = 2a_1a_2a_3 + 2a_2b_2b_3 + (a_3 + a_4)(a_2b_3 + a_3b_2)\ (\ )(\ )\ (\ )(\ )\ = 2a_1a_2a_4 + 2a_2b_2b_4 + (a_3 + a_4)(a_2b_4 + a_4b_2).$

请注意，在上述九个方程中，前两个方程始终成立。同样地，我们有

$$
\begin{aligned}
&ACb_1+BDb_2+ADb_3+BCb_4\\
&\quad=\{a_1^2b_1+b_1^2b_2+a_1b_1b_3+a_1b_4b_1\}X_1+\{a_2^2b_1+b_2^3+a_2b_2b_3+a_2b_2b_4\}X_2\\
&\quad+\{a_1a_2b_1+b_1b_2^2+a_1b_2b_3+a_2b_1b_4\}X_3+\{a_1a_2b_1+b_1b_2^2+a_2b_1b_3+a_1b_2b_4\}X_4\\
&\quad+\{b_1(a_3+a_4)^2+(b_2+a_3+a_4)(b_3+b_4)^2\}X_5\\
&\quad+\{b_1(a_1+b_4)(a_3+a_4)+(b_1b_2+a_1b_3)(b_3+b_4)\}X_6\\
&\quad+\{b_1(a_1+b_3)(a_3+a_4)+(b_1b_2+a_1b_4)(b_3+b_4)\}X_7\\
&\quad+\{(a_2b_1+b_2b_3)(a_3+a_4)+(b_2^2+a_2b_4)(b_3+b_4)\}X_8\\
&\quad+\{(a_2b_1+b_2b_4)(a_3+a_4)+(b_2^2+a_2b_3)(b_3+b_4)\}X_9
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&E^2b_1+F^2b_2+EF(b_3+b_4)=\{a_1^2b_1+b_1^2b_2+a_1b_1(b_3+b_4)\}X_1+\{a_2^2b_1+b_2^3+a_2b_2(b_3+b_4)\\
&\}X_2+\{a_3^2b_1+b_2b_3^2+a_3b_3(b_3+b_4)\}X_3+\{a_4^2b_1+b_2b_4^2+a_4b_4(b_3+b_4)\}X_4+\{2b_1(a_1a_2+a_3a_4)+2b_2(\\
&b_1b_2+b_3b_4)+(b_3+b_4)(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4+a_4b_3)\}X_5+\{2a_1a_3b_1+2b_1b_2b_3+(b_3+b_4)(a_1b_3+a_3b_1)\}X_6\\
&+\{2a_1a_4b_1+2b_1b_2b_4+(b_3+b_4)(a_1b_4+a_4b_1)\}X_7+\{2a_2a_3b_1+2b_2^2b_3+(b_3+b_4)(a_2b_3+a_3b_2)\}X_8\\
&+\{2a_2a_4b_1+2b_2^2b_4+(b_3+b_4)(a_2b_4+a_4b_2)\}X_9.
\end{aligned}
$$

因此，根据引理 2，我们可知，(5-2) 对所有 x、$y\in A$ 成立的充要条件是

$$
\begin{cases}
a_1^2b_1+b_1^2b_2+a_1b_1b_3+a_1b_4b_1=a_1^2b_1+b_1^2b_2+a_1b_1 \quad (b_3+b_4)\ (b_3+b_4)\ (b_3+b_4)\ (b_3+b_4)\ (\ )\ (\ )(\ )\\
a_2^2b_1+b_2^3+a_2b_2b_3+a_2b_2b_4=a_2^2b_1+b_2^3+a_2b_2\\
a_1a_2b_1+b_1b_2^2+a_1b_2b_3+a_2b_1b_4=a_3^2b_1+b_2b_3^2+a_3b_3\\
a_1a_2b_1+b_1b_2^2+a_2b_1b_3+a_1b_2b_4=a_4^2b_1+b_2b_4^2+a_4b_4\\
b_1\ a_3+a_4\ ^2+\ b_2+a_3+a_4\ \ b_3+b_4\ ^2\\
\quad=2b_1\ a_1a_2+a_3a_4\ +2b_2\ b_1b_2+b_3b_4\ +\ b_3+b_4\\
b_1\ a_1+b_4\ \ a_3+a_4\ +\ b_1b_2+a_1b_3\ \ b_3+b_4\\
\quad=2a_1a_3b_1+2b_1b_2b_3+\ b_3+b_4\ \ a_1b_3+a_3b_1\\
b_1\ a_1+b_3\ \ a_3+a_4\ +\ b_1b_2+a_1b_4\ \ b_3+b_4\\
\quad=2a_1a_4b_1+2b_1b_2b_4+\ b_3+b_4\ \ a_1b_4+a_4b_1\\
a_2b_1+b_2b_3\ \ a_3+a_4\ +\ b_2^2+a_2b_4\ \ b_3+b_4\\
\quad=2a_2a_3b_1+2b_2^2b_3+\ b_3+b_4\ \ a_2b_3+a_3b_2\\
a_2b_1+b_2b_4\ \ a_3+a_4\ +\ b_2^2+a_2b_3\ \ b_3+b_4\\
\quad=2a_2a_4b_1+2b_2^2b_4+\ b_3+b_4\ \ a_2b_4+a_4b_2\ .
\end{cases}
$$

( ) ( ) ( )$(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4+a_4b_3)$ ( )( ) ( )( ) ( )( )

注意到，在上述九个方程中，前两个方程始终成立。因此，式（5）对所有 x、$y \in A$ 成立的充要条件是（6）

$$
\begin{cases}
a_1^2a_2 + a_2b_1b_2 + a_1a_3b_2 + a_2a_4b_1 = a_1a_3^2 + a_2b_3^2 + a_3b_3(a_3 + a_4)\ (a_3 + a_4)\ (\ )(\ )\ (\ )\ (a_1a_2 + a_3a_4)\ + 2a_2(b_1b_2 + b_3b_4)\ (\\
a_1^2a_2 + a_2b_1b_2 + a_2a_3b_1 + a_1a_4b_2 = a_1a_4^2 + a_2b_4^2 + a_4b_4\\
\ a_1 + b_3 + b_4\ \ a_3 + a_4\ ^2 + a_2\ b_3 + b_4\ ^2 = 2a_1\\
\qquad\qquad\qquad

(I) 我们很容易看出，(i) 和 (ii) 推出 (iii)。(II) 我们很容易看出，(viii) 和 (ix) 推出 (x)。

此外，注意到

（iv） $\Leftrightarrow a^2g+bg^2+bch+aeh=a^2e+bcf+be^2+afg$、（v）
$\Leftrightarrow a^2e+be^2+bcf+afg=a^2g+bch+aeh+bg^2$、（vi）
$\Leftrightarrow acg+cgh+cdh=ace+cdf+cef$、（vii）
$\Leftrightarrow ace+cef+cdf=acg+cdh+cgh$、（xi）
$\Leftrightarrow abg+bgh+bdh=abe+bdf+bef$、（xii）
$\Leftrightarrow abe+bef+bdf=abg+bdh+bgh$、（xiii）
$\Leftrightarrow bcg+dfg+d^2h+ch^2=bce+d^2f+cf^2+deh$、（xiv）
$\Leftrightarrow bce+deh+d^2f+cf^2=bcg+d^2h+dfg+ch^2$。

根据（I）、（II）及上述注释，（7）可改写为

$$(8)\qquad \begin{cases} a^2c+bcd+ade+bcg=ae^2+cf^2+e^2f+efg\cdots(\mathrm{i})\\ a^2c+bcd+bce+adg=ag^2+ch^2+egh+g^2h\cdots(\mathrm{ii})\\ a^2g+bg^2+bch+aeh=a^2e+bcf+be^2+afg\cdots(\mathrm{iv})\\ a^2e+be^2+bcf+afg=a^2g+bch+aeh+bg^2\cdots(\mathrm{v})\\ acg+cgh+cdh=ace+cdf+cef\cdots(\mathrm{vi})\\ ace+cef+cdf=acg+cdh+cgh\cdots(\mathrm{vii})\\ abc+bd^2+adf+bch=be^2+df^2+ef^2+efh\cdots(\mathrm{viii})\\ abc+bd^2+bcf+adh=bg^2+dh^2+fgh+gh^2\cdots(\mathrm{ix})\\ abg+bgh+bdh=abe+bdf+bef\cdots(\mathrm{xi})\\ abe+bef+bdf=abg+bdh+bgh\cdots(\mathrm{xii})\\ bcg+dfg+d^2h+ch^2=bce+d^2f+cf^2+deh\cdots(\mathrm{xiii})\\ bce+deh+d^2f+cf^2=bcg+d^2h+dfg+ch^2\cdots(\mathrm{xiv}). \end{cases}$$

容易看出，(iv)⇔(v)、(vi)⇔(vii)、(xi)⇔(xii) 以及 (xiii)⇔(xiv)，因此 (8) 可以改写为

$$(9)\qquad \begin{cases} a^2c+bcd+ade+bcg=ae^2+cf^2+e^2f+efg\\ a^2c+bcd+bce+adg=ag^2+ch^2+egh+g^2h\\ a^2g+bg^2+bch+aeh=a^2e+bcf+be^2+afg\\ c(ag+gh+dh)=c(ae+df+ef)\\ abc+bd^2+adf+bch=be^2+df^2+ef^2+efh\\ abc+bd^2+bcf+adh=bg^2+dh^2+fgh+gh^2\\ b(ag+gh+dh)=b(ae+df+ef)\\ bcg+dfg+d^2h+ch^2=bce+d^2f+cf^2+deh. \end{cases}$$

因此，（9）可改写为

$$
(10)\qquad \begin{cases} a_1^2a_2+b_1a_2b_2+a_1b_2a_3+b_1a_2a_4=a_1a_3^2+a_2b_3^2+a_3^2b_3+a_3b_3a_4\\ a_1^2a_2+b_1a_2b_2+b_1a_2a_3+a_1b_2a_4=a_1a_4^2+a_2b_4^2+a_3a_4b_4+a_4^2b_4\\ a_1^2a_4+b_1a_4^2+b_1a_2b_4+a_1a_3b_4=a_1^2a_3+b_1a_2b_3+b_1a_3^2+a_1b_3a_4\\ a_2(a_1a_4+a_4b_4+b_2b_4)=a_2(a_1a_3+b_2b_3+a_3b_3)\\ a_1b_1a_2+b_1b_2^2+a_1b_2b_3+b_1a_2b_4=b_1a_3^2+b_2b_3^2+a_3b_3^2+a_3b_3b_4\\ a_1b_1a_2+b_1b_2^2+b_1a_2b_3+a_1b_2b_4=b_1a_4^2+b_2b_4^2+b_3a_4b_4+a_4b_4^2\\ b_1(a_1a_4+a_4b_4+b_2b_4)=b_1(a_1a_3+b_2b_3+a_3b_3)\\ b_1a_2a_4+b_2b_3a_4+b_2^2b_4+a_2b_4^2=b_1a_2a_3+b_2^2b_3+a_2b_3^2+b_2a_3b_4. \end{cases}
$$

也就是说，对于所有 x、$y\in A$，(5) 成立，当且仅当标量 a_i、b_i $(1\le i\le 4)$ 满足 (10)。因此我们得到如下结论。

命题 2. 设 A 是一个在 K 上的二维代数 A，其结构矩阵为 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$。则 A 是内交换的，当且仅当标量 a_i、b_i $(1\le i\le 4)$ 满足 (10)。

4. 卷曲代数

回顾一下，如果二维代数中任意元素 x 的平方都是 x 的标量倍数，则该代数是卷曲的；否则它是直的。设 A 是非平凡域 K 上以 $\{e,f\}$ 为线性基的二维代数。若 A 是卷曲的，则通过更换基，我们可以假设 $e^2=\varepsilon e$ 且 $f^2=\delta f$，其中 ε、$\delta\in\{0,1\}$。记 $ef=ae+bf$ 和 $fe=ce+df$，于是 A 的结构矩阵为

$$
C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)\equiv\begin{pmatrix} \varepsilon & 0\\ 0 & \delta\\ a & b\\ c & d \end{pmatrix},
$$

其中 ε、$\delta\in\{0,1\}$，且 a、b、c、$d\in K$。然而，代数 $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 不一定是卷曲的。下面的引理给出了 $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 为卷曲代数的充要条件。

引理 3. 代数 $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 是卷曲的，当且仅当 $\begin{cases} b+d=\varepsilon\\ a+c=\delta \end{cases}$ 成立。

证明：设 $x=x_1e+x_2f$ 是 $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 的任意元素，其中 $x_1,x_2\in K$。注意

$$
(11)\qquad x^2=\{x_1^2\varepsilon+x_1x_2(a+c)\}e+\{x_2^2\delta+x_1x_2(b+d)\}f.
$$

假设 $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 是卷曲的。那么存在 $\lambda=\lambda(x_1,x_2)\in K$ 使得 $x^2=\lambda x$。因此，由（11）可得 $\begin{cases} x_1^2\varepsilon+x_1x_2 & a+c=\lambda x_1\\ x_2^2\delta+x_1x_2 & b+d=\lambda x_2. \end{cases}$。取 $x_1=x_2=1$，得到 $\varepsilon+a+c=\delta+b+d(=\lambda(1,1))$。由于 $K\ncong\mathbb{F}_2$，我们可以取 $k\in K$，使得 $k\neq 0$，1。然后，取 $x_1=1$、$x_2=k$，得到 $\begin{cases} \varepsilon+k(a+c)=\lambda(1,k)\\ k^2\delta+k(b+d)=\lambda(1,k)k, \end{cases}$ 这意味着 $\varepsilon+k(a+c)=k\delta+b+d$，因为 $k\neq 0$。于是得到 $\begin{cases} \varepsilon+a+c=\delta+b+d\\ \varepsilon+k\ a+c \end{cases}$ $=k\delta+b+d$，这意味着 $\begin{cases} b+d=\varepsilon\\ a+c=\delta \end{cases}$，因为 $k\neq 1$。

反之，假设 $\begin{cases} b+d=\varepsilon \\ a+c=\delta. \end{cases}$ 定义 $\lambda = x_1\varepsilon + x_2\delta$。由（11）可得

$x^2 = \lambda x_1 e + \lambda x_2 f = \lambda x$。由于 $x \in C(a,b,c,d;\ \varepsilon,\delta)$ 是任意的，因此 $C(a,b,c,d;\ \varepsilon,\delta)$ 是卷曲的。□

现在，在命题 2 中取 $a_1 = \varepsilon, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = \delta, a_3 = a, b_3 = b, a_4 = c$ 和 $b_4 = d$。在这种情况下，(10) 可以改写为

$$\begin{cases} \varepsilon\delta a = \varepsilon a^2 + a^2 b + abc \\ \varepsilon\delta c = \varepsilon c^2 + acd + c^2 d \\ \varepsilon c + \varepsilon ad = \varepsilon a + \varepsilon bc \\ \varepsilon\delta b = \delta b^2 + ab^2 + abd \\ \varepsilon\delta d = \delta d^2 + bcd + cd^2 \\ \delta bc + \delta d = \delta b + \delta ad. \end{cases} \tag{12}$$

于是，由命题 2 可得如下结论。

推论 2. 代数 $C(a,b,c,d;\ \varepsilon,\delta)$ 是内交换的，当且仅当标量 a,b,c,d,ε 和 δ 满足 (12)。

此外，由引理 3 和推论 2 可得如下结论。

引理 4. 代数 $C(a,b,c,d;\ \varepsilon,\delta)$ 是内交换的且是卷曲的，当且仅当

$$\begin{cases} b+d=\varepsilon \\ a+c=\delta \\ \varepsilon\delta a = \varepsilon a^2 + a^2 b + abc \\ \varepsilon\delta c = \varepsilon c^2 + acd + c^2 d \\ \varepsilon c + \varepsilon ad = \varepsilon a + \varepsilon bc \\ \varepsilon\delta b = \delta b^2 + ab^2 + abd \\ \varepsilon\delta d = \delta d^2 + bcd + cd^2 \\ \delta bc + \delta d = \delta b + \delta ad \end{cases} \tag{13}$$

成立。

我们定义以下四族 K 上的二维代数:

$$\begin{cases} \mathcal{ECC}_{00} := \{C(a,b,-a,-b;0,0) : a,b \in K\} \\ \mathcal{ECC}_{10} := \{C(0,b,0,1-b;1,0) : b \in K\} \\ \mathcal{ECC}_{01} := \{C(a,0,1-a,0;0,1) : a \in K\} \\ \mathcal{ECC}_{11} := \{C(a,1-a,1-a,a;1,1) : a \in K\}. \end{cases}$$

于是有以下结论。

命题 3. $\mathcal{ECC}_{00} \cup \mathcal{ECC}_{10} \cup \mathcal{ECC}_{10} \cup \mathcal{ECC}_{11}$ 中的所有代数都是内交换的且卷曲的。反过来，K 上任意一个二维内交换卷曲代数都同构于 $\mathcal{ECC}_{00} \cup \mathcal{ECC}_{10} \cup \mathcal{ECC}_{10} \cup \mathcal{ECC}_{11}$ 中的某个代数。

证明。如果 $\varepsilon = \delta = 0$，则容易看出 (13)$\Leftrightarrow b + d = a + c = 0$，因此由引理 4 可知，$\mathcal{ECC}_{00}$ 中的所有代数都是内交换的和卷曲的。如果$\varepsilon = 1$ 且 $\delta = 0$，则容易看出 (13) $\Leftrightarrow \begin{cases} b+d=1 \\ a=c=0 \end{cases}$，因此由引理 4 可知，$\mathcal{ECC}_{10}$ 中的所有代数都是内交换的和卷曲的。如果 $\varepsilon = 0$ 且$\delta = 1$，则容易看出 (13) $\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b=d=0 \end{cases}$，因此由引理 4 可知，$\mathcal{ECC}_{01}$ 中的所有代数都是内交换的和卷曲的。如果 $\varepsilon = 1$ 且 $\delta = 1$,

则容易看出 (13) $\Leftrightarrow b+d=a+c=a+b=1$，因此由引理 4 可知， $\mathcal{ECC}_{11}$ 中的所有代数都是内交换的和卷曲的。

反之，设 A 是域 K 上任意一个二维内交换卷曲代数。那么存在 a_0、b_0、c_0、$d_0 \in K$ 和 ε_0、$\delta_0 \in \{0,1\}$，使得 A 同构于代数 $C(a_0, b_0, c_0, d_0; \varepsilon_0, \delta_0)$。于是，根据引理 4，六个标量 a_0、b_0、c_0、d_0、ε_0 和 δ_0 必须满足（13）。因此，正如上述论证中所观察到的， $C(a_0, b_0, c_0, d_0; \varepsilon_0, \delta_0)$ 必须属于 $\mathcal{EC}_{00} \cup \mathcal{EC}_{10} \cup \mathcal{EC}_{10} \cup \mathcal{EC}_{11}$。□

5. 二维卷曲代数：含单位元、交换的和结合的情形

在本节中，我们确定非平凡域 K 上的二维有单位元的、交换的或结合的卷曲代数。

（I）有单位元的情形。注意到， $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 为有单位元的充要条件是

$$\exists u \in C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta) : ue = eu = e \text{ and } uf = fu = f.$$

于是容易看出， $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 有单位元，当且仅当存在 α、$\beta \in K$ 使得

$$(\sharp) \begin{cases} \alpha\varepsilon + \beta c = 1 \cdots (\mathrm{i}) \\ \beta d = 0 \cdots (\mathrm{ii}) \\ \alpha\varepsilon + \beta a = 1 \cdots (\mathrm{iii}) \\ \beta b = 0 \cdots (\mathrm{iv}) \\ \alpha a = 0 \cdots (\mathrm{v}) \\ \alpha b + \beta\delta = 1 \cdots (\mathrm{vi}) \\ \alpha c = 0 \cdots (\mathrm{vii}) \\ \alpha d + \beta\delta = 1. \cdots (\mathrm{viii}) \end{cases}$$

若 $\beta \neq 0$ 且 $\alpha \neq 0$，则由 (ii)、(iv)、(v) 和 (vii) 可得 $a=b=c=d=0$，因此容易看出 $(\sharp) \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=d=0 \\ \delta=\varepsilon=\alpha=\beta=1. \end{cases}$。若 $\beta \neq 0$ 且 $\alpha = 0$，则由 (ii)、(iv) 可得 $d=c=b=0$，从而由 (vi) 可得 $\delta=\beta=1$，因此容易看出 $(\sharp)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d=c=b=0, \delta=\beta=1 \\ b=d=0 \\ \varepsilon=0\ 1. \end{cases}$。若 $\beta=0$，则由 (i) 可得 $\alpha=\varepsilon=1$，因此容易看出 $(\sharp)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\varepsilon=b=d=1 \\ a=c=0 \\ \delta=0\ 1. \end{cases}$。换言之，为使 $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 具有单位元的充要条件是 $\begin{cases} a=b=c=d=0 \\ \delta=\varepsilon=1 \end{cases}$ 中任意一个，

$\begin{cases} b=d=0 \\ \varepsilon=0\ 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \varepsilon=b=d=1 \\ a=c=0 \\ \delta=0\ 1 \end{cases}$ 成立。因此我们有如下结论。

引理 5. (i) $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 有单位元，当且仅当 $(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 等于以下任意一个

$$(0,1,0,1;1,0),(1,0,1,0;0,1),(0,0,0,0;1,1),(1,0,1,0;1,1),(0,1,0,1;1,1).$$

(ii) 若 $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 有单位元，则它必然是内交换的。

(iii) 如果 $C(a,b,c,d;\varepsilon,\delta)$ 是卷曲的，则它是无单位元的。

证明。断言 (i) 由上述论证得出。断言 (ii) 由 (i) 和推论 2 得出。断言 (iii) 由 (i) 和引理 3 得出。□

（II）交换情形。设 $x = x_1e + x_2f$ 和 $y = y_1e + y_2f$ 是 $C(a, b, c, d; \varepsilon, \delta)$ 中的任意元素，其中 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$。则有

$$\begin{cases} xy = (x_1y_1\varepsilon + x_1y_2a + x_2y_1c)e + (x_2y_2\delta + x_1y_2b + x_2y_1d)f \\ yx = (y_1x_1\varepsilon + y_1x_2a + y_2x_1c)e + (y_2x_2\delta + y_1x_2b + y_2x_1d)f. \end{cases}$$

因此，我们看到代数 $C(a, b, c, d; \varepsilon, \delta)$ 是交换的，当且仅当

$$\begin{cases} x_1y_1\varepsilon + x_1y_2a + x_2y_1c = y_1x_1\varepsilon + y_1x_2a + y_2x_1c \\ x_2y_2\delta + x_1y_2b + x_2y_1d = y_2x_2\delta + y_1x_2b + y_2x_1d \end{cases}$$

对所有 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$ 均成立。容易看出，上述条件对所有 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$ 均成立，当且仅当 $a = c$ 和 $b = d$。因此，我们得到以下结论。

引理 6. (i) $C(a, b, c, d; \varepsilon, \delta)$ 是交换的，当且仅当 $a = c$ 和 $b = d$ 成立。

(ii) 如果 $\operatorname{char} K \neq 2$，那么 $C(a, b, c, d; \varepsilon, \delta)$ 是卷曲的且交换的，当且仅当 $(a, b, c, d, \varepsilon, \delta)$ 等于以下任一项

$$(0, 0, 0, 0; 0, 0), (0, 1/2, 0, 1/2; 1, 0), (1/2, 0, 1/2, 0; 0, 1), (1/2, 1/2, 1/2, 1/2; 1, 1).$$

如果 $\operatorname{char} K = 2$，那么 $C(a, b, c, d; \varepsilon, \delta)$ 是卷曲的且交换的，当且仅当 $a = c$、$b = d$ 和 $\varepsilon = \delta = 0$ 成立。

(iii) 如果 $C(a, b, c, d; \varepsilon, \delta)$ 是卷曲的且交换的，那么它必然是自同态交换的。

证明。断言 (i) 由上述论证可得。断言 (ii) 由 (i) 和引理 3 可得。断言 (iii) 由 (ii) 和推论 2 可得。□

(III) Associative case. Put $\begin{cases} x = x_1e + x_2f \\ y = y_1e + y_2f \\ z = z_1e + z_2f, \end{cases}$ and then we have $xy = X_1e + X_2f$, where

$$X_1 = x_1y_1\varepsilon + x_1y_2a + x_2y_1c \text{ and } X_2 = x_2y_2\delta + x_1y_2b + x_2y_1d.$$

类似地，我们有 $yz = Y_1e + Y_2f$，其中

$$Y_1 = y_1z_1\varepsilon + y_1z_2a + y_2z_1c \text{ and } Y_2 = y_2z_2\delta + y_1z_2b + y_2z_1d.$$

于是我们有

$$(xy)z = (X_1z_1\varepsilon + X_1z_2a + X_2z_1c)e + (X_1z_2b + X_2z_1d + X_2z_2\delta)f$$

and

$$x(yz) = (x_1Y_1\varepsilon + x_1Y_2a + x_2Y_1c)e + (x_1Y_2b + x_2Y_1d + x_2Y_2\delta)f.$$

那么，A 是结合的当且仅当

$$\begin{cases} X_1z_1\varepsilon + X_1z_2a + X_2z_1c = x_1Y_1\varepsilon + x_1Y_2a + x_2Y_1c \cdots (\sharp_1) \\ X_1z_2b + X_2z_1d + X_2z_2\delta = x_1Y_2b + x_2Y_1d + x_2Y_2\delta \cdots (\sharp_2) \end{cases}$$

对所有 x_i、 y_i、 $z_i \in \mathbb{Z}_2 (1 \leq i \leq 2)$ 都成立。设

$$\begin{cases} Z_1 = x_1y_1z_1 \\ Z_2 = x_1y_1z_2 \\ Z_3 = x_1y_2z_1 \\ Z_4 = x_1y_2z_2 \\ Z_5 = x_2y_1z_1 \\ Z_6 = x_2y_1z_2 \\ Z_7 = x_2y_2z_1 \\ Z_8 = x_2y_2z_2. \end{cases}$$

引理7。在 K 上的八个多项式 Z_i $(1 \leq i \leq 8)$线性无关。

证明。显然。 □

注意到$(\sharp_1)$可改写为

$$\begin{aligned} &Z_1\varepsilon + Z_2\varepsilon a + Z_3(a\varepsilon + bc) + Z_4a^2 + Z_5(c\varepsilon + dc) + Z_6ca + Z_7\delta c \\ &= Z_1\varepsilon + Z_2(a\varepsilon + ba) + Z_3(c\varepsilon + da) + Z_4\delta a + Z_5\varepsilon c + Z_6ac + Z_7c^2. \end{aligned}$$

然后，根据引理7，我们很容易看出，对于所有 x_i、 y_i、 $z_i \in K$ $(1 \leq i \leq 2)$，$(\sharp_1)$成立，当且仅当

$$\begin{cases} ab = 0 \\ a\varepsilon + bc = c\varepsilon + ad \\ a^2 = \delta a \\ dc = 0 \\ \delta c = c^2. \end{cases}$$

此外，注意到（$\sharp_2$）可改写为

$$\begin{aligned} &Z_2\varepsilon b + Z_3bd + Z_4(ab + b\delta) + Z_5d^2 + Z_6(cb + d\delta) + Z_7\delta d + Z_8\delta \\ &= Z_2b^2 + Z_3bd + Z_4\delta b + Z_5\varepsilon d + Z_6(ad + b\delta) + Z_7(cd + d\delta) + Z_8\delta. \end{aligned}$$

于是由引理7可立即看出，当且仅当对所有 x_i、 y_i、 $z_i \in K$ （$1 \leq i \leq 2$），（$\sharp_2$）成立

$$\begin{cases} \varepsilon b = b^2 \\ ab = 0 \\ d^2 = \varepsilon d \\ cb + d\delta = ad + b\delta \\ cd = 0. \end{cases}$$

因此， A 是结合的，当且仅当

$$(\sharp) \begin{cases} ab = 0 \\ a\varepsilon + bc = c\varepsilon + ad \\ a^2 = \delta a \\ dc = 0 \\ \delta c = c^2 \\ \varepsilon b = b^2 \\ d^2 = \varepsilon d \\ cb + d\delta = ad + b\delta. \end{cases}$$

$\delta = 0$的情形。在这种情况下，我们看到（♯） $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0^{\mathrm{ADA}} \\ c = 0 \\ \varepsilon b = b^2 \\ \varepsilon d = d^2. \end{cases}$ 然后

（$a, b, c, d;\ \varepsilon, \delta$）是（♯）的解

$(0,0,0,0;0,0), (0,0,0,0;1,0), (0,0,0,1;1,0), (0,1,0,0;1,0), (0,1,0,1;1,0).$

$\delta = 1$ 的情形。在这种情况下，我们看到

$$(\sharp) \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ a\varepsilon + bc = c\varepsilon + ad \\ a^2 = a \\ dc = 0 \\ c^2 = c \\ \varepsilon b = b \\ d^2 = \varepsilon d \\ cb + d = ad + b. \end{cases}$$

于是，（$a, b, c, d;\ \varepsilon, \delta$）是（♯）的解

$$(0,0,0,0;0,1), (0,0,0,0;1,1), (0,1,0,1;1,1) \cdots (\mathrm{i}),$$
$$(0,0,1,0;0,1), (0,1,1,0;1,1) \cdots (\mathrm{ii}),$$
$$(1,0,0,0;0,1), (1,0,0,1;1,1) \cdots (\mathrm{iii}),$$
$$(1,0,1,0;0,1), (1,0,1,0;1,1) \cdots (\mathrm{iv}).$$

于是我们得到如下结果。

引理 8。（i） $C(a, b, c, d;\ \varepsilon, \delta)$ 是结合的，当且仅当（$a, b, c, d;\ \varepsilon, \delta$）等于以下两者之一

(0, 0, 0, 0; 0, 0), (0, 0, 0, 0; 1, 0), (0, 0, 0, 1; 1, 0), (0, 1, 0, 0;1, 0), (0, 1, 0, 1;1, 0), (0, 0, 0, 0; 0, 1), (0, 0, 1, 0; 0, 1), (1, 0, 0, 0;0, 1), (1, 0, 1, 0;0, 1), (0, 0, 0, 0; 1, 1), (0, 1, 0, 1; 1, 1), (0, 1, 1, 0;1, 1), (1, 0, 0, 1;1, 1), (1, 0, 1, 0;1, 1)

(ii) 若 $C(a, b, c, d;\ \varepsilon, \delta)$ 是结合的，则它必然是内交换的。

(iii) $C(a, b, c, d;\ \varepsilon, \delta)$ 是卷曲的且结合的，当且仅当 $(a, b, c, d;\ \varepsilon, \delta)$ 等于以下其中之一：

(0, 0, 0, 0;0, 0), (0, 0, 0, 1;1, 0),
(0, 1, 0, 0; 1, 0), (0, 0, 1, 0; 0, 1),
(1, 0, 0, 0; 0, 1), (0, 1, 1, 0; 1, 1),
(1, 0, 0, 1; 1, 1).

证明。(i) 的断言由上述论证得出。(ii) 的断言由 (i) 和推论 2 得出。(iii) 的断言由 (i) 和引理 3 得出。□

以下结果立即由引理 5、6 和 8 得出。

命题 4. 设 A 是 K 上的二维卷曲代数。那么

(i) A 是无单位元的。

(ii) 当 $\mathrm{char}\, K \neq 2$时， A 是交换的，当且仅当它同构于以下四个代数中的任意一个：

$C(0,0,0,0;0,0)$,$C(0,1/2,0,1/2;1,0)$,$C(1/2,0,1/2,0;0,1)$,$C(1/2,1/2,1/2,1/2;1,1)$。

当 $\operatorname{char} K=2$ 时，A 是交换的，当且仅当存在 a、$b\in K$，使得 $A\cong C(a,\ b,\ a,\ b;\ 0,\ 0)$.

（iii） A 是结合的，当且仅当它同构于以下七个代数中的一个：C（0，0，0，0；0，0）、C（0，0，0，1；1，0） C（0，1，0，0；1，0）、C（0，0，1，0；0，1） C（1，0，0，0；0，1）、C（0，1，1，0；1，1） C（1，0，0，1；1，1）。

推论 3. 设 A 是域 K 上的二维卷曲代数。如果 A 是交换的或结合的，则 A 必然是内交换的。

证明。由引理 6 (ii) 和引理 8 (ii) 可直接得到。 □

6. Classification of endo-commutative curled algebras of dimension 2

本节通过考察 $\mathcal{ECC}_{00}\cap\mathcal{ECC}_{10}\cap\mathcal{ECC}_{01}\cap\mathcal{ECC}_{11}$ 中每一对代数之间的同构，对非平凡域 K 上的二维内交换卷曲代数进行分类。

（I） $\mathcal{ECC}_{00}$ 中代数的分类。设 A 和 A' 是由 $C(a,b,-a,-b;0,0)$ 和 $C(a',b',-a',-b';0,0)$ 分别定义的内交换卷曲代数。根据命题1，$A\cong A'$ 当且仅当存在一个非奇异矩阵 $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ 使得 $\widetilde{X}A'=AX$，将其改写为

$$\begin{pmatrix}x^2&y^2&xy&xy\\z^2&w^2&zw&zw\\xz&yw&xw&yz\\xz&yw&yz&xw\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\a'&b'\\-a'&-b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\a&b\\-a&-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix},$$

也就是说，

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\a'xw-a'yz&b'xw-b'yz\\a'yz-a'xw&b'yz-b'xw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\ax+bz&ay+bw\\-ax-bz&-ay-bw\end{pmatrix},$$

改写为 $\begin{cases}a'(xw-yz)=ax+bz\\b'(xw-yz)=ay+bw\end{cases}$，即 $X^t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=|X|\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$。注意，如果 $(a,b)\neq(0,0)$ 且 $(a',b')\neq(0,0)$，那么我们可以找到一个非奇异 2×2 矩阵 X，其K 满足 $X^t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=|X|\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$，因此 $A\cong A'$。由此可见，$\mathcal{ECC}_{00}$ 可分类为两个代数 C_0 和 C_1，它们分别由 $C(0,0,0,0;0,0)$ 和 $C(1,0,-1,0;0,0)$ 定义，并且在同构意义下：

$$C_0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\text{ and }C_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&e\\-e&0\end{pmatrix}.$$

II） $\mathcal{ECC}_{10}$中代数的分类。设 A 和 A' 是分别由 $C(0, b, 0, 1-b; 1, 0)$ 和 $C(0, b', 0, 1-b'; 1, 0)$ 定义的内交换卷曲代数。根据命题 1，我们看到，当且仅当存在一个满足 $\widetilde{X}A' = AX$ 的非奇异矩阵 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ 时，$A \cong A'$，这可改写为

$$\begin{pmatrix} x^2 & y^2 & xy & xy \\ z^2 & w^2 & zw & zw \\ xz & yw & xw & yz \\ xz & yw & yz & xw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b' \\ 0 & 1-b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \\ 0 & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

即，

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ z^2 & zw \\ xz & b'xw + (1-b')yz \\ xz & b'yz + (1-b')xw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \\ bz & bw \\ (1-b)z & (1-b)w \end{pmatrix},$$

可改写为

$$\begin{cases} x^2 = x \\ xy = y \\ z = 0 \\ b'xw = bw \\ (1-b')xw = (1-b)w, \end{cases}$$

这等价于 $[x = 1, z = 0, b' = b, w \neq 0]$ 因为 $|X| \neq 0$。因此我们看到，$A \cong A'$ 当且仅当 $b' = b$。由此可知，$\mathcal{ECC}_{10}$ 可归类为由 $C(0, a, 0, 1-a; 1, 0)$ $(a \in K)$ 定义的代数 $\{C_2(a)\}_{a \in K}$，在同构意义下：

$$C_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & af \\ (1-a)f & 0 \end{pmatrix} \ (a \in K).$$

（III） $\mathcal{ECC}_{01}$中代数的分类。设 A 和 A' 分别是由 $C(a, 0, 1-a, 0; 0, 1)$ 和 $C(a', 0, 1-a', 0; 0, 1)$ 定义的内交换卷曲代数。根据命题1，我们看到，$A \cong A'$ 当且仅当存在一个带有 $\backsim XA' = AX$ 的非奇异矩阵 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$，这可改写为

$$\begin{pmatrix} x^2 & y^2 & xy & xy \\ z^2 & w^2 & zw & zw \\ xz & yw & xw & yz \\ xz & yw & yz & xw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ a' & 0 \\ 1-a' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 0 \\ 1-a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

也就是说，

$$\begin{pmatrix} xy & y^2 \\ zw & w^2 \\ a'xw + (1-a')yz & yw \\ a'yz + (1-a')xw & yw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & w \\ ax & ay \\ (1-a)x & (1-a)y \end{pmatrix},$$

可改写为

$$\begin{cases} y = 0 \\ zw = z \\ w^2 = w \\ a'xw = ax \\ (1-a')xw = (1-a)x, \end{cases}$$

这等价于 $[x\neq 0,y=0,w=1,a'=a]$，因为 $|X|\neq 0$。因此，我们看到 $A\cong A'$ 当且仅当 $a'=a$。由此可知，$\mathcal{ECC}_{10}$ 在同构意义下可分类为由 $C(a,0,1-a,0;0,1)$ $(a\in K)$ 定义的代数 $\{C_3(a)\}_{a\in K}$：

$$C_3(a)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\a&0\\1-a&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&ae\\(1-a)e&f\end{pmatrix}\ (a\in K).$$

（IV） $\mathcal{ECC}_{11}$中代数的分类。设 A 和 A' 分别为由 $C(a,1-a,1-a,a;1,1)$和 $C(a',1-a',1-a',a';1,1)$定义的内交换卷曲代数。由命题1可知，$A\cong A'$ 当且仅当存在一个非奇异矩阵 $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$，使得$\sim XA'=AX$，将其改写为

$$\begin{pmatrix}x^2&y^2&xy&xy\\z^2&w^2&zw&zw\\xz&yw&xw&yz\\xz&yw&yz&xw\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\a'&1-a'\\1-a'&a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\a&1-a\\1-a&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix},$$

也就是说，

$$\begin{pmatrix}x^2+xy&y^2+xy\\z^2+zw&w^2+zw\\xz+a'xw+(1-a')yz&yw+(1-a')xw+a'yz\\xz+a'yz+(1-a')xw&yw+(1-a')yz+a'xw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\\ax+(1-a)z&ay+(1-a)w\\(1-a)x+az&(1-a)y+aw\end{pmatrix},$$

将其改写为

$$(14)\qquad\begin{cases}x^2+xy=x\cdots\cdots(14-1)\\y^2+xy=y\cdots\cdots(14-2)\\z^2+zw=z\cdots\cdots(14-3)\\w^2+zw=w\cdots\cdots(14-4)\\xz+a'xw+(1-a')yz=ax+(1-a)z\cdots\cdots(14-5)\\yw+(1-a')xw+a'yz=ay+(1-a)w\cdots\cdots(14-6)\\xz+a'yz+(1-a')xw=(1-a)x+az\cdots\cdots(14-7)\\yw+(1-a')yz+a'xw=(1-a)y+aw\cdots\cdots(14-8).\end{cases}$$

假设 $|X|=xw-yz\neq 0$。

(IV-1) $x=0$的情形。假设（14）成立。由（14-2），我们有 $y(y-1)=0$。如果 $y=0$，则 $|X|=0$，这与矛盾相矛盾。因此我们有 $y=1$。由（14-7），我们有 $a'z=az$。但由于 $|X|=-z\neq 0$，我们有 $a'=a$。

(IV-2) $x\neq 0$且 $z=0$的情形。假设（14）成立。由（14-1），我们有$x+y=1$。由（14-5），我们有 $a'w=a$。由（14-7），我们有（$1-a'$）$w=1-a$，因此由于 $a'w=a$，有 $w=1$。由此我们看到 $a'=a$

(IV-3) $x\neq 0$且 $xz+yz\neq 0$的情形。假设（14）成立。由（14-5），有 $a'(x-z)=a(x-z)$，因为 $y=1-x$、$w=1-z$。如果 $x=z$，则 $|X|=x(1-z)-(1-x)z=0$，矛盾。因此，$x\neq z$，从而有 $a'=a$。

综合以上三种情况，我们看到 $A\cong A'\Leftrightarrow a'=a$，因此 $\mathcal{ECC}_{11}$按同构分类为由 $C(a,1-a,1-a,a;1,1)$ $(a\in K)$ 定义的代数 $\{C_4(a)\}_{a\in K}$：

$$C_4(a)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\a&1-a\\1-a&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&ae+(1-a)f\\(1-a)e+af&f\end{pmatrix}\ (a\in K).$$

(V) $\mathcal{ECC}_{00}$与 $\mathcal{ECC}_{10}$之间的分类。设 $A \in \mathcal{ECC}_{00}$和 $A' \in \mathcal{ECC}_{10}$为任意元素。根据 (I) 和 (II)，我们有秩 $A \leq 1$和秩 $A' = 2$，因此由推论1得到 $A \not\cong A'$。

(VI) $\mathcal{ECC}_{00}$与 $\mathcal{ECC}_{01}$之间的分类。设 $A \in \mathcal{ECC}_{00}$和 $A' \in \mathcal{ECC}_{01}$任意。由(I)和(III)，我们有 rank $A \leq 1$和 rank $A' = 2$，因此由推论1可得 $A \not\cong A'$。

(VII) $\mathcal{ECC}_{00}$与 $\mathcal{ECC}_{11}$之间的分类。设 $A \in \mathcal{ECC}_{00}$和 $A' \in \mathcal{ECC}_{11}$任意。由(I)和(IV)，我们有 rank $A \leq 1$和 rank $A' = 2$，因此由推论1可得 $A \not\cong A'$。

(VIII) $\mathcal{ECC}_{10}$与 $\mathcal{ECC}_{01}$之间的分类。设 $A \in \mathcal{ECC}_{10}$和 $A' \in \mathcal{ECC}_{01}$任意。由(II)和(III)，对于某些 a、$a' \in K$，有 $A \cong C_2(a)$和 $A' \cong C_3(a')$，其中 $C_2(a)$和 $C_3(a')$分别由 $C(0, a, 0, 1-a; 1, 0)$和 $C(a', 0, 1-a', 0; 0, 1)$定义。

假设 $C_2(a) \cong C_3(a')$。根据命题1，存在一个非奇异矩阵 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

~，使得 $XC(a', 0, 1-a', 0; 0, 1) = C(0, a, 0, 1-a; 1, 0)X$，可改写为

$$\begin{pmatrix} x^2 & y^2 & xy & xy \\ z^2 & w^2 & zw & zw \\ xz & yw & xw & yz \\ xz & yw & yz & xw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ a' & 0 \\ 1-a' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

也就是说，

$$\begin{pmatrix} xy & y^2 \\ zw & w^2 \\ a'xw + (1-a')yz & yw \\ a'yz + (1-a')xw & yw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \\ az & aw \\ (1-a)z & (1-a)w \end{pmatrix},$$

可改写为

$$(15) \quad \begin{cases} xy = x & \cdots\cdots (15-1) \\ y^2 = y & \cdots\cdots (15-2) \\ zw = 0 & \cdots\cdots (15-3) \\ w^2 = 0 & \cdots\cdots (15-4) \\ a'xw + (1-a')yz = az & \cdots\cdots (14-5) \\ yw = aw & \cdots\cdots (15-6) \\ a'yz + (1-a')xw = (1-a)z & \cdots\cdots (15-7) \\ yw = (1-a)w & \cdots\cdots (15-8). \end{cases}$$

由 (15-4)，可得 $w = 0$。由于 $|X| = xw - yz = -yz \neq 0$，根据 (15-2) 可推出$y = 1$。接着，由 (15-7) 可得 $a + a' = 1$，因为 $y = 1$、$w = 0$ 且 $z \neq 0$。因此，我们有 $C_2(a) \cong C_3(a') \Rightarrow a + a' = 1$。

反之，设 $a + a' = 1$。定义 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，于是

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

~因此，根据假设 $a + a' = 1$，我们很容易看出 $XC(a', 0, 1-a', 0; 0, 1) = C(0, a, 0, 1-a; 1, 0)$。因此，由命题1可得 $A_2(a) \cong A_3(a')$。consequently，我们看到对于所有 $a \in K$，$C_2(a) \cong C_3(1-a)$ 均成立。

(IX) $\mathcal{ECC}_{10}$ 与 $\mathcal{ECC}_{11}$之间的分类。令 $A \in \mathcal{ECC}_{10}$ 和 $A' \in \mathcal{ECC}_{11}$ 为任意元素。根据 (II) 和 (IV)，我们有，对于某些 a、 $a' \in K$， $A \cong C_2(a)$ 和 $A' \cong C_4(a')$ 成立，其中 $C_2(a)$ 和 $C_4(a')$ 分别由 $C(0, a, 0, 1-a; 1, 0)$ 和 $C(a', 1-a', 1-a', a'; 1, 1)$ 定义。

设 $C_2(a) \cong C_4(a')$。根据命题1，存在一个非奇异矩阵 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^{\sim}$，使得 $XC(a', 1-a', 1-a', a'; 1, 1) = C(0, a, 0, 1-a; 1, 0)X$，可将其改写为

$$\begin{pmatrix} x^2 & y^2 & xy & xy \\ z^2 & w^2 & zw & zw \\ xz & yw & xw & yz \\ xz & yw & yz & xw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a' & 1-a' \\ 1-a' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

也就是说，

$$\begin{pmatrix} x^2+xy & y^2+xy \\ z^2+zw & w^2+zw \\ xz+a'xw+(1-a')yz & yw+(1-a')xw+a'yz \\ xz+a'yz+(1-a')xw & yw+(1-a')yz+a'xw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \\ az & aw \\ (1-a)z & (1-a)w \end{pmatrix},$$

可将其改写为

$$(16) \quad \begin{cases} x^2+xy = x & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16-1) \\ y^2+xy = y & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16-2) \\ z^2+zw = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16-3) \\ w^2+zw = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16-4) \\ xz+a'xw+(1-a')yz = az & \cdots\cdots\cdots (16-5) \\ yw+(1-a')xw+a'yz = aw & \cdots\cdots\cdots (16-6) \\ xz+a'yz+(1-a')xw = (1-a)z & \cdots (16-7) \\ yw+(1-a')yz+a'xw = (1-a)w & \cdots (16-8). \end{cases}$$

$x = 0$的情形。由于 $|X| = -yz \neq 0$，可知 $y \neq 0$ 和 $z \neq 0$，因此根据(16-2)和(16-3)，分别有 $y = 1$ 和 $z + w = 0$。于是根据(16-5)，得到 $a + a' = 1$。

考虑 $x \neq 0$ 的情形。由 (16-1)，可得 $x+y = 1$。由于 $|X| \neq 0$，因此 $z \neq 0$ 或 $w \neq 0$ 必有一个成立，于是由 (16-3) 和 (16-4) 得到 $z + w = 0$。将 $y = 1 - x$ 和 $w = -z$ 代入 (16-5)，可得 $z(1-a-a') = 0$，因此 $a+a' = 1$，因为 $z \neq 0$（否则，$z = w = 0$，于是 $|X| = 0$，矛盾）。因此，我们有 $C_2(a) \cong C_4(a') \Rightarrow a + a' = 1$。

反过来，假设 $a + a' = 1$。定义 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，然后

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$^{\sim}$ 因此容易看出，$XC(a', 1-a', 1-a', a'; 1, 1) = C(0, a, 0, 1-a; 1, 0)X$，由假设 $a + a' = 1$ 可知。因此，由命题1可得 $C_2(a) \cong C_4(a')$。由此可见，对于所有 $a \in K$， $C_2(a) \cong C_4(1-a)$ 均成立。

(X) $\mathcal{EC}_{01}$ $\mathcal{EC}_{11}$ A_3 a $\cong$ 与 之间的分类。由（VIII）和（IX），我们可以看到，对于所有 $a \in K$，（） （）都成立。

因此，由（I）$\sim$（X）和命题 3，我们得到以下结论。

定理1。 *Up to isomorphism, two-dimensional endo-commutative curled algebras over a non-trivial field K with a linear basis $\{e, f\}$ are classified into the algebras*

$$C_0, C_1 \text{ and } \{C_2(a)\}_{a \in K}$$

defined by multiplication tables

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} e & af \\ (1-a)f & 0 \end{pmatrix} \ (a \in K),$$

respectively.

推论

4 *Suppose that A is an endo-commutative curled algebra of dimension 2 over* 。 *a non-trivial field K. Then*

(i) *A is zero-square iff $A \cong C_0$ or $A \cong C_1$.* (ii)

When $K = 2$ $K \neq 2$ A 特征 ,

is commutative iff $A \cong C_0$ or $A \cong C_2$ $1/2$.

A is commutative iff $A \cong C_0$ or $A \cong C_1$. When 特征 , () (iii)

A is anti-commutative iff $A \cong C_0$ or $A \cong C_1$. (iv) *A is associative iff $A \cong C_0$,$A \cong C_2$(0) or $A \cong C_2$(1)*。

Proof. (i) 注意到 C_0 和 C_1 是零幂的，但 $C_2(a)$ $(a \in K)$ 不是零幂的。于是由定理1得到所需结果。

(ii) 假设 char$K = 2$。显然， C_0 和 C_1 是交换的。但由于对所有 $a \in K$，$af \neq (1-a)f$，因此对所有 $a \in K$， $C_2(a)$都是非交换的。由此，根据定理1， A 是交换的当且仅当 $A \cong C_0$ 或 $A \cong C_1$。

接下来假设 char$K \neq 2$。显然， C_0 是交换的，但 C_1 是非交换的。此外，我们看到， $af = (1-a)f$ 当且仅当 $a = 1/2$。由此，根据定理1， A 是交换的当且仅当 $A \cong C_0$ 或 $A \cong C_2(1/2)$。

(iii) 注意， C_0 和 C_1 是反交换的，但对所有 $a \in K$， $C_2(a)$并非反交换。于是，我们根据定理1得到所需结果。

(iv) 根据命题 4 (iii)，我们看到， A 是结合的，当且仅当它同构于 C_0、 $C_2(0)$ $C_2(1)$ $C_3(0)$ $C_3(1)$ $C_4(0)$ 和 $C_4(1)$ 中的任意一个。然而，正如 (VIII) 和 (IX) 中所观察到的，对于所有 $a \in K$，我们看到 $C_2(a) \cong C_3(1-a)$ 以及 $C_2(a) \cong C_4(1-a)$。因此，我们得到了所需的结果。□

References

[1] A. Ananin 和 A. Mironov，二维代数的模空间，《通信代数》，28(9)（2000），4481-4488。[2] D. Asrorov、U. Bekbaev 和 I. Rakhimov，任意域上二维端交换代数的完全分类，arXiv:2304.00491v1 [数学环与代数] 2 2023年4月。[3] M. Goze 和 E. Remm，二维代数，《非洲数学与物理杂志》，10(1)（2011），81-91。[4] I. Kaygorodov 和 Y. Volkov，代数闭域上的二维代数簇，《加拿大数学杂志》，71(4)（2019），819-842。[5] I. Kaygorodov 和 Y. Volkov，二级代数的完全分类，《莫斯科数学杂志》，19(3)（2019），485-521。[6] Y. Kobayashi，特征二域上二维交换代数的刻画，预印本（2016）。[7] Y. Kobayashi、K. Shirayanagi、S.-E. Takahasi 和 M. Tsukada，代数闭域上三维零幂代数的分类，《通信代数》，45(12)（2018），5037-5052。[8] Y. Kobayashi、K. Shirayanagi、M. Tsukada 和 S.-E. Takahasi， $\mathbb{R}$ 上的三维代数的完全分类以及 $\mathbb{C}$ – *OnkoChishin*（温故而知新），《亚欧数学杂志》，14(8)（2021），文章编号2150131（25页）。[9] O. Markova、C. Mart´ınez 和 R. Rodrigues，长度一代数，《纯粹与应用代数杂志》，226(7)（2022），文章编号106993，16页。[10] H. Petersson，二维非结合代数的分类，《数学成果》，37(1-2)（2000），120-154。[11] K. Shirayanagi、S.-E. Takahasi、M. Tsukada 和 Y. Kobayashi，实数域上三维零幂代数的分类，《通信代数》，46(11)（2018），4663-4681。

[12] K. Shirayanagi、Y. Kobayashi、S.-E.Takahasi 和 M.Tsukada，特征二代数闭域上的三维零幂代数，《通信代数》，48(4)（2020），1613-1625。[13] S.-E. Takahasi、K. Shirayanagi、M. Tsukada， $\mathbb{F}_2$上的二维端交换代数分类，arXiv:2211.04015v1 [数学环与代数] 82022年11月。

（S.-E. Takahasi） Laboratory of Mathematics and Games、 Katsushika 2-371、 Funabashi、Chiba 273-0032、 Japan

（K. Shirayanagi，M. Tsukada） Department of Information Science、 Toho University、Miyama 2-2-1、 Funabashi、 Chiba 274-8510、 Japan*Email address* sin_ei1@yahoo.co.jp：K. Shirayanagi（通讯作者）：
Email address kiyoshi.shirayanagi@is.sci.toho-u.ac.jp
Email address ，M. Tsukada:
tsukada@is.sci.toho-u.ac.jp