arXiv:2304.12545v1 [math.GT] 25 Apr 2023

双曲三流形、布洛赫群与 Walter Neumann 的工作

STAVROS GAROUFALIDIS 和 DON ZAGIER

Contents

1. 理想三角剖分与粘合方程 1
2. 体积与 Dehn 手术 3
3. 布洛赫群与扩展布洛赫群 7
4. 辛性质 9
5. 量子化 10
6. 与数论的联系 12
参考文献 17

Walter Neumann——下文简称 Walter——为拓扑学、奇点理论和数论作出了巨大贡献。他关于三维流形三角剖分组合学及其与代数 K 理论之间相互作用的研究，无疑可以算作其中最具深远影响且最为优美的成果之一。在这篇短文中，我们将尝试回顾这项工作的若干亮点，并以 [31]（Walter 与第二作者合著）以及 [28]（Walter 独著）为出发点。在前几节中，我们将较为详细地介绍这两篇论文以及 Walter 后来独自或与其他合作者共同开展的相关工作的内容；最后几节则将介绍其他研究者（包括我们自己）在后续工作中对其中一些主题的进一步发展。

1. 理想三角剖分与粘合方程

本文的出发点 [31]是 Thurston 在 20 世纪 80 年代提出的惊人洞见：所有三维流形都应当以规范的方式分解为若干部分，每一部分都具有 8 种类型中某一种明确的几何结构，其中最重要的是双曲结构。结合著名的 Mostow 刚性定理，这意味着三维拓扑学首先成为微分几何的一部分，继而成为代数数论的一部分；而在其他维度中，情况完全不是这样。主要研究对象是定向双曲三流形，它们具有常负曲率的黎曼度量，该度量可以归一化为 -1，因此它们在局部上与双曲三空间 $\mathbb{H}^3$等距。特别值得关注的是体积谱，即所有有限体积的完备双曲三流形的体积所组成的集合（在这种情况下，它们要么是紧的，要么是由一个紧部分和有限个“尖点”组成的并集；这些尖点与半直线和环面的乘积微分同胚）。这些体积既具有引人注目的数论性质（它们属于布洛赫群在调节子映射下的像，正如第 3 节所述），也具有引人注目的度量

性质（它们构成 $\mathbb{R}_{>0}$ 的一个可数良序子集，正如第 2 节所述）；本文的主要目标 [31] 是尽可能彻底地理解这些性质。

本节将详细讨论理想三角剖分及其 NZ 方程。带有环面边界分支的三维流形的理想三角剖分由 Thurston [32] 引入， [5] 作为描述并有效计算三维流形上的完备双曲结构的便利方法。回顾一下，在双曲几何中，理想四面体是三维双曲空间 $\mathbf{H}^3$的边界 $\partial(\mathbf{H}^3) \cong \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上四个点的凸包。$\mathbf{H}^3$ 的（保向）等距群是 $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$，它通过 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 的分式线性变换作用于边界；由于在该群作用下，任意四个互异点都可以置于标准位置 $(0, 1, \infty, z)$，其中 $z \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0, 1\}$表示这四个点的交比，因此，任意（定向）理想四面体都是某个复数 $z \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0, 1\}$的凸包 $\Delta(z)$，该复数称为该四面体的形状参数。这个数并不完全唯一，因为可以选择将哪三个顶点送到 0、1 和 ∞；这意味着，定向四面体 $\Delta(z)$、 $\Delta(z')$ 和 $\Delta(z'')$（其中 $z' = 1/(1-z)$ 且 $z'' = 1 - 1/z$）是等距的。由此，可以为给定定向理想四面体的每一对对边附加一个形状参数 z、 z' 或 z''。注意，四面体的形状可以是任意不等于 0 或 1 的复数，而其虚部为正、零还是负与我们的讨论无关。

当 $\mathcal{T}$ 是一个双曲三流形 M 的理想三角剖分，其中有 N 个四面体，形状参数为 z_1, ……, z_N 时，每条边都会对应一个多项式方程（“粘合方程”）。具体来说，所有与该边相邻的四面体在该边处的形状参数，其辐角之和显然必须为 2π （否则该边附近的度量就不光滑）；但实际上，通过一个简单的论证可知，这些形状参数的乘积为 $+1$。由于 $\Delta(z)$ 的每个可能形状参数 z、 z'、 z'' 都属于乘法群 $\langle z, 1-z, -1 \rangle$，因此每条边 e_i 对应的方程具有如下形式

$$\pm \prod_{j=1}^{N} z_j^{R'_{ij}} (1 - z_j)^{R''_{ij}} = 1 \,. \tag{1}$$

由于很容易看出，三角剖分中的边数与单形数相同 N，因此我们得到 N 个关于以下 N 复数z_1, ……, z_N的多项式方程。显然，这似乎会导出一个 0 维模空间，并解释刚性；但这是错误的，因为刚性只适用于完备双曲结构。事实上，这些 N 边关系从来都不是乘法独立的。一个显而易见的例子是，它们的乘积总是 1；当三维流形的边界是环面时（通常称为尖点），这就是唯一的依赖关系，但一般来说还存在 h个关于以下 N 方程（1）的乘法独立关系，其中 h 是三维流形的尖点数（假设所有边界分支都是环面）。因此，双曲结构模空间的真正预期维数实际上是 h。维数确实为 h 是 Thurston 的一个重要定理（§5 的 [32]），而且在 [31] 中利用粘合方程的代数结构给出了一个全新且更简单的证明。当我们要求由形状参数 z_i 给出的双曲结构是完备的时，0 维模空间（刚性）便出现了，因为这会在每个尖点处带来两个额外的独立关系。具体来说，每条“外围曲线”（即以下对象的一个同伦类）

（尖点之一的环面截面上的曲线）都会给出一个关系。因此，如果在每个尖点处选取一条子午线和一条经线（μ_i，λ_i），$i=1$，……，h，就会得到 $2h$ 个额外方程

$$\pm\prod_{j=1}^{N} z_j^{M'_{ij}}(1-z_j)^{M''_{ij}} = 1, \qquad \pm\prod_{j=1}^{N} z_j^{L'_{ij}}(1-z_j)^{L''_{ij}} = 1, \qquad (i=1,\dots,h)\,. \tag{2}$$

因此，完整的粘合方程组可由一个 $(N+2h)\times 2N$ 矩阵 $U=\begin{pmatrix} R' & R'' \\ M' & M'' \\ L' & L'' \end{pmatrix}$ 描述。

该结果已在 [31]中得到证明，其中矩阵 U 具有一些重要的辛性质，其中最重要的一项（定理 2.2）指出

$$U J_{2N} U^t = \begin{pmatrix} 0_{N,N} & 0_{2h,N} \\ 0_{N,2h} & 2J_{2h} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 $J_{2n}:=\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$，而其他结论则表明，$N\times 2N$ 矩阵 $R=\begin{pmatrix} R' & R'' \end{pmatrix}$ 的秩为$N-h$，完整矩阵 U 的秩为 $N+h$，并且由 U 的各行 $[U]\subset\mathbb{R}^{2N}$ 张成的空间是关于辛结构 J_{2N}的 $[R]$ 正交补（命题2.3）。随后利用秩的结论证明了上述（非完备）双曲结构的变形空间的维数至少为 h，再通过运用Mostow刚性的进一步论证表明其恰好为 h。在1-尖点情形下，这产生了一个多项式 $P(m,\ell)=0$，其中 m^2 和 ℓ^2 分别表示方程（2）左侧，而 P 是某个多项式（即如今所称的 A-多项式的一个因子）；在 [31] 中，人们针对最简单的双曲纽结 4_1（八字结，见图8）对其进行了显式计算。在一般情形下，变形空间是“特征簇”的一个分支；“特征簇”由 [4] 引入并加以研究，后来Walter及其学生Abhijit Champanerkar [3]和Stefan Tillmann [33]也对其进行了研究。

为了得到一个具有 h个尖点的完备流形，我们施加 h额外的粘合条件，即方程（1）以及方程（2）中的第一个方程。（但事实上，这些 h 子午线方程与边方程一起可以推出经线方程，因此最终所有关系（1）和（2）都成立。）现在刚性定理适用，不存在形变。但是，还有另一种自由度大得多的过程，可以从原始的带尖点流形得到刚性的完备双曲结构，即在部分或全部尖点处进行Dehn手术。具体来说，当我们在一个尖点处进行（p，q）-手术时（这意味着我们沿环面边界截断三维流形，并以这样一种方式粘上一个实心环面，使得同伦类 p 乘以一个选定的子午线再乘以 q 乘以一个选定的经线被消去），那么我们施加粘合方程 $m^{2p}\ell^{2q}=1$，其中 m^2 和 ℓ^2 如上所述，是方程组（2）中某一对方程的左端。在下一节中，我们仍将按照 [31], 讨论体积在这一过程中的变化。

2. Volumes and Dehn surgeries

如前所述，[31] 最初的主要目的是研究所有双曲三流形的体积集合的算术性质。Thurston 运用 Jørgensen 的早期工作发现，该体积谱是正实数中的良序子集。换言之，存在一个最小体积（已知），第二小体积，第三小体积，……，然后是最小的极限点、第二小的极限点，……，接着是这些极限点的极限，依此类推。良序性的证明表明，这些简单的及高阶的极限点

通过对一个非紧双曲三流形的一个或多个尖点进行“封闭”而产生 M，通过 Dehn 手术获得一个尖点更少的三流形可数集合，其体积从下方趋近于 M的体积。的研究目标是考察这些体积收敛的速度。

在研究 Dehn 手术的影响之前，我们必须了解单个双曲三维流形 M 的体积。显然，它可以表示为任意理想三角剖分中各四面体体积之和，因此第一步是理解这些四面体。一个（带定向且非退化的）理想四面体可以通过复上半平面中的形状参数 z 进行参数化，正如前一节所述；或者，当 z 位于上半平面时，也可以通过三个角 α，β，γ（均为正，且满足 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$）进行参数化。这三个角来自从四个尖点中的任意一个观察该四面体时所“看到”的欧氏三角形。当 $\mathrm{Im}(z)>0$ 时，角与形状之间的关系为 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=$（$\arg(z)$，$\arg(z')$，$\arg(z'')$），其中 z' 和 z'' 如上所述。

根据 Milnor 撰写的 Thurston 的笔记第 7 章，当 $\mathrm{Im}(z)>0$ 时，这个四面体的体积可通过这两个参数化用以下两个公式表示

$$\mathrm{Vol}(\Delta(z)) \;=\; D(z) \;=\; \text{Л}(\alpha)+\text{Л}(\beta)+\text{Л}(\gamma)\,, \tag{4}$$

两者相等是由于 Kummer 所导致的恒等式。（实际上，对于所有 $z\neq 0$，这两个公式都成立；1，但 α、β 和 γ 之和为 $-\pi$，当 z 位于下半平面时。）这里 $D(z)$ 以及$\text{Л}(\theta)$ 分别是 Bloch-Wigner 二对数（参见第 3 节）和 Lobachevsky 函数，分别定义为

$$\begin{aligned} D(z) \;&=\; \mathrm{Im}\big(\mathrm{Li}_2(z)+\log|z|\log(1-z)\big)\,,\\ \text{Л}(\theta) \;&=\; -\int_0^\theta \log|2\,\sin t|\,dt \;=\; \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\theta)}{n^2} \;=\; \frac{1}{2}\,D\big(e^{2i\theta}\big)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

因此，一个由 N 理想四面体以形状参数 z_i 三角剖分的双曲流形 M，其体积可通过二对数函数表示为

$$\mathrm{Vol}(M) \;=\; \sum_{j=1}^{N} D(z_j)\,. \tag{6}$$

现在设 M 是一个具有 h 个尖点的三维流形。它具有唯一的完备双曲结构，可表示为某个格 $\Gamma\subset$ 在 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 中的商 $\mathbb{H}^3/\Gamma$，该格同构于 $\pi_1(M)$；相应的形状参数 $z^0=(z_1^0,\ \ldots,\ z_N^0)$ 是所有 $N+2h$ 方程 (1) 和 (2) 的一个解。这个双曲结构的小变形将具有一个邻近的形状参数向量 $z=(z_1,\ \ldots,\ z_N)$，仅满足 (1)。根据前面提到的 Thurston 的结果，所有此类变形组成的空间具有维数为 h的光滑复流形结构，因此同构于 $\mathbb{C}^h$中 0 的一个小邻域 $\mathfrak{U}$。于是每个 z_i 都全纯地依赖于 $\mathfrak{u}\in\mathfrak{U}$ 和 $z_i(0)=z_i^0$。为了使这一点更加明显，并在 $\mathfrak{U}$上选取合适的坐标 $\mathfrak{u}_i$，我们必须更加仔细地考察 M 上的尖点结构以及 Dehn 手术。

每个尖点都具有 $[0,\infty)\times T^2$ 的结构，其中 T^2 是 M 中的全测地嵌入环面，并且带有一个由 M 上的双曲度量诱导的平坦欧几里得度量，该度量在相似变换意义下唯一。更具体地说，$M=\mathbb{H}^3/\Gamma$ 的尖点由 $P\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 标记，其稳定子 Γ_P 是秩为 2 的自由阿贝尔群。经过共轭，我们可以将 P 置于 ∞，其中

情形 Γ_∞ 具有 $\pm\begin{pmatrix}1 & \Lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 的形式，其中 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 是某个格，在相似变换意义下唯一；于是我们可以将 Λ 与 $H_1(T^2)$ 以及 T^2 与 $\mathbb{C}/\Lambda$ 对应起来。在 Λ 上存在一个典范二次型，其定义为向量长度的平方除以 T^2 的体积。若我们选择 $H_1(T^2)$ 的一个定向基（μ, λ）（“子午线”和“经线”），将 Λ 与 $\mathbb{Z}^2$ 对应起来，那么当我们经过相似变换对 Λ 重新缩放，使其成为 $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$（其中 τ 属于复上半平面）时，该二次型由 $Q(p,q) = |p\tau + q|^2/\mathrm{Im}(\tau)$ 给出。

另一方面，$\Lambda = H_1(T^2)$ 中的每个元素都可以视为 T^2 上闭曲线的一个同伦类。在选定 $H_1(T^2)$ 的基之后，于一个尖点进行 (p,q) Dehn 手术，意味着从 M 中移除 $T^2 \times [0,\infty)$，并用一个实心环面替换它，使得 T^2 上对应于类 $p\mu + q\lambda$ 的曲线在实心环面中围成一个边界。这里假设整数 p 和 q 互素，但也允许将“∞”作为 (p,q) 的取值，表示保持该尖点不变。因此，M 上的 Dehn 手术可用元组 $\kappa = ((p_1,q_1)\ldots,(p_h,q_h)) \in (\mathbb{Z}^2 \cup \{\infty\})^h$ 来描述。瑟斯顿定理 [32] 告诉我们，如果所有 (p_i,q_i) 都足够接近 ∞（即 $(p_i,q_i) = \infty$ 或 $p_i^2 + q_i^2$ 很大），那么手术流形 M_κ 是双曲的。在这种情况下，形状参数 $z_1,\ldots,z_N$ 和体积 $\mathrm{Vol}(M_\kappa)$ 都是 κ 的函数。具体而言，变形后的形状参数 $\mathsf{z}(\kappa) = \mathsf{z}(\mathsf{p},\mathsf{q})$，当所有数对 (p_i,q_i) 趋于无穷时趋于 z^0；它们由在原始粘合方程 (1) 中加入 h 个新方程得到，每个新方程都是 (2) 中第一个表达式的 p_i 次方与第二个表达式的 q_i 次方的乘积。然后，将 z_j 替换为 $z_j(\kappa)$，即可通过 (6) 得到 $\mathrm{Vol}(M_\kappa)$。

现在，在每个尖点处我们得到两个实数：对应于该尖点的二次型在数对 $(p_i,\ q_i)$ 处的值 $Q_i(p_i, q_i)$（约定为 $Q_i(\infty) = \infty$），以及 M_κ 上短测地线 $L_i = L_i(\kappa)$ 的长度；该短测地线是 Dehn手术所添加的实心环面的核心（如果第 i 个尖点尚未进行手术，则长度为 0）。当它们满足以下关系时

$$L_i = \frac{2\pi}{Q_i(p_i,q_i)} + \mathrm{O}\left(\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{p_i^4+q_i^4}\right) \tag{7}$$

（[31], 命题 4.3），当所有 $\kappa_i = (p_i,\ q_i)$ 趋于无穷时。通过使用（[31], (6)）并分析二对数在 z发生微小变化时的变化，得到体积的主要结果如下，由一对渐近公式给出

$$\mathrm{Vol}(M_\kappa) = \mathrm{Vol}(M) - \sum_{i=1}^{h}\left(\frac{\pi^2}{Q_i(p_i,q_i)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{p_i^4+q_i^4}\right)\right) \tag{8a}$$

$$= \mathrm{Vol}(M) - \sum_{i=1}^{h}\left(\frac{\pi L_i}{2} + \mathrm{O}\left(L_i^2\right)\right) \tag{8b}$$

（[31]中的定理 1A 和 1B）彼此等价，这是由（7）所致。这些体积中，当 $\kappa = (\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ 遍历所有足够大的互素整数对的 h元组，或表示未经手术的符号 ∞ 时，均属于双曲体积谱。公式（8a）可立即推出该体积谱在其极限点附近的局部结构描述，因为格点数目的渐近性质，或者大椭圆中

本原格点数目的渐近性质是众所周知的。我们在此不再重复的精确渐近陈述，已明确表述为 [31]中定理 1A 的一个推论。

以上内容仅适用于 p_i 和 q_i 为整数（且互素）的情形。不过，正如 [31] 中所详细说明的，形状参数 z_j（κ）和长度 L_i（κ）对 p 和 q 为实数而不只是成对互素的整数时也有定义，方程（7）和（8）仍然成立。唯一的问题是，在定义 z_j 时，我们必须对方程（2）两边分别取 p_i 次幂和 q_i 次幂；而一般来说，无法对复数以良定义的方式取实幂。但由于对原值 $\mathsf{z} = \mathsf{z}^0$ 作小变形时，表达式（2）左边的值接近 1，而接近 1 的复数在 0 附近有良定义的对数，因此这并不构成问题。当 p_i 和 q_i 不是整数时，我们不再通过粘上一只实心环面来“填充”尖点，而只是改变原开拓扑流形 M 上的双曲结构；一般而言，新的双曲结构是不完备的。现在，若我们将 $2h$ 复数 $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_h)$ 和 $\mathfrak{v} = (\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_h)$ 定义为

$$\mathfrak{u}_i = \sum_{j=1}^{N} \left(M'_{ij} \log \frac{z_j}{z_j^0} + M''_{ij} \log \frac{1-z_j}{1-z_j^0} \right), \quad \mathfrak{v}_i = \sum_{j=1}^{N} \left(L'_{ij} \log \frac{z_j}{z_j^0} + L''_{ij} \log \frac{1-z_j}{1-z_j^0} \right),$$

那么根据 粘合方程的辛性质可知 [28, 引理4 .1]

$$p_i \mathfrak{u}_i + q_i \mathfrak{v}_i = 2\pi i \qquad (i = 1, \dots, h),$$

我们可以将 $\mathfrak{u}$ 取作上述 $\mathfrak{U}$ 邻域$0 \in \mathbb{C}^h$的典范坐标。此时，每个 $\mathfrak{v}_i$ 都是关于 $\mathfrak{u}$ 的奇幂级数，其线性项为 $\tau_i \mathfrak{u}_i$，因此可以用 $L_i(\mathfrak{u})$ 和 $\mathrm{Vol}(\mathfrak{u})$ 代替 $L_i(\kappa)$ 和 $\mathrm{Vol}(M_\kappa)$。我们还应指出，$\mathfrak{u}$和 $\mathfrak{v}$ 可以不借助任何三角剖分，按以下方式不变地定义：M 上的变形双曲结构对应于一个靠近包含映射的同态 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$；于是，$\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{v}$ 分别就是经由 ρ 对子午线和纬线的像所对应的特征值之比的对数。

用新坐标表示，方程（8b）变为

$$\mathrm{Vol}(\mathfrak{u}) = \mathrm{Vol}(M) - \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{h} L_i(\mathfrak{u}) + \varepsilon(\mathfrak{u}), \tag{9}$$

其中，当 $\mathfrak{u}$ 在 $\mathbb{C}^h$ 中趋于 0 时，$\varepsilon(\mathfrak{u}) = O(||\mathfrak{u}||^4)$。[31] 的定理2指出，由（9）定义的函数 $\varepsilon(\mathfrak{u})$ 是调和函数，因此在 0 附近是某个全纯函数 $f(\mathfrak{u})$ 的实部（若固定 $f(0) = 0$，则该函数唯一确定）。利用方程（3）证明的定理3指出，$\partial \mathfrak{v}_i / \partial \mathfrak{u}_j$ 关于 i 和 j 对称。这意味着存在一个函数 $\Phi(\mathfrak{u})$，使得对所有 i 都有 $\partial \Phi / \partial \mathfrak{u}_i = 2\mathfrak{v}_i$，并且 f可由 Φ 表示为 $4f = \Phi - \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}$（等价地，也可表示为 $-8f = (E-2)\Phi$，其中 $E = \sum \mathfrak{u}_i \, \partial / \partial \mathfrak{u}_i$ 是欧拉算子），因此（9）中的体积修正 $\varepsilon(\mathfrak{u})$ 为

$$\varepsilon(\mathfrak{u}) = \mathrm{Im}\big(f(\mathfrak{u})\big), \qquad f(\mathfrak{u}) := \frac{1}{4} \int_0^{\mathfrak{u}} \left(\sum_{i=1}^{h} (\mathfrak{v}_i \, d\mathfrak{u}_i - \mathfrak{u}_i \, d\mathfrak{v}_i) \right). \tag{10}$$

函数 f 现在通常被称为 Neumann-Zagier势函数，尽管在原始论文中，这个名称指的是 Φ。此外，或许还应提到，

所描述的最后几个结果，若使用第二个而不是第一个体积公式（4），或许可以得到更简单的证明。

关于体积，还有一个重要的观点。Thurston 的另一项洞见是：双曲三流形的体积是一个正实数，而从自然的角度看，它实际上是某个复化体积 的虚部；该复化体积的实部是陈-西蒙斯不变量，这是一种重要的拓扑不变量，其取值于 $\mathbb{R}/4\pi^2\mathbb{Z}$，具体定义在此略去。Yoshida 在 [31], 中提出猜想并很快在 [34], 中证明：如果将上述公式中的体积替换为相应的复化体积，并将函数 $L_i(\mathfrak{u})$ 从 $\mathbb{R}$ 适当地提升到 $\mathbb{C}$，同时将 $\varepsilon(\mathfrak{u})$ 替换为 $f(\mathfrak{u})$，那么这些公式仍然成立。后来，在 [28], 中，Walter 说明了如何将 (6) 提升为一个关于 $M_{\mathfrak{p},\ \mathfrak{q}}$ 的复化体积的显式且可计算表达式，其中使用了复对数函数。

3. The Bloch group and the extended Bloch group

域的布洛赫群是其乘法群的一种类比，但其中由对数函数满足的关系$[xy] = [x] + [y]$被二对数函数的函数方程所取代。本节回顾其定义，以及 Walter [30] 引入、随后由 Zickert 和 Goette [21, 39], 进一步发展的“扩展布洛赫群”的定义，并解释它们与体积和复化体积之间的联系。下一节将说明这些内容如何与辛结构相关。需要指出的是，这两节中的部分内容均从 [19] 的 arXiv 版本移植而来，并且为本次论述的目的进行了少量编辑。

二对数函数 $\mathrm{Li}_2(z)$ 对 $|z| < 1$ 定义为 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$，随后通过解析延拓扩展到割平面 $\mathbb{C}\smallsetminus[1,\infty)$，或扩展到 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\smallsetminus\{0,1,\infty\}$的万有覆盖上，并满足一个著名的函数方程，称为五项关系。这个函数方程在 19 世纪曾被反复发现，并且可以写成许多等价形式；每种形式都表明，五个二对数值之和是若干简单对数乘积的线性组合。函数 Li_2 是多值的，但修正对数函数（5）是从 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\smallsetminus\{0,1,\infty\}$ 到 $\mathbb{R}$ 的单值实解析函数，它连续延拓到整个 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$，并满足“简洁”的五项关系，其中不含对数修正项。由于 $D(z)$ 还满足两个函数方程 $D(1-z) = -D(z) = D(1/z)$（这意味着，对于一个定向理想双曲四面体的三个形状参数，$D(z) = D(z') = D(z'')$），这个“简洁”的函数方程仍然可以写成许多不同形式，其中一种标准形式是

$$D(x) + D(y) + D\Big(\frac{1-x}{1-xy}\Big) + D(xy) + D\Big(\frac{1-y}{1-xy}\Big) = 0$$

对于 $(x,\ y) \neq (1,\ 1)$ in $\mathbb{C}^2$。另一个不错的版本是循环形式 $\sum_{i\ (\text{模}\,5)} D(z_i) = 0$ 如果 $\{z_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是满足以下条件的复数序列：对所有 i 都有 $1 - z_i = z_{i-1}z_{i+1}$（通过简短计算可知，这意味着它们的周期为 5）。另一个具有明确三维双曲几何解释的版本是：如果 r_1，……，r_5 是由一个包含 5 个互异点的集合中所有基数为 4 的 5 个子集所得到的交比，那么 $D(r_i)$ 的带符号和为 0，其中这些点位于 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 中。

任意版本的五项关系中的五个参数 z_i 都满足 $\sum(z_i)\wedge(1-z_i) = 0$，其中求和是在 $\mathbb{C}$ 的乘法群的二次外幂中进行的。（例如，对于上文的“循环版本”，我们有 $\sum_i(z_i)\wedge(1-z_i) = \sum_i(z_i)\wedge(z_{i-1}z_{i+1}) =$

$\sum_i\big((z_i)\wedge(z_{i-1})+(z_{i-1})\wedge(z_i)\big)\ =0$。）任意域 F 的布洛赫群 $\mathcal{B}(F)$由布洛赫于 [1] 1978年提出，其动机源自这一观察。它定义为映射 $d\colon\ \mathbb{Z}[F]\to\Lambda^2(F^\times)$ 的核除以由二对数的五项关系生成的子群；该映射将 $[x]$ 映至 $x\wedge(1-x)$（当 $x\neq 0$ 时），而当 $x=0$ 时映至 0。由于外平方的具体定义会引出微妙的 2-挠与3-挠问题，文献中的精确定义略有差异（例如，是否要求对所有 x 都有 $x\wedge x=0$，还是只对 $x\wedge y=-y\wedge x$ 要求？），此外，是否要求 $d([0])$ 和 $d([1])$ 为零，还是只要求它们是挠元，以及所采用的五项关系版本，也会导致差异。我们暂且略过这一点，但之后会在讨论扩展布洛赫群时再回到这个问题。

从我们的角度来看，定义布洛赫群最清晰的动机是：对于完备双曲3-流形 M 的任意理想三角剖分 $\bigcup_i\Delta(z_i)$，其形状参数 $\{z_i\}$ 满足 $\sum_i(z_i)\wedge(1-z_i)\ =0$。（这是 NZ关系具有辛性质的结果，我们将在下一节中对此作更详细的解释。）因此，对于任意这样的三角剖分，我们都可以在布洛赫群中关联一个类 $\sum_i[z_i]$。但事实上，这个类与三角剖分无关，因为（除去形状在 2–3帕赫纳移动下可能退化为 0 或 1 这一事实所涉及的一些技术性问题）任意两个三角剖分都可以通过一系列“2–3帕赫纳移动”相互连接：在每次移动中，共享一个面的两个四面体被替换为由它们的两个非共享顶点和三个共享顶点中的两个所确定的三个四面体，而这五个四面体的形状参数的（带符号）和恰好是五项关系，并且不会改变 $\sum_i[z_i]$ 在布洛赫群中的类。因此，我们得到一个类 $[M]\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$。此外，根据布洛赫群的定义，函数 D 延拓为从 $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射；结合上一节的讨论，我们看到，D 在类 $[M]$ 上的取值等于 M 的体积。虽然我们不会使用这一点，但我们提到，根据 Suslin 的一个结果，任意域 F 的布洛赫群 $\mathcal{B}(F)$ 除去挠元后都与代数 K-群 $K_3(F)$ 同构，其中 D 在 $F=\mathbb{C}$ 情形下对应于从 $K_3(\mathbb{C})$ 到 $\mathbb{R}$ 的博雷尔调节映射。

另一方面，正如上一节末尾所述，双曲体积实际上应被视为取值于 $\mathbb{C}/4\pi^2\mathbb{Z}$ 的复化体积的虚部，因此我们希望将函数 $D(z)$ 替换为某种复值二对数版本。尽管它在单个自变量 z 处可能是多值的，但若将自变量属于布洛赫群的函数值作线性组合，模 $4\pi^2$ 意义下便成为单值函数。这正是从原始布洛赫群过渡到扩展布洛赫群的思路。第一个观察（参见 [38]）是，函数 $L(v):=\mathrm{Li}_2(1-e^v)$ 的导数为 $v/(e^{-v}-1)$；该导数是亚纯函数，且其留数属于 $2\pi i\mathbb{Z}$，因此 L 本身可提升为一个定义良好的函数，从 $\mathbb{C}\smallsetminus 2\pi i\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{C}/4\pi^2\mathbb{Z}$，并满足函数方程$L(v+2\pi in)\ =L(v)\ -2\pi in\log(1-e^v)$，其中 $n\in\mathbb{Z}$。现在我们引入复一维流形

$$\widehat{\mathbb{C}}\ =\ \big\{(u,v)\in\mathbb{C}^2\mid e^u+e^v\ =\ 1\big\}.$$

这是一个经由 $z=e^u=1-e^v$对 $\mathbb{C}^\times\smallsetminus\{0,1\}$ 的阿贝尔覆盖，其伽罗瓦群同构于 $\mathbb{Z}^2$。$\widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ 中定义的扩展布洛赫群（见 [21] 或 [39]）是映射$\widehat{d}\colon\ \mathbb{Z}[\widehat{\mathbb{C}}]\to\Lambda^2(\mathbb{C})$ 的核。其中，$\Lambda^2(\mathbb{C})$ 的定义只要求 $x\wedge y+y\wedge x\ =\ 0$（而非$\widehat{\qquad\qquad\qquad\qquad}$，后者因 2-挠元而更强）；$d$ 将 $[u,v]:=[(u,\ \ v)]\in\mathbb{Z}[\mathbb{C}]$映射到 $u\wedge v$，再除以五项关系的适当提升版本，即 $\mathbb{Z}$-张成的

集合 $\sum_{j=1}^{5}(-1)^j[u_j, v_j]$ 中满足 $(u_2, u_4) = (u_1 + u_3, u_3 + u_5)$ 且 $(v_1, v_3, v_5) = (u_5 + v_2, v_2 + v_4, u_1 + v_4)$ 的元素。存在一个从 $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ 到 $\mathbb{C}/4\pi^2\mathbb{Z}$ 的扩展调节子映射，其定义为将 $\sum[u_j, v_j]$ 映射到 $\sum \mathcal{L}(u_j, v_j)$；其中 $\mathcal{L}(u, v) = L(v) + \frac{1}{2}uv - \frac{\pi^2}{6}$，可以验证它在提升的五项关系下模 $4\pi^2$ 为零。对于任意子域 $F \subset \mathbb{C}$，例如嵌入数域，也可以定义 $\widehat{\mathcal{B}}(F)$：将 $\mathbb{C}$ 替换为由满足 $e^u = 1 - e^v \in F$的配对 (u, v) 构成的子集 F即可。

最后需要指出的是，我们不禁会思考，仅仅研究双曲三维流形，在多大程度上能够帮助我们理解$\mathbb{Q}$的整个布洛赫群。例如，$\mathcal{B}$（$\mathbb{Q}$）中的每个元素，是否都能表示为某些双曲三维流形的布洛赫群不变量的有理线性组合？更基本地说，每个至少具有一个非实嵌入的数域，是否都能作为某个双曲三维流形的迹域出现？后一个问题是 Walter 在 [29]中明确提出的。

4. Symplectic properties

回顾起来，方程（3）及后文所描述的辛性质，以及论文 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{Z}$ 后续论文中给出的精化，[28], 最终成为这些论文中最重要的方面。它们既促成了势函数的存在，也促成了我们将在下一节介绍的量子化全部应用，以及第 6节所述的许多与数论的联系。

定义一个 $N \times 2N$矩阵 $H = (A\,B$，其行构成由边方程（1）张成的格的 $\mathbb{Z}$-基，并在每个尖点处加入一个“外围”方程（子午线方程和经线方程在（2）中的互素线性组合）。那么上述 [31] 中引用的结果表明，AB^t 是对称的，并且 H 的秩为 N，这意味着其 $2N$ 列生成 $\mathbb{Q}^N$。综合这两个结论，等价地说，H 可以扩展为一个 $2N \times 2N$ 矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$，属于 $\mathrm{Sp}_{2N}(\mathbb{Q})$，也就是说 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{smallmatrix}\right)$。

但事实上，$2N$ H 的列张成格 $\mathbb{Z}^N$，这等价于说，H 可以补全为一个在 $\mathbb{Z}$上的 $2N \times 2N$ 辛矩阵。（我们将这样的矩阵称为半辛。）这源于 Walter 在 [28]中定义的链复形。具体而言，对于任意单形 Δ，令 J_Δ 为由 e_1、e_2、e_3 生成的阿贝尔群（对应于成对的对边），并满足关系 $e_1 + e_2 + e_3 = 0$。这是一个秩为 2 的自由阿贝尔群，带有由 [28, Sec.4]给出的规范非奇异斜对称双线性形式。

$$\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = \langle e_3, e_1\rangle = -\langle e_2, e_1\rangle = -\langle e_3, e_2\rangle = -\langle e_1, e_3\rangle = 1\,. \tag{11}$$

与理想三角剖分相关联的 Neumann 链复形定义为

$$0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\alpha} C_1 \xrightarrow{\beta} J \xrightarrow{\beta^*} C_1 \xrightarrow{\alpha^*} C_0 \longrightarrow 0\,. \tag{12}$$

这里 C_0 和 C_1 分别是无向 0-单形和 1-单形（尖点和边）上的自由阿贝尔群，而 $J = \bigoplus_{i=1}^{N} J_{\Delta_i}$（对所有 3-单形或四面体求和），同时 α将任意尖点映射为其关联边之和，任意边的 J_Δ-分量是 β 中与该边相重合的边之和，而 Δ，α^* 和 β^* 分别是 α 和 $\mathcal{B}$ 关于 C_i 上显然的标量积以及 J上的辛形式的对偶。Walter 证明了（[28], 定理 4.1），序列（12）是一个链复形，并且至少在与 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$张量化之后，除了中间项外均为正合；在中间项处，同调是 h 秩为 2 的模之和

同构于 $H_1(T_i^2)$ （$i = 1$，……， h）。注意，如果我们为 β选择显然的基，并为 $R =$ 选择由对每个 R' R''取基（ C_1， J）所得到的基，那么映射 e_1由矩阵 e_2（ J_{Δ_j}）精确给出，其中该矩阵按（1）定义。证明 H是半辛的其余部分，可由刚才引用的定理轻易推出，留给读者完成。

对此我们有两点说明。第一， [28]中对链复形的构造以及关于其同调的论述，同样适用于具有任意亏格边界分支的三维流形（因此 C_0 的顶点不一定是尖点），而且当然也不需要双曲结构。第二， [31] 中的粘合方程和 [28] 中的辛性结果，已在 [20]中推广到任意 PGL$_n$-表示。

半辛矩阵也出现在其他背景中，例如与 Nahm 关于某些 q-超几何级数模性的猜想有关；它们还带来了对布洛赫群的一种新描述。这两个主题将在第 6 节中作更详细的讨论。

5. 量子化

Walter 关于三维三角剖分组合学的研究，其影响最深远的成果或许是将辛结构应用于量子化。

回忆一下，单个四面体 Δ 的 J_Δ 定义为阿贝尔群 $\langle e_1, e_2, e_3 \mid e_1 + e_2 + e_3 = 0\rangle$，其辛结构为（11）。每个理想四面体 Δ 对应的空间 $J_\Delta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 上的这一辛结构，导出了与参与 2–3 Pachner 变换的 5 个四面体 $\Delta_1, \dots, \Delta_5$ 相关联的 10 维辛空间 $\oplus_{j=1}^5 J_{\Delta_j} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 中的一个整数拉格朗日子空间。粗略地说，该拉格朗日子空间记录了五个四面体的角度之间的线性关系，其中 Pachner 变换的每条内部边周围角度的带符号和为零。

这一拉格朗日子空间的量子化曾多次出现在数学和物理学文献中，以不同的名称为人所知，并在二维、三维和四维中导出了有趣的量子不变量。下面对此作简要讨论。在二维情形中，Kashaev 以及独立开展研究的 Fock-Goncharov [25, 13, 12] 利用上述 NZ-辛结构，研究理想三角剖分曲面在 2–2 Pachner 变换下的坐标变化。他们发现，相应的交换代数同构可以用簇代数来描述，从而得到两组对偶坐标（即所谓的 $\mathcal{X}$-坐标和 $\mathcal{A}$-坐标）；这些坐标的量子化导出了所谓托勒密群胚的一个表示，特别是带 puncture 曲面的映射类群以及辫群的表示。这些表示总是无限维的（因为不存在满足关系 $AB - BA = I$的有限阶方阵 A 和 B），希尔伯特空间通常是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 对于某个 n，相应的理论通常称为量子 Teichm¨uller 理论。

再提升一个维度，三维理想三角剖分的 $\mathcal{X}$坐标不过是理想四面体的形状，而 $\mathcal{A}$坐标则是理想四面体的托勒密变量。后者是将非零复数赋予理想三角剖分的边（其中相互识别的边赋予同一个变量），并满足一组二次方程：三个对边对的托勒密变量分别为（a、 b）、（b、 d）和（e、 f），它们的带符号和 $ab + cd = ef$ （适当地）……。事实证明，形状的NZ粘合方程等价于托勒密方程

（例如参见 [15]），这不仅在理论上具有意义，在实践中也是如此。理想三角剖分的形状和托勒密变量的量子化使用了两个要素：Kashaev [26]的运动学核，以及满足积分五边形恒等式的特殊函数Faddeev量子对数函数。根据Kashaev的观点，运动学核不过是上述NZ拉格朗日子流形的量子化。这一量子化的结果是产生了理想三角剖分三维流形的拓扑不变量；这些不变量是割开空间$\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$中的解析函数，可用有限维态积分表示，其被积函数通常由理想三角剖分的组合数据决定，即其Neumann–Zagier矩阵。这一通常称为量子双曲几何的构造已由Kashaev公理化，其输入包括理想三角剖分的组合数据，以及一个带有固定高斯函数、傅里叶核和量子二对数的自对偶局部紧阿贝尔群。由此进一步得到三维流形的解析不变量，其中两个例子是Kashaev–Luo–Vartanov不变量 [27] 和亚纯3D-指标 [17],，相应的局部紧阿贝尔群为$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$和 $S^1 \times \mathbb{Z}$。值得注意的是，Andersen–Kashaev态积分被猜想是复Chern–Simons理论的配分函数（即具有复规范群的Chern–Simons理论）。目前尚不知道后者满足SU(2) Chern–Simons理论所满足的割开与粘合论证，因此，除了态积分之外，人们还没有复Chern–Simons理论的先验定义，也没有明确的理由说明为什么无限维路径积分会局部化为有限维路径积分。

最后，再升高一个维度，参与2–3 Pachner 变换的五个理想四面体构成一个单个4维单形（五胞体）的边界。（请原谅我们使用希腊语。）这为NZ结构和运动学核提供了4维解释；借助复单位根，Kashaev得以构造一个在4维Pachner 变换下保持不变的张量不变量，从而构造出单位根处闭三角剖分4-流形相应的拓扑不变量 [26]。至此，我们关于2维、3维和4维中的运动学核的讨论就结束了。

在另一个方向上，数学物理学家利用超对称理论之间的对应原理，提出了与三维流形相关的各种 q级数集合的意外构造，这些级数具有整数系数。其中最引人注目的或许是Dimofte–Gaiotto–Gukov三维指标 [8, 7], ；其中所涉及的 q级数在本例中由整数对编号，并根据适当理想三角剖分的NZ矩阵以显式方式定义，其系数统计某个超对称理论中BPS态的数量。随后有人证明 [16]，该DGG三维指标是带尖点双曲三维流形的拓扑不变量；此外，它还被扩展为一个二元亚纯函数（当三维流形的边界是单个环面时），其洛朗系数就是DGG指标 [17]。

NZ方程在量子拓扑中出现的另一个截然不同的场合，是与 Kashaev 不变量及 Kashaev 著名的体积猜想有关。Kashaev 不变量 $\langle K \rangle_n$ 是一种可计算的代数数，由 Kashaev [23] 于 1995 年运用与上述讨论相似的量子拓扑思想，为任意纽结 K 和任意正整数 n 所定义；后来，H.和J. Murakami 又以所谓的带色琼斯多项式给出了另一种定义。体积猜想 [24] 指出

当 M 为双曲纽结时，$|\langle K\rangle_n|$ 的对数渐近等于 $n/2\pi$ 乘以纽结补空间 $M = S^3 \setminus K$ 的双曲体积。这是双曲几何与三维量子拓扑之间一个非常令人惊讶的联系，它引发了大量后续研究，并由多位作者结合复 Chern-Simons 理论以多种方式加以深化。特别地，有人提出了如下猜想性强化 [14, 11]

$$\langle K\rangle_n \;\sim\; n^{3/2}\, e^{\mathrm{Vol}_{\mathbb{C}}(K)n/2\pi i}\, \Phi^K\Big(\frac{2\pi i}{n}\Big) \tag{13}$$

关于 $1/n$ 的所有阶渐近展开，其中 $\Phi^K(h)$ 是一个关于 h 的幂级数，其系数为代数系数，并且在任何具体示例中都可以计算到任意阶，例如

$$\Phi^{4_1}(h) \;=\; \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\Big(1 + \frac{11}{72\sqrt{-3}}\,h + \frac{697}{2\,(72\sqrt{-3})^2}\,h^2 + \frac{724351}{30\,(72\sqrt{-3})^3}\,h^3 + \cdots\Big). \tag{14}$$

对于 4_1（8 字形）纽结。在 [9], 中，针对任意纽结构造了该幂级数的一个明确候选者：一个形式高斯积分，其被积函数根据 M的理想三角剖分的 NZ 数据定义。除了首项之外，目前尚不清楚其中构造的级数是否为拓扑不变量（即与三角剖分的选择无关），不过这当然可以由猜想渐近公式（13）以该级数成立而推出。在后续论文 [10], 中，研究者仍以 NZ 数据为关键要素，将这一构造扩展为：对于任意 $\Phi^K_\alpha(h)$，给出可明确计算的幂级数 $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，其中 $\Phi^K_0 = \Phi^K$；人们预计，这正是量子模性猜想为纽结所预言的幂级数，我们将在下一节讨论这一猜想。

最后值得注意的是，NZ 方程及其辛性质导出了形状变量的显式量子化，即将每个 z、z' 和 z'' 替换为彼此适当对易的算子。Dimofte [6], 完成了这一工作，他定义了粘合方程的量子化版本，即所谓的量子曲线；人们预期该量子曲线会湮灭复Chern–Simons理论的配分函数，并最终与量子不变量的渐近行为相关。

6. Connections to number theory

论文 [31] 及其续篇 [28] 促成或引发了纯数论以及拓扑学领域中的若干有趣发展。在最后一节中，我们将介绍其中的一些。

Dedekind ζ 函数的值与高阶 Bloch 群

双曲流形的一个重要子类 $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ 是算术双曲流形，其中 Γ或者是 Bianchi 群 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$（其中某个虚二次域 F 上的单位群，更一般地说，是数域上的四元数代数中的单位群 F，且该数域的次数更高 $n = r_1 + 2$，并且除复共轭外只有一个复嵌入。在这两种情况下，经典结果（第一种情况下早在 1919 年就由 Humbert 证明）表明，M 的体积是 π 在 $s = 2$ 处的 Dedekind ζ 函数 $\zeta_F(s)$ 的值的一个简单倍数（为 F，即某个幂乘以判别式的平方根）。这一结果以及第2 节讨论的体积公式立即推出，该 ζ 值是 Bloch-Wigner 二对数在代数自变量处的若干值的线性组合的倍数。这一结论在 [35] 中被观察到，并且其中还将其推广到了 $\zeta_F(2)$ 的值（对于

任意数域 F，其中 $[F\colon \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$ 对于 $r_2 \geq 1$ 的任意取值。（如果 $r_2 = 0$，那么著名的Klingen-Siegel定理断言， $\zeta_F(2)$ 是 $\pi^{2r_1}\sqrt{D_F}$ 的有理倍数。）现在，群 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ 作为 $(\mathbb{H}^2)^{r_1} \times (\mathbb{H}^3)^{r_2}$ 的离散等距变换群作用，其商空间具有有限体积；此外，还有四元数群 Γ 作用于 F 上，并在 $(\mathbb{H}^3)^{r_2}$ 上自由且离散地作用，在这两种情况下，商空间的体积都是 $\zeta_F(2)$ 的一个初等倍数。这给出了一个“多重三维双曲”流形 $M = (\mathbb{H}^3)^{r_2}/\Gamma$，其体积与 $\zeta_F(2)$ 成正比。一个颇为有趣的引理表明，任何这样的流形都可以分解为有限个 r_2 重积的双曲四面体，并且除边界外彼此不相交；由此可知，对于任意数域， $\zeta_F(2)$ 都可以表示为 r_2 重积的 Bloch-Wigner 二对数在代数自变量处取值的线性组合，从而以一种出人意料的方式推广了 Klingen-Siegel定理。

与三维双曲几何的联系仅适用于 Dedekind ζ 函数在 $s = 2$处的取值，但这也表明，对$\zeta_F(m)$，当 $m > 2$ 时，也可能存在类似的论断，且可用 m阶多对数函数 $\mathrm{Li}_m(z$来表达。大量数值实验得出了一个具体猜想，认为情况确实如此；实验还促成了“高阶 Bloch 群” $\mathcal{B}_m(F$的定义（起初高度推测性，如今则有更多理论依据支持）。这些群经 $\mathbb{Q}$ 张量化后应与高阶代数 K-群$K_{2m-1}(F$同构，并且应能用多对数表达 Borel 调节子。（综述请参见 [38]。）这个猜想至今已有三十多年历史，Beilinson、Deligne、de Jeu、Goncharov、Rudenko 等人对此进行了广泛研究，其中 $m = 3$和 $m = 4$ 的情形现已基本解决。

数域圆分扩张中的单位

如上一节所述，对 Kashaev 不变量的分析以及下文讨论的体积猜想的模推广，促成了与双曲纽结相关的某些幂级数 $\Phi_\alpha^K(h)$ 的定义，以及一个在具体情况下可以通过数值计算得到的数 $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。对简单纽结和简单有理数 α 进行的大量数值计算表明，这个幂级数不仅具有代数系数，而且（除以单位根和纽结的迹域 F_K 中一个数的平方根为因子，且该平方根与 α 无关之外）其 n 次幂属于 $F_{K,n}[[h]]$，其中 n 是 α 的分母，而 $F_{K,n} = F_K(e^{2\pi i\alpha})$ 是 F_K 的第 n 个圆分扩张。等价地，$\Phi_\alpha^K(h)$ 本身是 $F_{K,n}[[h]]$ 中的一个幂级数与 $F_K^{\times}$,$_n$ 中某个元素的 n 次方根的乘积。此外，在所研究的每个案例中，后一个因子都被证明是 $F_{K,n}$ 的一个单位的 n 次方根，而不仅仅是其中的一个非零数；并且对于具有相同布洛赫群类的“姐妹结”（例如 5_2 和 $(-2, 3, 7)$-椒盐结），这两个结的该因子相同，尽管其余幂级数完全不同。这促使我们与 Frank Calegari 一同提出猜想，后来又证明 [2],：对于任意数域的圆分扩张，存在一类与其布洛赫群中的元素相关联的规范元素类，无论这些域是否源自拓扑学。具体而言，对于任意数域 F 以及 F 的布洛赫群中的任意元素 ξ，都可以规范地关联 $U(F_n)/U(F_n)^n$ 中的元素，对每个 n 均如此；其中 $U(F_n)$ 表示 F 的第 n 个圆分扩张 F_n 的单位群（更准确地说，是某个 S-单位群，其中 S 取决于 ξ，但与 n 无关）。实际上，给出了两种截然不同的构造：一种以 $\mathcal{B}(F)$ 中的元素为基础，另一种以 $K_3(F)$ 中的元素为基础；而 [2] 中宣布的正在进行的工作

表明，对于任意 $m > 2$，将会推广到 $\mathcal{B}_m(F)$ 和 $K_{2m-1}(F)$。以布洛赫群为基础的构造相当简单，尽管证明它确实给出单位，并且除相差 n 次幂外与所有选择无关，这一证明很长：如果 ξ 由 $\sum[z_i] \in \mathbb{Z}[F]$ 表示，那么数 $\prod D_\zeta(z_i^{1/n})$ 是 F_n 中的一个 n 次幂与一个 S-单位的乘积，而这个单位正是我们所要寻找的单位。这里，ζ 是一个本原 n 次单位根，而 $D_\zeta(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\zeta^k x)^k$ 是“循环量子二对数”函数。根据 Kashaev、Mangazeev 和 Stroganov 的一项结果，该函数满足经典二对数函数的五项关系的一个类似形式。

q-级数与 Nahm 猜想

前文所述关于单位的研究带来了一个出人意料的结果：证明了数学物理学家 Werner Nahm 所提出的一个猜想的一半。该猜想预言，布洛赫群与某些q-超几何级数的模性之间存在极其惊人的联系。这类“Nahm 和”的最简单情形是无穷级数

$$F_{a,b,c}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}an^2+bn+c}}{(q)_n} \qquad (a,b,c \in \mathbb{Q},\ a>0), \tag{15}$$

其中 $(q)_n = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)$ 是所谓的量子阶乘。当 (a,b,c) 为 $(2,0,-\frac{1}{60})$ 或 $(2,1,11\ 60)$ 时，根据著名的 Rogers-Ramanujan 恒等式，该函数在 τ（其中 $q = e^{2\pi i\tau}$）中是模的；Euler、Gauss 等人的经典结果还证明了少数其他情形。 q-超几何级数（即相邻项之差由 q 和 q^n的固定有理函数决定的无穷和）同时又是模函数的情况极为罕见。事实上，对于特殊级数 (15)，这种情况仅在七组三元组 (a,b,c) 中出现，正如 Nahm 猜想所预言，并在 [36] 中得到证明。Nahm 提出了一个一般性问题：多维 q-超几何级数何时可能是模的？他受到源自顶点算子代数特征标的例子的启发，并以布洛赫群的概念为基础，发现了一个可能的答案。具体而言，他将 (16) 推广为

$$F_{a,b,c}(q) = \sum_{n_1,\dots,n_N \geq 0} \frac{q^{\frac{1}{2}n^t a n + b^t n + c}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_N}} \tag{16}$$

对于任意 $N \geq 1$，其中 a 现为一个系数为有理数的正定对称 $N \times N$ 矩阵， b 是 $\mathbb{Q}^N$ 中的一个向量，而 c 是一个有理数。目前仍没有完整的“当且仅当”猜想，能够准确预测这些 Nahm 和何时为模函数，但 Nahm 对必要条件提出了一个精确猜想，并对充分条件提出了一个部分猜想。第一部分已在 [2], 中得到证明，而逆方向的正确表述及其证明仍是活跃的研究课题。

Nahm 发现的模性判据基于他的观察：对于方程组的任意解 $(z_1, \dots, z_N)$

$$1 - z_i = \prod_{j=1}^{N} z_j^{a_{ij}} \qquad (i = 1, \dots, N), \tag{17}$$

元素 $[z_1] + \cdots + [z_N]$ 属于 $\mathbb{Z}[\mathbb{C}]$ 的 $\mathcal{B}(\mathbb{C})$。这是 a对称性的直接推论，因为 $\sum_i (z_i) \wedge (1 - z_i) = \sum_{i,\ j} a_{ij}(z_i) \wedge (z_j) = 0$。（这与

第 4 节中针对 Neumann-Zagier 方程的相应论断所使用的论证相同，并且正如下面所讨论的，该论证更普遍地适用于所有半辛矩阵。）Nahm 猜想的“仅当”方向随后表明，只有当在 Nahm 方程的唯一解中所有 $z_i \in (0,\ 1)$ 时，$F_{a,\ b,\ c}(q)$ 才可能是模的；对于该解，布洛赫群中的这个元素必须为零。证明见 [2], ，其中同时使用了关于由布洛赫元素产生的单位的结果（如上所述），以及我们两人分别发表的、关于单位根附近 Nahm 和渐近分析的研究。

半辛矩阵与布洛赫群

在第 4 节末尾，我们看到 NZ方程如何导出一个“半辛矩阵”，即一个辛矩阵的上半部分 $H = (A\ B)$，其中的 $2N \times 2N$ 辛矩阵（$\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}$）定义在 $\mathbb{Z}$上。对于任意这样的矩阵，我们关联以下多项式方程组

$$\prod_{j=1}^{N} z_j^{A_{ij}} \ = \ (-1)^{(AB^t)_{ii}} \prod_{j=1}^{N} (1-z_j)^{B_{ij}} \qquad (i = 1, \dots, N)\,. \tag{18}$$

这与拓扑情形中的原始 NZ 方程完全类似，可能除了符号不同；但我们使用 SnapPy [5] 检验了数千个例子，确认这就是正确的符号，并且或许可以利用 [28]中的“奇偶条件”证明这一点。式（18）的另一个特殊情形是 Nahm 方程（17），至少当矩阵 a 为整数矩阵且各项为偶数时，此时半辛矩阵为（$1\ a$），而完整的辛矩阵为（$\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$）。

对于 (z 18) 的任意解，元素 $2\sum_{j=1}^{N}[z_j]$ 根据与 Nahm 和相同的论证，属于通常的布洛赫群。实际上，我们可以除以 2，并通过设定 $[H, z]$ 将其提升为扩展布洛赫群中的一个元素

$$[H, z] \ = \ \sum_{j=1}^{N} [u_j, v_j] \ + \ [\xi, \xi'] \ + \ [-\xi,\ \xi' - \xi + \pi i]\,, \tag{19}$$

其中，u_j和 v_j分别是 z_j和 $1 - z_j$的任意对数选择；对于将 H补全为完整辛矩阵的任意补全方式 $(C\ D)$，ξ定义为 $\frac{1}{\pi}(Au - Bv)^t(Cu - Dv)$；$\xi'$是 $1 - e^{\xi}$的任意对数选择。它属于 d 的核这一事实：$\mathbb{Z}[\widehat{\mathbb{C}}] \to \Lambda^2(\mathbb{C})$，以及它在模去扩展五项关系后的像与所有选择无关这一事实（至少在由这些 z生成的域的布洛赫群中，模去 8-挠元后如此），都可以通过直接计算加以验证；相关计算概要见 [19], ，其中还给出了一个更精确的形式，可以消除挠元歧义。

我们有以下五种针对成对对象的等价关系。每种关系都源于对拓扑情形中的选择作出改变，而这些改变不会改变该类：

- 稳定性：将 N 增加 $N+1$，将 $H = (A\ B)$ 中的 A 和 B 分别替换为与 (1) 和 (0) 的直和，并令 $z_{N+1} = 1$。在拓扑情形中，这对应于在三维流形三角剖分中添加一个退化单形。

- 改变方程：在左侧乘以 H GL 的一个元素$_N(\mathbb{Z})$，而不改变 z’s。这相当于以可逆的方式，用它们的乘法组合替换 N 关系（18）。

- 重新编号：在右侧乘以一个 H 置换矩阵，并用同一个矩阵对 $N\times N$'s 进行置换，这对应于对三角剖分中的单形重新编号。
- 新的形状参数：对于每个 $j=1,\ldots\ldots,N$，将 $N\times 2$ 矩阵 $(A_j\,B_j)$（其中 A_j 和 B_j 分别表示 A 和 B 的第 j 列）乘以 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的三阶元素 $\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&-1\end{smallmatrix}\right)$ 的某个幂，并相应地将 z_j 替换为 z_j、$z'_j=1/(1-z_j)$ 或 $z''_j=1/(1-z_j)$。
- 代数 2–3 Pachner 移动：移除 A 的两列以及 B 的相同两列，并将其替换为 3 个新的、特定的 $\mathbb{Z}$线性组合，同时将 N 替换为 $N+1$，并以一种使相应的 z_j 变化成为五项关系的方式，将其中两个 $[H,z]$ 变为另外三个。对应于 Nahm 和（16）的特殊情形下，显式公式最初由 Sander Zwegers 在一场未发表的 2011 年会议报告中写出，随后在 [9] 的公式 (3-27) 中给出了任意辛矩阵的情形。这相当于将 H 稳定化三次，然后在左侧乘以 $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ 的一个特定元素，接着再进行三次非稳定化。

这为我们提供了一个映射到扩展布洛赫群的新阿贝尔群，即由上述所有对 $(H,\ z)$ 构成的集合，再对这些等价关系取商，并以直和定义加法。事实上，该映射是一个同构，这意味着布洛赫群中的任意元素都可以由某个半辛矩阵及其相应广义 Neumann-Zagier 方程的解来实现，并且任意五项关系都可以提升为源自代数 2–3 Pachner 变换的关系。第 6.1 节的 [19] 对这一点给出了更完整的讨论（完整细节将在后文给出），而同一论文的第 6.3 节展示了如何将类似 Nahm 和的 q-级数与任意半辛矩阵联系起来。

从 Kashaev 不变量到量子模形式

Nahm 猜想已经凸显了半辛矩阵与模性问题之间的联系，但双曲三流形与模群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 之间还存在其他更为直接的联系，下面我们将对此进行描述。

在第5 节末尾，我们讨论了卡谢耶夫体积猜想及其精化（13）。基于数值计算，[37] 将这一陈述推广为一个带有强烈模形式特征的猜想性渐近公式。为陈述该公式，我们先指出，纽结 K 的 Kashaev 不变量 $\langle K\rangle_n$ 可以推广为一个函数 $J^K:\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$，其在 $-1/\pi$ 处对任意 $n\geq 1$ 的取值为 $\langle K\rangle_n$，并且是 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$-等变的。于是，（13）的猜想性推广表述为：

$$J^K\Big(\frac{an+b}{cn+d}\Big)\ \sim\ (cn+d)^{3/2}\,e^{\mathrm{Vol}_{\mathbb{C}}(K)(n+d/c)/2\pi i}\,\Phi^K_{a/c}\Big(\frac{2\pi i}{c(cn+d)}\Big)\,J^K(n)\qquad(20)$$

对于每个矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，当 n 沿着整数或具有有界分母的有理数趋于无穷时，其中（13）是 $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$且 n 为整数的特殊情形。这里，$\Phi^K_\alpha(h)$ 对于 $\alpha\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是一个幂级数，猜想它就是在 [10]中构造并于第5节末讨论的那个幂级数。

在 [19], 中，这一模性猜想通过实验针对几个纽结验证到了许多项，并达到了很高的精度；随后它又沿着几个不同方向逐步得到改进，最终的表述是：存在一个由全体矩阵组成的矩阵 $\mathbf{J}^K$ ，其元素是取值于$\mathbb{Q}$的函数，定义在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 上（广义 Kashaev 不变量），并且猜想其模性性质远胜于原来的标量函数 J^K。明确地说，(20) 可提升为一个类似的陈述，其中以矩阵$\mathbf{J}^K$ 替代 J^K ，而完备形式幂级数$\widehat{\Phi}^K_{a/c}(h) = e^{\mathrm{Vol}_{\mathbb{C}}(K)/2\pi i c^2 h}\,\Phi^K_{a/c}(h)$ 则由完备形式幂级数的矩阵 $\widehat{\mathbf{\Phi}}^K_{a/c}(h)$ 替代，该矩阵通过右乘作用。矩阵的行和列由有界抛物平坦联络作为索引；等价地，索引 0 对应于（平凡联络），索引 $1,\dots,r$ 对应于纽结补空间的一个三角剖分的 NZ 方程的解，原来的标量值函数 J^K 和 Φ^K 分别是$\mathbf{J}^K$ 和 $\mathbf{\Phi}^K$的 $(0,1)$ 与 $(1,1)$ 个元素。真正全新的方面在于：以矩阵替代原来的标量函数后，我们得到一个关于 h 的完备形式幂级数矩阵；该矩阵（猜想中如此，这个故事中的其他内容也同样如此）可延拓为正、负实轴上的实解析函数，事实上还可延拓为两个割平面 $\mathbb{C}\smallsetminus(-\infty,0]$ 和 $\mathbb{C}\smallsetminus[0,\infty)$ 上的全纯函数。这一发现源于将取值为矩阵的 q-级数与纽结 [18], 联系起来的可能性，并由此产生了“全纯量子模形式”这一新概念；后来人们发现，它还出现在许多其他情形中，包括各种已知的模对象，例如拟模形式，或满模群上奇权的 Eisenstein 级数。

最后，我们要提到，新的广义 Kashaev 不变量具有优美的算术性质，推广了这样一个已知性质：[22] 原始 Kashaev 不变量属于所谓的 Habiro 环 $\mathcal{H} = \varprojlim \mathbb{Z}[q]/(q)_n$。 [19] 和 [18] 的结果表明，对于任意数域 F，都应存在一个与之相关联的 Habiro 环 $\mathcal{H}_F$，广义 Kashaev 不变量取值于其中，并且该环按 F的布洛赫群分次。（后一性质在经典情形中是不可见的，因为 $\mathcal{B}(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}=\{0\}$。）我们目前正与 Peter Scholze 共同研究这一问题，并且已经为 $\mathcal{H}_F$找到了一个候选对象，还将 [2] 的代数单位部分提升到了具有类似 Habiro 环性质的形式幂级数中。

References

[1] Spencer Bloch。二对数函数在代数 KK理论和代数几何中的应用。在国际代数几何研讨会论文集（京都大学，京都，*1977*年），第103–114页。纪伊国屋书店，东京，1978年。[2] Frank Calegari、Stavros Garoufalidis 和 Don Zagier。布洛赫群、代数K理论、单位与 Nahm 猜想。2017年预印本，arXiv:1807.00957。[3] Abhijit Champanerkar。双曲三流形的 *A*-多项式与 *Bloch*不变量。ProQuest有限责任公司，密歇根州安娜堡，2003年。学位论文（博士）——哥伦比亚大学。[4] Daryl Cooper、Marc Culler、Henry Gillet、Daryl Long 和 Peter Shalen。与三维流形的特征簇相关的平面曲线。《数学发明》，118(1)：47–84，1994年。[5] Marc Culler、Nathan Dunfield 和 Jeffrey Weeks。SnapPy：用于研究三维流形拓扑学的计算机程序。可访问http://snappy.computop.org （30/01/2015）。[6] Tudor Dimofte。陈-西蒙斯理论中的量子黎曼曲面。*Adv. Theor. Math. Phys.*，17(3)：479–599，2013年。[7] Tudor Dimofte、Davide Gaiotto 和 Sergei Gukov。三维流形与三维指标。*Adv. Theor. Math.Phys.*，17(5)：975–1076，2013年。

[8] Tudor Dimofte、Davide Gaiotto 和 Sergei Gukov。以三维流形标记的规范理论。《数学物理通讯》，325(2)：367–419，2014年。[9] Tudor Dimofte 和 Stavros Garoufalidis。粘合方程的量子内容。《几何与拓扑》，17(3)：1253–1315，2013年。[10] Tudor Dimofte 和 Stavros Garoufalidis。量子模性与复 Chern-Simons 理论。《通讯：数论与物理》，12(1)：1–52，2018年。[11] Tudor Dimofte、Sergei Gukov、Jonatan Lenells 和 Don Zagier。复规范群上的微扰陈-西蒙斯理论的正合结果。《通讯：数论与物理》，3(2)：363–443，2009年。[12] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov。局部系统的模空间与高等 Teichm¨uller 理论。《高等科学研究所数学出版物》，(103)：1–211，2006年。[13] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov。量子二对数与量子簇簇的表示。《数学发明》，175(2)：223–286，2009年。[14] Stavros Garoufalidis。陈-西蒙斯理论、解析延拓与算术。《越南数学学报》，33(3)：335–362，2008年。[15] Stavros Garoufalidis、Matthias Goerner 和 Christian Zickert。三维流形表示的托勒密域。《代数与几何拓扑》，15(1)：371–397，2015年。[16] Stavros Garoufalidis、Craig Hodgson、Hyam Rubinstein 和 Henry Segerman。1-高效三角剖分与带尖点双曲三维流形的三维指标。《几何与拓扑》，19(5)：2619–2689，2015年。[17] Stavros Garoufalidis 和 Rinat Kashaev。三维指标的亚纯延拓。《数学科学研究》，6(1)：第8篇，34页，2019年。[18] Stavros Garoufalidis 和 Don Zagier。纽结及其相关的 q-级数。2023年预印本。[19] Stavros Garoufalidis 和 Don Zagier。纽结、微扰级数与量子模性。2021年预印本，arXiv:2111.06645。[20] Stavros Garoufalidis 和 Christian Zickert。PGL($n,\mathbb{C}$)-粘合方程的辛性质。《量子拓扑》，7(3)：505–551，2016年。[21] Sebastian Goette 和 Christian Zickert。扩展布洛赫群与切格-陈-西蒙斯类。《几何与拓扑》，11：1623–1635，2007年。[22] Kazuo Habiro。纽结和整同调球的量子 $\mathfrak{sl}_2$ 不变量。载于《纽结与三维流形不变量》（京都，2001年），《几何与拓扑专著》卷4，第55–68页（电子版）。《几何与拓扑出版物》，考文垂，2002年。[23] Rinat Kashaev。由量子二对数得到的链环不变量。《现代物理学快报A》，10(19)：1409–1418，1995年。[24] Rinat Kashaev。由量子二对数得到的纽结双曲体积。《数学物理学快报》，39(3)：269–275，1997年。[25] Rinat Kashaev。Teichm¨uller 空间的量子化与量子二对数。《数学物理学快报》，43(2)：105–115，1998年。[26] Rinat Kashaev。四维拓扑量子场论的一个简单模型。载于《2016 MATRIX年鉴》，《MATRIX图书系列》卷1，第277–286页。施普林格，Cham，2018年。[27] Rinat Kashaev、Feng Luo 和 Grigory Vartanov。赋形三角剖分上的图拉耶夫-维罗型拓扑量子场论。《亨利·庞加莱年鉴》，17(5)：1109–1143，2016年。[28] Walter Neumann。三角剖分组合学与双曲三维流形的陈-西蒙斯不变量。载于《Topology ’90》（俄亥俄州哥伦布，1990年），《俄亥俄州立大学数学研究所出版物》卷1，第243–271页。de Gruyter，柏林，1992年。[29] Walter Neumann。希尔伯特第三问题与三维流形不变量。载于《Epstein 生日文集》，《几何与拓扑专著》卷1，第383–411页。《几何与拓扑出版物》，考文垂，1998年。[30] Walter Neumann。扩展布洛赫群与切格-陈-西蒙斯类。《几何与拓扑》，8：413–474，2004年。[31] WalterNeumann 和 Don Zagier。双曲三维流形的体积。《拓扑学》，24(3)：307–332，1985年。[32] William Thurston。三维几何与拓扑。第1卷，《普林斯顿数学丛书》第35卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1997年。Silvio Levy 编，http: //msri.org/publications/books/gt3m。

[33] Stephan Tillmann。边界斜率与对数极限集。拓扑学，44(1):203–216，2005。[34] Tomoyoshi Yoshida。双曲三维流形的 η不变量。《数学发明》，81(3):473–514，1985。[35]Don Zagier。双曲流形与戴德金ζ函数的特殊值。《数学发明》，83(2):285–301，1986。[36] Don Zagier。二对数函数。载于数论、物理与几何前沿 *II*，第3–65页。施普林格，柏林，2007。[37] Don Zagier。量子模形式。载于数学量子，第11卷克莱数学会议录，第659–675页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010。[38] Don Zagier与Herbert Gangl。经典与椭圆多重对数以及 L级数的特殊值。载于代数循环的算术与几何（班夫，阿尔伯塔省，*1998*），第548卷北约科学丛书*C*辑：数学与物理科学，第561–615页。克鲁维尔学术出版社，多德雷赫特，2000。[39] Christian Zickert。扩展布洛赫群与代数 K理论。《纯粹与应用数学杂志》，704:21–54，2015。

International Center for Mathematics, Department of Mathematics, Southern Univer-sity of Science and Technology, Shenzhen, China
http://people.mpim-bonn.mpg.de/stavros电子邮箱地址：stavros@mpim-bonn.mpg.de

Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany and International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy电子邮箱地址：dbz@mpim-bonn.mpg.de